MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE YAHIA FARES DE MÉDÉA
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE



THÈSE

pour l'obtention du diplôme

DOCTORAT EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : **Analyse et Modélisation Mathématiques**

présentée par

Madjid SEBAOUI

Titre :

Sur Quelques Propriétés Analytiques des Polynômes Classiques

Soutenue publiquement, le 23 Juin 2019 , devant le jury composé de :

Mr. ABUDURA Salam, Professeur, Université de Médéa,	Président du jury
Mr. RAHMANI Mourad, MCA, USTHB ,	Directeur de thèse
Mr. LAISSAOUI Diffalah, MCA, Université de Médéa,	Co-directeur de thèse
Mr. MIHOUBI Miloud, Professeur, USTHB ,	Examinateur
Mr. IKHLEF-ESCHOUF Noureddine, MCA, Université de Médéa,	Examinateur
Mr. BOUTICHE Mohamed Amine, MCA, USTHB,	Examinateur

Remerciements

Je remercie, en premier lieu, **ALLAH**, pour la foi, la confiance et la volonté dont il m'a doté.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements et ma reconnaissance à mon Directeur de Thèse, **Mr. RAHMANI Mourad**, et le Co-directeur de Thèse **Mr. LAISSAOUI Diffalah** , d'avoir su guider mes premiers pas vers la recherche. Je les remercie, également, pour tout le temps qu'ils m'ont accordé, leurs aides, leurs efforts inlassables, leur patience, leurs conseils, leur disponibilité et leur clairvoyance mathématique qui m'ont permis de surmonter ce travail. Je ne saurais oublier de remercier aussi Mme GUETTAI Ghania a qui j'ai eu le plaisir de discuter de nos travaux.

Je remercie, également, **Mr. ABUDURA Salam**, Professeur à l'université de Yahia Farès de Médéa, qui m'a fait l'honneur en acceptant de présider le jury de soutenance de ma Thèse.

Je vous remercie aussi sincèrement les examinateurs **Mr. MIHOUBI Miloud**, Professeur, USTHB, **Mr. IKHLEF-ESCHOUF Noureddine**, MCA, Université de Yahia Farès de Médéa , **Mr. BOUTICHE Mohamed Amine**, MCA, USTHB. Je suis honoré en acceptant de faire partie de mon jury.

Je voudrais exprimer ma plus profonde gratitude à ma chère mère, pour son soutien inconditionnel, sa patience intérissable et sa générosité sans pareille. Ma femme, ma soeur et mes frères merci pour tous. Je remercie aussi mon ami MAHDANI Abd Elhakim pour son aide et son encouragement.

Table des matières

Remerciements i
Table des matières ii
Résumé v
Abstract vi
Liste des tableaux vii
Notation viii

Introduction **1**

1 Préliminaires **3**
1 Eléments de la combinatoire énumérative 3
1.1 Factorielle descendante 3
1.2 Factorielle montante 4
1.3 Coefficients binomiaux 4
1.4 Fonctions génératrices 5
1.5 Fonction hypergéométrique 5
2 Les suites classiques 8
2.1 Nombres de Stirling de première espèce 8
2.2 Nombres de Stirling de deuxième espèce 9
2.3 Nombres $r-$Stirling de deuxième espèce 11
2.4 Nombres et polynômes de Lah 12
Propriétés 13
Transformation de Lah : 13
2.5 Nombres r-Lah de première espèce 14
2.6 Nombres et polynômes de Bell 14
2.7 Polynômes de Laguerre et polynômes de Laguerre associés 16
2.8 Les nombres et les polynômes de Bernoulli 18
Propriétés élémentaires 18
3 Log-concavité et unimodalité 19

2 Sur les nombres et les polynômes poly-Bell **20**
1 Introduction 20
2 Les nombres p-Bell 21
2.1 Fonctions génératrices et formules explicites 21
2.2 Relation de récurrence 27
3 Les nombres Poly-Bell 29
4 Les polynômes p-Bell 32
5 Représentation probabiliste 36

3 Sur les polynômes s-Lah **38**
1 Transformation de Lah généralisée 38
2 Sur les polynômes s-Lah 43

4 Une formule de récurrence à trois termes pour les polynômes de Bernoulli généralisés **49**
1 Introduction 49
2 Les polynômes de Daehee d'odre α 50
3 Relation de récurrence pour les polynômes de Bernoulli généralisés d'ordre k 52

Conclusion, Perspectives **54**

Bibliographie **55**

الملخص

هذه الأطروحة هي جزء من التوافقيات التعدادية، وتتناول دراسة الخصائص التحليلية لكثيرات الحدود الكلاسيكية. و بالتالي في الفصل الأول، نقدم المفاهيم الأساسية اللازمة لتطوير النتائج الموضحة في الفصول الأخرى.

