République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

présenté par :

BEN DEBBAH Abla

Thème

Sur les séries des inverses de certaines suites classiques

Évalué le 14/09/21 par le jury composé de :

M^r	**AIT-AMRANE Lyes**	**M.C.A.**	**E.S.I.(Alger)**	**Encadreur**
M^{me}	**AIT-AMRANE N. Rosa**	**M.A.A.**	**U.Y.F.M.**	**Examinatrice**
M^{me}	**GUETTAI Ghania**	**M.C.B.**	**U.Y.F.M.**	**Examinatrice**

2020-2021

Dédicace

À mes très chers parents

Qui ont été toujours là pour moi, pour leurs soutiens durant toute ma formation, leurs patiences, leurs amours et leurs encouragements tout au long de mes études et au cours de la réalisation de ce mémoire.

À mes soeurs et mes frères.
À mon cher mari.
À toutes ma familles et mes amies .
À tous ceux qui m'ont aidé afin de réaliser ce travail.
À tous, je dédie ce travail.

Remerciements

Au terme de ce travail, nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant, le miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience nécessaire en vue d'accomplir ce modeste travail.

que tous ceux qui ont participé à la réalisation de ce mémoire, trouvent ici l'expression de notre grande et sincère reconnaissance, et tout particulièrement :

à mon encadreur de mémoire ***Mr Ait-Amrane Lyes*** *, Maître de Conférences, pour avoir accepté d'encadrer, son support, ses encouragements, sa patience qu'il n'à cessé d'apporter tout au long de ce travail.*

Un grand merci aussi à ***Mme Ait-Amrane N. Roza*** *et* ***Mme GUETTAI Ghania*** *d'accepter d'examiner ce mémoire.*

nous remercions chaleureusement tous les enseignants du département de recherche opérationnelle de l'université YAHIA FARES, Médéa

Enfin, nous remercions nos amis qu'on n'a pas cités et qui ont toujours été là pour nous. Leurs soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, on étudie quelques séries des inverses de certaines suites classiques comme la suite de Fibonacci et la suite Lucas. On commence par montrer que ces séries convergent, puis on calcule la partie entière de ces séries ainsi que la partie entière des séries des inverses des carrés de ces suites.

Mots-clés : Suite récurrente linéaire, suite de Fibonacci, suite de Lucas, suite de Horadam, suite hyper-Fibonacci, suite hyper-Lucas, série numérique, convergence, partie entière.

ABSTRACT

In this dissertation, we study infinite sums of reciprocal of somme classical sequences such as the Fibonacci sequence and the Lucas sequence. We start by showing that these infinite sums converge, then we calculate the integer part of these sums as well as the integer part of sums of reciprocal of the squares of these sequences.

Keywords : Linear recurrence sequence, Fibonacci sequence, Lucas sequence, Horadam sequence, hyper-Fibonacci sequence, hyper-Lucas sequence, numerical series, convergence, integer part.

Table des matières

1 Définitions élémentaires **4**
- 1.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre p . . . 4
- 1.2 Polynôme caractéristique et équation caractéristique . . . 4
- 1.3 Fonction génératrice . . . 4
- 1.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre deux . . . 5
- 1.5 Suite des nombres de Fibonacci . . . 5
  - 1.5.1 Formule de récurrence . . . 5
  - 1.5.2 Fonction génératrice . . . 6
  - 1.5.3 Forme de Binet . . . 6
  - 1.5.4 Quelque identités combinatoires . . . 7
- 1.6 Suite des nombres de Lucas . . . 9
  - 1.6.1 Formule de récurrence . . . 9
  - 1.6.2 Fonction génératrice . . . 9
  - 1.6.3 Forme de Binet . . . 10
- 1.7 Relations entre la suite de Fibonacci et la suite de Lucas . . . 11
- 1.8 La suite de Horadam . . . 12
  - 1.8.1 Fonction génératrice . . . 13
  - 1.8.2 Forme de Binet . . . 13
- 1.9 Nombres Hyper-Fibonacci et Hyper-Lucas . . . 13
  - 1.9.1 Fonction génératrice . . . 14

2 Sur la série des inverses des nombres de Fibonacci **15**
- 2.1 Série des inverses des nombres de Fibonacci . . . 15
- 2.2 Série des inverses des nombres de Fibonacci au carré . . . 20

3 Sur les séries des inverses de quelques suites de Fibonacci Généralisées **24**
- 3.1 Suite de Fibonacci généralisée $(G_n)_n$ . . . 24
  - 3.1.1 Forme de Binet . . . 24
- 3.2 Suite de Fibonacci généralisée $(H_n)_n$ . . . 30
  - 3.2.1 Forme de Binet . . . 30
- 3.3 Suite de Jacobsthal . . . 35
  - 3.3.1 Forme de Binet . . . 36
- 3.4 Suites Hyper-Fibonacci et Hyper-Lucas . . . 36

Introduction

Il est facile de voir que la série des inverses des nombres de Fibonacci non nuls $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$, où $(F_n)_n$ désigne la suite de Fibonacci, est convergente. En 1989, Richard André-Jeannin [1] a montré, sous certaines conditions, l'irrationalité de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{w_n}$, où x est un entier et $(w_n)_n$ une suite d'entiers solution d'une récurrence d'ordre 2. En particulier, il montre que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{F_n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{L_n}$, où $(L_n)_n$ désigne la suite de Lucas, sont irrationnelles pour $x = \pm 1$. Plus tard, Eric W. Weisstein [15] a montré que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n} = 3,35988566....$

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la partie entière de la série des inverses de certaines suites récurrentes linéaires. En 2008/2019, Ohtsuka et Nakamura [10] ont étudié la partie entière de $\left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k}\right)^{-1}$ pour un entier $n \geq 1$, ils ont montré

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k}\right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_{n-2}, & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ F_{n-2} - 1, & \text{si } n \text{ est impair ,} \end{cases}$$

et

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k^2}\right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_{n-1}F_n - 1, & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ F_{n-1}F_n, & \text{si } n \text{ est impair .} \end{cases}$$

Ces résultats ont interessés plusieurs chercheurs et ont été généralisés à plusieurs autres suites comme la suites des nombres hyper-Fibonacci de première espèce et la suite bi-périodique de Fibonacci.

En 2011, S. Holliday et Komatsu [7] ont généralisé les résultats précédents aux suites de Fibonacci généralisés $(G_n)_n$ et $(H_n)_n$ définies, pour $a, c \in \mathbb{N}^*$, par :

$$\begin{cases} G_0 = 0,\ G_1 = 1, \\ G_{n+2} = G_{n+1} + G_n, \quad n \geq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} H_0 = c,\ H_1 = 1, \\ H_{n+2} = H_{n+1} + H_n, \quad n \geq 0 \end{cases}.$$

Par exemple, la généralisation du premier résultat à la suite $(G_n)_n$ est donnée par :

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k}\right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} G_n - G_{n-1}, & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ G_n - G_{n-1} - 1, & \text{si } n \text{ est impair .} \end{cases}$$

Ils ont aussi généralisé le premier résultat à la suite de Jacobsthal $(J_n)_n$ comme suit :

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k}\right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} J_{n-1} - 1, & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ J_{n-1}, & \text{si } n \text{ est impair .} \end{cases}$$

En 2012, Liu et Zhao [11] ont généralisés les deux premiers résultats à la suite hyper-Fibonacci de première espèce $\left(F_n^{(1)}\right)_n$ et à la suite hyper-Lucas de première espèce $\left(L_n^{(1)}\right)_n$. C'est à ces travaux cités ci-dessus que l'on s'intéressera dans ce mémoire, mais on peut aussi citer d'autres généralisations, comme celle de Wenpeng et Tingting [16] qui, en 2012, ont généralisé les résultats cités ci-dessus à la suite de Pell ; celle de Kuhapatanakul [9] qui, en 2013, a considéré d'autres suites de Fibonacci généralisées. En 2016, Başbük et Yazlik [3] on considéré la suite bi-périodique de Fibonacci et en 2018, Choia et Chooa [4] ont étudié la partie entière de la série des inverses de produit de nombres de Fibonacci et de Lucas.

Notation

$\mathbb{N}$: L'ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{Z}$: L'ensemble des nombres entiers relatifs.

$\mathbb{R}$: Le corps des nombres réels.

$\mathbb{C}$: Le corps des nombres complexe.

$\mathbb{K}$: Corps commutatif désignant $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

$\lfloor . \rfloor$: Partie entière inférieure.

Chapitre 1

Définitions élémentaires

L'objectif de ce chapitre est de présenter et fixer les notations dont nous aurons besoin au long de ce document. Nous citons les définitions élémentaires des suites récurrentes linéaires d'ordre p, polynôme et équation caractéristique, fonction génératrice, forme de Binet, suite de Fibonacci, suite de Lucas, suite de Horadam, suite hyper-Fibonacci et suite hyper-Lucas.

1.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre p

Définition 1.1.1 *On appelle suite récurrente linéaire d'ordre p, toute suite $(u_n)_n$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ définie, pour tout $n \geq n_0$, par une relation de récurrence linéaire :*

$$u_{n+p} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \ldots + a_{p-1} u_{n+p-1}, \tag{1.1}$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$, sont p scalaires fixés de $\mathbb{K}$.
Une telle suite est entièrement déterminée par la donnée de ses p premiers termes et par la relation de récurrence (1.1).

1.2 Polynôme caractéristique et équation caractéristique

Définition 1.2.1 *Le polynôme caractéristique associé à une suite vérifiant la relation de récurrence ci-dessus est :*

$$P(X) = X^p - \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i,$$

son degré est ainsi égal à l'ordre de la relation de récurrence.

Définition 1.2.2 *L'équation caractéristique associé à une suite $(u_n)_n$ vérifiant la relation de récurrence ci-dessus est :*

$$P(x) = 0,$$

où $P(X)$ est le polynôme caractéristique associé à la suite $(u_n)_n$.

1.3 Fonction génératrice

Définition 1.3.1 *Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite à valeur dans $\mathbb{K}$. On appelle fonction génératrice ordinaire de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, la fonction*

$$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Exemple 1 *$G(x) = 1 + 2x + \ldots + (n+1)x^n + \ldots$ est la fonction génératrice de la suite 1,2,3,4,... .*

1.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

Définition 1.4.1 *Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une relation de la forme*

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \qquad n \in \mathbb{N} \tag{1.2}$$

et des condition initiales $(u_0, u_1) \in \mathbb{K}^2$, où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.
L'équation

$$x^2 - ax - b = 0 \tag{1.3}$$

est appelée ***équation caractéristique*** *de la suite $(u_n)_n$.*

Proposition 1.4.1 *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,on a les propriétés suivantes :*
• *Si l'équation caractéristique admet deux solution réelles distinctes r_1 et r_2, alors :*

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad tel\ que \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

• *Si l'équation caractéristique admet une solution double r,alors :*

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad tel\ que \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r^n + \mu n r^n$$

• *Si l'équation caractéristique admet deux racines complexes (non réelles) conjuguées $r_1 = re^{i\theta}$ $r_2 = re^{-i\theta}$ (avec $r>0$ et $\theta \in \mathbb{R}$), alors :* $\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad tel\ que \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n(\lambda\cos(n\theta) + \mu\sin(n\theta))$.

Proposition 1.4.2 ***Si*** *$\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a :*
• *Si l'équation caractéristique admet deux solution distinctes r_1 et r_2, alors :*

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad tel \quad que \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

• *Si l'équation caractéristique admet une solution double r, alors :*

$$\exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad tel\ que \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r^n + \mu n r^n.$$

1.5 Suite des nombres de Fibonacci

La suite de Fibonacci est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent. Elle commence généralement par les termes 0 et 1 et ses premiers termes sont :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

1.5.1 Formule de récurrence

Définition 1.5.1 *La suite de Fibonacci, notée $(F_n)_{n\geq 0}$, est définie par les valeurs initiales*

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1$$

et par la relation de récurrence :

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \qquad (n \geq 2). \tag{1.4}$$

1.5.2 Fonction génératrice

Théorème 1.5.1 *La fonction génératrice ordinaire de la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est :*

$$G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}. \tag{1.5}$$

Preuve. La relation de récurrence (1.4) donne :

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n,$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_0 - xF_1 = x\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^{n-1} + x^2\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^{n-2}.$$

Par un changement d'indice, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_0 - xF_1 = x\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n - F_0 + x^2\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n,$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = x + x\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n + x^2\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n,$$

ce qui nous donne

$$G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

■

1.5.3 Forme de Binet

Définition 1.5.2 *La forme de Binet est une formule explicite qui s'écrit en fonction des racines de l'équation caractéristique associée à la relation de récurrence.*

Théorème 1.5.2 *La forme de Binet de la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ est donnée par*

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \qquad (n \geq 2), \tag{1.6}$$

où

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad et \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

sont les racines de l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$ associée à la relation de récurrence (1.4).

