République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par

Salsabil BENHEMIDA

Sur le principe variationnel d'Ekeland dans les espaces métriques partiels

Soutenu publiquement le 23/06/2024, devant le jury composé de

Mohamed Lamine LEGHMIZI	Univ. Médéa	Président
Boualem ALLECHE	Univ. Médéa	Examinateur
Zahia MOSTEFAOUI	ENS Kouba	Encadreur
Noureddine BENAICHOUCHE	Univ. Médéa	Co-encadreur

Année universitaire 2023/2024

Remerciement

Tout d'abord, je voudrais remercier **Allah**, Tout puissant, de m'avoir donné la force de mener à bien ce travail.

Je remercie tout particulièrement Madame **Zahia MOSTEFAOUI**, qui a dirigé ce travail. Son enthousiasme, sa bienveillance et sa compétence m'a conduit bien plus loin que je n'aurais pu l'imaginer. J'ai énormément appris auprès d'elle et je tiens à lui faire part de toute ma gratitude.

Je tiens à remercier Monsieur **Noureddine BENAICHOUCHE** pour son travail acharné, son intérêt et son soutien constant à nos côtés.

Mes remerciements vont également à Monsieur **Mohamed Lamine LEGHMIZI**, président du jury qui a accepté de présider le jury.

Je remercie vivement Monsieur **Boualem ALLECHE** qui m'a fait honneur en acceptant d'examiner ce travail.

Je souhaite aussi remercier tous les enseignants du département de mathématiques et informatique de la faculté des sciences de l'université Yahia Farès Médéa.

Je remercie également ma famille, surtout mes parents,ma sœur et mon frère qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours.

Je tiens énormément à remercier mes amis et mes camarades de promotion pour leur soutien pendant toute la période de préparation de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail Avec un énorme plaisir et une immense joie

À celui qui a pris soin de moi, qui m'a encouragé, m'a soutenu et a travaillé dur pour moi, **mon cher père**

À celle qui m'a entouré de son amour et de son affection et a cru en moi, **ma chère maman**

À ma chère sœur **Belkis**

À mon cher frère **Siradj eddine**

À celle qui m'entoure toujours de son amour et de ses prières, **ma chère grand-mère**

À ma chère tante

À toute ma famille

À tous mes amis et collègues

À tout mes enseignants, pour leur utiles conseils.

TABLE DES MATIÈRES

Abstract iv

Résumé v

Introduction générale vi

1 Principe variationnel d'Ekeland dans les espaces métriques 1

1.1 Espace métrique 1
1.2 Quelques théorèmes du point fixe 7

2 Espaces métriques partiels 13

2.1 Espace métrique partiel 13
2.2 Principe de contraction de Banach dans un espace métrique partiel 19

3 Principe variationnel d'Ekeland dans les espaces métriques partiels 24

3.1 Principe variationnel d'Ekeland 24
3.2 Théorème du point fixe de Caristi 28
3.3 Théorème du point fixe de Clarke 29
3.4 Quelques généralisations du principe variationnel d'Ekeland 30

Conclusion 32

Abstract

In this work, we present the Ekeland variational principle which guarantees the existence of fixed point in metric spaces and in partial metric spaces. We explain the application of this principle to prove the Caristi fixed point theorem and the Clarke fixed point theorem in partial metric spaces. Also we have explained its application to Caristi's fixed point theorem in metric spaces.

We also introduced partial metric spaces where the distance between a point and itself can be different from zero. Then we presented the Banach contraction principle which establishes the existence and uniqueness of a fixed point in partial metric spaces.

Keywords : Fixed point, metric space, partial metric space, Ekeland's variational principle, Caristi's theorem, Clarke's theorem, Banach's contraction theorem.

Résumé

Dans ce travail, on a présenté le principe variationnel d'Ekeland qui garantit l'existance des points fixes dans les espaces métriques et dans les espaces métriques partiels. On a expliqué l'application de ce principe pour prouver le théorème du point fixe de Caristi et le théorème du point fixe de Clarke dans les espaces métriques partiels. Aussi son application au théorème de point fixe de Caristi dans les espaces métriques a été expliquée.

On a aussi introduit les espaces métriques partiels où la distance entre un point et lui même peut être différente de zéro. Ensuite on a présenté le principe de contraction de Banach qui établit l'existence et l'unicité d'un point fixe dans les espaces métriques partiels.

Mots-clés : Point fixe, Espace métrique, Espace métrique partiel, Principe variationnel d'Ekeland, Théorème de Caristi, Théorème de Clarke, Théorème de constraction de Banach.

Introduction

Le principe variationnel d'Ekeland, est un outil puissant en analyse mathématique, utilisé pour démontrer l'existence de points fixes pour des fonctions non nécessairement continues (semi-continue-inférieurement). Il a été introduit par **Ivan Ekeland** en **1976** et a depuis trouvé de nombreuses applications dans des domaines tels que l'optimisation, l'économie, la physique et l'informatique.

Essentiellement, le principe variationnel d'Ekeland affirme que pour une fonction semi-continue inférieurement donnée définie sur un espace métrique complet, il existe une suite de points qui se rapproche d'un minimum de la fonction. Ce principe a joué un rôle déterminant dans la simplification et l'unification des preuves des théorèmes connus et a fait l'objet de nombreuses généralisations.

L'application du principe variationnel d'Ekeland a joué un rôle central dans l'analyse non linéaire, et il continue de jouer un rôle important dans divers contextes mathématiques et appliqués en raison de sa capacité à établir l'existence de solutions aux problèmes d'optimisation et aux théorèmes de point fixe, il s'applique à la fois aux espaces métriques partiels, mais présente des nuances importantes dans chaque contexte.

Le concept d'espace métrique partiel était introduit par Matthews en 1994, comme une étude de la sémantique dénotationnelle des flux des données de réseaux. En fait, il est largement reconnu que les espaces métriques partiels jouent un rôle important dans la construction de modèles dans la théorie de calcul, de la science de l'information, de la science et de la biologie.

La topologie de tels espaces métriques partiels est un peu particulière. Précisément, la distance d'un point à lui même peut ne pas être égale à zéro. De plus, la limite d'une suite convergente n'est pas unique.

L'étude du principe variationnel d'Ekeland dans ces espaces est donc d'un grand intérêt pour étendre son champ d'application et analyser des problèmes d'optimisation dans des problèmes d'optimisation dans des contextes plus généraux.

Ce mémoire vise à explorer le principe variationnel d'Ekeland dans le cadre des espaces métriques partiels, il sera structuré en trois chapitres, chacun abordant un aspect spécifique du sujet.

-Dans le premier chapitre intitulé "Principe variationnel d'Ekeland dans les espaces métriques", on a d'abord donné des rappels des espaces métriques, et introduit les notions de la distance, de topologie, les suites, la complétude et la continuité. Ensuite on a présenté ce principe et expliqué comment l'utiliser pour montrer le théorème du Caristi dans les espaces métriques.

-Dans le deuxième chapitre intitulé "Espaces métriques partiels", on a introduit la définition d'un espace métrique partiel avec des exemples illustratifs, et on a présenté et démontré le principe de contraction de Banach dans cet espace.

-Le troisième chapitre qui traite du sujet principale intitulé "Principe variationnel d'Ekeland dans les espaces métriques partiels", vise à introduire ce principe fondamental et à explorer ses applications au théorème de point fixe de Caristi et au théorème de point fixe de Clarke.

Chapitre 1

Principe variationnel d'Ekeland dans les espaces métriques

Sommaire

1.1 Espace métrique 1
1.2 Quelques théorèmes du point fixe 7

L'objectif de ce chapitre est d'explorer et de présenter en détail le principe variationnel d'Ekeland dans les espaces métriques. Il vise à fournir une compréhension approfondie des concepts de base des espaces métriques, des distances, et du principe variationnel d'Ekeland, ainsi que de leurs applications au théorème du point fixe de Caristi, et l'équivalence qui existe entre eux dans l'espace métrique

1.1 Espace métrique

1.1.1 Rappel sur les espaces métriques

Définition 1.1: [12]

Soit X un ensemble. On appelle métrique ou distance toute application

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} |\ x \geq 0\}$$

telle que, pour tout $x, y, z \in X$, on a :

D_1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

D_2) $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie),

D_3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire).

Le couple (X,d) s'appelle un espace métrique.

Exemple 1.1

Distance usuelle sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$d(x,y)=|x-y|.$$

Exemple 1.2

Soit la distance définie par : $d(x,y)=\begin{cases}1 & si\ x\neq y\\ 0 & si\ x=y\end{cases}$

Elle s'appelle la distance discrète sur X.