في الفصل الثاني نبني عائلة جديدة من الأرقام وكثيرات الحدود والتي ترتبط بأرقام وكثيرات حدود بيل عن طريق دالة الإلتقاء الهندسي المفرط ونقدم بعض الخصائص. من خلال تطبيق صيغة كوشي على التكاملات المتكررة، نقدم الأرقام و كثيرات الحدود المتعددة لبيل.

في الفصل الثالث، ندرس فئة جديدة من كثيرات حدود لا المعممة التي نسميها كثيرات الحدود أس.لا. أولاً، نعرّف العلاقة التي تعمم تحويل لا. ثانياً ، نقدم على وجه الخصوص معاملا جديدًا ونقيم علاقة بين كثيرات الحدود أس.لا و كثيرات حدود لاغار المرتبطة بها. كتطبيق توافقي نثبت أحادية الاتجاه لمعاملات كثيرات الحدود أس.لا.

في الفصل الرابع ، نقترح بعض الصيغ الجديدة الصريحة لكثيرات حدود داهي ذات ترتيب أعلى بدلالة أرقام أرستيرلينغ و أرويتني من النوع الثاني. نتيجة لذلك ، نحصل على علاقة تراجعية ثلاثية المدى لحساب كثيرات حدود برنولي المعممة ذات الترتيب ك.

الكلمات الرئيسية. التوافقيات التعدادية، أعداد و كثيرات حدود بيل، كثيرات حدود برنولي، دالة مولدة، التمثيل الإحتمالي، أرقام ستيرلينغ، كثيرات حدود داهي، أرقام و كثيرات حدود لا، تحويل لا، كثيرات حدود لاغار المرتبطة، التقعر اللوغاريتمي، أحادية الإتجاه.

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la combinatoire énumérative, elle porte sur l'étude des propriétés analytiques des polynômes classiques. Ainsi, dans un premier chapitre nous introduisons les notions de base nécessaire au développement des résultat exposés dans les autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre nous construisons une nouvelle famille de nombres et de polynômes liés aux nombres et polynômes de Bell au moyen de la fonction hypergéométrique confluente et nous donnons quelques propriétés. En appliquant la formule de Cauchy pour les intégrales itérées, nous introduisons les nombres et les polynômes de poly-Bell.

Dans le troisième chapitre, nous étudions une nouvelle classe de polynômes de Lah généralisés et que nous appelons les polynômes s-Lah. Tout d'abord, on définit une identité qui généralise la transformation de Lah. Deuxièmement, nous donnons en particulier un nouveau coefficient et nous établissons une relation entre les polynômes de s-Lah et les polynômes de Laguerre associés. Comme une application combinatoire, nous prouvons l'unimodalité des coefficients des polynômes de s-Lah.

Dans le quartième chapitre, nous proposons quelques nouvelles formules explicites des polynômes de Daehee d'ordre supérieur en termes de nombres r-Stirling et r-Whitney de deuxième espèce. En conséquence, nous obtenons une formule de récurrence à trois termes pour le calcul des polynômes de Bernoulli généralisés d'ordre k.

Mots-clés : Combinatoire énumérative, nombres et polynômes de Bell, polynômes de Bernoulli, fonction génératrice, représentation probabiliste, nombres de Stirling, polynômes de Daehee, nombres et polynômes de Lah, transformation de Lah, polynômes de Laguerre associés, Log-concavité, unimodalité.

Abstract

This thesis is part of the field of enumerative combinatorics, it deals with the study of the analytic properties of classical polynomials. Thus, in a first chapter we introduce the basic notions necessary for the development of the results explained in the other chapters.

In the second chapter we construct a new family of numbers and polynomials which are related to the Bell numbers and polynomials by means of the confluent hypergeometric function and we give some properties. By applying Cauchy formula for repeated integration, we introduce poly-Bell numbers and polynomials.

In the third chapter we investigate a new class of generalized Lah polynomials which we call s-Lah polynomials. First, we define an identity that generalizes the transformation of Lah. Secondly, we give in particular a new coefficient and we establish a relation between the polynomials of s-Lah and the associated Laguerre polynomials. As a combinatorial application, we prove the unimodality of the polynomial coefficients of s-Lah.

In the fourth chapter, we propose some new explicit formulas for higher order Daehee polynomials in terms of r-Stirling and r-Whitney numbers of the second kind. As a result, we obtain a three-term recursion formula for calculating the generalized Bernoulli polynomials.