Preuve. Notons par $G(x)$ la fonction génératrice ordinaire de la suite de Fibonacci, alors

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \\ &= \frac{x}{1-x-x^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x}\right), \end{aligned}$$

ce qui équivalent à

$$\begin{aligned}\sqrt{5}G(x) &= \frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^n - \beta^n) x^n,\end{aligned}$$

donc

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} x^n,$$

i.e,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}.$$

■

Remarque 1.5.1 *On a*

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha - \beta = \sqrt{5}, \quad \alpha\beta = -1, \quad \alpha^2 = 1 + \alpha, \quad \beta^2 = 1 + \beta. \tag{1.7}$$

Prolongement aux indices négatifs

Soit $n \in \mathbb{N}$, on peut définir les nombres de Fibonacci d'indices négatifs comme suit :

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n, \qquad (n \geq 0). \tag{1.8}$$

En effet, en utilisant la formule de Binet (1.6), on obtient :

$$\begin{aligned}F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} &\implies (\alpha\beta)^n F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} (\alpha\beta)^n \\ &\implies (-1)^n F_{-n} = \frac{\beta^n - \alpha^n}{\alpha - \beta} \\ &\implies (-1)^n F_{-n} = -\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ &\implies F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.\end{aligned}$$

1.5.4 Quelque identités combinatoires

Théorème 1.5.3 *Pour tout entier $n \geq 0$, on a :*

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}, \tag{1.9}$$

$$F_{n+2}^2 - F_{n+1} F_{n+3} = (-1)^{n+1}, \tag{1.10}$$

Preuve. D'après le formule (1.6), on a :

$$\begin{aligned}
F_{n+1}^2 + F_n^2 &= \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= \frac{\alpha^{2n+2} + \beta^{2n+2} - 2\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + \alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2\alpha^n\beta^n}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha\alpha^{2n+1} + \beta\beta^{2n+1} - 2(\alpha\beta)\alpha^n\beta^n + \frac{\alpha^{2n+1}}{\alpha} + \frac{\beta^{2n+1}}{\beta} - 2\alpha^n\beta^n}{(\alpha-\beta)^2}. \\
&= \frac{\alpha\alpha^{2n+1} + \beta\beta^{2n+1} + 2\alpha^n\beta^n - \beta\alpha^{2n+1} - \alpha\beta^{2n+1} - 2\alpha^n\beta^n}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1}(\alpha-\beta) + (\beta-\alpha)\beta^{2n+1}}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{(\alpha-\beta)} \\
&= F_{2n+1}.
\end{aligned}$$

D'après le formule (1.6), on a :

$$\begin{aligned}
F_{n+2}^2 - F_{n+1}F_{n+3} &= \left(\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+3} - \beta^{n+3}}{\alpha - \beta}\right) \\
&= \frac{\alpha^{2n+4} + \beta^{2n+4} - 2\alpha^{n+2}\beta^{n+2} - \alpha^{2n+4} - \beta^{2n+4} + \alpha^{n+1}\beta^{n+3} + \alpha^{n+3}\beta^{n+1})}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha^{n+1}\beta^{n+3} + \alpha^{n+3}\beta^{n+1} - 2\alpha^{n+2}\beta^{n+2}}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{(\alpha\beta)^{n+1}(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \frac{(\alpha\beta)^{n+1}(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= (\alpha\beta)^{n+1} \\
&= (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

■

Théorème 1.5.4 *(L'identité de D'Ocagne) Pour $n, r \in \mathbb{N}$, on a :*

$$F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n = (-1)^n F_r. \tag{1.11}$$

Preuve. Posons

$$u_n = F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n, \quad (\text{pour } \ n \geq 0).$$

Tout d'abord, pour $n = 0$, on a :

$$u_0 = F_rF_1 - F_{r+1}F_0 = F_r,$$

et pour $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= F_{n+r+1}F_{n+2} - F_{n+r+2}F_{n+1} \\
&= F_{n+r+1}(F_{n+1} + F_n) - (F_{n+r+1} + F_{n+r})F_{n+1} \\
&= F_{n+r+1}F_{n+1} + F_{n+r+1}F_n - F_{n+r+1}F_{n+1} - F_{n+r}F_{n+1} \\
&= F_{n+r+1}F_n - F_{n+r}F_{n+1} \\
&= -u_n.
\end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est donc géométrique de premier terme $u_0 = F_r$ et de raison -1, il en découle que $u_n = (-1)^n F_r$ pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire

$$F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n = (-1)^n F_r.$$

■

Théorème 1.5.5 *(L'identité de Catalan) Pour tout $n, r \in \mathbb{N}$, on a :*

$$F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-r}F_r^2. \tag{1.12}$$

Preuve. Par la forme de Binet (1.6), pour $n, r \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\begin{aligned}
F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} &= \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta}\right) \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\alpha^{2n} + \beta^{2n} - 2(\alpha\beta)^n - \alpha^{2n} + \alpha^{n+r}\beta^{n-r} + \beta^{n+r}\alpha^{n-r} - \beta^{2n}\right) \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}(-2(\alpha\beta)^n + \alpha^{n+r}\beta^{n-r} + \beta^{n+r}\alpha^{n-r}) \\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}(-2 + \alpha^r\beta^{-r} + \beta^r\alpha^{-r}) \\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}\left(-2 + \frac{\alpha^r}{\beta^r} + \frac{\beta^r}{\alpha^r}\right) \\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha-\beta)^2}\frac{(\alpha^r - \beta^r)^2}{(\alpha\beta)^r} \\
&= (\alpha\beta)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= (-1)^{n-r}F_r^2. \qquad (\text{car } \alpha\beta = -1)
\end{aligned}$$

■

Corollaire 1.5.1 *(L'identité de Cassini) pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n. \tag{1.13}$$

1.6 Suite des nombres de Lucas

1.6.1 Formule de récurrence

Définition 1.6.1 *La suite des nombre de Lucas, notée $(L_n)_{n\geq 0}$ est définie par les valeurs initiales*

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1.$$

et par la relation de récurrence :

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1}. \tag{1.14}$$

1.6.2 Fonction génératrice

Théorème 1.6.1 *La fonction génératrice ordinaire de la suite de Lucas est donnée par :*

$$H(x) = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}.$$

Preuve. Par la formule (1.14) et en faisant la somme sur $n \geq 2$, on trouve

$$\sum_{n=2}^{\infty} L_n x^n = \sum_{n=2}^{\infty} L_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} L_{n-2} x^n,$$

alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n - L_0 - x L_1 = x \sum_{n=2}^{\infty} L_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} L_{n-2} x^{n-2}.$$

Par un changement d'indice, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n - 2 - x = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n - L_0 \right) + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n,$$

ce qui nous donne le résultat suivant

$$(1 - x - x^2) \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = 2 - x.$$

D'où

$$H(x) = \frac{2 - x}{1 - x - x^2}.$$

■

1.6.3 Forme de Binet

Le terme générale L_n de la suite de Lucas s'exprime en fonction du nombre d'or α par la formule de Binet dans le théorème suivant, analogue à la formule de Binet pour les nombres de Fibonacci.

Théorème 1.6.2 *Le terme générale de la suite de Lucas est donné par*

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \qquad n \geq 0. \tag{1.15}$$

Preuve. En utilisant les propriété de la fonction génératrice et par le théorème 1.6.1, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^n + \beta^n) x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n x^n \\ &= \frac{1}{1 - \alpha x} + \frac{1}{1 - \beta x} \\ &= \frac{2 - (\alpha + \beta)x}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)} \\ &= \frac{2 - x}{1 - x - x^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n. \end{aligned}$$

Donc

$$L_n = \alpha^n + \beta^n, \qquad n \geq 0.$$

■

Théorème 1.6.3 *Pour $n \geq 0$,*

$$L_{n+1} L_{n+3} - L_n L_{n+4} = 10(-1)^{n+1}. \tag{1.16}$$

$$L_{n+1}^2 - L_{n+1} L_{n+3} = 5(-1)^n. \tag{1.17}$$

Preuve. D'après la formule de Binet (1.15), on a :

$$\begin{aligned}
L_{n+1}L_{n+3} - L_nL_{n+4} &= (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})(\alpha^{n+3} + \beta^{n+3}) - (\alpha^n + \beta^n)(\alpha^{n+4} + \beta^{n+4}) \\
&= \alpha^{2n+4} + \beta^{2n+4} + \alpha^{n+1}\beta^{n+2} + \alpha^{n+3}\beta^{n+1} \\
&-\alpha^{2n+4} - \beta^{2n+4} - \alpha^n\beta^{n+4} - \alpha^{n+4}\beta^n \\
&= \alpha^{n+1}\beta^{n+2} + \alpha^{n+3}\beta^{n+1} - \alpha^n\beta^{n+4} - \alpha^{n+4}\beta^n \\
&= \alpha^n\beta^n\left(\alpha^3\beta + \alpha\beta^3 - \alpha^4 - \beta^4\right) \\
&= \alpha^n\beta^n\left(\alpha - \beta\right)\left(\beta^3 - \alpha^3\right) \\
&= \alpha^n\beta^n\left(\alpha - \beta\right)\left(\beta\beta^2 - \alpha\alpha^2\right) \\
&= \alpha^n\beta^n\left(\alpha - \beta\right)\left(\beta(\beta+1) - \alpha(\alpha+1)\right) \\
&= \alpha^n\beta^n\left(\alpha - \beta\right)\left(\beta^2 + \beta - \alpha^2 - \alpha\right) \\
&= \alpha^n\beta^n\left(\alpha - \beta\right)\left(2\beta + 1 - 2\alpha - 1\right) \\
&= \alpha^n\beta^n\left(\alpha - \beta\right)\left(2\beta - 2\alpha\right) \\
&= -2\alpha^n\beta^n\left(\alpha - \beta\right)^2 \\
&= 10(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

D'après la formule de Binet (1.15), on a :

$$\begin{aligned}
L_{n+2}^2 - L_{n+1}L_{n+3} &= (\alpha^{n+2} + \beta^{n+2})^2 - (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})(\alpha^{n+3} + \beta^{n+3}) \\
&= \alpha^{2n+4} + \beta^{2n+4} + 2\alpha^{n+2}\beta^{n+2} - \alpha^{2n+4} - \beta^{2n+4} - \alpha^{n+1}\beta^{n+3} - \alpha^{n+3}\beta^{n+1} \\
&= 2\alpha^{n+2}\beta^{n+2} - \alpha^{n+1}\beta^{n+3} - \alpha^{n+3}\beta^{n+1} \\
&= (\alpha\beta)^{n+1}(2\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2) \\
&= -(\alpha\beta)^{n+1}(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) \\
&= -(\alpha\beta)^{n+1}(\alpha - \beta)^2 \\
&= -5(-1)^{n+1} \\
&= -(-5(-1)^n) \\
&= 5(-1)^n.
\end{aligned}$$

■

1.7 Relations entre la suite de Fibonacci et la suite de Lucas

Théorème 1.7.1
1. Pour tout $n \geq 1$, on a :

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}. \tag{1.18}$$

2. Pour tout $n \geq 2$, on a :

$$L_n = F_{n-2} + F_{n+2}. \tag{1.19}$$

3. Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$F_{2n} = F_nL_n. \tag{1.20}$$

Preuve.
1. En utilisant la formule de Binet, on obtient pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} F_{n-1}+F_{n+1} &= \frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{(\alpha^{n+1}+\alpha^{n-1})-(\beta^{n+1}+\beta^{n-1})}{\alpha-\beta} \\ &= \frac{\alpha^n(\alpha+\frac{1}{\alpha})-\beta^n(\beta+\frac{1}{\beta})}{\alpha-\beta}. \end{aligned}$$

Puisque $\dfrac{1}{\alpha}=-\beta$, alors

$$\begin{aligned} F_{n-1}+F_{n+1} &= \frac{\alpha^n(\alpha-\beta)+\beta^n(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} \\ &= \alpha^n+\beta^n \\ &= L_n. \end{aligned}$$

2. Pour $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} F_{n+2}-F_{n-2} &= (F_{n+1}+F_n)-F_{n-2} \\ &= F_{n+1}+(F_{n-1}+F_{n-2})-F_{n-2} \\ &= F_{n+1}+F_{n-1} \end{aligned}$$

et puisque $F_{n-1}+F_{n+1}=L_n$, alors

$$F_{n+2}-F_{n-2}=L_n.$$

3. Les formules de binet de (1.6) et de (1.15) donnent le résultat, en effet, pour $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} F_{2n} &= \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta} \\ &= \left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)(\alpha^n+\beta^n) \\ &= F_nL_n. \end{aligned}$$

■

1.8 La suite de Horadam

La suite de Horadam est une généralisation de la suites de Fibonacci et de la suites de Lucas, que l'on peut retrouver en prenant les cas particuliers des valeurs initiales appropriées.