Exemple 1.3

Soit $X=\mathbb{R}^n,(n\in\mathbb{N}^*)$. Pour tout $x=(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $y=(y_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbb{R}^n$. L'application définie par :

$$d(x,y)=\sup_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$$

est une distance. On peut facilement vérifier les conditions (1) et (2). Pour l'inégalité triangulaire, on a pour tout x,y et $z\in\mathbb{R}^n$:

$$|x_i-z_i|\leq|x_i-y_i|+|y_i-z_i|$$

d'où :

$$\sup_{1\leq i\leq n}|x_i-z_i|\leq\sup_{1\leq i\leq n}(|x_i-y_i|+|y_i-z_i|)\leq\sup_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|+\sup_{1\leq i\leq n}|y_i-z_i|$$

Proposition 1.1

Une distance d sur un ensemble X vérifie :

1. Pour $x_1,\dots,x_n$ des points de X on a :

$$d(x_1,x_n)\leq d(x_1,x_2)+\cdots+d(x_{n-1},x_n)$$

2. Pour tout x,y et z dans X on a :

$$|d(x,y)-d(y,z)|\leq d(x,z)$$

3. Pour x,y,z et $t\in X$, on a :

$$|d(x,y)-d(z,t)|\leq d(x,t)+d(y,t)$$

Démonstration

1. On démontre cette propriété par récurrence sur n.
2. Nous avons par l'inégalité triangulaire :

$$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$$

ce qui donne

$$d(x,y)-d(z,y) \leq d(x,z)$$

En permutant x et z, on a de la même manière :

$$d(z,y)-d(y,x) \leq d(x,z)$$

donc

$$-d(x,z) \leq d(x,y)-d(y,z) \leq d(x,z)$$

c'est à dire

$$|d(x,y)-d(y,z)| \leq d(x,z)$$

3. Soient x, y, z et $t \in E$, alors :

$$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,t)+d(t,y)$$

d'où :

$$d(x,y)-d(z,t) \leq d(x,z)+d(t,y)$$

en permutant les couples (x,y) et (z,t) on obtient :

$$d(z,t)-d(x,y) \leq d(z,x)+d(t,y)$$

Distances équivalentes

Définition 1.2

Soient d_1 et d_2 deux distances sur l'ensemble X. On dit que d_1 et d_2 sont équivalentes s'il existe deux constances strictement positives k et k' tel que :

$$\forall x, y \in X, d_1(x,y) \leq k d_2(x,y) \quad et \quad d_2(x,y) \leq k' d_1(x,y)$$

1.1.2 Topologie des espaces métriques

Boules et sphère

Définition 1.3

Si (X,d) est un espace métrique, on appelle
boule ouverte de centre $a \in X$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble :

$$B(a,r) = \{x \in X, d(x,a) < r\},$$

boule fermée de centre $a \in X$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble :

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in X, d(x,a) \leq r\},$$

sphère de centre $a \in X$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble :

$$S(a,r) = \{x \in X, d(x,a) = r\}.$$

Définition 1.4

Si $A \subset X$ et $x \in X$ on appelle **distance de** x **à** A et on note $d(x,A)$, le réel

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a); a \in A\}.$$

Définition 1.5

Soit (X,d) un espace métrique et A une partie de X. On dit que A est un ouvert de (X,d) si pour tout $a \in A$ il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$. On dit que A est un fermé de (X,d) si son complémentaire A^c est un ouvert de (X,d). En particulier $\emptyset$ est à la fois un ouvert et un fermé de (X,d), de même que X.

Suites dans les espaces métriques

Définition 1.6

Soit (X,d) un espace métrique.
Une suite (u_n) de (X,d) est dite **convergente** vers $l \in X$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(u_n, l) \leq \varepsilon.$$

On dit qu'une suite (u_n) de (X,d) est bornée s'il existe une boule ouverte (ou fermée) qui contient tout les termes de la suite, c'est à dire s'il existe $b \in X$ et $r > 0$ tels que

$$u_n \in B(b,r), \forall n \in \mathbb{N}$$

Remarque 1.1. Une suite qui n'est convergente vers aucun $l \in X$ est dite **divergente.**

Theorem 1.1. Si (u_n) est une suite convergente vers l et vers l', alors $l = l'$. On appelle cet élément de X la **limite** de la suite (u_n).

Démonstration

Supposons par contradiction que $l \neq l'$.
Soit $\varepsilon = d(l,l') > 0$.
D'après la définition de la convergence, il existe un rang N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$, on a :

$$d(u_n, l) < \frac{\varepsilon}{2}$$

De même, il existe un rang N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, on a :

$$d(u_n, l') < \frac{\varepsilon}{2}$$

En prenant $N = max(N_1, N_2)$, on a pour tout $n \geq N$:

$$d(u_n, l) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } d(u_n, l') < \frac{\varepsilon}{2}$$

En appliquant la propriété du triangle à ces deux inégalités, on obtient :

$$d(l, l') = d(u_n, l) + d(u_n, l') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ce qui est une contradiction avec l'hypothèse $d(l, l') \geq \varepsilon$. Par conséquent, notre supposition initiale selon laquelle $l \neq l'$est fausse.
On a donc démontré que si (u_n)est une suite convergente vers l et vers l' alors $l = l'$.

Suite de Cauchy

Définition 1.7

Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X est une suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

Proposition 1.2

Dans un espace métrique (X, d)

1. Toute suite convergente est une suite de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est une suite bornée.

Démonstration

1. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, alors on a :

   $$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad n > N \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$

   et donc

   $$n, m > N_{\frac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

   Ce qui donne la suite de Cauchy.
2. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

   $$m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$$

   On pose $\varepsilon = 1$ et $m = n_0$, on a :

   $$\forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n_0}) \leq 1$$

   Alors, la suite est bornée.

Espace métrique complet

Définition 1.8

Un espace métrique (X,d) est **complet** si toute suite de Cauchy de X converge dans X.

Remarque 1.2. L'intérêt des espaces complets est qu'on peut garantir l'existence de la limite d'une suite sans nécessairement exhiber cette limite : il suffit de vérifier que la suite est de Cauchy.

Suites extraites

Définition 1.9

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments d'un espace métrique (X,d).
On appelle sous-suite ou (**suite extraite**) de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite de la forme $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

1.1.3 Continuité dans les espaces métriques

Limites et continuité

Définition 1.10

Soient (X_1,d) et (X_2,d) deux espaces métriques, $f : X_1 \to X_2$ est une fonction.
Soit $a \in X$, on dit que f admet une **limite** en a s'il existe $l \in X_2$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, d(x,a) < \alpha \Rightarrow d(f(x),l) < \varepsilon.$$

Remarque 1.3. Si f admet une limite en a, cette limite est nécessairement unique.

Proposition 1.3

f admet pour limite l on a si et seulement si pour toute suite (x_n) de X qui converge vers a, alors $(f(x_n))$ converge vers l.

Remarque 1.4. On dit que f est **continue en** $a \in X$ si f admet une limite en a (nécessairement égale à $f(a)$).

On dit que f est **continue** sur X si elle est continue en chaque point de X.

Theorem 1.2. Soit f une fonction tel que $f : X_1 \to X_2$, on dit que f est continue en $a \in X$ si et seulement si, pour toute suite (x_n) de X qui tend vers a, alors $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$.

Définition 1.11: (Fonction uniformément continue)

Soient (X,d) et (X',d') deux espaces métriques, et soient $a \in X$ et $f : X \to X'$. Alors f est uniformément continue si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in X \times X : d(x,y) \leq \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

1.1.4 Espaces vectoriels normés, Espace de Banach

Définition 1.12: [12]

On appelle norme sur E toute application $p : E \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a :

N_1) $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, (condition de séparation),

N_2) $\mathrm{p}(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, (condition d'homogénéité),

N_3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ (inégalité triangulaire).

Notation : On note $p(x) = \|x\|$ ou encore $p(x) = \|x\|_E$. $p(x)$ s'appelle norme de x.

(E,p) s'appelle espace vectoriel normé (e.v.n).

Propriétés 1. [12]

1) $\|p(x) - p(y)\| \leq p(x-y)$.

2) Si $E \neq \{0\}$, alors p est non bornée.

Définition 1.13: [12]

On appelle espace de Banach, un espace vectoriel normé complet.

Theorem 1.3. [4] Tout espace vectoriel de dimension finie est un espace de Banach.

1.2 Quelques théorèmes du point fixe

1.2.1 Théorème de Banach

Le théorème de Banach, énoncé en 1922 par Banach, est un résultat fondamental en théorie des points fixes. Il garantit l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction définie sur un espace métrique complet. Une contraction est une fonction qui contracte les distances entre les points de l'espace. Ce théorème a de nombreuses

applications en mathématiques, notamment en analyse numérique, en théorie des fractales et en théorie des équations différentielles.

Définition 1.14: (Fonction lipschitzienne)

Une fonction $f : X_1 \to X_2$ où X_1 et X_2 sont des espaces métriques est dite lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$d_2(f(x), f(y)) \leq k d_1(x, y)$$

pour tout $x, y \in X_1$.

Remarque 1.5. **1)** La plus petite valeur k satisfaisant cette propriété pour la fonction f est appelée la constante de Lipschitz.

2) Si cette constante k est plus petite que 1, la fonction f est appelée une contraction avec constante de contraction k.

Remarque 1.6. Toute application lipschitzienne est uniformément continue. Toute application uniformément continue est continue. Les réciproques sont fausses.

Le théorème de point fixe le plus élémentaire et certainement le plus utilisé est le principe de contraction de Banach.

Theorem 1.4. [8] (Principe de contraction de Banach)
Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une contraction. Alors, f a un unique point fixe.

Démonstration
1) Existence du point fixe :
Soit f une contraction, c'est à dire qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tout $x, y \in X$:

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y)$$

Soit $x_0 \in X$, définissons la suite (x_n) par récurrence :

$$x_{n+1} = f(x_n), \forall n \geq 0$$

En appliquant la propriété de contraction à x_n et x_{n+1}, on obtient :

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq k d(x_n, x_{n+1})$$

En réarrangeant les termes et en appliquant l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq k d(x_n, x_{n+1}) \leq k^2 d(x_{n-1}, x_n)$$

En itérant cette inégalité, on obtient :

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq k^n d(x_0, x_1)$$

Or, $k \in [0,1[$, donc $\lim_{n\to\infty}$. Par conséquent, la suite (x_n) est de Cauchy.
Comme (X,d) est un espace métrique complet, toute suite de Cauchy dans cet espace converge. Donc, il existe un élément $\xi \in X$ tel que :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$$

En passant à la limite dans l'égalité $x_{n+1} = f(x_n)$ on obtient :

$$f(\xi) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x\,i$$

Donc ξ est un point fixe de f.
2) Unicité du point fixe :
Supposons qu'il existe un autre point fixe $\eta \neq \xi$.
En appliquant la propriété de contraction à ξ et η, on obtient :

$$d(f(\xi), f(\eta)) \leq k\,d(\xi,\eta)$$

Comme $f(\xi) = \xi$ et $f(\eta) = \eta$ on a :

$$d(\xi,\eta) \leq k\,d(\xi,\eta)$$

Si $d(\xi,\eta) \neq 0$, on divise les deux parties par $d(\xi,\eta)$ et on obtient :

$$1 \leq k$$

Ce qui est une contradiction, car $k \in [0,1[$.
Donc, $d(\xi,\eta) = 0$, ce qui implique que $\xi = \eta$.
L'application contractante f possède un unique point fixe $\xi \in X$.