Key words : combinative enumerative, Bell numbers and polynomials, Bernoulli polynomials, Generating function, Probabilistic representation, Stirling numbers, Daehee polynomials, Lah uumbers and polynomials, Lah transform, associated Laguerre polynomials, Log-concavity, unimodality.

Liste des tableaux

1.1 Les premières valeurs des nombres de Stirling de première espèce signés. 9
1.2 Les premières valeurs des nombres de Stirling de deuxième espèce 10
1.3 Quelques valeurs des 2-Stirling de deuxième espèce. 12
1.4 Quelques valeurs des 3-Stirling de deuxième espèce. 12
1.5 Les premières valeurs des nombres de Lah. 13
1.6 Les premières valeurs des nombres de Bell. 15
1.7 Les premières valeurs des nombres de Bernoulli. 18

2.1 Quelques valeurs des nombres poly-Bell. 32

Notation

Les notations adoptées dans cette thèse.

$\mathbb{N}$	l'ensemble des entiers naturels
$\mathbb{C}$	l'ensemble des nombres complexes
$:=$	égalité par définition (affectation)
$\delta_{i,j}$	symbole de Kronecker égal à 1 si $i = j$ et 0 sinon
$x^{\overline{n}}$	le produit $x(x+1)\cdots(x+n-1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x^{\overline{0}} = 1$
$x^{\underline{n}}$	le produit $x(x-1)\cdots(x-n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x^{\underline{0}} = 1$
${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, & \cdots & , a_p \\ b_1, & \cdots & , b_q \end{matrix}; x\right)$	la fonction hypergéometrique
$\binom{n}{k}$	le coefficient binomiale
$s(n,k)$	le nombre de Stirling de première espèce signé
$\left\{ {n \atop k} \right\}$	le nombre de Stirling de deuxième espèce
$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$	le nombre de Lah
$\left\{ {n \atop k} \right\}_r$	r-Stirling de deuxième espèce
$W_{m,r}(n,k)$	le nombre r-Whitney de deuxième espèce
$S_n^k(x)$	le nombre de Stirling de deuxième espèce à poids
$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor_r$	le nombre r-Lah
$\left\lceil {n \atop k} \right\rceil_r$	le nombre r-Lah de deuxième espèce

ϕ_n	le n-ième nombre de Bell
B_n	le n-ième nombre de Bernoulli
$B_n^{(\alpha)}$	le n-ième nombre de Bernoulli d'ordre α
$\mathcal{B}_{n,p}$	le n-ième nombre p-Bell
$\mathbb{B}_n^{(p)}$	le n-ième nombre de poly-Bell
$D_n^{(k)}$	le n-ième nombre de Daehee d'ordre k
$L_n(x)$	le n-ième polynôme de Lah
$L_{n,s}(x)$	le n-ième polynôme de s-Lah
$\mathbb{L}_n^{(k)}$	le n-ième polynôme de Laguerre
det	déterminant

Introduction

Ce mémoire de thèse intitulé "Sur quelques propriétés analytique des polynômes classiques" regroupe plusieurs travaux dans le domaine de la combinatoire énumérative. L'objectif de cette thèse est d'étudier des nouvelles classes des polynômes qui généralisent les polynômes classiques et de proposer des méthodes récursives simples pour le calcul de ces polynômes. La première classe est issue de la combinatoire élémentaire. C'est le nombre de Bell où le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. La deuxième classe est le coefficient de Lah où le nombre de partitions en k listes d'un ensemble à n éléments. La troisième classe est la suite des nombres de Bernoulli de la théorie des nombres, qui est une suite de nombres rationnels et qui apparait dans la fonction zéta ζ de Riemann pour des valeurs entières négatives de la variable.

Dans le premier chapitre "*préliminaires* ", nous présentons les notions de base de la théorie de la combinatoire énumérative. On y précise la terminologie, les conventions et nous rappelons quelques éléments essentiels qui seront utiles pour la suite, tels les factorielles, les séries génératrices, les suites remarquables (nombres de Stirling, Lah, Bell, Bernoulli etc.) et leurs propriétés combinatoires.