Définition 1.8.1
La suite de Horadam $W_n = W_n(a,b;p,q)$ est définie pour tous entiers a,b,p et q par la relation de récurrence suivante [14] :

$$\begin{cases} W_0=a, \quad W_1=b \\ W_n=pW_{n-1}-qW_{n-2}, \quad (n\geq 2). \end{cases} \tag{1.21}$$

Si $a=0$ *et* $b=1$, on obtient la suite de Fibonacci généralisée

$$\begin{cases} F_0=0, \quad F_1=1 \\ F_n=pF_{n-1}+qF_{n-2}, \quad (n\geq 2). \end{cases}$$

Si $a = 2$ *et* $b = 1$, on obtient la suite de Lucas généralisée

$$\begin{cases} L_0 = 2, \quad L_1 = 1 \\ L_n = pL_{n-1} + qL_{n-2}, \quad (n \geq 2). \end{cases}$$

L'équation caractéristique de la relation de récurrence :

$$x^2 - px - q = 0$$

1.8.1 Fonction génératrice

Nous citons la fonction génératrice de la suite de Horadam, dans la définition suivante :

Théorème 1.8.1 *[12] La fonction génératrice de la suite de Horadam* $W_n(a, b; p, q)$ *est*

$$\sum_{n\geq 0} W_n t^n = \frac{a + (b - pa)t}{1 - pt + qt^2}. \tag{1.22}$$

1.8.2 Forme de Binet

Théorème 1.8.2 *[14]*

La formule de Binet de la suite de Horadam pour $p^2 - 4q \neq 0$, *est*

$$W_n = \frac{A\alpha^n - B\beta^n}{\alpha - \beta}, \tag{1.23}$$

avec $A = b - a\beta$ *et* $B = b - a\alpha$, *où* α *et* β *sont les racines de l'équation caractéristique.*

Remarque 1.8.1 *Pour* a, b, p, q *particuliers, l'équation (1.21)*
les nombres bien connus comme les nombres de Fibonacci. Nous en listons certains
$(a) W_n(2, 1; 1, -1) = L_n$ *- Les nombres de Lucas,*
$(b) W_n(0, 1; 2, -1) = P_n$ *- Les nombres de Pell,*
$(c) W_n(2, 2; 2, -1) = Q_n$ *- Les nombres de Pell-Lucas,*
$(d) W_n(0, 1; 1, -2) = J_n$ *- Les nombres de Jacobsthal,*
$(e) W_n(2, 1; 1, -2) = jn$ *- Les nombres de Jacobsthal-Lucas.*

Exemple 2 *Le tableau suivant présente les premiers termes de certaines suites obtenue comme cas particulier de la suite de Horadam pour* $n = 0, 1, ..., 10$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
P_n	0	1	2	5	12	29	70	169	408	985	2378
Q_n	2	2	6	14	34	82	198	478	1154	2786	6726
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341
j_n	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025

Tableau 1

1.9 Nombres Hyper-Fibonacci et Hyper-Lucas

Dil et Mezo [5] ont introduit les nombres hyper-Fibonacci $F_n^{(r)}$ et hyper-Lucas $L_n^{(r)}$. Ceux-ci sont définis par

$$F_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} F_k^{(r-1)} \qquad avec \qquad F_n^{(0)} = F_n, \quad F_0^{(r)} = 0, \quad F_1^{(r)} = 1,$$

et

$$L_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} L_k^{(r-1)} \qquad avec \qquad L_n^{(0)} = L_n, \quad L_0^{(r)} = 2, \quad L_1^{(r)} = 2r+1,$$

où $r \geq 1$ est un entier. Le nombre $F_n^{(r)}$ (resp. $L_n^{(r)}$) s'appelle $n^{\text{ème}}$ nombre hyper-Fibonacci (resp. hyper-Lucas) de génération r.

1.9.1 Fonction génératrice

Les fonction génératrice des nombres hyper-Fibonacci et des nombres hyper-Lucas sont données respectivement par [11] :

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_n^{(r)} t^n = \frac{t}{(1-t-t^2)(1-t)^r} \quad et \quad \sum_{k=0}^{\infty} L_n^{(r)} t^n = \frac{2-t}{(1-t-t^2)(1-t)^r}.$$

Proposition 1.9.1 *Soit $n \geq 0$, alors*

$$F_n^{(1)} = F_{n+2} - 1, \tag{1.24}$$
$$L_n^{(1)} = L_{n+2} - 1. \tag{1.25}$$

Preuve. Soit $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
F_2 = F_1 + F_0 &\Leftrightarrow F_0 = F_2 - F_1 \\
F_3 = F_2 + F_1 &\Leftrightarrow F_1 = F_3 - F_2 \\
F_4 = F_3 + F_2 &\Leftrightarrow F_2 = F_4 - F_3 \\
&\vdots \\
F_n = F_{n-1} + F_{n-2} &\Leftrightarrow F_{n-2} = F_n - F_{n-1} \\
F_{n+1} = F_n + F_{n-1} &\Leftrightarrow F_{n-1} = F_{n+1} - F_n \\
F_{n+2} = F_{n+1} + F_n &\Leftrightarrow F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.
\end{aligned}$$

donc

$$F_0 + F_1 + \ldots + F_n = F_{n+2} - F_1,$$

d'où

$$F_n^{(1)} = \sum_{n=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

De même pour (1.25) ■

Chapitre 2

Sur la série des inverses des nombres de Fibonacci

Dans ce chapitre, nous étudions la série des inverses des nombres de Fibonacci et la série des inverses du carré des nombres de Fibonacci. En considérant la partie entière de ces séries, on obtient des égalités impliquant les nombres de Fibonacci.

2.1 Série des inverses des nombres de Fibonacci

Proposition 2.1.1 *La série des inverses des nombres de Fibonacci non nul* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{F_k}$ *est convergente.*

Preuve. D'après la forme de Binet (1.6), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_n} &= \frac{\sqrt{5}}{\alpha^n - \beta^n} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{\alpha^n - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{\alpha^n + \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha^n}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{\alpha^n + \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha^n}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{\alpha^n \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha^{2n}}\right)} \sim \frac{\sqrt{5}}{\alpha^n}.
\end{aligned}$$

On en déduit que les séries à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{\alpha^n}$ sont de même nature. Puisque $\left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1$, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{\alpha^n} = \sqrt{5} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n$ est convergente, d'où l'on déduit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ est convergente. ■

Remarque 2.1.1 *Puisque pour tout* $n \geq 1$*, on a* $F_n^2 \geq F_n$*, on déduit de la Proposition 2.1.1 que la série* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{F_k^2}$ *est convergente.*

Lemme 1 *Soit $n \geq 1$ un entier.*

(1) $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-2}}{F_k} < 1,$ *si n est pair*

(2) $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-2}}{F_k} > 1,$ *si n est impair .*

Preuve. Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_n} - \frac{2}{F_{n+2}} - \frac{1}{F_{n+3}} &= \frac{F_{n+2} - 2F_n}{F_n F_{n+2}} - \frac{1}{F_{n+3}} \\
&= \frac{(F_{n+1} + F_n) - 2F_n}{F_n F_{n+2}} - \frac{1}{F_{n+3}} \\
&= \frac{F_n + F_{n-1} + F_n - 2F_n}{F_n F_{n+2}} - \frac{1}{F_{n+3}} \\
&= \frac{F_{n-1}}{F_n F_{n+2}} - \frac{1}{F_{n+3}} \\
&= \frac{F_{n-1}F_{n+3} - F_n F_{n+2}}{F_n F_{n+2} F_{n+3}} \\
&= \frac{F_{n-1}(F_{n+2} + F_{n+1}) - F_n(F_{n+1} + F_n)}{F_n F_{n+2} F_{n+3}} \\
&= \frac{2F_{n-1}F_{n+1} + F_{n-1}F_n - F_n(F_n + F_{n-1}) - F_n^2}{F_n F_{n+2} F_{n+3}} \\
&= \frac{2F_{n-1}F_{n+1} + F_{n-1}F_n - F_n F_{n-1} - 2F_n^2}{F_n F_{n+2} F_{n+3}} \\
&= \frac{2(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2)}{F_n F_{n+2} F_{n+3}}.
\end{aligned}$$

D'après l'identité de Cassini (1.13), on déduit que :

$$\frac{1}{F_n} - \frac{2}{F_{n+2}} - \frac{1}{F_{n+3}} = \frac{2(-1)^n}{F_n F_{n+2} F_{n+3}}. \tag{2.1}$$

(1) Si n est pair, alors d'après (2.1) on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_n} - \frac{2}{F_{n+2}} - \frac{1}{F_{n+3}} > 0 &\implies \frac{1}{F_n} > \frac{2}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+3}} \\
&\implies \frac{1}{F_n} > \frac{1}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+3}}.
\end{aligned}$$

En utilisant cette inégalité à plusieurs reprises, pour $n > 2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_{n-2}} &> \frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_{n+1}} \\
&> \frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_{n+1}} + \left(\frac{1}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+3}}\right) \\
&> \frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_{n+1}} + \frac{1}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+3}} + \left(\frac{1}{F_{n+4}} + \frac{1}{F_{n+4}} + \frac{1}{F_{n+5}}\right) \\
&> \ldots > \frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_{n+1}} + \frac{1}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+3}} + \frac{1}{F_{n+4}} + \frac{1}{F_{n+5}} + \ldots \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-2}}{F_k} < 1,$$

pour n pair et $n > 2$. Puisque $F_0 = 0$, cette inégalité est aussi valable pour $n = 2$, ainsi (1) et prouvé.
(2) Si n est impair, alors d'après (2.1), on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_n} - \frac{2}{F_{n+2}} - \frac{1}{F_{n+3}} < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{F_n} < \frac{2}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+3}} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{1}{F_n} < \frac{1}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+3}}. \end{aligned}$$

En utilisant cette inégalité à plusieurs reprises, pour $n \geq 3$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_{n-2}} &< \frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_{n+1}} \\ &< \frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_{n+1}} + \left(\frac{1}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+3}} \right) \\ &< \frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_{n+1}} + \frac{1}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+3}} + \left(\frac{1}{F_{n+4}} + \frac{1}{F_{n+4}} + \frac{1}{F_{n+5}} \right) \\ &< \ldots < \frac{1}{F_n} + \frac{1}{F_{n+1}} + \frac{1}{F_{n+2}} + \frac{1}{F_{n+3}} + \frac{1}{F_{n+4}} + \frac{1}{F_{n+5}} + ... \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k}, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-2}}{F_k} > 1,$$

pour n impair et $n \geq 3$. IL est facile de voir que cette inégalité est aussi valable pour $n = 1$, ainsi (2) est prouvé. ■

Lemme 2 *Soit $n \geq 1$ un entier*
(1) $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-2} - 1}{F_k} < 1.$
(2) $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-2} + 1}{F_k} > 1.$

Preuve. Soit $1 \leq m \leq k$, en utilisant la formule de Binet (1.6), on obtient :

$$\begin{aligned} \sqrt{5}(F_{k-m} - \alpha^{-m} F_k) &= \sqrt{5} \left(\frac{\alpha^{k-m} - \beta^{k-m}}{\alpha - \beta} - \alpha^{-m} \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} \right) \right) \\ &= \sqrt{5} \left(\frac{\alpha^{k-m} - \beta^{k-m}}{\sqrt{5}} - \alpha^{-m} \left(\frac{\alpha^k - \beta^k}{\sqrt{5}} \right) \right) \\ &= \alpha^{k-m} - \beta^{k-m} - \alpha^{k-m} + \alpha^{-m}\beta^k \\ &= \alpha^{-m}\beta^k - \beta^{k-m} \\ &\leq \alpha^{-m}|\beta|^k + |\beta|^{k-m} \\ &< \alpha^0|\beta|^0 + |\beta|^0 = 2 < \sqrt{5}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$F_{k-m} - \alpha^{-m} F_k \quad < \quad 1,$$

i.e.,

$$\frac{F_{k-m} - 1}{F_k} \quad < \quad \alpha^{-m}.$$

En mettant $m = k - n + 2$, on obtient :

$$\frac{F_{n-2} - 1}{F_k} \quad < \quad \alpha^{n-2-k}, \qquad (\ 2 \leq n \leq k+1).$$

D'après cette dernière inégalité, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-2} - 1}{F_k} \quad &< \quad \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^{n-2-k} \\
&= \quad \sum_{j=2}^{\infty} \alpha^{-j} \\
&= \quad \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha} \right)^j \right) - 1 - \frac{1}{\alpha} \\
&= \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}} - 1 - \frac{1}{\alpha} \\
&= \quad \frac{\alpha}{\alpha - 1} - \frac{\alpha + 1}{\alpha} \\
&= \quad \frac{\alpha^2 - (\alpha+1)(\alpha-1)}{\alpha(\alpha-1)} \\
&= \quad \frac{\alpha^2 - \alpha^2 + 1}{\alpha^2 - \alpha} \\
&= \quad \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} \\
&= \quad 1 \quad (car \ \ \alpha^2 - \alpha = 1).
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-2} - 1}{F_k} < 1.$$

(2) se démontre de manière similaire .