1.2.2 Théorème de Caristi

En 1976, Caristi a établi un théorème de point fixe qui ne nécessite pas que la fonction soit une contraction. Ce théorème permet de garantir l'existence d'un point fixe pour une fonction quelconque sous certaines conditions. Plus précisément, si une fonction vérifie une certaine inégalité par rapport à une fonction semi-continue inférieurement bornée, alors elle admet un point fixe.

Définition 1.15: [8]

Une fonction $\phi : X \to \mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement si, pour tout $x \in X$, $\liminf_{y\to x} \phi(y) \geq \phi(x)$ ou, de façon équivalente, si l'ensemble $\{x \in X : \phi(x) \leq a\}$ est fermé pour tout $a \in \mathbb{R}$. Elle est semi-continue supérieurement si $-\phi$ est semi-continue inférieurement.

Theorem 1.5. [8](Caristi)
Soient (X,d) un espace métriques complet et $\phi : X \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement minorée. Soit $f : X \to X$ une fonction quelconque telle que pour tout

$x \in X$:

$$d(x, f(x)) \leq \phi(x) - \phi(f(x))$$

Alors f admet un point fixe.

Une preuve plus simple utilisant un résultat de Bishop et Phelps a par la suite été faite. Avant d'énoncer ce lemme, voici le théorème d'intersection de **Cantor** qui nous sera nécessaire pour faire la preuve du lemme de **Bishop-Phelps**.

Theorem 1.6. [8](Intersection de Cantor)
Soit $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles non-vides fermés de X tels que $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, et tels que $\lim_{n\to\infty} diam A_n = 0$ Alors, l'ensemble $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est constitué d'un unique point.

Lemme 1.1. [8](Bishop-Phelps)
Soient (X, d) un espace métriques complet, $\phi : X \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement minorée et λ une constante positive. Alors, pour tout $x_0 \in X$ il existe $x^* \in X$, tel que

$$\lambda d(x_0, x^*) \leq \phi(x_0) - \phi(x^*)$$

et

$$\lambda d(x, x^*) > \phi(x^*) - \phi(x)$$

pour tout $x \in X$ tel que $x \neq x^*$.

Démonstration
Pour tout $z \in X$, soit $T(z) = \{y \in X : \phi(y) + \lambda d(z, y) \leq \phi(z)\}$. Puisque la fonction ϕ est (s.c.i), $T(z)$ est fermé pour tout $z \in X$.

Soit $x_0 \in X$. Choisissons d'abord $x_1 \in T(x_0)$ tel que

$$\phi(x_1) \leq 1 + \inf[\phi(T(x_0))].$$

Choisissons ensuite inductivement $x_n \in T(x_{n-1})$ tel que

$$\phi(x_n) \leq \frac{1}{n} + \inf[\phi(T(x_{n-1}))].$$

Il est clair que $T(x_0) \supset T(x_1) \supset T(x_2) \supset \cdots$. Estimons le diamètre de $T(x_n)$ pour un n donné. Soit $w \in T(x_n) \subset T(x_{n-1})$. Nous avons que

$$\phi(w) \geq \inf[\phi(T(x_{n-1}))] \geq \phi(x_n) - \frac{1}{n}.$$

Puisque $w \in T(x_n)$, nous avons que

$$\lambda d(x_n, w) \leq \phi(x_n) - \phi(w) \leq \frac{1}{n}.$$

Donc, $diam T(x_n) \leq \frac{2}{\lambda n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème d'intersection de Cantor, il existe un unique $x^* \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T(x_n)$.

Et puisque $x^* \in T(x_0)$,

$$\lambda d(x_0, x^*) \leq \phi(x_0) - \phi(x^*).$$

De plus, si $\lambda d(x, x^*) \leq \phi(x^*) - \phi(x)$, alors $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} T(x_n)$, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \lambda d(x_n, x) &\leq \lambda d(x_n, x^*) + \lambda d(x^*, x) \\ &\leq \phi(x_n) - \phi(x^*) + \phi(x^*) - \phi(x) \\ &= \phi(x_n) - \phi(x) \end{aligned}$$

et par unicité $x = x^*$.

Voici une démonstration du théorème de Caristi utilisant le lemme de Bishop-Phelps.

Démonstration
Posons $\lambda = 1$ et choisissons $x_0 \in X$ Par le Lemme (1.1) il existe $x^* \in X$ tel que, si $x \neq x^*$

$$d(x, x^*) > \phi(x^*) - \phi(x) \tag{1.1}$$

Par hypothèse,

$$d(x^*, f(x^*)) \leq \phi(x^*) - \phi(f(x^*)) \tag{1.2}$$

De (1.1) et de (1.2) on déduit que $x^* = f(x^*)$

1.2.3 Principe variationnel d'Ekeland

Le principe variationnel d'Ekeland, est un résultat important en analyse fonctionnelle. Ce principe permet de trouver un point qui minimise une fonction propre semi-continue inférieurement bornée inférieurement, sous certaines conditions. Il fournit une méthode pour trouver des points proches des points où une fonction atteint son minimum, tout en respectant des contraintes sur la fonction et les distances entre les points. Ce principe est étroitement lié aux théorèmes de point fixe et a des implications importantes en optimisation et en analyse non linéaire . Il s'avère que ce principe est équivalent au théorème de point fixe de Caristi.

Theorem 1.7. [8] (Principe variationnel d'Ekeland)
Soient X, d un espace métriques complet et $\phi : X \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Pour chaque $\varepsilon > 0$ et chaque $u \in X$ tel que $\phi(u) \leq \inf_{x \in X} \phi(x) + \varepsilon$, il existe $v \in X$ tel que :
(1) $\phi(v) \leq \phi(u)$,
(2) $d(u, v) \leq 1$,
(3) $\phi(v) < \phi(x) + \varepsilon d(x, v)$. pout tout $x \in X$ tel que $x \neq v$.

Démonstration

Soient $\varepsilon > 0$ et $u \in X$ tels que $\phi(u) \leq \inf_{x \in X} \phi(x) + \varepsilon$. Posons

$$X' = \left\{ x \in X : \phi(x) + \varepsilon d(u, x) \leq \phi(u) \right\}.$$

X' n'est pas vide puisque $u \in X'$. De plus, par la semi-continuité inférieure de ϕ, X' est fermé et est donc un espace métrique complet.
Remarquons que la fonction ϕ restreinte au domaine X' est à valeurs réelles et qu'elle est aussi semi-continue inférieurement et bornée inférieurement.
Pour tout $x \in X'$, posons

$$S(x) = \{y \in X \setminus \{x\} : \phi(y) + \varepsilon d(x,y) \leq \phi(x)\}$$

et définissons

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } S(x) = \emptyset \\ y & \text{si } S(x) \neq \emptyset \text{ où } y \text{ est un élément quelconque de } S(x) \end{cases}$$

Alors, f est une fonction de X' dans X'. En effet, pour tout $x \in X'$ tel que $S(x) = \emptyset$, $f(x) = x \in X'$ D'autre part, pour tout $x \in X'$ tel que $S(x) \neq \emptyset$, $f(x) = y \in S(x)$ et alors :

$$\begin{aligned} \phi(y) + \varepsilon d(u,y) &\leq \phi(y) + \varepsilon d(x,y) + \varepsilon d(u,x) \\ &\leq \phi(x) + \varepsilon d(u,x) \\ &\leq \phi(u) \end{aligned}$$

et donc $y \in X'$. Nous avons aussi que pour tout $x \in X'$ puisque $f(x) = x$ ou $f(x) \in S(x)$

$$d(x, f(x)) \leq \frac{1}{\varepsilon}\phi(x) - \frac{1}{\varepsilon}\phi(f(x)).$$

Le théorème (1.5) implique que f a un point fixe $v \in X'$. Il s'ensuit que $S(v) = \emptyset$ c'est-à-dire que

$$\phi(x) > \phi(v) - \varepsilon d(x,v)$$

pour tout $x \in X$ tel que $x \neq v$.
De plus, puisque $v \in X'$, nous avons que :

$$\phi(v) \leq \phi(u) - \varepsilon d(u,v) \leq \phi(u)$$

Enfin, nous avons :

$$\begin{aligned} \varepsilon d(u,v) &\leq \phi(u) - \phi(v) \\ &\leq \phi(u) - \inf_{x \in X} \phi(x) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

et donc $d(u,v) \leq 1$. Ainsi, le v trouvé répond aux trois critères.

Maintenant, voici une démonstration du théorème de Caristi grâce au principe variationnel d'Ekeland :

Démonstration

Choisissons $u \in X$ tel que

$$\phi(x) \leq \inf_{x \in X} \phi(x) + 1$$

Par le Théorème (1.7) il existe $v \in X$ tel que :

$$d(x,v) > \phi(v) - \phi(x) \tag{1.3}$$

pour tout $x \in X$ tel que $x \neq v$ Or, par hypothèse

$$d(v, f(v)) \leq \phi(v) - \phi(f(v)) \tag{1.4}$$

De (1.3) et (1.4) nous déduisons que : $f(v) = v$.

Chapitre 2

Espaces métriques partiels

Sommaire

2.1 Espace métrique partiel 13
2.2 Principe de contraction de Banach dans un espace métrique partiel 19

L'objectif principal de ce chapitre est d'introduire les espaces métriques partiels qui sont une généralisation des espaces métriques classique où la distance entre un point et lui mêmé n'est pas nécessairement égale à zéro, et de présenter le principe de constraction de Banach dans ces espaces.

2.1 Espace métrique partiel

Un espace métrique partiel est un ensemble muni d'une relation de distance qui ne vérifie pas toutes les propriétés d'une distance classique. En particulier, la distance d'un point à lui-même peut être non nulle.