Dans le deuxième chapitre, intitulé "*sur les nombres et les polynômes poly-Bell*", est sans doute le plus important, nous exposons une tentative de généralisation de la suite des polynômes de Bell classiques à l'aide de la fonction hypergéométrique de Kummer. La motivation est l'identité de Ramanujan

$$\int_0^x \phi_n(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{\phi_k(x)\, B_{n+1-k}}{k+1}.$$

qui regroupe deux suites remarquables, la première, la suites des polynômes de Bell $\phi_n(x)$ qui représente le domaine de la combinatoire et l'autre suite classique de la théorie des nombres à savoir la suite des nombres de Bernoulli B_n. Dans ce chapitre, on va étudier la série suivante :

$$\sum_{n\geq 0} \binom{n+p}{p}^{-1} \frac{(e^z-1)^n}{n!}$$

et nous montrons que le terme général de cette série peut s'exprimer à l'aide des intégrales itérées et qui va être, par la suite, motiver la définition de nouveaux nombres, ce qu'on a appelé dans notre manuscrit texte les nombres poly-Bell $\mathbb{B}_{n,p}$ qui sont analogues aux nombres de poly-Bernoulli de Kaneko

[24]. Nous établissons les propriétés de base pour cette suite (fonctions génératrices et les formules explicites, les différentes relations de récurrences, une représentation probabiliste etc.). Nous montrons l'identité suivante :

$$p!\int_0^1 dx_p \int_0^{x_p} dx_{p-1} \cdots \int_0^{x_2} \phi_n(x_1)\, dx_1 = \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} \binom{n+p}{p}^{-1} \phi_{n+p-k} B_k^{(p)} - \sum_{k=1}^{p} \binom{n+k}{k}^{-1} \binom{p}{k} B_{n+k}^{(k)}.$$

Une extension aux cas des polynômes est également étudiée.

Le troisième chapitre *"Sur les polynômes s-Lah"* porte sur une généralisation de la transformation de Lah. Rappelons que la transformation de Lah d'une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est la suite $(\beta_n)_{n\geq 0}$, donnée par

$$\beta_0 = \alpha_0, \qquad \beta_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} \alpha_k \quad (n \geq 1),$$

et la transformation inverse

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} \beta_k \ .$$

Dans ce chapitre, on propose d'étudier la relation de récurrence à trois termes suivants :

$$a_{n+1,m}(x) = (n+m)\, a_{n,m}(x) + x a_{n,m+1}(x)\,.$$

Notre contribution consiste à proposer une nouvelle approche permettant d'étudier les polynômes de Lah. Pour cela, nous définissons les polynômes s-Lah qui vont nous permettre de définir les nombres r-Lah de deuxième espèce. Une attention particulière est portée sur les propriétés analytiques de ces nombres. Un lien entre les polynômes s-Lah et les polynômes de Laguerre associés est prouvé.

Le quatrième chapitre [9], *"une formule de récurrence à trois termes pour les polynômes de Bernoulli généralisés "* est consacré à la suite de polynômes de Bernoulli généralisés $\left(B_n^{(k)}(x)\right)_{n\geq 0}$ définie par la fonction génératrice suivante :

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^k e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(k)}(x)\, \frac{t^n}{n!} \tag{1}$$

Après avoir étudié les polynômes de Daehee d'ordre supérieur, on propose une méthode récursive pour le calcul des polynômes de Bernoulli généralisés d'ordre k.

1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous donnons des définitions et des outils de base concernant notre sujet. Nous nous intéressons aux coefficients binomiaux, suites et polynômes remarquables en présentant certaines de leurs propriétés. Pour plus de détailles consulter les ouvrages [16, 19, 20, 29, 36, 40]

1 Eléments de la combinatoire énumérative

1.1 Factorielle descendante

Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$, la factorielle descendente d'ordre n notée $x^{\underline{n}}$, est définie par

$$x^{\underline{n}} := \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ x\,(x-1)\cdots(x-n+1)\,, & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Si $x = n$ dans (1.1) on obtient la fonction factorielle $n^{\underline{n}} = n!$.

Pour $x, y \in \mathbb{C}$ et $n, m \in \mathbb{Z}$ on a

$$
\begin{aligned}
&x^{\underline{n}} = n!\binom{x}{n}, \quad x \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N},\\
&x^{\underline{n+m}} = x^{\underline{n}}(x-n)^{\underline{m}},\\
&x^{\underline{-m}} = \frac{1}{(x+m)^{\underline{m}}}, x \neq -1, -2, ..., -m,\\
&(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{n} x^{\underline{k}} y^{\underline{n-k}}, \quad n \in \mathbb{N}\\
&(x+n-1)^{\underline{n}} = (-1)^{\underline{n}}(-x)^{\underline{n}}\\
&x^{\underline{n}} = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-n+1)}.
\end{aligned}
$$

où Γ est la fonction gamma d'Euler.

1.2 Factorielle montante

Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$, la factorielle montante d'ordre n notée $x^{\overline{n}}$, est définie par

$$
x^{\overline{n}} := \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0, \\ x(x+1)\cdots(x+n-1), & \text{si } n \geq 1. \end{cases} \tag{1.2}
$$

Si $x = 1$ dans (1.2), on obtient la fonction factorielle $1^{\overline{n}} = n!$.