■

Théorème 2.1.1 *Soit $n \geq 1$ un entier, alors*

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_{n-2}, & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ F_{n-2} - 1, & \text{si } n \text{ est impair .} \end{cases}$$

Preuve.
cas 1. n est pair. Si $n = 2$, on a :

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{F_k} > \frac{1}{F_2} = 1,$$

donc

$$0 < \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k}\right)^{-1} < 1,$$

cela implique

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k}\right)^{-1} \right\rfloor = 0 = F_{2-2}.$$

Si $n \geq 4$, alors d'après les Lemmes 1 et 2, on a :

$$\frac{1}{F_{n-2}+1} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k} < \frac{1}{F_{n-2}},$$

donc

$$F_{n-2} < \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k}\right)^{-1} < F_{n-2}+1,$$

d'où

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k}\right)^{-1} \right\rfloor = F_{n-2}.$$

Cas 2. n est impair et $n \geq 1$. les cas $n = 1$ et 3 sont évidement vérifiés, en effet, si $n = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{F_k} > \frac{1}{F_1} = 1,$$

donc

$$0 < \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{F_k}\right)^{-1} < 1,$$

i.e.,

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{F_k}\right)^{-1} \right\rfloor = 0 = F_{-1} - 1.$$

Si $n = 3$, on a :

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{F_k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \sum_{k=6}^{\infty} \frac{1}{F_k} = \frac{31}{30} + \sum_{k=6}^{\infty} \frac{1}{F_k} > 1,$$

donc

$$0 < \left(\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{F_k}\right)^{-1} < 1,$$

i.e.,

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{F_k}\right)^{-1} \right\rfloor = 0 = F_1 - 1.$$

Si $n \geq 5$, d'après les Lemmes 1 et 2, on a :

$$\frac{1}{F_{n-2}} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k} < \frac{1}{F_{n-2}-1},$$

donc

$$F_{n-2} - 1 < \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k} \right)^{-1} < F_{n-2},$$

d'où

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k} \right)^{-1} \right\rfloor = F_{n-2} - 1.$$

■

2.2 Série des inverses des nombres de Fibonacci au carré

Lemme 3 *soit $n \geq 1$ un entier.*

(1) $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-1}F_n}{F_k^2} > 1,$ *si n est pair*

(2) $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-1}F_n}{F_k^2} < 1,$ *si n est impair .*

Preuve. En utilisant la relation de récurrence (1.4) et l'identité (1.11) pour $r = 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_{n+1}^2} - \frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}} &= \frac{F_n^2 - F_{n-1}F_n}{F_{n-1}F_n^3} - \frac{F_{n+1}F_{n+2} + F_{n+1}^2}{F_{n+1}^3 F_{n+2}} \\
&= \frac{F_n - F_{n-1}}{F_{n-1}F_n^2} - \frac{F_{n+2} + F_{n+1}}{F_{n+1}^2 F_{n+2}} \\
&= \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}F_n^2} - \frac{F_{n+3}}{F_{n+1}^2 F_{n+2}} \\
&= \frac{F_{n-2}F_{n+1}^2 F_{n+2} - F_{n+3}F_{n-1}F_n^2}{F_{n-1}F_n^2 F_{n+1}^2 F_{n+2}} \\
&= \frac{F_{n+1}^2(F_n^2 - F_n^2 + F_{n-2}F_{n+2}) - F_{n+3}F_{n-1}F_n^2}{F_{n-1}F_n^2 F_{n+1}^2 F_{n+2}} \\
&= \frac{F_{n+1}^2(F_n^2 - (-1)^{n-2}F_2^2) - F_{n+3}F_{n-1}F_n^2}{F_{n-1}F_n^2 F_{n+1}^2 F_{n+2}} \\
&= \frac{F_{n+1}^2(F_n^2 + (-1)^{n-1}) - F_n^2(F_{n+1}^2 + (-1)^n)}{F_{n-1}F_n^2 F_{n+1}^2 F_{n+2}}, \\
&= \frac{F_{n+1}^2 F_n^2 + F_{n+1}^2(-1)^{n-1} - F_n^2 F_{n+1}^2 - F_n^2(-1)^n}{F_{n-1}F_n^2 F_{n+1}^2 F_{n+2}} \\
&= \frac{F_{n+1}^2(-1)^{n-1} - F_n^2(-1)^n}{F_{n-1}F_n^2 F_{n+1}^2 F_{n+2}} \\
&= \frac{(-1)^n(-F_{n+1}^2 - F_n^2)}{F_{n-1}F_n^2 F_{n+1}^2 F_{n+2}}.
\end{aligned}$$

D'après (1.9), on obtient

$$\frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_{n+1}^2} - \frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}F_{2n+1}}{F_{n-1}F_n^2 F_{n+1}^2 F_{n+2}}. \tag{2.2}$$

(1) Si n est pair, alors d'après (2.2), on a :

$$\frac{1}{F_{n-1}F_n} - \frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_{n+1}^2} - \frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}} < 0,$$

donc

$$\frac{1}{F_{n-1}F_n} < \frac{1}{F_n^2} + \frac{1}{F_{n+1}^2} + \frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}}.$$

En utilisant cette inégalité à plusieurs reprises, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_{n-1}F_n} &< \frac{1}{F_n^2} + \frac{1}{F_{n+1}^2} + \frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}} \\
&< \frac{1}{F_n^2} + \frac{1}{F_{n+1}^2} + \left(\frac{1}{F_{n+2}^2} + \frac{1}{F_{n+3}^2} + \frac{1}{F_{n+3}F_{n+4}}\right) \\
&< \frac{1}{F_n^2} + \frac{1}{F_{n+1}^2} + \frac{1}{F_{n+2}^2} + \frac{1}{F_{n+3}^2} + \left(\frac{1}{F_{n+4}^2} + \frac{1}{F_{n+5}^2} + \frac{1}{F_{n+5}F_{n+6}}\right) \\
&\vdots \\
&< \frac{1}{F_n^2} + \frac{1}{F_{n+1}^2} + \frac{1}{F_{n+2}^2} + \frac{1}{F_{n+3}^2} + \frac{1}{F_{n+4}^2} + \frac{1}{F_{n+5}^2} + ... \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k^2},
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{F_{n-1}F_n} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k^2},$$

d'où

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-1}F_n}{F_k^2} > 1.$$

(2) Si n est impair et $n \geq 3$, l'inégalité est obtenue de la même manière. Si $n = 1$, alors l'inégalité est évidemment vérifié.

■

Lemme 4 *soit $n \geq 1$ un entier.*

(1) $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-1}F_n - 1}{F_k^2} < 1.$

(2) $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \frac{F_{n-1}F_n + 1}{F_k^2} > 1.$

Preuve. Pour $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_{n-1}F_n - 1} - \frac{1}{F_n^2} - \frac{1}{F_nF_{n+1} - 1} &= \frac{(F_nF_{n+1} - 1) - (F_{n-1}F_n - 1)}{(F_{n-1}F_n - 1)(F_nF_{n+1} - 1)} - \frac{1}{F_n^2} \\
&= \frac{F_nF_{n+1} - F_{n-1}F_n}{(F_{n-1}F_n - 1)(F_nF_{n+1} - 1)} - \frac{1}{F_n^2} \\
&= \frac{F_n(F_{n+1} - F_{n-1})}{(F_{n-1}F_n - 1)(F_nF_{n+1} - 1)} - \frac{1}{F_n^2} \\
&= \frac{F_n^2}{(F_{n-1}F_n - 1)(F_nF_{n+1} - 1)} - \frac{1}{F_n^2} \\
&= \frac{F_n^4 - (F_{n-1}F_n - 1)(F_nF_{n+1} - 1)}{F_n^2(F_{n-1}F_n - 1)(F_nF_{n+1} - 1)}.
\end{aligned}$$

Le numérateur du côté droit est :

$$\begin{aligned}
F_n^4-(F_{n-1}F_n-1)(F_nF_{n+1}-1) &= F_n^4-(F_{n-1}F_n^2F_{n+1}-F_{n-1}F_n-F_nF_{n+1}+1)\\
&= F_n^4-F_{n-1}F_n^2F_{n+1}+F_{n-1}F_n+F_nF_{n+1}-1\\
&= F_n^4-F_n^2(F_n^2-F_n^2+F_{n-1}F_{n+1})+F_n(F_{n-1}+F_{n+1})-1\\
&= F_n^4-F_n^2(F_n^2-F_n^2+F_{n-1}F_{n+1})+F_n(F_{n-1}+F_{n+1})-1\\
&= F_n^4-F_n^2(F_n^2+(1)^n)+F_n(F_{n-1}+F_{n+1})-1\\
&= F_n^4-F_n^4-(-1)^nF_n^2+F_n(F_{n-1}+F_{n+1})-1\\
&= -F_n^2+F_n(F_{n-1}+F_{n+1})-1\\
&> -F_n^2+F_n(F_{n-1}+F_{n+1})-1\\
&= F_n(-F_n+F_{n-1}+F_{n+1})-1\\
&= 2F_nF_{n-1}-1\\
&\geq 1>0, \qquad (car\ \ n\geq 2),
\end{aligned}$$

Le dénominateur du côté droit étant aussi positif, on déduit que :

$$\frac{1}{F_{n-1}F_n-1}-\frac{1}{F_n^2}-\frac{1}{F_nF_{n+1}-1}>0,$$

d'où

$$\frac{1}{F_{n-1}F_n-1}>\frac{1}{F_n^2}+\frac{1}{F_nF_{n+1}-1}.$$

En utilisant cette inégalité à plusieurs reprises, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_{n-1}F_n-1} &> \frac{1}{F_n^2}+\frac{1}{F_nF_{n+1}-1}\\
&> \frac{1}{F_n^2}+\left(\frac{1}{F_{n+1}^2}+\frac{1}{F_{n+1}F_{n+2}-1}\right)\\
&> \frac{1}{F_n^2}+\frac{1}{F_{n+1}^2}+\left(\frac{1}{F_{n+2}^2}+\frac{1}{F_{n+2}F_{n+3}-1}\right)\\
&> \frac{1}{F_n^2}+\frac{1}{F_{n+1}^2}+\frac{1}{F_{n+2}^2}+\left(\frac{1}{F_{n+3}^2}+\frac{1}{F_{n+3}F_{n+4}-1}\right)\\
&\vdots\\
&> \frac{1}{F_n^2}+\frac{1}{F_{n+1}^2}+\frac{1}{F_{n+2}^2}+\frac{1}{F_{n+3}^2}+\frac{1}{F_{n+4}^2}+...\\
&= \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{F_k^2},
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{F_{n-1}F_n-1} > \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{F_k^2}.$$

d'où

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{F_{n-1}F_n-1}{F_k^2} < 1.$$

Si $n=1$, alors cette inégalité est clairement vérifiée, On obtient ainsi (1). (2) est obtenu de la même manière.

■

Théorème 2.2.1 *Soit $n \geq 1$ un entier,alors*

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k^2} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_{n-1}F_n - 1, & \text{si } n \text{ est pair ;} \\ F_{n-1}F_n, & \text{si } n \text{ est impair .} \end{cases}$$

Preuve.
Cas 1. n est pair. En utilisant les Lemmes 3(1) et 4(1), on obtient :

$$\frac{1}{F_{n-1}F_n} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k^2} < \frac{1}{F_{n-1}F_n - 1},$$

donc

$$F_{n-1}F_n - 1 < \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k^2} \right)^{-1} < F_{n-1}F_n,$$

d'où

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k^2} \right)^{-1} \right\rfloor = F_{n-1}F_n - 1.$$

Cas 2. n est impair. Si $n = 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{F_k^2} > \frac{1}{F_1^2} = 1 \iff 0 < \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k^2} \right)^{-1} < 1,$$

d'où

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k^2} \right)^{-1} \right\rfloor = 0 = F_0F_1.$$

Si n est impair et $n \geq 3$, alors en utilisant les Lemmes 3(2) et 4(2), on obtient :

$$\frac{1}{F_{n-1}F_n + 1} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k^2} < \frac{1}{F_{n-1}F_n},$$

donc

$$F_{n-1}F_n < \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k^2} \right)^{-1} < F_{n-1}F_n + 1,$$

d'où

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k^2} \right)^{-1} \right\rfloor = F_{n-1}F_n.$$

■

Chapitre 3

Sur les séries des inverses de quelques suites de Fibonacci Généralisées

Dans ce chapitre nous généralisons les résultats du chapitre 2 à quelques cas particuliers de la suite de Horadam ainsi qu'aux suites hyper-Fibonacci et hyper-Lucas de première génération.

3.1 Suite de Fibonacci généralisée $(G_n)_n$

Soit $a > 1$ un entier et soit $(G_n)_n$ la suite de Fibonacci généralisée définie par :

$$\begin{cases} G_0 = 0 \ et \ G_1 = 1, \\ G_{n+2} = aG_{n+1} + G_n, \qquad n \geq 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1.1 Forme de Binet

D'après la formule de Binet (1.23) de la suite de Horadam, on déduit la formule de Binet de la suite de (G_n), elle est donnée par :

$$G_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \qquad (n \geq 0), \tag{3.2}$$

où $\alpha = \dfrac{a + \sqrt{a^2+4}}{2}$ et $\beta = \dfrac{a - \sqrt{a^2+4}}{2}$, sont les racines de l'équation caractéristique $x^2 - ax - 1 = 0$. Les racine α et β vérifient les propriétés suivantes :

$$\alpha\beta = -1, \qquad \alpha + \beta = a \qquad \alpha - \beta = \sqrt{a^2+4}, \qquad \alpha^2 = a\alpha + 1, \qquad \beta^2 = a\beta + 1.$$

Proposition 3.1.1 *La série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{G_n}$ *est convergente.*

Preuve. Soit $n \geq 1$, d'après la formule de Binet (3.2), on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_n} &= \frac{\sqrt{a^2+4}}{\alpha^n - \beta^n} \\ &= \frac{\sqrt{a^2+4}}{\alpha^n - \left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n} \\ &= \frac{\sqrt{a^2+4}}{\alpha^n + \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha^n}} \\ &= \frac{\sqrt{a^2+4}}{\alpha^n \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\alpha^{2n}}\right)} \sim \frac{\sqrt{a^2+4}}{\alpha^n}. \end{aligned}$$

On en déduit que les séries à termes positifs $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{G_n}$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a^2+4}}{\alpha^n}$ sont de même nature. Puisque $\left|\frac{1}{\alpha}\right|<1$, alors la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{a^2+4}}{\alpha^n}=\sqrt{a^2+4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n$ est convergente. On en déduit que la série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{G_n}$ est convergente. ■

Lemme 5 . *Pour $n\geq 1$, on a :*
(1) $G_n^2-G_{n-1}G_{n+1}=(-1)^{n-1}$.
(2) $G_{n-1}G_{n+3}-G_nG_{n+2}=(-1)^n(a^2+1)$.
(3) $G_nG_{n+2}+G_{n-1}G_{n+1}=G_{2n+1}$.
(4) $G_{n+1}G_{n+2}-G_{n-1}G_n=aG_{2n+1}$.