Définition 2.1: [3]

Soit $\mathbb{R}_+$ l'ensemble de tous les nombres réels positifs et soit X un ensemble non vide.
On dit que la fonction $p : X \times X \to \mathbb{R}_+$ est une métrique partielle sur X si les conditions suivantes sont satisfaites, pour tous $x, y, z \in X$:

$p_1)$ $p(x,y) = p(y,x)$ (symétrie),

$p_2)$ $x = y \Leftrightarrow p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$ (égalité),

$p_3)$ $p(x,x) \leq p(x,y)$ (petite distance de soi),

$p_4)$ $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$ (inégalité triangulaire).

Alors (X,p) est dit un espace métrique partiel.

On utilise l'abréviation EMP pour l'espace métrique partiel (X,p).

Remarque 2.1. Un espace métrique partiel est une généralisation d'un espace métrique.
c'est a dire que : tout espace métrique est un espace métrique partiel.
Il est clair que, si $p(x,y) = 0$, alors de $p_1)$ et $p_2)$ on a : $x = y$.
Mais si $x = y$, $p(x,y)$ peut être différente de 0.

2.1.1 La distance partielle associée à la métrique partielle p

Theorem 2.1. [3] Pour une métrique partielle p sur X, la fonction $d_p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ donnée par :

$$d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y)$$

Est une distance sur X. Elle exprime la distance entre deux points x et y dans l'espace métrique partiel (X,p) en termes de la métrique partielle p.

Démonstration
La fonction $d_p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ vérifie les quatres conditions d'une métrique classique, en effet :

1) $d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) = d_p(y,x)$, car : $p(x,y) = p(y,x)$ (Symétrie)

2) On peut voir que si $x = y$, alors $d_p(x,y) = 0$, car $p(x,x) = p(x,y) = p(y,y)$. Et si $d_p(x,y) = 0$, alors $2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) = 0$, ce qui implique que

$$(p(x,y) - p(x,x)) + (p(x,y) - p(y,y)) = 0,$$

de la condition p_3) on trouve $p(x,y) - p(x,x) = 0$ et $p(x,y) - p(y,y) = 0$.
Alors $p(x,y) = p(x,x) = p(y,y)$ et donc $x = y$.

3) On a $d_p(x,x) = 0$ et on a $d_p(x,y)$ est toujours supérieur ou égal à 0, car $p(x,x) \leq p(x,y)$ donc $d_p(x,x) \leq d_p(x,y)$.

4) On a $d_p(y,y) = 0$ et on a :

$$d_p(x,y) = 2p(x,y) - p(x,x) - p(y,y) \Rightarrow p(x,y) = \frac{d_p(x,y) + p(x,x) + p(y,y)}{2}$$

on remplace $p(x,y)$ dans $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) - p(y,y)$ on obtient :

$$p(x,z) \leq \frac{d_p(x,y) + p(x,x) + p(y,y)}{2} + \frac{d_p(y,z) + p(z,z) + p(y,y)}{2} - p(y,y)$$

donc

$$\begin{aligned} 2p(x,z) = d_p(x,z) + p(x,x) + p(z,z) \quad \leq \quad & d_p(x,y) + p(x,x) + p(y,y) + d_p(y,z) + p(z,z) \\ & + p(y,y) - 2p(y,y) \end{aligned}$$

on conclut que $d_p(x,z) \leq d_p(x,y) + d_p(y,z)$ (Inégalité triangulaire).

2.1.2 Topologie des espaces métriques partielles p

Boule ouverte, boule fermée, sphère

Définition 2.2: [3]

Lorsqu'une métrique partielle p est définie sur un ensemble X, elle permet de définir une topologie sur X, appelée la topologie p-induite. Cette topologie est définie à partir des boules ouvertes et fermées associées à la métrique partielle p.
Si (X,p) est un espace métrique partiel, on appelle
p-boules ouvertes $\{B_p(x,\varepsilon) : x \in X, \varepsilon > 0\}$ où :

$$B_p(x,\varepsilon) = \{y \in X : p(x,y) < p(x,x) + \varepsilon\}$$

avec $B_p(x,\varepsilon)$ est l'analogue de la boule ouverte classique dans les espaces métriques. Elle contient tous les points de X qui sont à une distance strictement inférieure à ε de x, selon la métrique partielle p.
p-boule fermée est définie comme :

$$\overline{B}_p(x,\varepsilon) = \{y \in X : p(x,y) \leq p(x,x) + \varepsilon\}$$

p-sphère est définie comme :

$$S_p(x,\varepsilon) = \{y \in X : p(x,y) = p(x,x) + \varepsilon\}$$

Définition 2.3: [3]

Soit (X,p) un EMP. Alors :
1) une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X converge vers $x \in X$ si et seulement si $p(x,x) = \lim_{n\to+\infty} p(x,x_n)$.
2) une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X est appelée suite de Cauchy si et seulement si $\lim_{n,m\to+\infty} p(x_n,x_m)$ existe (et est fini),
3) (X,p) est dit complet si toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X converge, par rapport à τ_p, vers un point $x \in X$ tel que $p(x,x) = \lim_{n,m\to+\infty} p(x_n,x_m)$

Exemple 2.1
Considérons $X = \mathbb{R}_+$ et on défini $p(x,y) = \max\{x,y\}$ pour tout $x,y \in X$. Montrer que (X,p) est un EMP.

Solution.

Il est clair que p n'est pas une métrique (habituelle). En effet, $p(x,x) = x \neq 0$ pour tout $x \neq 0$.
p est vérifié les conditions d'une métrique partielle :

1) la symétrie :
- si $x \leq y$ alors $p(x,y) = y$ et $p(y,x) = y$
- si $x > y$ alors $p(x,y) = x$ et $p(y,x) = x$,
donc $p(x,y) = p(y,x)$, $\forall x,y \in X$.

2) l'égalité :
$p(x,x)=x$ et $p(y,y)=y$
-si : $p(x,x)=p(x,y)=p(y,y)$ alors $x=y$, $\forall x,y\in X$

3) petite distance de soi :
- si $x\leq y$ alors $p(x,x)=x\leq p(x,y)=y$
- si $x>y$ alors $p(x,x)=x=p(x,y)=x$,$\forall x,y\in X$

4) inégalité triangulaire :
Soient $x,y,z\in X$, on a :

$$\begin{aligned} x &\leq \max\{x,z\}+z-z \\ &\leq \max\{x,z\}+\max\{z,y\}-z \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} y &\leq \max\{z,y\}+z-z \\ &\leq \max\{z,y\}+\max\{x,z\}-z \end{aligned}$$

puisque $x,y,z\in\mathbb{R}_+$. Il résulte :

$$\max\{x,y\}\leq \max\{z,y\}+\max\{x,z\}-z$$

c'est à dire :

$$p(x,y)\leq p(x,z)+p(z,y)-p(z,z).$$

Exemple 2.2
Soit (X,d) un espace métrique et (X,p) un espace métrique partiel, les fonctions $\rho_i : X\times X\to\mathbb{R}^+$, $i=\{1,2,3\}$ données par :

$$\begin{aligned} \rho_1(x,y) &= d(x,y)+p(x,y), \\ \rho_2(x,y) &= d(x,y)+max\{\omega(x),\omega(y)\}, \\ \rho_3(x,y) &= d(x,y)+a. \end{aligned}$$

définir des métriques partielles sur X, où $\omega : X\times X\to\mathbb{R}^+$ est une fonction arbitraire et $a\geq 0$.

Solution.

Pour ρ_1 :
$\rho_1(x,y)=d(x,y)+p(x,y)$,

1) Symétrie :
$\rho_1(y,x)=d(y,x)+p(y,x)=\rho_1(x,y)$
car : $d(x,y)=d(y,x)$ et $p(x,y)=p(y,x)$.

2)l'égalité :
Si $\rho_1(x,x)=\rho_1(x,y)=\rho_1(y,y)$, alors $p(x,x)=d(x,y)+p(x,y)=p(y,y)$, donc $d(x,y)=p(x,x)-p(x,y)$. De la condition p_3), on a $d(x,y)\leq 0$. Alors $x=y$.

3)petit distance de soi
$\rho_1(x,x)=d(x,x)+p(x,x)$
comme $p(x,x)\leq p(x,y)$, donc : $\rho_1(x,x)\leq\rho_1(x,y)$.

4)inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\rho_1(x,y) &= d(x,y)+p(x,y)\\ &\leq d(x,z)+d(z,y)+p(x,z)+p(z,y)-p(z,z)\\ &= (d(x,z)+p(x,z))+(d(z,y)+p(z,y))-p(z,z),\end{aligned}$$

et comme $\rho_1(z,z)=d(z,z)+p(z,z)=p(z,z)$, on trouve :

$$\rho_1(x,y)\leq\rho_1(x,z)+\rho_1(z,y)-\rho_1(z,z).$$

Pour ρ_2 :
$\rho_2(x,y)=d(x,y)+\max\{\omega(x),\omega(y)\}$,

1) symétrie :
$\rho_2(y,x)=d(y,x)+\max\{\omega(y),\omega(x)\}=\rho_2(x,y)$

2)l'égalité :
Si $\rho_2(x,x)=\rho_2(y,x)=\rho_2(y,y)$, alors $\omega(x)=d(x,y)+\max\{\omega(x),\omega(y)\}=\omega(y)$, donc $\omega(x)=d(x,y)+\omega(x)$, ce qui implique $d(x,y)=0$. Alors $x=y$

3)petit distance de soi
$\rho_2(x,x)=\max\{\omega(x),\omega(x)\}$
comme $\max\{\omega(x),\omega(x)\}\leq\max\{\omega(x),\omega(y)\}$,
donc : $\rho_2(x,x)\leqslant\rho_2(x,y)$.