Ainsi, on a

$$
\begin{aligned}
(-x)^{\overline{n}} &= (-1)^n x^{\underline{n}},\\
x^{\overline{n}} &= \frac{(x+n-1)!}{(x-1)!},\\
x^{\overline{n}} &= \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}
\end{aligned}
$$

1.3 Coefficients binomiaux

Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, le coefficient binomial noté $\binom{x}{n}$, est défini par la relation suivante :

$$
\binom{x}{n} = \frac{x^{\underline{n}}}{n!}.
$$

En particulier, on a

$$
\binom{x}{0} = 1.
$$

Notons que si x, est un entier positif, alors $x^{\underline{n}}$, est le nombre de permutations de n éléments parmi x et $\binom{x}{n}$ est le nombre de façons de prendre n éléments dans un ensemble de x éléments.

Proposition 1.1. *(**Formule du binome de Newton**) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x, y \in \mathbb{C}$, alors :*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

1.4 Fonctions génératrices

Soit Ω un anneau commutatif, ayant un élément unité. On appelle série formelle, à coeffcients dans Ω, et en l'indéterminée z, toute expression formelle du type

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

où les a_n, sont appelés coefficients de f. On note $\Omega[[z]]$ l'ensemble des séries formelles à valeurs dans Ω.

Le produit de Hadamard $f(z) \circ g(z)$ de deux séries formelles $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ est la série formelle donnée par

$$f(z) \circ g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n b_n z^n. \tag{1.3}$$

On appelle fonction génératrice de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, par rapport à la suite $(b_n)_{n\geq 0}$, la série formelle définie en (1.3).

Pour $b_n = 1$ dans (1.3) et pour tout $n \geq 0$, la série $f(z) \circ g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est appelée fonction génératrice ordinaire de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

Pour $b_n = \frac{1}{n!}$ dans (1.3) et pour tout $n \geq 0$, la série $f(z) \circ g(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$ est appelée fonction génératrice exponentielle de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

La transformation de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}$ que l'on définit sur l'algèbre des séries formelles à pour effet d'envoyer toute fonction génératrice ordinaire sur la fonction génératrice exponentielle correspondante

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\sum_{n\geq 0} a_n z^n\right) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{n!},$$

où la transformation de Laplace d'une fonction h est définie par

$$\mathcal{L}(h) = \int_0^{+\infty} e^{-st} h(t)\, dt.$$

1.5 Fonction hypergéométrique

L'origine des fonctions hypergéométriques se trouve au début du $19^{ième}$ siècle, lorsque Gauss étudie l'équation différentille suivante [2, 42] :

$$x(1-x)y'' + (c-(a+b+1)x)y' - aby = 0, \tag{1.4}$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$. Cette équation connue sous le nom de *équation différentielle de Gauss*. La fonction hypergéométrique généralisée a une représentation en série :

$$\sum_{n\geq 0} C_n$$

avec $\frac{C_{n+1}}{C_n}$ une fonction rationnelle de n, définie par la relation suivante :

$$\frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{(n+a_1)...(n+a_p)x}{(n+b_1)...(n+b_q)(n+1)}.$$

Si $C_0 = 1$, on a :

$$C_n = \frac{a_1^{\overline{n}} a_2^{\overline{n}} ... a_p^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}} b_2^{\overline{n}} ... b_q^{\overline{n}}} \frac{x^n}{n!}$$

et la fonction hypergéomètrique est alors

$${}_pF_q \left(\begin{array}{cccc} a_1, & \cdots & , a_p \\ b_1, & \cdots & , b_q \end{array} ; x \right) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_1^{\overline{n}} a_2^{\overline{n}} ... a_p^{\overline{n}}}{b_1^{\overline{n}} b_2^{\overline{n}} ... b_q^{\overline{n}}} \frac{x^n}{n!}.$$

Nous connaissons beaucoup de fonctions importantes qui sont en fait des fonctions hypergéomètriques particulières. Le cas particulier le plus simple est celui où $p = q = 0$: il y a aucun paramètre, et on obtient la série bien connue

$${}_0F_0 \left(\begin{array}{c} \\ \end{array} ; x \right) = e^x.$$

Si $p = 1$ et $q = 1$, on obtient la fonction hypergéométrique confluente de Kummer ${}_1F_1 \left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} ; x \right)$, est définie par

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a^{\overline{n}}}{b^{\overline{n}}} \frac{x^n}{n!}. \tag{1.5}$$

Si $p = 2$ et $q = 1$ on obtient la fonction hypergéométrique de Gauss ${}_2F_1 \left(\begin{array}{c} a, b \\ c \end{array} ; x \right)$ où $|x| < 1$, la solution de l'équation différentielle (1.4).