Preuve. (1) En utilisant la formule de Binet (3.2), on obtient :

$$\begin{aligned}
G_n^2-G_{n-1}G_{n+1} &= \left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2-\left(\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)\\
&= \frac{\alpha^{2n}+\beta^{2n}-2(\alpha\beta)^n-\alpha^{2n}-\beta^{2n}+(\alpha^2+\beta^2)(\alpha\beta)^{n-1}}{(\alpha-\beta)^2}\\
&= \frac{(\alpha\beta)^{n-1}(\alpha^2+\beta^2)-2\alpha\beta}{(\alpha-\beta)^2}\\
&= (\alpha\beta)^{n-1}\\
&= (-1)^{n-1}.
\end{aligned}$$

(2) D'après la formule de Binet (3.2), on a :

$$\begin{aligned}
G_{n-1}G_{n+3}-G_nG_{n+2} &= \frac{(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})(\alpha^{n+3}-\beta^{n+3})}{(\alpha-\beta)^2}-\frac{(\alpha^n-\beta^n)(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})}{(\alpha-\beta)^2}\\
&= \frac{\alpha^{2n+2}+\beta^{2n+2}-\alpha^{n-1}\beta^{n+3}-\beta^{n-1}\alpha^{n+3}-\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}+\beta^n\alpha^{n+2}+\alpha^n\beta^{n+2}}{(\alpha-\beta)^2}\\
&= \frac{(\alpha\beta)^n(\alpha^4+\beta^4)+(\alpha\beta)^n(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha-\beta)^2} \qquad (\text{car } \ (\alpha\beta)=-1).\\
&= \frac{(\alpha\beta)^n[(\alpha^4+\beta^4)+(\alpha^2+\beta^2)]}{(\alpha-\beta)^2}\\
&= \frac{(\alpha\beta)^n[((\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)^2+2(\alpha\beta)^2)+((\alpha-\beta)^2+2(\alpha\beta))]}{(\alpha-\beta)^2}\\
&= \frac{(\alpha\beta)^n[(\alpha-\beta)^2((\alpha+\beta)^2+1)]}{(\alpha-\beta)^2}\\
&= (\alpha\beta)^n((\alpha+\beta)^2+1)\\
&= (-1)^n(a^2+1), \qquad (\text{car } \ (\alpha+\beta)=a).
\end{aligned}$$

(3) D'après la formule de Binet (3.2), on a :

$$\begin{aligned}
G_nG_{n+2}+G_{n-1}G_{n+1} &= \frac{(\alpha^n-\beta^n)(\alpha^{n+2}-\beta^{n+2})}{(\alpha-\beta)^2}+\frac{(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})}{(\alpha-\beta)^2}\\
&= \frac{\alpha^{2n+2}+\beta^{2n+2}-\alpha^{n+2}\beta^n-\alpha^n\beta^{n+2}-\alpha^{2n+2}\beta-\alpha\beta^{2n+2}+\alpha^{n+2}\beta^n}{(\alpha-\beta)^2}\\
&= \frac{(\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1})(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2}\\
&= \frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{\alpha-\beta}\\
&= G_{2n+1}.
\end{aligned}$$

(4) D'après l'identité (3) précédente, on a :

$$\begin{aligned} aG_{2n+1} &= aG_nG_{n+2} + aG_{n+1}G_{n-1} \\ &= (G_{n+1} - G_{n-1})G_{n+2} + G_{n-1}(G_{n+2} - G_n) \\ &= G_{n+1}G_{n+2} - G_{n-1}G_{n+2} + G_{n-1}G_{n+2} - G_{n-1}G_n \\ &= G_{n+1}G_{n+2} - G_{n-1}G_n. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.1.1 *Soit $n \geq 1$ un entier, alors*

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} G_n - G_{n-1}, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ G_n - G_{n-1} - 1, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Preuve. En utilisant le Lemme 5(1), pour $n \geq 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_n - G_{n-1}} - \frac{1}{G_n} - \frac{1}{G_{n+1}} - \frac{1}{G_{n+2} - G_{n+1}} &= \frac{G_n - G_{n+1} - G_n + G_{n-1}}{(G_n - G_{n-1})(G_{n+2} - G_{n+1})} - \frac{G_{n+1} + G_n}{G_nG_{n+1}} \\ &= \frac{G_{n+2}(G_{n-1}G_{n+1} - G_n^2) + G_{n-1}(G_nG_{n+2} - G_{n+1}^2)}{G_nG_{n+1}(G_n - G_{n-1})(G_{n+2} - G_{n+1})} \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n(G_{n+2} - G_{n-1})}{G_nG_{n+1}(G_n - G_{n-1})(G_{n+2} - G_{n+1})}. \tag{3.3}$$

Si n est pair et $n \geq 2$, puisque le membre de droite de l'identité (3.3) est positif, on obtient

$$\frac{1}{G_n - G_{n-1}} > \frac{1}{G_n} + \frac{1}{G_{n+1}} + \frac{1}{G_{n+2} - G_{n+1}}. \tag{3.4}$$

En appliquant l'inégalité (3.4) à plusieurs reprises, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{G_n - G_{n-1}} &> \frac{1}{G_n} + \frac{1}{G_{n+1}} + \frac{1}{G_{n+2} - G_{n+1}} \\ &> \frac{1}{G_n} + \frac{1}{G_{n+1}} + \frac{1}{G_{n+2}} + \frac{1}{G_{n+3}} + \frac{1}{G_{n+4} - G_{n+3}} \\ &> \frac{1}{G_n} + \frac{1}{G_{n+1}} + \frac{1}{G_{n+2}} + \frac{1}{G_{n+3}} + \frac{1}{G_{n+4}} + \frac{1}{G_{n+5}} + \dots. \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k} < \frac{1}{G_n - G_{n-1}}. \tag{3.5}$$

De la même manière, si n est impair avec $n \geq 1$, alors

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k} > \frac{1}{G_n - G_{n-1}}. \tag{3.6}$$

D'autre part, si n est pair avec $n \geq 2$, alors par le Lemme 5, parties (1) et (4)

$$\frac{1}{G_n - G_{n-1} + 1} - \frac{1}{G_n} - \frac{1}{G_{n+1}} - \frac{1}{G_{n+2} - G_{n+1} + 1}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{2(-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}G_{n+2} + (-1)^nG_{n-1} + aG_{2n+1} + G_n + G_{n+1}}{G_nG_{n+1}(G_n - G_{n-1} + 1)(G_{n+2} - G_{n+1} + 1)} \\ &= -\frac{(aG_{2n+1} - G_{n+2}) + (G_{n-1} + G_n + G_{n+1} - 2}{G_nG_{n+1}(G_n - G_{n-1} + 1)(G_{n+2} - G_{n+1} + 1)} < 0. \end{aligned}$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité

$$\frac{1}{G_n - G_{n-1} + 1} < \frac{1}{G_n} + \frac{1}{G_{n+1}} + \frac{1}{G_{n+2} - G_{n+1} + 1}.$$

à plusieurs reprises, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{G_n - G_{n-1} + 1} &< \frac{1}{G_n} + \frac{1}{G_{n+1}} + \frac{1}{G_{n+2} - G_{n+1} + 1} \\
&< \frac{1}{G_n} + \frac{1}{G_{n+1}} + \frac{1}{G_{n+2}} + \frac{1}{G_{n+3}} + \frac{1}{G_{n+4} - G_{n+3} + 1} \\
&< \frac{1}{G_n} + \frac{1}{G_{n+1}} + \frac{1}{G_{n+2}} + \frac{1}{G_{n+3}} + \frac{1}{G_{n+4}} + \frac{1}{G_{n+5}} + \dots.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{G_n - G_{n-1} + 1} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k}.$$

Avec (3.5), nous avons

$$\frac{1}{G_n - G_{n-1} + 1} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k} < \frac{1}{G_n - G_{n-1}},$$

donc

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k} \right)^{-1} \right\rfloor = G_n - G_{n-1}.$$

De la même manière, si n est impair avec $n \geq 1$, alors

$$\frac{1}{G_n - G_{n-1} - 1} - \frac{1}{G_n} - \frac{1}{G_{n+1}} - \frac{1}{G_{n+2} - G_{n+1} - 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(-1)^{n-1} + (-1)^{n-1} G_{n+2} + (-1)^n G_{n-1} + a G_{2n+1} + G_n + G_{n+1}}{G_n G_{n+1} (G_n - G_{n-1} + 1)(G_{n+2} - G_{n+1} + 1)} \\
&= \frac{a G_{n+1}(G_{n+1} - 1) + G_n (a G_n - a - 2) + 2}{G_n G_{n+1} (G_n - G_{n-1} - 1)(G_{n+2} - G_{n+1} - 1)} \geq 0,
\end{aligned}$$

où l'égalité n'est vraie que pour $n = a = 1$. Par conséquent,

$$\frac{1}{G_n - G_{n-1} - 1} > \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k}.$$

Avec (3.6), nous avons

$$\frac{1}{G_n - G_{n-1}} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k} < \frac{1}{G_n - G_{n-1} - 1},$$

donc

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k} \right)^{-1} \right\rfloor = G_n - G_{n-1} - 1.$$

■

Théorème 3.1.2 *Soit $n \geq 1$ un entier, alors*

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k^2} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} a G_{n-1} G_n - 1, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ a G_{n-1} - G_n, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Preuve. Par le Lemme 5(1), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{aG_{n-1}G_n-1}-\frac{1}{G_n^2}-\frac{1}{aG_nG_{n+1}-1} &= \frac{a(G_nG_{n+1}-G_{n-1}G_n)}{(aG_{n-1}-G_n-1)(aG_nG_{n+1}-1)}-\frac{1}{G_n^2}\\
&= \frac{a^2G_n^4-(aG_{n-1}G_n-1)(aG_nG_{n+1}-1)}{G_n^2(aG_{n-1}-G_n-1)(aG_nG_{n+1}-1)}\\
&= \frac{a^2G_n^2(-1)^{n-1}+aG_n(G_{n-1}+G_{n+1})-1}{G_n^2(aG_{n-1}-G_n-1)(aG_nG_{n+1}-1)}\\
&\geq \frac{2aG_{n-1}G_nG_{n-1}-1}{G_n^2(aG_{n-1}G_n-1)(aG_nG_{n+1}-1)}\\
&> 0.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{aG_{n-1}G_n-1} &> \frac{1}{G_n^2}+\frac{1}{aG_nG_{n+1}-1}\\
&> \frac{1}{G_n^2}+\frac{1}{G_{n+1}^2}+\frac{1}{aG_{n+1}G_{n+2}-1}\\
&\vdots\\
&> \frac{1}{G_n^2}+\frac{1}{G_{n+1}^2}+\frac{1}{G_{n+2}^2}+\frac{1}{G_{n+3}^2}+\cdots.
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons

$$\frac{1}{aG_n-G_{n-1}-1}>\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{G_k^2}. \tag{3.7}$$

D'une manière similaire,

$$\frac{1}{aG_{n-1}G_n+1}-\frac{1}{G_n^2}-\frac{1}{aG_nG_{n+1}+1}\leq -\frac{2aG_{n-1}G_n+1}{G_n^2(aG_{n-1}G_n+1)(aG_nG_{n+1}+1)}<0.$$

Ainsi, nous avons

$$\frac{1}{aG_{n-1}G_n+1}<\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{G_k^2}. \tag{3.8}$$

D'autre part, par le Lemme 5(1) et (3), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{aG_{n-1}G_n}-\frac{1}{G_n^2}-\frac{1}{G_{n+1}^2}-\frac{1}{aG_{n+1}G_{n+2}} &= \frac{G_{n-2}}{aG_{n-1}G_n^2}-\frac{G_{n+3}}{aG_{n+1}^2G_{n+2}}\\
&= \frac{G_{n-2}G_{n+1}^2G_{n+2}-G_{n-1}G_n^2G_{n+3}}{aG_{n-1}G_n^2G_{n+1}^2G_{n+2}}\\
&= \frac{a^2(G_n^2-G_{n-1}G_{n+1})(G_nG_{n+2}+G_{n-1}G_{n+1})}{aG_{n-1}G_n^2G_{n+1}^2G_{n+2}}\\
&= \frac{a^2(-1)^{n-1}G_{2n+1}}{aG_{n-1}G_n^2G_{n+1}^2G_{n+2}}.
\end{aligned}$$

Si n est pair avec $n\geq 2$, alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{aG_{n-1}G_n} &< \frac{1}{G_n^2}+\frac{1}{G_{n+1}^2}+\frac{1}{aG_{n+1}G_{n+2}}\\
&< \frac{1}{G_n^2}+\frac{1}{G_{n+1}^2}+\frac{1}{G_{n+2}^2}+\frac{1}{G_{n+3}^2}+\frac{1}{aG_{n+3}G_{n+4}}\\
&\vdots\\
&< \frac{1}{G_n^2}+\frac{1}{G_{n+1}^2}+\frac{1}{G_{n+2}^2}+\frac{1}{G_{n+3}^2}+\frac{1}{G_{n+4}^2}+\frac{1}{G_{n+5}^2}+\cdots.
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k^2} > \frac{1}{aG_{n-1}G_n}. \tag{3.9}$$

De même, si n est impair avec $n \geq 1$, alors

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k^2} < \frac{1}{aG_{n-1}G_n}. \tag{3.10}$$

Si n est pair avec $n \geq 2$, alors par les inégalités (3.7) et (3.9), nous obtenons

$$aG_{n-1}G_n - 1 < \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k^2}\right)^{-1} < aG_{n-1}G_n,$$

donc

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k^2}\right)^{-1} \right\rfloor = aG_{n-1}G_n - 1.$$

Si n est pair avec $n \geq 1$, alors par les inégalités (3.8) et (3.10), nous obtenons :

$$aG_{n-1}G_n < \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k^2}\right)^{-1} < aG_{n-1}G_n + 1,$$

donc

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_k^2}\right)^{-1} \right\rfloor = aG_{n-1}G_n.$$

■

Les résultats suivants se démontrent de manière similaire.D de telles séries d'inverses de nombres de type Fibonacci ont été étudiés par plusieurs auteurs [2, 6, 8, 13].