4)inégalité triangulaire : On a :

$$\omega(x)\leq\max\{\omega(x),\omega(z)\}\leq\max\{\omega(x),\omega(z)\}+\max\{\omega(z),\omega(y)\}-\omega(z),$$

car

$$\max\{\omega(z),\omega(y)\}-\omega(z)\geq 0.$$

Aussi :

$$\omega(y)\leq\max\{\omega(y),\omega(z)\}\leq\max\{\omega(z),\omega(y)\}+\max\{\omega(x),\omega(z)\}-\omega(z),$$

alors :

$$\max\{\omega(x),\omega(y)\}\leq\max\{\omega(x),\omega(z)\}+\max\{\omega(z),\omega(y)\}-\omega(z).$$

On a :

$$\begin{aligned}\rho_2(x,y) &= d(x,y)+\max\{\omega(x),\omega(y)\}\\ &\leq d(x,z)+d(z,y)+\max\{\omega(x),\omega(z)\}+\max\{\omega(z),\omega(y)\}-\omega(z)\\ &= (d(x,z)+\max\{\omega(x),\omega(z)\})+(d(z,y)+\max\{\omega(z),\omega(y)\})-\omega(z).\end{aligned}$$

Donc :

$$\rho_2(x,y)\leq\rho_2(x,z)+\rho_2(z,y)-\rho_2(z,z)$$

car : $\rho_2(z,z)=\omega(z)$.

Pour ρ_3 :

$\rho_3(x,y)=d(x,y)+a$,
1) symétrie :
$\rho_3(y,x)=d(y,x)+a=\rho_3(x,y)$
car : $d(x,y)=d(y,x)$.

2)l'égalité :
Si $\rho_3(x,x)=\rho_3(y,x)=\rho_3(y,y)$, alors $a=d(y,x)+a$ ce qui implique que $d(x,y)=0$.
Donc $x=y$

3)petit distance de soi :
$\rho_3(x,x)=d(x,x)+a$
comme $d(x,x)\leq d(x,y)$,
donc : $\rho_3(x,x)\leq\rho_3(x,y)$.

4)inégalité triangulaire :
On a :

$$\begin{aligned}\rho_2(x,y) &= d(x,y)+a\\ &\leq d(x,z)+d(z,y)+2a-a\\ &= (d(x,z)+a)+(d(z,y)+a)-a\end{aligned},$$

et comme $\rho_2(z,z)=a$, on trouve

$$\rho_2(x,y)\leq\rho_2(x,z)+\rho_2(z,y)-\rho_2(z,z).$$

Exemple 2.3: [18]
Soit $X=\{[a,b]:a,b\in\mathbb{R},a\leqslant b\}$ *et définir*
$p([a,b],[c,d])=\max\{b,d\}-\min\{a,c\}$ *pour tout* $[a,b]$, $[c,d]\in X$. *Alors* (X,p) *est un EMP.*

Exemple 2.4: [18]
Soit $X=[0,1]\cup[2,3]$ *et définissons* $p:X\times X\to\mathbb{R}^+$ *par :*

$$p(x,y)=\begin{cases}\max\{x,y\} & si\ \{x,y\}\cap[2,3]\neq\emptyset,\\ |x-y| & si\ \{x,y\}\subset[0,1].\end{cases}$$

Alors (X,p) *est un EMP complet.*

Lemme 2.1. [18] Soit (X,p) un EMP, alors :

1) une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X est une suite de Cauchy si et seulement si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace métrique (X,d_p)

2) (X,p) est complet si et seulement si l'espace métrique (X,d_p) est complet,De plus, $\lim_{n\to+\infty} d_p(x,x_n)=0$ si et seulement si :
$p(x,x)=\lim_{n\to+\infty} p(x,x_n)=\lim_{n,m\to+\infty} p(x_n,x_m)$

2.1.3 Continuité dans un espace métrique partiel

Définition 2.4

Soit (X,p) un espace métrique partiel. Une application $F:E\longrightarrow E$ est dite continue en $x\in X$, si pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta>0$ tel que $F(B_p(x,\delta))\subseteq B_p(Fx,\varepsilon)$.

Lemme 2.2. [18]
Soit (X,p) un espace métrique partiel.l'application $F:X\longrightarrow X$ est continue si et seulement si, étant donnée une suite $\{x_n\}\in\mathbb{N}$ et $x\in X$ tel que :

$$p(x,x)=\lim_{n\to+\infty} p(x,x_n)$$

alors

$$p(Fx,Fx)=\lim_{n\to+\infty} p(Fx,Fx_n).$$

2.2 Principe de contraction de Banach dans un espace métrique partiel

Theorem 2.2. [1] Soit (X,p) un espace métrique partiel complet et $T:X\longrightarrow X$ une application tel que :

$$\exists c\in[0;1[:p(Tx,Ty)\leq c\,p(x,y),\forall x,y\in X.$$

Alors, T admet un unique point fixe $u\in X$, c'est à dire $Tu=u$, de plus on a : $p(u,u)=0$.

Remarque 2.2. Le principe de contraction de Banach pour les espaces métriques partiels est une généralisation du théorème de Banach classique pour les espaces métriques complets.

Démonstration
Soit $x\in E$, on va démontrer que la suite $\{T^n x\}$ est de Cauchy. alors : $\forall n,k\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
p(T^{n+k+1}x,T^n x)&\leq p(T^{n+k+1}x,T^{n+k}x)+p(T^{n+k}x,T^n x)-p(T^{n+k}x,T^{n+k}x)\\
&\leq p(T(T^{n+k}x),T(T^{n+k-1}x))+p(T^{n+k}x,T^n x)\\
&\leq c\times p(T^{n+k}x,T^{n+k-1}x)+p(T^{n+k}x,T^n x)\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\cdot\\
&\leq c^{n+k}\times p(Tx,x)+p(T^{n+k}x,T^n x)
\end{aligned}$$

Puisque pour tout n on a : $p(T^n x, T^n x) \leq c^n \times p(x,x)$, alors pour tout $n, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} p(T^{n+k+1}x, T^n x) &\leq (c^{n+k} + ... + c^n) \times p(Tx, x) + p(T^n x, T^n x) \\ &\leq c^n \times \frac{(1-c^{k+1})}{1-c} \times p(Tx,x) + c^n \times p(x,x) \\ &\leq c^n \times (\frac{p(Tx,x)}{1-c} + p(x,x)) \end{aligned}$$

Donc la suite $\{T^n x\}, n \in \mathbb{N}$ est une suite de Cauchy, c'est à dire :

$$p(u,u) = \lim_{n \to +\infty} p(T^n x, u) = \lim_{n,m \to +\infty} p(T^n x, T^m x) = 0.$$

Comme l'espace est complet, donc la suite $\{T^n x\}, n \in \mathbb{N}$ converge vers $u \in E$.
Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} p(T^n x, u) = 0.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : p(Tu, u) &\leq p(Tu, T^{n+1}x) + p(T^{n+1}x, u) - p(T^{n+1}x, T^{n+1}x) \\ &\leq c \times p(u, T^n x) + p(T^{n+1}x, u) \end{aligned}$$

Il résulte : $p(Tu,u) = 0$. Donc en utilisant les propriétés $(p1)$ et$(p2)$: $u = Tu$ et $p(u,u) = 0$.
On montre que u est unique. Supposons qu'il existe $v \in E$ tel que $Tv = v$, alors :

$$p(u,v) = p(Tu, Tv) \leq c \times p(u,v)$$

Donc, pour $c < 1$, $p(u,v) = 0$. Donc $u = v$. On déduit que le point fixe est unique.

Theorem 2.3. [1] Soit $(X, \leq_X)$ un ensemble partiellement ordonné, et (X,p) un espace métrique partiel complet. Soit $F : X \longrightarrow X$ une fonction continue et croissante telle que :

$$p(Fx, Fy) \leq \psi(\max\{p(x,y), p(x,Fx), p(y,Fy), \frac{1}{2}[p(x,Fy) + p(y,Fx)]\}) \qquad (2.1)$$

pour tout $x, y \in X$ avec $y \leq_X x \quad (y \neq x)$, où :

1) $\psi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ est une fonction continue et croissante,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t)$ converge pour tout $t > 0$,

3) $\psi(t) < t$ pour tout $t > 0$.

S'il existe $x_0 \in X$ avec $x_0 \leq_X Fx_0$, alors il existe un poit fixe $u \in X$ c'est à dire : $u = Fu$.
De plus, $p(u,u) = 0$.

Démonstration
Depuis la condition de ψ, il est clair que $\lim_{n \to \infty} \psi^n(t) = 0$ pour $t > 0$.
Si $Fx_0 = x_0$, alors le résultat est démontré.
On suppose que $Fx_0 \neq x_0$. Soit $x_n = Fx_{n-1}$ pour $n = 1, 2, ...$ Si $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ pour un $n_0 \in \mathbb{N}$,

donc x_{n_0} est un point fixe de F.
Supposons que $x_n \neq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $x_0 \preceq_E F x_0$ et F est croissante, on a :

$$x_0 \preceq_E x_1 \preceq_E x_2 \preceq_E \ldots \preceq_E x_n \preceq_E x_{n+1} \preceq_E \ldots \tag{2.2}$$

Puisqu'on a $x_{n-1} \preceq x_n$, en utilisant l'inégalité (2.1) pour ces points on a :
$p(x_{n+1}, x_n) = p(F x_n, F x_{n-1})$

$$\begin{aligned} &\leq \psi(\max\{p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, F x_n), p(x_{n-1}, F x_{n-1}), \frac{1}{2}[p(x_n, F x_{n-1}) + p(x_{n-1}, F x_n)]\}) \\ &\leq \psi(\max\{p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1}), \frac{1}{2}[p(x_{n-1}, x_n) + p(x_n, x_{n+1})]\}) \\ &= \psi(\max\{p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1})\}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Puisque :

$$p(x_n, x_n) + p(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq p(x_{n-1}, x_n) + p(x_{n-1}, x_{n+1}) \tag{2.4}$$

et ψ est croissante.
Et si :

$$\max\{p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1})\} = p(x_n, x_{n+1}) \tag{2.5}$$

pour un certain n, alors de (2.3) on a :