On prend quelques fonctions importantes qui peuvent être exprimer en fonction des séries de Gauss :

$$(1+x)^\alpha = {}_2F_1 \left(\begin{array}{c} -a, b \\ b \end{array} ; -x \right),$$

$$\log(1+x) = x\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,1\\2\end{matrix};-x\right),$$

$$\sin^{-1}x = x\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/2,1/2\\3/2\end{matrix};x^2\right),$$

$$\tan^{-1}x = x\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}1/2,1\\3/2\end{matrix};-x^2\right),$$

$$\exp(x) = \lim_{|a|\longrightarrow\infty} {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\b\end{matrix};x/a\right),$$

où $|x|<1$.

Et on a

$$\lim_{|b|\longrightarrow\infty} {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix};x/b\right) = {}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\c\end{matrix};x\right). \tag{1.6}$$

Le théorème suivant contient une importante représentation intégrale de la fonction ${}_2F_1$ [2].

Théorème 1.2. *(**Représentation intégrale d'Euler**) Si $Re(c) > Re(a) > 0$, alors*

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c,\end{matrix};x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}(1-xt)^{-b}\,dt. \tag{1.7}$$

Théorème 1.3. *(**Gauss**) [2] Pour $Re(c-a-b) > 0$, on a*

$$\sum_{n\geq 0}\frac{a^{\overline{n}}b^{\overline{n}}}{c^{\overline{n}}n!} = {}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c,\end{matrix};1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}. \tag{1.8}$$

Le théorème suivant donne une application importante de l'intégrale d'Euler [2].

Théorème 1.4.

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c,\end{matrix};x\right) = (1-x)^{-b}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}b,c-a\\c,\end{matrix};x/(x-1)\right) \textbf{\textit{(Pfaff)}}, \tag{1.9}$$

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}a,b\\c,\end{matrix};x\right) = (1-x)^{c-a-b}\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}c-a,c-b\\c,\end{matrix};x\right) \textbf{\textit{(Euler)}}. \tag{1.10}$$

La relation (1.6) est utile pour déduire les propriétés de la fonction hypergéométrique confluante

${}_1F_1$ de celles de la fonction hypergéométrique de Gauss ${}_2F_1$. Ainsi, de (1.7) et (1.9), on obtient :

$$ {}_1F_1\left(\begin{array}{c} a \\ c \end{array};z\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(a)}\int_0^1 e^{zt}t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,dt. \tag{1.11} $$

2 Les suites classiques

2.1 Nombres de Stirling de première espèce

La factorielle descendante de x d'ordre n (1.1) est un polynôme de dégré n. En arrangeant les termes dans l'ordre croissant des puissances de x, on obtient :

$$ x^{\underline{n}} := \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k, n = 0,1,... $$

Les coefficients $s(n,k)$ sont appelés les nombres de Stirling de première espèce signés.

Remarque 1.5. *Les nombres de Stirling de première espèce non signés $|s(n,k)|$ sont les coefficients du développement de la factorielle montante (1.2), c'est-à-dire :*

$$ x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} |s(n,k)|x^k \tag{1.12} $$

$$ = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}s(n,k)x^k, \tag{1.13} $$

le nombre $(-1)^{n-k}$ a le même signe que $s(n,k)$. La valeur absolue du nombre de Stirling de première espèce compte le nombre de permutations de n objets composés d'exactement k cycles disjoints.

Propriétés

1. **Relation de récurrence :** les nombres de Stirling de première espèce signés satisfont la relation de récurrence suivante :

$$ s(n,0) = s(0,k) = 0, \text{ sauf } s(0,0) = 1 \tag{1.14} $$

$$ s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)\,s(n-1,k) \text{ pour } n,k \geq 1. \tag{1.15} $$

   Les premières valeurs de ces nombres sont données dans la table suivante :

2. **Les fonctions génératrices** : les $s(n,k)$ ont pour fonction génératrice double

$$ \sum_{n,k\geq 0} s(n,k)\frac{x^n}{n!}u^k = (1+x)^u, $$

$n \diagdown k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	−1	1							
3	2	−3	1						
4	−6	11	−6	1					
5	24	−50	35	−10	1				
6	−120	274	−225	85	−15	1			
7	720	−1764	1624	−735	175	−21	1		
8	−5040	13068	−13132	6769	−1960	322	−28	1	
9	40320	−109584	118124	−67284	22449	−4536	546	−36	1

TABLE 1.1 – Les premières valeurs des nombres de Stirling de première espèce signés.