Théorème 3.1.3 *[7]*

(1) $\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_{2k}}\right)^{-1} \right\rfloor = G_{2n} - G_{2n-2} - 1, \qquad (n \geq 1)$

(2) $\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_{2k-1}}\right)^{-1} \right\rfloor = G_{2n-1} - G_{2n-3}, \qquad (n \geq 2)$

(3) $\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_{2k-1}G_{2k+1}}\right)^{-1} \right\rfloor = G_{4n-1} - G_{4n-3}, \qquad (n \geq 1)$

(4) $\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_{2k}G_{2k+2}}\right)^{-1} \right\rfloor = G_{4n+1} - G_{4n-1} - 1, \qquad (n \geq 1)$

(5) $\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_{2k}^2}\right)^{-1} \right\rfloor = G_{4n-1} - G_{4n-3} - 1, \qquad (n \geq 1)$

(6) $\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_{2k-1}^2}\right)^{-1} \right\rfloor = G_{4n-3} - G_{4n-5}, \qquad (n \geq 2)$

(4) $\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{G_{2k-1}G_{2k}}\right)^{-1} \right\rfloor = G_{4n-2} - G_{4n-4}, \qquad (n \geq 1)$

3.2 Suite de Fibonacci généralisée $(H_n)_n$

Soit $c \geq 0$ un entier et soit $(H_n)_n$ la suite de Fibonacci généralisée définie par :

$$\begin{cases} H_0 = c, H_1 = 1, \\ H_{n+2} = H_{n+1} + H_n, \qquad n \geq 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

On remarque que $H_n = F_{n+1}$ pour $c = 1$ et $H_n = L_n$ pour $c = 2$. La suite $(H_n)_n$ peut également être définie comme le nombre total de correspondances dans le graphe planaire connexe sur n sommets avec $n - 2 + c$ arêtes totales, dont $c - 1$ arêtes sont entre une paire de sommets.

3.2.1 Forme de Binet

D'après la formule de Binet (1.23) de la suites de Horadam, on déduit que la formule de Binet de la suite $(H_n)_n$ est donnée par :

$$H_n = \frac{(1 - c\beta)\alpha^n - (1 - c\alpha)\beta^n}{\alpha - \beta}, \tag{3.12}$$

où $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ sont les racines de l'équation caractéristique $x^2 - x - 1 = 0$.

Proposition 3.2.1 *La série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{H_n}$ *est convergente.*

Preuve. Soit $n \geq 1$, d'après la formule de Binet (3.12), on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_n} &= \frac{\sqrt{5}}{(1 - c\beta)\alpha^n - (1 - c\alpha)\beta^n} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{(1 - c\beta)\alpha^n - (1 - c\alpha)\left(\frac{-1}{\alpha}\right)^n} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{(1 - c\beta)\alpha^n + (1 - c\alpha)\frac{(-1)^{n+1}}{\alpha^n}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{(1 - c\beta)\alpha^n \left[1 + \left(\frac{1-c\alpha}{1-c\beta}\right)\frac{(-1)^{n+1}}{\alpha^{2n}}\right]} \sim \frac{\sqrt{5}}{(1 - c\beta)\alpha^n}. \end{aligned}$$

On en déduit que les séries à termes positifs $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{H_n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{(1 - c\beta)\alpha^n}$ sont de même nature. Puisque $\left|\frac{1}{\alpha}\right| < 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{5}}{(1 - c\beta)\alpha^n} = \frac{\sqrt{5}}{(1 - c\beta)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n$ est convergente, d'où la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{H_n}$ est convergente. ■

Lemme 6 *Pour $n \geq 1$, on a :*

$$H_n = cF_{n-1} + F_n. \tag{3.13}$$

Preuve. D'après la formule de Binet (3.12), on a :

$$\begin{aligned} H_n &= \frac{\alpha^n - c\beta\alpha^n - \beta^n + c\alpha\beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + c\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta}, \quad (\text{car } \alpha\beta = -1). \\ &= F_n + cF_{n-1}. \end{aligned}$$

■

Lemme 7 *Pour $n \geq 1$, on a :*
(1) $H_n^2 - H_{n-1}H_{n+1} = H_nH_{n+1} - H_{n-1}H_{n+2} = (-1)^n(c^2+c-1)$.
(2) $H_{n-1}H_{n+1} - H_{n-1}H_{n+2} = (-1)^{n-1}2(c^2+c-1)$.
(3) $H_{n+4}H_n - H_{n+2}H_{n-2} = H_{n+1}(H_{n+3} - H_{n-1})$.
(4) $H_{n+1}H_{n+2} - H_{n-1}H_n = H_n^2 + H_{n+1}^2 = cH_{2n} + H_{2n+1}$.

Preuve. Soit $n \geq 1$, alors
(1) D'après la relation de récurrence (3.11), on a :

$$\begin{aligned} H_n^2 - H_{n-1}H_{n+1} &= H_n(H_{n+1} - H_{n-1}) - H_{n-1}(H_{n+2} - H_n) \\ &= H_nH_{n+1} - H_{n-1}H_{n+2} \end{aligned}$$

et d'après la formule de Binet (3.12), on a :

$$\begin{aligned} H_nH_{n+1} - H_{n-1}H_{n+2} &= \left(\frac{(1-c\beta)\alpha^n - (1-c\alpha)\beta^n}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{(1-c\beta)\alpha^{n+1} - (1-c\alpha)\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right) \\ &- \left(\frac{(1-c\beta)\alpha^{n-1} - (1-c\alpha)\beta^{n-1}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{(1-c\beta)\alpha^{n+2} - (1-c\alpha)\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}\right) \\ &= \frac{(c^2+c-1)(\alpha^n\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^n - \alpha^{n-1}\beta^{n+2} - \alpha^{n+2}\beta^{n-1})}{(\alpha-\beta)^2} \\ &= \frac{(c^2+c-1)(\alpha^n\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^n + \alpha^n\beta^{n+3} + \alpha^{n+3}\beta^n)}{(\alpha-\beta)^2} \\ &= \frac{(c^2+c-1)(\alpha\beta)^n(\alpha+\beta+\alpha^3+\beta^3)}{\alpha^2+\beta^2+2} \\ &= (c^2+c-1)(\alpha\beta)^n\frac{(\alpha^2+\beta^2)+2(\alpha+\beta)}{\alpha^2+\beta^2+2}, \quad (\text{car } \alpha^3 = \alpha^2+\alpha \text{ et } \beta^3 = \beta^2+\beta) \\ &= (c^2+c-1)(-1)^n, \quad (\text{car } \alpha\beta = -1 \text{ et } \alpha+\beta = 1). \end{aligned}$$

(2) D'après la relation de récurrence (3.11) et d'après l'identité précédente, on a :

$$\begin{aligned} 2(-1)^{n-1}(c^2+c-1) &= -2(-1)^n(c^2+c-1) \\ &= 2(H_{n-1}H_{n+2} - H_nH_{n+1}) \\ &= H_{n-1}H_{n+2} + H_{n-1}H_{n+2} - H_nH_{n+1} - H_nH_{n+1} \\ &= H_{n-1}(H_{n+1}+H_n) + (H_n - H_{n-2})H_{n+2} - H_n(H_n + H_{n-1}) - H_nH_{n+1} \\ &= H_{n-1}H_{n+1} + H_{n-1}H_n + H_nH_{n+2} - H_{n-2}H_{n+2} - H_n^2 - H_{n-1}H_n - H_nH_{n+1} \\ &= H_{n-1}H_{n+1} - H_{n-2}H_{n+2} + H_n(H_{n+2} - H_{n+1} - H_n) \\ &= H_{n-1}H_{n+1} - H_{n-2}H_{n+2}. \end{aligned}$$

(3) D'après la relation de récurrence (3.11), on a :

$$\begin{aligned} H_{n+4}H_n - H_{n+2}H_{n-2} &= (H_{n+3}+H_{n+2})(H_{n+1} - H_{n-1}) - (H_{n+3} - H_{n+1})(H_n - H_{n-1}) \\ &= H_{n+1}H_{n+3} - H_{n+3}H_{n-1} + H_{n+2}H_{n+1} - H_{n+2}H_{n-1} - H_{n+3}H_n \\ &+ H_{n+3}H_{n-1} + H_{n+1}H_n - H_{n-1}H_{n+1} \\ &= H_{n+1}H_{n+3} - H_{n-1}H_{n+1} + H_{n+2}(H_{n+1} - H_{n-1}) + H_n(H_{n+1} - H_{n+3}) \\ &= H_{n+1}(H_{n+3} - H_{n-1}) + H_n(H_{n+1} + H_{n+2} - H_{n+3}) \\ &= H_{n+1}(H_{n+3} - H_{n-1}). \end{aligned}$$

(4) D'après la relation de récurrence (3.11), on a :

$$\begin{aligned} H_{n+1}H_{n+2} - H_{n-1}H_n &= (H_n + H_{n-1})(H_{n+1} + H_n) - H_{n-1}H_n \\ &= H_nH_{n+1} + H_n^2 + H_{n-1}H_{n+1} + H_{n-1}H_n - H_{n-1}H_n \\ &= H_n^2 + H_{n+1}(H_n + H_{n-1}) \\ &= H_n^2 + H_{n+1}^2 \end{aligned}$$

et d'après l'identité (3.13)

$$\begin{aligned} H_n^2 + H_{n+1}^2 &= (cF_{n-1} + F_n)^2 + (cF_n + F_{n+1})^2 \\ &= c^2F_{n-1}^2 + F_n^2 + 2cF_{n-1}F_n + c^2F_n^2 + F_{n+1}^2 + 2cF_nF_{n+1} \\ &= c^2(F_{n-1}^2 + F_n^2) + 2cF_n(F_{n-1} + F_{n+1}) + (F_n^2 + F_{n+1}^2) \\ &= c^2F_{2n-1} + 2cF_nL_n + F_{2n+1} \\ &= c^2F_{2n-1} + 2cF_{2n} + F_{2n+1} \\ &= c^2F_{2n-1} + cF_{2n} + cF_{2n} + F_{2n+1} \\ &= c(cF_{2n-1} + F_{2n}) + (cF_{2n} + F_{2n+1}) \\ &= cH_{2n} + H_{2n+1}. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.1 *On a :*

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{H_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} H_{n-2} - 1, & \text{si } n \text{ est pair et } n \geq n_0; \\ H_{n-2}, & \text{si } n \text{ est impair et } n \geq n_1. \end{cases}$$

où n_0 et n_1 sont déterminés uniquement en fonction de la valeur de c.

Exemple 3 $n_0 = 2$ *si* $c = 1, 2$ *;* $n_0 = 4$ *si* $c \leq 4$ *;* $n_0 = 6$ *si* $c \leq 10$ *;* $n_0 = 8$ *si* $c \leq 26$ *;* $n_0 = 10$ *si* $c \leq 68$ *;* $n_0 = 12$ *si* $c \leq 178$ *;* $n_0 = 14$ *si* $c \leq 466\ldots$.
$n_1 = 1$ *si* $c = 1$ *;* $n_1 = 3$ *si* $c = 2$ *;* $n_1 = 5$ *si* $c \leq 6$ *;* $n_1 = 7$ *si* $c \leq 16$ *;* $n_1 = 9$ *si* $c \leq 42$ *;* $n_1 = 11$ *si* $c \leq 110$ *;* $n_1 = 13$ *si* $c \leq 288\ldots$.