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \psi(p(x_n, x_{n+1})) < p(x_n, x_{n+1}) \tag{2.6}$$

ce qui est une contradiction comme : $p(x_n, x_{n+1}) > 0$. Alors pour tout n :

$$\max\{p(x_n, x_{n-1}), p(x_n, x_{n+1})\} = p(x_n, x_{n-1}) \tag{2.7}$$

Alors, on a :

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \psi(p(x_n, x_{n-1})) \tag{2.8}$$

et

$$p(x_{n+1}, x_n) \leq \psi^n(p(x_1, x_0)) \tag{2.9}$$

D'autre part, comme :

$$\max\{p(x_n, x_n), p(x_{n+1}, x_{n+1})\} \leq p(x_n, x_{n+1}) \tag{2.10}$$

d'après (2.8) on a :

$$\max\{p(x_n, x_n), p(x_{n+1}, x_{n+1})\} \leq \psi^n(p(x_1, x_0)) \tag{2.11}$$

Alors :

$$\begin{aligned} d_p(x_n, x_{n+1}) &= 2p(x_n, x_{n+1}) - p(x_n, x_n) - p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq 2p(x_n, x_{n+1}) + p(x_n, x_n) + p(x_{n+1}, x_{n+1}) \\ &\leq 4\psi^n(p(x_1, x_0)) \end{aligned} \tag{2.12}$$

Ceci montre que $\lim_{n\to\infty} d_p(x_n, x_{n+1}) = 0$. Donc on a :

$$\begin{aligned} d_p(x_{n+k}, x_n) &\leq d_p(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + \ldots + d_p(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq 4\psi^{n+k-1}(p(x_1, x_0)) + \ldots + 4\psi^n(p(x_1, x_0)) \\ &\leq 4\sum_{j=n}^{n+k-1} \psi^j(p(x_1, x_0)) \\ &\leq 4\sum_{j=n}^{+\infty} \psi^j(p(x_1, x_0)) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Puisque $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t)$ est convergente pour tout $t > 0$, donc $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans l'espace métrique (X, d_p). Puisque (X, p) est complet, donc la suite $\{x_n\}$ converge vers une limite x dans l'espace (X, d_p) , c'est à dire $\lim_{n\to\infty} d_p(x_n, x) = 0$. D'après le lemme 3.1 :

$$p(x, x) = \lim_{n\to+\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to+\infty} p(x_n, x_m) \tag{2.14}$$

De plus, puisque (x_n) est une suite de Cauchy dans l'espace métrique (X, d_p), on a :

$$\lim_{n,m\to+\infty} d_p(x_n, x_m) = 0$$

et d'après (2.11), on a :

$$\lim_{n\to+\infty} p(x_n, x_n) = 0$$

alors depuis la définition p_p, on a :

$$\lim_{n,m\to+\infty} p(x_n, x_m) = 0$$

Donc, d'après (2.14), on a :

$$p(x, x) = \lim_{n\to+\infty} p(x_n, x) = \lim_{n,m\to\infty} p(x_n, x_m) = 0 \tag{2.15}$$

Maintenant on montre que $Fx = x$. Supposons que $p(x, Fx) > 0$. Puisque F est continue, c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : F(B_p(x, \delta)) \subseteq B_p(Fx, \varepsilon)$$

Puisque $p(x, x) = \lim_{n\to+\infty} p(x_n, x) = 0$, donc :

$$\exists k \in \mathbb{N} : p(x_n, x) < p(x, x) + \delta, \forall n \geq k$$

Donc, on a $x_n \in B_p(x, \delta)$ pour tout $n \geq k$. Donc, $F(x_n) \in F(B_p(x, \delta)) \subseteq B_p(Fx, \varepsilon)$, et aussi $p(Fx_n, Fx) \leq p(Fx, Fx) + \varepsilon$ pour tout $n \geq k$.
Ceci montre que $p(Fx, Fx) = \lim_{n\to+\infty} p(x_{n+1}, Fx)$.
Maintenant, en utilisant l'inégalité (2.1) pour $x = y$, il résulte :

$$p(Fx, Fx) \leq \Psi(\max\{p(x, x), p(x, Fx)\}) = \Psi(p(x, Fx)) < p(x, Fx) \tag{2.16}$$

On obtient :

$$p(x,Fx) \leq p(x,x_{n+1}) + p(x_{n+1},Fx) - p(x_{n+1},x_{n+1}) \leq p(x,x_{n+1}) + p(x_{n+1},Fx) \tag{2.17}$$

pour $n \to +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} p(x,Fx) &\leq \lim_{n\to+\infty} p(x,x_{n+1}) + \lim_{n\to+\infty} p(x_{n+1},Fx) \\ &= p(Fx,Fx) \leq \psi(p(x,Fx)) \\ &< p(x,Fx) \end{aligned}$$

Contradiction. Alors, $p(x,x) = p(x,Fx) = 0$, et aussi de 2.16 on trouve que $p(Fx,Fx) = 0$. Donc $x = Fx$ par la définition de p.

Dans le théorème qui suit, F n'est plus continue. Aussi, la condition de contraction (2.1) n'est pas vérifiée pour $x = y$, mais on ajoute une condition sur X.

Theorem 2.4. [1] Soit $(X, \leq_X)$ un ensemble partiellement ordonné, et (X,p) un espace métrique partiel complet. Soit $F : X \longrightarrow X$ une fonction croissante telle que :

$$p(Fx,Fy) \leq \psi(\max\{p(x,y), p(x,Fx), p(y,Fy), \frac{1}{2}[p(x,Fy) + p(y,Fx)]\}) \tag{2.18}$$

pour tout $x, y \in X$ avec $y \leq_E x \quad (y \neq x)$, où :

1) $\psi : [0,+\infty[\longrightarrow [0,+\infty[$ est une fonction continue et croissante,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t)$ converge pour tout $t > 0$,

3) $\psi(t) < t$ pour tout $t > 0$.

Supposons que la condition suivante est vérifiée :
si $(x_n) \subset X$ est une suite croissante avec $x_n \to x$ dans X, alors :

$$x_n \leq_X x \tag{2.19}$$

S'il existe $x_0 \in X$ avec $x_0 \leq_X Fx_0$, alors il existe $x \in X$ tel que $x = Fx$. De plus, $p(x,x) = 0$.

Chapitre 3

Principe variationnel d'Ekeland dans les espaces métriques partiels

Sommaire

3.1 Principe variationnel d'Ekeland 24
3.2 Théorème du point fixe de Caristi 28
3.3 Théorème du point fixe de Clarke 29
3.4 Quelques généralisations du principe variationnel d'Ekeland 30

Ce chapitre vise à introduire ce principe fondamental et à explorer ses applications au théorème de point fixe de Caristi et de Clarke dans le contexte des espaces métriques partiels.

3.1 Principe variationnel d'Ekeland

Nous commençons cette section avec la définition suivante et lemmes qui seront utilisés dans la preuve du théorème principal.

Définition 3.1

Soit (X,p) un EMP et $\phi : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction donnée. Alors, ϕ est dit fonction semi-continue inférieur (s.c.i) sur X si pour tout $x \in X$:

$$\lim_{n\to+\infty} p(x_n,x) = p(x,x) \Longrightarrow \phi(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} \phi(x_n).$$

Lemme 3.1. Soit (X,p) un EMP. Alors :

(1) si $p(x,y)=0$, alors $x=y$,

(2) si $x \neq y$, alors $p(x,y)>0$.

Démonstration

1) Soit $p(x,y)=0$. Par (p3), on a $p(x,x) \leq p(x,y)=0$ et $p(y,y) \leq p(x,y)=0$. Alors, $p(x,x)=p(x,y)=p(y,y)=0$. Ainsi, par (p2), on trouve $x=y$.

2) Supposons que $x \neq y$. Par définition $p(x,y) \geq 0$ pour tout $x, y \in X$. On suppose que $p(x,y) = 0$. En utilisant la partie (1), $x = y$ ce qui est une contradiction. Alors, $p(x,y) > 0$ pour tout $x \neq y$.

Lemme 3.2. Soit (X,p) un EMP et supposons que (x_n) est une suite dans X telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = z$, où $z \in X$ et $p(z,z) = 0$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} p(x_n, y) = p(z,y),$$

pour tout $y \in X$.

Démonstration
Soit (X,p) un espace métrique partiel et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans X telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = z$, où $z \in X$ et $p(z,z) = 0$.
Montrons que $\lim_{n\to+\infty} |\, p(x_n,y) - p(z,y)\,| = 0$, pour tout $y \in X$.
On a :

$$p(x_n,y) \leq p(x_n,z) + p(z,y) - p(z,z) = p(x_n,z) + p(z,y),$$

alors

$$p(x_n,y) - p(z,y) \leq p(x_n,z).$$

Aussi

$$p(z,y) \leq p(z,x_n) + p(x_n,y) - p(x_n,x_n) \leq p(z,x_n) + p(x_n,y),$$

alors

$$p(z,y) - p(x_n,y) \leq p(x_n,z).$$

Donc

$$0 \leq |\, p(x_n,y) - p(z,y)\,| \leq p(x_n,z).$$

Comme, $\lim_{n\to+\infty} p(x_n,z) = 0$ on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} |\, p(x_n,y) - p(z,y)\,| = 0$$

Ce qui veut dire que :

$$\lim_{n\to+\infty} p(x_n,y) = p(z,y)$$

Remarque 3.1. Ce résultat est important car il permet de relier la notion de convergence dans les espaces métriques partiels à la notion de convergence des suites dans les espaces métriques.