et pour fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n\geq 0} s\left(n,k\right)\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(\ln\left(1+x\right)\right)^k. \tag{1.16}$$

3. **Formules explicites :** deux formes explicites des nombres de Stirling de première espèce sont :

$$s\left(n,k\right)=\frac{n!}{k!}\sum_{i_1+i_2+\ldots+i_k=n}\frac{1}{i_1\ldots i_k}$$

et

$$s\left(n,k\right)=\sum_{0\leq j<i\leq n-k}\frac{\left(-1\right)^{i+j}}{i!}\binom{n+i-1}{k+1}\binom{2n-k}{n+i}\left(i-j\right)^{n-k+i},$$

2.2 Nombres de Stirling de deuxième espèce

En utilisant la factorielle descendante, on obtient les expressions suivantes :

$$x^0=x^{\underline{0}}=1,$$

$$x^1=x^{\underline{1}},$$

$$x^2=x+x(x-1)=x^{\underline{1}}+x^{\underline{2}},$$

et

$$x^3=x^{\underline{1}}+3x^{\underline{2}}+x^{\underline{3}},$$

plus généralement, on a

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{\underline{k}}. \tag{1.17}$$

Les coefficients $\left\{ {n \atop k} \right\}$ sont appelés les nombres de Stirling de deuxième espèce. Combinatoirement $\left\{ {n \atop k} \right\}$ est le nombre de partitions d'un ensembe à n éléments en k sous-ensembles.

properiétés

1. **Relation de récurrence :** les nombres $\left\{ {n \atop k} \right\}$, satisfont la relation de récurrence suivante :

$$\left\{ {n \atop 0} \right\} = \left\{ {0 \atop k} \right\} = 0, \text{ sauf } \left\{ {0 \atop 0} \right\} = 1 \tag{1.18}$$

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} \text{ pour } n, k \geq 1. \tag{1.19}$$

La table suivante donne les premières valeurs de ces nombres

$n \diagdown k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	1								
3	1	3	1							
4	1	7	6	1						
5	1	15	25	10	1					
6	1	31	90	65	15	1				
7	1	63	301	350	140	21	1			
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

TABLE 1.2 – Les premières valeurs des nombres de Stirling de deuxième espèce

2. **Formules explicites :** deux formules explicites des nombres de Stirling de deuxième espèce sont données par :

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n,$$

et

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{n!}{k!} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_k=n} \frac{1}{i_1!\ldots i_k!}$$

3. **Fonctions génératrices** : les $\left\{ {n \atop k} \right\}$ ont pour fonction génératrice double

$$\sum_{n,k \geq 0} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!} u^k = \exp\left(u\left(e^x - 1\right)\right),$$

pour fonction génératrice ordinaire

$$\sum_{n\geq k}\left\{ n \atop k \right\} x^{n-k} = \prod_{j\geq 0}^{k} \frac{1}{(1-jx)},$$

et pour fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n\geq k}\left\{ n \atop k \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x-1)^k}{k!}. \tag{1.20}$$

2.3 Nombres $r-$Stirling de deuxième espèce

Broder dans [13] a donné des interprétations combinatoires et quelques propriétés algébriques des nombres $r-$Stirling de deuxième espèce et plusieurs identités, des relations recurrentes ainsi que les fonctions génératrices associées à ces nombres.

En combinatoire le nombre $r-$Stirling de deuxième espèce, noté $\left\{ n \atop k \right\}_r$ compte le nombre de partitions d'ensemble de n éléments en k sous ensemles non vides tel que les r premiers éléments sont dans des sous ensembles différents.

Analytiquement les nombres $r-$Stirling de deuxième espèce sont les coefficients des polynômes suivants :

$$(x+r)^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n+r \atop k+r \right\}_r x^{\underline{k}}. \tag{1.21}$$

Pour $r = 0$ ou 1, on retrouve les nombres de Stirling de deuxième espèce classiques.

Propriétés

1. **Relations de récurrences** : les nombres r-Stirling de deuxième espèce vérifient les deux relations de récurrences suivantes :

$$\begin{aligned} \left\{ n \atop k \right\}_r &= 0, && n < r, \\ \left\{ n \atop k \right\}_r &= \delta_{k,r}, && n = r, \\ \left\{ n \atop k \right\}_r &= k\left\{ n-1 \atop k \right\}_r + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\}_r, && n > r, \end{aligned} \tag{1.22}$$

où $\delta_{k,r}$ est le symbole de Kronecker.