Preuve. Par le Lemme 7(2), on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_{n-2}} - \frac{2}{H_n} - \frac{1}{H_{n+1}} &= \frac{(H_n - H_{n-2})H_{n+1} - H_{n-2}(H_n + H_{n+1})}{H_{n-2}H_nH_{n+1}} \\ &= \frac{H_{n-1}H_{n+1} - H_{n-2}H_{n+2}}{H_{n-2}H_nH_{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}2(c^2 + c - 1)}{H_{n-2}H_nH_{n+1}}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si $c \geq 1$ *et* n est pair, alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_{n-2}} &< \frac{1}{H_n} + \frac{1}{H_{n+1}} + \frac{1}{H_n} \\ &< \frac{1}{H_n} + \frac{1}{H_{n+1}} + \frac{1}{H_{n+2}} + \frac{1}{H_{n+3}} + \frac{1}{H_{n+2}} \\ &< \frac{1}{H_n} + \frac{1}{H_{n+1}} + \frac{1}{H_{n+2}} + \frac{1}{H_{n+3}} + \frac{1}{H_{n+4}} + \frac{1}{H_{n+5}} + \ldots, \end{aligned}$$

on a :

$$\frac{1}{H_{n-2}} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{H_k}. \tag{3.14}$$

De la même manière, si $c \geq 1$ et n impair, alors

$$\frac{1}{H_{n-2}} > \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{H_k}. \tag{3.15}$$

D'autre part, si n est pair, alors par le Lemme 7(2), on a :

$$\frac{1}{H_{n-2} - 1} - \frac{1}{H_n} - \frac{1}{H_{n+1}} - \frac{1}{H_n - 1} \tag{3.16}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}2(c^2+c-1)H_n + H_{n+2}(H_{n-2}+H_n-1)}{H_nH_{n+1}(H_{n-2}-1)(H_n-1)}$$

$$= \frac{-2(c^2+c-1)H_n + H_{n+2}(H_{n-2}+H_n-1)}{H_nH_{n+1}(H_{n-2}-1)(H_n-1)}. \tag{3.17}$$

Le numérateur est positif si n est assez grand pour un c fixé. Par exemple, on peut prendre n tel que $H_{n+2} > 2(c^2+c-1)$ puisque H_n est strictement croissante pour n. Plus précisément, si $c = 1$ alors le membre de droite de (3.17) est positif pour $n \geq 2$. Si $2 \leq c \leq 4$, alors $n \geq 4$. Si $5 \leq c \leq 9$, alors $n \geq 6$. Si $10 \leq c \leq 24$, alors $n \geq 8$. Si $25 \leq c \leq 62$, alors $n \geq 10$. Si $63 \leq c \leq 161$, alors $n \geq 12$. Si $162 \leq c \leq 422$, alors $n \geq 14$. Si $423 \leq c \leq 1104$, alors $n \geq 16$.

Si n est impair, on a :

$$\frac{1}{H_{n-2}+1} - \frac{1}{H_n} - \frac{1}{H_{n+1}} - \frac{1}{H_n+1} \tag{3.18}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}2(c^2+c-1)H_n - H_{n+2}(H_{n-2}+H_n+1)}{H_nH_{n+1}(H_{n-2}+1)(H_n+1)}$$

$$= \frac{-2(c^2+c-1)H_n - H_{n+2}(H_{n-2}+H_n+1)}{H_nH_{n+1}(H_{n-2}+1)(H_n+1)}. \tag{3.19}$$

Le numérateur est négatif si n est assez grand pour un c fixé. Par exemple, si $c = 1$, alors le membre de droit de (3.19) est négatif pour $n \geq 1$. Si $c = 2$, alors $n \geq 3$. Si $3 \leq c \leq 6$, alors $n \geq 5$. Si $7 \leq c \leq 15$, alors $n \geq 7$. Si $16 \leq c \leq 38$, alors $n \geq 9$. Si $39 \leq c \leq 100$, alors $n \geq 11$. Si $101 \leq c \leq 261$, alors $n \geq 13$. Si $262 \leq c \leq 682$, alors $n \geq 15$.

Lorsque n est pair, en répétant l'inégalité

$$\frac{1}{H_{n-2}-1} - \frac{1}{H_n} - \frac{1}{H_{n+1}} - \frac{1}{H_n-1} > 0,$$

on obtient :

$$\frac{1}{H_{n-2}-1} > \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{H_k}. \tag{3.20}$$

Avec (3.14), on a :

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{H_k} \right)^{-1} \right\rfloor = H_{n-2} - 1.$$

Lorsque n est impair, en répétant l'inégalité

$$\frac{1}{H_{n-2}+1} - \frac{1}{H_n} - \frac{1}{H_{n+1}} - \frac{1}{H_n+1} < 0.$$

on obtient :

$$\frac{1}{H_{n-2}+1} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{H_k}. \tag{3.21}$$

Avec (3.15), on a :

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{H_k} \right)^{-1} \right\rfloor = H_{n-2}.$$

■

Théorème 3.2.2 *On a :*

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{H_k^2} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} H_{n-1}H_n + g(c) - 1, & \text{si } n \text{ est pair et } n \geq n_2; \\ H_{n-1}H_n - g(c), & \text{si } n \text{ est impair et } n \geq n_3, \end{cases}$$

où

$$g(c) = \begin{cases} \dfrac{c(c+1)}{3} & \text{si } c \equiv 0, 2 \pmod 3; \\ \dfrac{c(c+1)+1}{3} & \text{si } c \equiv 1 \pmod 3. \end{cases}$$

Remarque 3.2.1 *Notez que $g(c)$ est un entier. Si $H_k = L_k$, alors on prend $n_2 = 2$ et $n_3 = 1$. Plus précisément, on peut déterminer n_2 et n_3 comme suit :*

c	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_2	2	2	4	4	4	6	4	6	6	6	6	6	6	6	8	6	8	8	6	8
n_3	1	1	3	5	3	5	5	5	5	7	5	5	7	7	7	7	7	7	7	7

Preuve. Par le Lemme 7(1), on a :

$$\frac{1}{H_{n-1}H_n + (-1)^n g(c) - 1} - \frac{1}{H_n^2} - \frac{1}{H_n H_{n+1} + (-1)^{n+1} g(c) - 1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{H_n^2 + (-1)^{n+1} 2g(c)}{(H_{n-1}H_n + (-1)^n g(c) - 1)(H_n H_{n+1} + (-1)^{n+1} g(c) - 1)} - \frac{1}{H_n^2} \\ &= \frac{(-1)^n (c^2 + c - 1 - 3g(c)) H_n^2 + (g(c))^2 + H_n(H_{n+1} + H_{n-1} - 1)}{H_n^2 (H_{n-1}H_n + (-1)^n g(c) - 1)(H_n H_{n+1} + (-1)^{n+1} g(c) - 1)}. \end{aligned}$$

Supposons que n est pair avec $n \geq 2$, alors le numérateur est :

$$(c^2 + c - 3g(c) - 1) H_n^2 + (g(c))^2 + H_n(H_{n+1} + H_{n-1} - 1)$$

$$\geq \quad H_n^2 + H_n(H_{n+1} + H_{n-1}) + (g(c))^2 - 1 \geq 0.$$

(Les égalités ne sont vérifiées que pour $n = 2$ et $c = 1$). Supposons que n est impair avec $n \geq 1$, alors le numérateur est :

$$(c^2 + c - 3g(c) + 1) H_n^2 + (g(c))^2 + H_n(H_{n+1} + H_{n-1} - 1)$$

$$\geq \quad H_n^2 + H_n(H_{n+1} - H_{n-1}) + (g(c))^2 - 1 > 0.$$

Par conséquent, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\frac{1}{H_{n-1}H_n + (-1)^n g(c) - 1} > \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{H_k^2}. \tag{3.22}$$

De la même manière, on a :

$$\frac{1}{H_{n-1}H_n + (-1)^n g(c) + 1} - \frac{1}{H_n^2} - \frac{1}{H_n H_{n+1} + (-1)^{n+1} g(c) + 1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{H_n^2 + (-1)^{n+1} 2g(c)}{(H_{n-1}H_n + (-1)^n g(c) + 1)(H_n H_{n+1} + (-1)^{n+1} g(c) + 1)} - \frac{1}{H_n^2} \\ &= \frac{(-1)^n (c^2 + c - 1 - 3g(c)) H_n^2 + (g(c))^2 - H_n(H_{n-1} + H_{n+1}) - 1}{H_n^2 (H_{n-1}H_n + (-1)^n g(c) + 1)(H_n H_{n+1} + (-1)^{n+1} g(c) + 1)}. \end{aligned}$$

Si n est pair, alors le numérateur est inférieur ou égal à

$$-H_n(H_{n-1} + H_n + H_{n+1}) - 1.$$

Si n est impair, alors le numérateur est inférieur ou égal à

$$-H_n(H_{n-1}-H_{n-2})+(g(c))^2-1.$$

Ainsi, dans tous les cas, pour $n \geq n_5$ (n_5 grand), les deux valeurs sont négatives. Par conséquent :

$$\frac{1}{H_{n-1}H_n+(-1)^n g(c)+1} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{H_k^2}. \tag{3.23}$$

Par le Lemme (7), paries (1) et (4), on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H_{n-1}H_n+(-1)^n g(c)} - \frac{1}{H_n^2} - \frac{1}{H_{n+1}^2} - \frac{1}{H_{n+1}H_{n+2}+(-1)^n g(c)} \\
&= \frac{H_{n+1}H_{n-1}-H_{n-1}H_n}{(H_{n-1}H_n+(-1)^n g(c))(H_{n-1}H_{n+2}+(-1)^n g(c)-1)} - \frac{H_n^2+H_{n+1}^2}{H_n^2 H_{n+1}^2} \\
&= \frac{(cH_{2n}+H_{2n+1})((-1)^n(c^2+c-1)H_nH_{n+1}}{(H_{n-1}H_n+(-1)^n g(c))(H_{n-1}H_{n+2}+(-1)^n g(c)-1)H_n^2H_{n+1}^2} \\
&+ \frac{(-1)^{n+1}g(c)(H_{n+1}H_{n+2}+H_{n-1}H_n)-(g(c))^2}{(H_{n-1}H_n+(-1)^n g(c))(H_{n-1}H_{n+2}+(-1)^n g(c)-1)H_n^2H_{n+1}^2}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si n est pair avec $n \geq n_6$, alors par :

$$(c^2+c-1)H_nH_{n+1}-g(c)(H_{n+1}H_{n+2}+H_{n-1}H_n)-(g(c))^2<0.$$

On a :

$$\frac{1}{H_{n-1}H_n+g(c)} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{H_k^2}. \tag{3.24}$$

Si n est impair avec $n \geq n_7$, alors par :

$$-(c^2+c-1)H_nH_{n+1}-g(c)(H_{n+1}H_{n+2}+H_{n-1}H_n)-(g(c))^2>0.$$

On a :

$$\frac{1}{H_{n-1}H_n-g(c)} > \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{H_k^2}. \tag{3.25}$$

Si n est pair, par (3.22) et (3.24), on obtient :

$$\frac{1}{H_{n-1}H_n+g(c)} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{H_k^2} < \frac{1}{H_{n-1}H_n+g(c)-1}.$$

Si n est impair, par (3.23) et (3.25), on obtient :

$$\frac{1}{H_{n-1}H_n-g(c)+1} < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{H_k^2} < \frac{1}{H_{n-1}H_n-g(c)}.$$

■

3.3 Suite de Jacobsthal

Il serait intéressant de trouver des résultats similaires pour la somme $\sum_{k=n}^{\infty} W_k^{-1}$, où $(W_n)_n$ désigne la suite de Horadam. Un autre cas particulier de la suite de Horadam est la suite de Jacobsthal définie par :

$$\begin{cases} J_0=0,\ J_1=1, \\ J_{n+2}=J_{n+1}+2J_n, \qquad n\geq 0. \end{cases}$$

3.3.1 Forme de Binet

D'après la formule de Binet (1.23) de la suite de Horadam, on déduit la formule de Binet de la suite de (G_n), elle est donnée par :

$$J_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \qquad (n \geq 0), \tag{3.26}$$

où $\alpha = 2$ et $\beta = -1$ sont les racines de l'équation caractéristique $x^2 - x - 2 = 0$.