Maintenant, nous énonçons et démontrons le théorème suivant :

Theorem 3.1. [3] Soit (X,p) un EMP complet et soit $\phi : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction semi-continue inférieure. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in X$ tel que :

$$\phi(x) \leq \inf_{t\in X} \phi(t) + \varepsilon \quad et \quad \inf_{t\in X} p(x,t) < 1 \tag{3.1}$$

Alors il existe un point $y \in X$ tel que

$$\phi(y) \leq \phi(x) \tag{3.2}$$

$$p(x,y) \leq 1 \tag{3.3}$$

$$\forall z \in X,\ z \neq y, \phi(z) > \phi(y) - \varepsilon p(y,z) \tag{3.4}$$

Démonstration

Soit $x \in X$ tel que (3.1) soit vrai, on défini une suite (x_n) de la manière suivante :
pour $n = 1$,on prend $x_1 = x$ de sorte que $\phi(x_1) \leq \phi(x)$ et $p(x, x_1) = p(x, x) \leq 1$.
pour les autres termes on suppose que $x_n \in X$,
avec $\phi(x_n) \leq \phi(x)$ et $p(x,x) \leq 1$, est connu et l'un des cas suivants se produisent :
(a) $\phi(x_n) - \phi(z) < \varepsilon p(x_n, z), \forall z \neq x_n$
(b) il existe $z \neq x_n$tel que $\varepsilon p(x_n, z) \leq \phi(x_n) - \phi(z)$
dans le cas (a) :
si on prend $y = x_n$ donc (3.2)-(3.4) reste vrai trivialement,
puisque $\phi(y) = \phi(x_n) \leq \phi(x)$
d'autre part, soit S_n l'ensemble de $z \in X$ tel que le cas (b) est vrai et soit $x_{n+1} \in S_n$ tel que :

$$\phi(x_{n+1}) - \inf_{t \in S_n} \phi(t) \leq \frac{1}{2}\left[\phi(x_n) - \inf_{t \in S_n} \phi(t)\right] \tag{3.5}$$

par conséquent on a :

$$\varepsilon p(x_n, x_{n+1}) \leq \phi(x_n) - \phi(x_{n+1}),\ \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.6}$$

et en utilisant l'inégalité triangulaire, on peut obtenir (pour tout $n < m$)

$$\begin{aligned}
\varepsilon p(x_n, x_m) \leq & \varepsilon[p(x_n, x_{n+1}) + p(x_{n+1}, x_{n+2}) - p(x_{n+1}, x_{n+1})] \\
& + \varepsilon[p(x_{n+2}, x_{n+3}) + p(x_{n+3}, x_{n+4}) - p(x_{n+3}, x_{n+3})] \\
& + \ldots + \varepsilon[p(x_{m-2}, x_{m-1}) + p(x_{m-1}, x_m) - p(x_{m-1}, x_{m-1})] \\
& \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{m-1} p(x_k, x_{k+1}) \\
& \leq \sum_{k=n}^{m-1} \phi(x_k) - \phi(x_{k+1}) \\
& = \phi(x_n) - \phi(x_m)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

D'après (3.6) la suite $(\phi(x_n))$ est décroissante dans $\mathbb{R}_+$ et bornée en dessous par zéro. Ainsi la suite $(\phi(x_n))$ est convergente ce qui implique que le membre droit de (3.7) tend vers 0, c'est-à-dire que $p(x_n, x_m)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Donc (x_n) est une suite de Cauchy dans l'espace métrique partielle complet (X, p). D'après le lemme 2.1, (x_n) est de Cauchy dans l'espace métrique (X, d_p) qui est complet. Alors, il existe $y \in X$ tel que la suite (x_n) converge vers y dans (X, d_p), toujours d'après le lemme 2.1 on obtient :

$$p(y,y) = \lim_{n \to +\infty} p(x_n, y) = \lim_{n \to +\infty} p(x_n, x_m) \tag{3.8}$$

Puisque $\lim_{n \to +\infty} p(x_n, x_m) = 0$, donc par (3.8) on a : $p(y,y) = 0$
on affirme que y satisfait (3.2)-3.4), d'après (3.6) la suite $(\phi(x_n))$ est décroissante, c'est a dire :

$$\phi(x) \geq \phi(x_1) \geq \ldots \geq \phi(x_n) \geq \phi(x_{n+1}) \geq \ldots$$

alors (3.2) est valable.
L'inégalité (3.3) est obtenue en prenant $n = 1$ dans (3.7) et on utilisant (3.1). En effet on

a :

$$\varepsilon p(x,x_m)=\varepsilon p(x_1,x_m)\leq \phi(x)-\phi(x_m)\leq \phi(x)-\inf_{t\in X}\phi(t)\leq \varepsilon$$

Par conséquent, en prenant $m\longrightarrow+\infty$, il s'ensuit que $p(x,y)\leq 1$.
l'inégalité (3.4) est observée par la méthode de réduction à l'absurde. on suppose que (3.4) n'est pas vrai, alors il existe $z\in X$ avec $z\neq y$ tel que :

$$\phi(z)\leq \phi(y)-\varepsilon p(y,z) \tag{3.9}$$

puisque $p(y,z)>0$, on a

$$\phi(z)\leq \phi(y) \tag{3.10}$$

D'après (3.7) on a : $\phi(x_m)\leq \phi(x_n)-\varepsilon p(x_n,x_m)\ \ \forall n\leqslant m$.
Alors en prenant $m\longrightarrow+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on peut obtenir

$$\phi(y)\leq \lim_{m\longrightarrow+\infty}\inf\phi(x_n)\leq \phi(x_n)-\varepsilon p(x_n,y) \tag{3.11}$$

De (p_4) (l'inégalité triangulaire) on a :

$$p(x_n,z)\leq p(x_n,y)+p(y,z)-p(y,y)=p(x_n,y)+p(y,z),$$

ensuite, on utilisant cette inégalité, (3.9) et d'après (3.11) on obtient :

$$\phi(z)\leq \phi(y)-\varepsilon p(y,z)\leq \phi(x_n)-\varepsilon p(x_n,z),$$

ce qui implique que $z\in S_n$, for all $n\in\mathbb{N}$. On peut remarquer que (3.5) peut s'écrire comme :

$$2\phi(x_{n+1})-\phi(x_n)\leq \inf_{t\in S_n}\phi(t)\leq \phi(z)\leq \phi(x_n).$$

Par conséquent, la suite $(\phi(x_n))$ est une suite décroissante dans $\mathbb{R}_+$, alors il existe $L\geq 0$ tel que :

$$\lim_{n\to+\infty}\phi(x_n)=L$$

Soit $n\to+\infty$ dans l'inégalité précédente, Alors on obtient $L\leq\phi(z)$,
d'autre part, puisque ϕ est s.c.i alors on a $\phi(y)\leq \lim_{n\to+\infty}\phi(x_n)=L$ et donc on obtient : $\phi(y)\leq\phi(z)$, c'est une contradiction avec (3.10).

On note que si dans le théorème 3.1, on ne suppose pas que $\inf_{t\in S_n}p(x,t)<1$ alors on peut (seulement) en déduire qu'il y a existe $y\in X$ tel que (3.2) et (3.4) sont vrais.

Theorem 3.2. [3](Principe variationnel d'Ekeland)
Soit (X,p) un EMP complet et soit $\phi:X\to\mathbb{R}^+$ une fonction semi-continue inférieure.
Étant donné $\varepsilon>0$, alors il existe $y\in X$ tel que :

$$\phi(y)\leq \inf_{t\in X}\phi(t)+\varepsilon \tag{3.12}$$

$$\forall z\in X,\phi(z)>\phi(y)-\varepsilon p(y,z) \tag{3.13}$$

Démonstration
La preuve est claire.En effet, en rappelant qui'il existe toujours un point x tel que $\phi(y) \leq \underset{t\in X}{inf}\phi(t)+\varepsilon$, puis (3.12) et (3.13) suivent de (3.2) et (3.4) respectivement, on remarque que le théorème 3.1 est plus fort que 3.2.
Précisément, la principale différence réside dans l'inégalité (3.1).Ce qui n'a pas d'équivalent dans le théorème 3.2.Ainci, le théorème 3.1 est dit être l'énoncé fort, et le théorème 3.2 est dit être l'énoncé faible.

3.2 Théorème du point fixe de Caristi

Le théorème suivant est une extension du résultat de Caristi [[6], Théorème 2.1].

Theorem 3.3. [3] Soit (X,p) un EMP complet et soit $\phi : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction semi-continue inférieure. Alors n'importe quelle application $T : X \to X$ satisfaisante

$$p(x,Tx) \leq \phi(x)-\phi(Tx) \tag{3.14}$$

pour chaque $x \in X$ admet un point fixe dans X.

Démonstration
On applique le théorème 3.2 (pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$) à la fonction T satisfaisant (3.14) est appeler un Caristi fonction sur (X,p), alors il existe un point $y \in X$ tel que :

$$\forall t \in X, \phi(t) \geq \phi(y)-\frac{1}{2}p(y,t)$$

Cette inégalité est également vrai pour $t = Ty$, donc :

$$\phi(y)-\phi(Ty) \leq \frac{1}{2}p(y,Ty)$$

En substituant $x = y$ dans l'inégalité (3.14), on peut obtenir :

$$p(y,Ty) \leq \phi(y)-\phi(Ty)$$

En comparant les dernières inégalités, on déduit que :

$$p(y,Ty) \leq \frac{1}{2}p(y,Ty)$$

Cela est valable à moins que $p(y,Ty) = 0$, et donc d'après le lemme 3.1 nous avons $Ty = y$, c'est à dire que T admet un point fixe.

3.3 Théorème du point fixe de Clarke

En 1976, Clarke [7] a étendu le principe de la contraction de Banach pour certaines contractions directionnelles (voir condition (D) du Théorème suivant) sur les sous-ensembles convexes fermés des espaces de Banach.

Theorem 3.4. [3]
Soit X un sous-ensemble convexe fermé d'un espace de Banach et soit $T : X \to X$ une application continue satisfaisante la condition suivante :
(D) Il existe $k \in (0,1)$ tel que pour chaque $u \in X$, il existe $t \in (0,1)$ pour lequel

$$\|T(u_t) - T(u)\| \leq k\|u_t - u\|,$$

où $u_t = tT(u) + (1-t)u$ décrit le segment de droite de u à $T(u)$ lorsque t va de 0 à 1. Alors T a un point fixe dans X.