Proposition 3.3.1 *La série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_n}$ *est convergente.*

Preuve. Soit $n \geq 1$, d'après la formule de Binet (3.26), on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{J_n} &= \frac{3}{\alpha^n - \beta^n} \\ &= \frac{3}{2^n - (-1)^n} \\ &= \frac{3}{2^n + (-1)^{n+1}} \\ &= \frac{3}{2^n\left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right)} \sim \frac{3}{2^n} \end{aligned}$$

On en déduit que les séries à termes positifs $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ sont de même nature. Puisque $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$, alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente. On en déduit que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{J_n}$ est convergente. ■

Théorème 3.3.1 *[7] Soit $n \geq 1$ un entier, alors*

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} J_{n-1} - 1, & \text{si } n \text{ est pair;} \\ J_{n-1}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

3.4 Suites Hyper-Fibonacci et Hyper-Lucas

Proposition 3.4.1 *Les séries* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^{(1)}}$ *et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L_n^{(1)}}$ *sont convergentes.*

Preuve. On a, par définition, pour tout $n \geq 1$, $F_n^{(1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k$, donc $F_n^{(1)} \geq F_n$, on en déduit que $0 \leq \frac{1}{F_n^{(1)}} \leq \frac{1}{F_n}$. Puisque, d'après la Proposition (2.1.1), la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n}$ est convergente, alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n^{(1)}}$ est convergente. De même, puisque la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L_n}$ est convergente (pour $c = 2$ dans la Proposition 3.2.1), on en déduit que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L_n^{(1)}}$ est convergente. ■

Théorème 3.4.1 *[11] Soit $n \geq 3$ un entier, on a :*

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k^{(1)}} \right)^{-1} \right\rfloor = F_n - 1, \tag{3.27}$$

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{L_k^{(1)}} \right)^{-1} \right\rfloor = L_n - 1, \quad (n \geq 4) \tag{3.28}$$

Preuve. En utilisant (1.4), (1.11) et (1.24), on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_n^{(1)}-F_{n-1}^{(1)}}-\frac{1}{F_n^{(1)}}-\frac{1}{F_{n+1}^{(1)}}-\frac{1}{F_{n+2}^{(1)}-F_{n+1}^{(1)}} &= \frac{1}{F_n}-\frac{1}{F_n^{(1)}}-\frac{1}{F_{n+1}^{(1)}}-\frac{1}{F_{n+2}} \\
&= \frac{F_n^{(1)}(F_{n+1}F_{n+3}-F_nF_{n+2}-F_{n+1})-F_nF_{n+2}F_{n+1}^{(1)}}{F_nF_{n+2}F_n^{(1)}F_{n+1}^{(1)}} \\
&= \frac{F_n^{(1)}[2(-1)^n+F_nF_{n+3}-F_{n+1}]-F_nF_{n+2}F_{n+1}^{(1)}}{F_nF_{n+2}F_n^{(1)}F_{n+1}^{(1)}} \\
&= \frac{F_n^{(1)}[2(-1)^n-F_{n+1}]+F_n[F_n^{(1)}F_{n+3}-F_{n+2}F_{n+1}^{(1)}]}{F_nF_{n+2}F_n^{(1)}F_{n+1}^{(1)}} \\
&= \frac{F_n^{(1)}[2(-1)^n-F_{n+1}]-F_nF_{n+1}}{F_nF_{n+2}F_n^{(1)}F_{n+1}^{(1)}}, \quad n\geq 2
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_n^{(1)}-F_{n-1}^{(1)}-1}-\frac{1}{F_n^{(1)}}-\frac{1}{F_{n+1}^{(1)}}-\frac{1}{F_{n+2}^{(1)}-F_{n+1}^{(1)}-1} &= \frac{F_{n+1}F_{n+1}^{(1)}-(F_n-1)F_n^{(1)}-(F_n-1)F_{n+1}^{(1)}}{(F_n-1)F_n^{(1)}F_{n+1}^{(1)}} \\
&= \frac{2((-1)^n+F_n+F_{n+2}-1)}{(F_n-1)F_n^{(1)}F_{n+1}^{(1)}}, \quad n\geq 3.
\end{aligned}$$

En utilisant (1.14), (1.16) et (1.24), on obtient :

$$\frac{1}{L_n^{(1)}-L_{n-1}^{(1)}}-\frac{1}{L_n^{(1)}}-\frac{1}{L_{n+1}^{(1)}}-\frac{1}{L_{n+2}^{(1)}-L_{n+1}^{(1)}}=\frac{(10(-1)^{n+1}-L_{n+1})L_n^{(1)}-L_nL_{n+1}}{L_nL_{n+2}L_n^{(1)}L_{n+1}^{(1)}}$$

pour $n\geq 4$, et

$$\frac{1}{L_n^{(1)}-L_{n-1}^{(1)}-1}-\frac{1}{L_n^{(1)}}-\frac{1}{L_{n+1}^{(1)}}-\frac{1}{L_{n+2}^{(1)}-L_{n+1}^{(1)}-1}=\frac{10(-1)^{n+1}+2(L_n+L_{n+2}-1)}{(L_n-1)L_n^{(1)}L_{n+1}^{(1)}},$$

pour $n\geq 2$. D'après les inégalités

$$\begin{aligned}
F_n^{(1)}(2(-1)^n-F_{n+1})-F_nF_{n+1} &< 0, \quad n\geq 2, \\
(10(-1)^{n+1}-L_{n+1})L_n^{(1)}-L_nL_{n+1} &< 0, \quad n\geq 4, \\
(-1)^n+F_n+F_{n+2}-1 &> 0, \quad n\geq 3, \\
10(-1)^{n+1}+2(L_n+L_{n+2}-1) &> 0, \quad n\geq 2,
\end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_n^{(1)}-F_{n-1}^{(1)}} &< \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{F_k^{(1)}} < \frac{1}{F_n^{(1)}-F_{n-1}^{(1)}-1}, \quad n\geq 3, \\
F_n-1 &< \left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{F_k^{(1)}}\right)^{-1} < F_n, \quad n\geq 3, \\
\frac{1}{L_n^{(1)}-L_{n-1}^{(1)}} &< \sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{L_k^{(1)}} < \frac{1}{L_n^{(1)}-L_{n-1}^{(1)}-1}, \quad n\geq 4, \\
L_n-1 &< \left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{L_k^{(1)}}\right)^{-1} < L_n, \quad n\geq 4,
\end{aligned}$$

par conséquent, les relations (3.27) et (3.28) sont vérifiées. ■

Théorème 3.4.2 *Soit n un entier positif, on a :*

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(F_k^{(1)})^2} \right) \right\rfloor = \begin{cases} F_{n-1}^{(1)} F_n^{(1)} + F_{n-1}^{(1)} - 1, & \text{si } n \text{ est pair et } n \geq 2; \\ F_{n-1}^{(1)} F_n^{(1)} + F_{n-1}^{(1)}, & \text{si } n \text{ est impair et } n \geq 1; \end{cases} \tag{3.29}$$

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(L_k^{(1)})^2} \right) \right\rfloor = L_{n-1}^{(1)} L_n^{(1)} + L_{n-1}^{(1)} - 1, \quad \text{si } n \text{ est impair et } n > 1; \tag{3.30}$$

Preuve. En utilisant (1.4), (1.10) et (1.24), on obtient :

$$\frac{1}{F_{n-1}^{(1)} F_n^{(1)} + F_{n-1}^{(1)} - 1} - \frac{1}{(F_n^{(1)})^2} - \frac{1}{F_n^{(1)} F_{n+1}^{(1)} + F_n^{(1)} - 1} = \frac{1}{F_{n-1}^{(1)} F_{n+2} - 1} - \frac{1}{(F_n^{(1)})^2} - \frac{1}{F_n^{(1)} F_{n+3} - 1}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(F_n^{(1)})^2 (F_n^{(1)} F_{n+3} - F_{n-1}^{(1)} F_{n+2}) - (F_{n-1}^{(1)} F_{n+2} - 1) - (F_n^{(1)} F_{n+3} - 1)}{(F_{n-1}^{(1)} F_{n+2} - 1)(F_n^{(1)})^2 (F_n^{(1)} F_{n+3} - 1)} \\ &= \frac{(F_n^{(1)})^2 (F_{n+2}^2 - F_{n+1}) - F_{n-1}^{(1)} F_n^{(1)} F_{n+2} F_{n+3} + F_{n-1}^{(1)} F_{n+2} + F_n^{(1)} F_{n+3} - 1}{(F_{n-1}^{(1)} F_{n+2} - 1)(F_n^{(1)})^2 (F_n^{(1)} F_{n+3} - 1)} \\ &= \frac{(F_{n+3} + (-1)^{n+1} F_{n+2}) F_n^{(1)} + F_n^{(1)} F_{n+1} + F_{n-1}^{(1)} F_{n+2} - 1}{(F_{n-1}^{(1)} F_{n+2} - 1)(F_n^{(1)})^2 (F_n^{(1)} F_{n+3} - 1)} > 0, \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(F_k^{(1)})^2} < \frac{1}{F_{n-1}^{(1)} F_n^{(1)} + F_{n-1}^{(1)} - 1}.$$

De même, on peut prouver que

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(F_k^{(1)})^2} > \frac{1}{F_{n-1}^{(1)} F_n^{(1)} + F_{n-1}^{(1)} + 1}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_{n-1}^{(1)} F_n^{(1)} + F_{n-1}^{(1)}} - \frac{1}{(F_n^{(1)})^2} - \frac{1}{F_n^{(1)} F_{n+1}^{(1)} + F_n^{(1)}} &= \frac{1}{F_{n-1}^{(1)} F_{n+2}} - \frac{1}{(F_n^{(1)})^2} - \frac{1}{F_n^{(1)} F_{n+3}} \\ &= \frac{(F_n^{(1)})^2 F_{n+3} - F_{n-1}^{(1)} F_n^{(1)} F_{n+2} - F_{n-1}^{(1)} F_{n+2} F_{n+3}}{F_{n-1}^{(1)} (F_n^{(1)})^2 F_{n+2} F_{n+3}} \\ &= \frac{F_n^{(1)} (F_n^{(1)} F_{n+3} - F_{n-1}^{(1)} F_{n+2}) - F_{n-1}^{(1)} F_{n+2} F_{n+3}}{F_{n-1}^{(1)} (F_n^{(1)})^2 F_{n+2} F_{n+3}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} F_{n+2} + F_{n+1}}{F_{n-1}^{(1)} (F_n^{(1)})^2 F_{n+2} F_{n+3}}. \end{aligned}$$

Lorsque $n \geq 2$ est pair, on peut vérifier que

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(F_k^{(1)})^2} > \frac{1}{F_{n-1}^{(1)} F_n^{(1)} + F_{n-1}^{(1)}},$$

et lorsque $n \geq 1$ est impair, alors

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(F_k^{(1)})^2} > \frac{1}{F_{n-1}^{(1)} F_n^{(1)} + F_{n-1}^{(1)}}.$$

Lorsque n est pair, on obtient :

$$F_{n-1}^{(1)}F_n^{(1)} + F_{n-1}^{(1)} - 1 < \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(F_k^{(1)})^2}\right)^{-1} < F_{n-1}^{(1)}F_n^{(1)} + F_{n-1}^{(1)},$$

et lorsque n est impair, on a

$$F_{n-1}^{(1)}F_n^{(1)} + F_{n-1}^{(1)} < \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(F_k^{(1)})^2}\right)^{-1} < F_{n-1}^{(1)}F_n^{(1)} + F_{n-1}^{(1)} + 1,$$

donc (3.29) est vérifiée. En appliquant (1.14), (1.17) et (1.24), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(L_k^{(1)})^2} &< \frac{1}{L_{n-1}^{(1)}L_n^{(1)} + L_{n-1}^{(1)} - 1}1 \\ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(L_k^{(1)})^2} &> \frac{1}{L_{n-1}^{(1)}L_n^{(1)} + L_{n-1}^{(1)} - 1}, \quad n \text{ est impaire,} \end{aligned}$$

donc (3.30) est vérifiée. ■

Bibliographie

[1] R. André-Jeannin, Irrationalité de la somme des inverses de certaines suites récurrentes. (French) [[The irrationality of the sum of reciprocals in certain recurrent sequences]] C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 308 (1989), no. 19, 539–541.

[2] R. André-Jeannin, Lambert series and the summation of reciprocals in certain Fibonacci- Lucastype sequences, *Fibonacci Quart.* 28 (1990), 223–226.

[3] M. Başbük, and Y. Yazlik, On the sum of reciprocal of generalized bi-periodic Fibonacci numbers. *Miskolc Math. Notes* 17 (2016), no. 1, 35–41.

[4] G. Choi and Y. Choo, On the reciprocal sums of products of Fibonacci and Lucas numbers. *Filomat* 32 (2018), no. 8, 2911–2920.

[5] A. Dil and I. Mező, *A symmetric algorithm for hyperharmonic and Fibonacci numbers,* Appl. Math. Comput. **206**(2) (2008) 942–951.

[6] C. Elsner, S. Shimomura and I. Shiokawa, Algebraic relations for reciprocal sums of odd terms in Fibonacci numbers, *Ramanujan J.* 17 (2008), 429–446.

[7] S. H. Holliday and T. Komatsu, On the sum of reciprocal generalized Fibonacci numbers. *Integers* 11 (2011), no. 4, 441–455.

[8] T. Komatsu, V. Laohakosol and P. Ruengsinsub, Independence measures of arithmetic functions, (preprint).

[9] K. Kuhapatanakul, On the sums of reciprocal generalized Fibonacci numbers. *J. Integer Seq.* 16 (2013), no. 7, Article 13.7.1, 8 pp.

[10] H. Ohtsuka, and S. Nakamura, On the sum of reciprocal Fibonacci numbers. *Fibonacci Quart.* 46/47 (2008/09), no. 2, 153–159.

[11] R. Liu and F. Zhao, On the sums of reciprocal hyperfibonacci numbers and hyperlucas numbers. *J. Integer Seq.* 15 (2012), no. 4, Article 12.4.5, 10 pp.

[12] A. Szynal-Liana, The Horadam hybrid numbers, *General algebra and applications* **38** p. 91–98, (2018).

[13] T.-a. Tanaka, Algebraic independence of Fibonacci reciprocal sums associated with Newton's method, *Tsukuba J. Math.* 27 (2003), 375–387.

[14] G. Udrea, A note on the sequence $(W_n)_{n\geq 0}$ A.F. Horadam, *Portugaliae Mathematica* **53. 2** ; p. 143 - 156, (1996).

[15] E. W. Weisstein, Reciprocal Fibonacci Constant, *https ://mathworld.wolfram.com/ReciprocalFibonacciConstant.html.*

[16] Z. Wenpeng and W. Tingting, The infinite sum of reciprocal Pell numbers. *Appl. Math. Comput.* 218 (2012), no. 10, 6164–6167.