Démonstration
La preuve ici repose sur la considération d'une métrique partielle (pas une métrique). Tout d'abord, nous appliquons le théorème 3.2 au fonction $\varphi : X \to \mathbb{R}^+$ donnée par :

$$\varphi(w) = \|w - T(w)\| + b$$

pour tout $w \in X$ où $b > 0$ est arbitraire et $0 < \varepsilon < 1 - k$. Ensuite, nous définissons la métrique partielle $p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ par :

$$p(w,z) = \|w - z\| + b$$

De toute évidence, p n'est pas une métrique puisque $p(w,w) = b > 0$. De plus,

$$d_p(w,z) = 2\|w - z\|$$

et donc (X,p) est un espace métrique partiel complet. Puisque
$T : (X, \|.\|) \to (X, \|.\|)$ est continue, alors si $w_n \to w$ dans $(X, \|.\|)$, on trouve $T(w_n) \to T(w)$ dans $(X, \|.\|)$. Notez que $\varphi(w) = p(w, T(w))$. Maintenant, soit $w_n \to w$ dans (X,p), alors :

$$\lim_{n \to +\infty} p(w_n, w) = p(w,w)$$

Par définition de la métrique partielle, on obtient que :

$$\lim_{n \to +\infty} \|w_n - w\| = 0$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \|T(w_n) - T(w)\| = 0$. En conséquence, nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} \|w_n - T(w_n)\| = \|w - T(w)\|,$$

c'est à dire :

$$\lim_{n \to +\infty} \varphi(w_n) = \varphi(w)$$

Nous concluons que φ est continue et donc il est s.c.i dans X. D'après le théorème 3.2, il existe un $y \in X$ tel que :

$$\forall w \in X, \varphi(w) \geq \varphi(y) - \varepsilon p(w,y),$$

c'est à dire :

$$\|w-T(w)\| \geq \|y-T(y)\| - \varepsilon(\|w-y\|+b) \tag{3.15}$$

Par condition (D), il existe $k \in [0,1]$ et $t \in [0,1]$ tels que :

$$\|T(y_t)-T(y)\| \leq k\|y_t-y\| \leq kt\|y-T(y)\|$$

On pose $w = y_t$ dans inégalité (3.15), on obtient :

$$\begin{aligned}\|y-T(y)\| &\leq \|y_t-T(y_t)\| + \varepsilon(\|y_t-y\|+b)\\ &\leq \|y_t-T(y)\| + \|T(y)-T(y_t)\| + \varepsilon(\|y-T(y)\|+b)\\ &\leq \|y_t-T(y_t)\| + kt\|y-T(y)\| + \varepsilon(\|y_t-y\|+b)\end{aligned}$$

Maintenant, puisque y_t appartient au segment de droite $[y, T(y)]$, nous avons :

$$\begin{aligned}\|y-T(y)\| &\leq \|y-y_t\| + \|y_t-T(y)\|\\ &= t\|y-T(y)\| + \|y_t-T(y)\|.\end{aligned}$$

Il s'ensuit facilement que :

$$t\|y-T(y)\| \leq (k+\varepsilon)t\|y-T(y)\| + \varepsilon b,$$

pour chaque $b > 0$. Par conséquent, en laissant $b \to 0$, nous déduisons que :

$$t\|y-T(y)\| \leq (k+\varepsilon)t\|y-T(y)\|.$$

Puisque $t > 0$, on divise par t pour obtenir :

$$\|y-T(y)\| \leq (k+\varepsilon)\|y-T(y)\|,$$

ce qui est valable à moins que $y = Ty$, puisque $k+\varepsilon < 1$.
Par conséquent, y est un point fixe de T.

3.4 Quelques généralisations du principe variationnel d'Ekeland

Rppellons que la formule classique du principe variationnel d'Ekeland est la suivante :

Theorem 3.5. [9] Soit (X,p) est un espace métrique. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) (X,p) est complet.

2) pour chaque fonction $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ semi-continue inférieurement et bornée admet un d-point, il existe $x \in X$ tel que

$$\phi(x) < \phi(y) + d(x,y) \quad \forall y \in X, x \neq y \tag{3.16}$$

Définition 3.2: [9]

Soient (X,p) un espace métrique partiel et la fonction $\phi : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$. Un point $x \in \mathrm{dom}\phi := \phi^{-1}(\mathbb{R})$ est appelé un p-point de ϕ si :

$$\phi(x)+p(x,x)<\phi(y)+p(x,y) \quad \forall y \in X, y \neq x \ \ /p(y,y)=p(x,x) \tag{3.17}$$

notons que si $p := d$ est une métrique, cette définition coïncide avec l'habituel (3.16). Observez que p-points sont dans dom ϕ, et que tout minimum global de ϕ est un p-point. En effet, considérons que x est un minimum global de ϕ et $y \neq x$ tel que $p(y,y)=p(x,x)$. Par conséquent, $p(x,y)>p(x,x)$ et on obtient

$$\phi(x)\leq\phi(y)<\phi(y)+p(x,y)-p(x,x)$$

x est un p-point de ϕ.

Nous donnons maintenant un principal résultat sur le principe variationnel d'Ekeland sur les espaces métriques partiels.

Theorem 3.6. [9] Soit (X,p) est un espace métrique partiel complet et soit : $\phi : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ semi-continue inférieurement et bornée. Soient $x_0 \in \mathrm{dom}\phi$ et $\lambda > 0$ fixé. Alors il existe $\overline{x} \in X$ tel que $p(\overline{x},\overline{x})=p(x_0,x_0)$ et

1) $\phi(\overline{x})-\phi(x_0)\leq\lambda(p(x_0,x_0)-p(\overline{x},x_0))\leq 0$,

2) $\phi(\overline{x})+\lambda p(\overline{x},\overline{x})<\phi(y)+\lambda p(\overline{x},y)$ pour tout $y \in X$, $y \neq \overline{x}$ tel que $p(y,y)=p(\overline{x},\overline{x})$ alors ϕ admet un p-point.

L'inverse du théorème ci-dessus est le suivant :

Theorem 3.7. [9] Soit (X,p) un espace métrique partiel complet et soit pour toute $\phi : X \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ semi-continue inférieurement et bornée et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x_\varepsilon \in X$ tel que :

$$\phi(x_\varepsilon)\leq\inf_{x\in X}\phi(x)+\varepsilon$$

et

$$\phi(x_\varepsilon)+\varepsilon p(x_\varepsilon,x_\varepsilon)\leq\phi(x)+\varepsilon p(x,x_\varepsilon) \quad \forall x \in X$$

Conclusion

Dans ce travail, on a présenté le principe variationnel d'Ekeland dans les espaces métriques et les espaces métrique partiels. Ainssi que l'application de ce principe au théorème du point fixe de Caristi et de Clarke dans ces espaces.

Bibliographie

[1] I. Altun and A. Erduran, *Fixed point theorems for monotone mappings on partial metric spaces*, Fixed Point Theory Appl, (2011), Article ID 508730.

[2] I. Altun, F. Sola, H. Simsek, *Generalized contractions on partial metric*, spaces Topology and its Applications 157, 2778-2785 (2010).

[3] H. Aydi, E. Karapınar and C. Vetro, *On Ekeland's Variational Principle in Partial Metric Spaces*, Appl. Math. Inf. Sci. 9, No. 1, 257-262 (2015).

[4] F. Bakir, *Topologie générale*, Université A. Mira de Béjaia - Algérie.

[5] E. Brugallé, *Topologie des espaces métriques et calcul différentiel*, Université de Nantes, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, 2 rue de la Houssinière, Décembre (2018).

[6] J. Caristi, *Fixed Point Theorems for Mappings Satisfying Inwardness Conditions*, Transactions of the American Mathematical Society 215, 241-251 (1976).

[7] F. Clarke, *Pointwise contraction criteria for the existence of fixed points*, MRC Technical Report 1658, University of Wisconsin, Madison, Wis. Bull. Canad. Math. Soc. July (1976).

[8] C. Dazé, *Théorèmes de point fixe et principe variationnel d'Eklend*, Université de Montréal, février (2010).

[9] M. Djedidi, *Existance et stabilité de point fixe et de meilleure point de proximité pour les fonctions et les multifonctions définies sur des différents espaces*, Thése de doctorat, Université de Biskra.

[10] I. Ekeland, *Nonconvex Minimization Problems*, Bulletin of the American Mathematical Society, 1, 443-474 (1979).

[11] I. Ekeland, *On the variational principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 47, 324-353 (1974).

[12] A. El Jai, *Eléments de topologie et espaces métriques*, Presses Universitaires de Perpignan, (2007).

[13] L.G. Huang, X. Zhang, *Cone metric spaces and fixed point theorems for contractive*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 332, 1468-1476 (2007).

[14] E. Karapınar, *Some fixed point theorems on the class of comparable partial metric spaces*, Applied General Topology, 12, 187-192 (2011).

[15] E. Karapınar, *Generalizations of Caristi Kirk's Theorem on Partial Metric Spaces*, Fixed Point Theory and Applications, 4 (2011).

[16] E. Karapınar, U. Yuksel, *Some common fixed point theorems in partial metric spaces*, Journal of Applied Mathematics, Vol. (2011), Article ID 263621, 17 pages.

[17] R.D. Kopperman, S.G. Matthews, H. Pajoohesh, *What do partial metrics represent?, Notes distributed at the 19th Summer Conference on Topology and its Applications*, University of CapeTown, (2004).

[18] S.G. Matthews, *Partial metric topology*, in Papers 8th Summer Conference on General Topology and Applications, New York Acad. Sci, 728, 183-197(1994).

[19] B. Samet, M. Rajović, R. Lazović, R. Stoiljković,*Common fixed-point results for nonlinear contractions in ordered partial metric spaces*, Fixed Point Theory and Applications, 71 (2011).