Et

$$\left\{ n \atop k \right\}_r = \left\{ n \atop k \right\}_{r-1} - (r-1)\left\{ n-1 \atop k \right\}_{r-1}. \tag{1.23}$$

On donne dans les deux tables suivantes les premières valeurs de ces nombres pour $r = 2$ et $r = 3$ respectivement :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	2	1						
2	4	5	1					
3	8	19	9	1				
4	16	65	55	14	1			
5	32	211	285	215	20	1		
6	64	655	1351	910	245	27	1	
7	128	2059	6069	5901	2380	434	35	1

TABLE 1.3 – Quelques valeurs des 2-Stirling de deuxième espèce.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	3	1						
2	9	7	1					
3	27	37	12	1				
4	81	175	97	18	1			
5	243	781	660	205	25	1		
6	729	3367	4081	1890	380	33	1	
7	2181	14197	23772	15421	4550	644	42	1

TABLE 1.4 – Quelques valeurs des 3-Stirling de deuxième espèce.

2. **Fonctions génératrices** : la fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres r-Stirling de deuxième espèce est donnée par :

$$\sum_{n\geq k} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} e^{rx} \left(e^x - 1\right)^k, \tag{1.24}$$

et la fonction génératrice ordinaire est donnée par :

$$\sum_{n\geq k} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r \frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{(1-rx)(1-(r+1)x)...(1-(r+k)x)}. \tag{1.25}$$

2.4 Nombres et polynômes de Lah

On note par $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ les nombres de Lah (non signés) (A008297 dans [41]), du nom d'Ivo Lah [26, 27], permettent d'exprimer la factorielle montante en terme de factorielles descendentes et inversement.

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor x^{\underline{k}} \text{ et } x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor x^{\overline{k}}.$$

Ces nombres comptent le nombre de partitions de l'ensemble $[n] = \{1, ..., n\}$ en $k-$listes non vides.

Propriétés

1. **Relation de récurrence :** les nombres de Lah satisfont
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n+k-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} \text{ pour } n \geq k \geq 1$$
avec $\left\lfloor {n \atop 0} \right\rfloor = \delta_{n,0}$ pour $n \geq 0$, $\left\lfloor {0 \atop k} \right\rfloor = \delta_{k,0}$ pour $k \geq 0$.
Les premières valeurs de ces nombres sont données dans la table suivante :

$n \diagdown k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1							
2	2	1						
3	6	6	1					
4	24	36	12	1				
5	120	240	120	20	1			
6	720	1800	1200	300	30	1		
7	5040	15120	12600	4200	630	42	1	
8	40320	141120	141120	58800	11760	1176	56	1

TABLE 1.5 – Les premières valeurs des nombres de Lah.

2. **Fonction génératrice :** la fonction génératrice exponentielle de nombres de Lah est
$$\sum_{n \geq k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{1-x} \right)^k.$$

3. **Formule explicite :** la formule explicite pour les nombres de Lah est donnée par
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}, \quad n \geq k \geq 1 \text{ et } \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

On note par $L_n(x)$ les polynômes de Lah qui sont définis par
$$L_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Voici les premières valeurs de ces polynômes
$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= x, \\ L_2(x) &= x^2 + 2x, \\ L_3(x) &= x^3 + 6x^2 + 6x, \\ L_4(x) &= x^4 + 12x^3 + 36x^2 + 24x. \end{aligned}$$

Transformation de Lah :

La transformation de Lah [5, 34] d'une suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est la suite $(\beta_n)_{n \geq 0}$, donnée par
$$\beta_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \alpha_k, \tag{1.26}$$

et sa transformation inverse est

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \beta_k \ . \tag{1.27}$$

2.5 Nombres r-Lah de première espèce

Pour $r \in \mathbb{N}$, $\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r$ comptent le nombre de partitions de l'ensemble $[n]$ en $k-$listes non vides tel que les r premiers nombres sont dans des différentes listes. Ces nombres sont appelés les nombres r-Lah. (voir [6, 7, 32, 33]).

Pour $r = 0$ ou $r = 1$, on obtient les nombres de Lah classiques.

Propriétés

1. **Relation de récurrence** : les nombres r-Lah de première espèce vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right]_r = \left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right]_r + (n+k) \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r, \qquad n > r, \tag{1.28}$$

avec $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = 0$, pour $n < r$, et $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \delta_{k,r}$, pour $n = r$, où $\delta_{k,r}$ est le symbole de Kronecker.

2. **Fonction génératrice :** la fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres r-Lah est donnée par :

$$\sum_{n \geq k} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{1-x} \right)^k \left(\frac{1}{1-x} \right)^{2r}.$$

3. **Formules explicites :**

Les nombres $r-$Lah de première espèce ont la formule explicite suivante (voir [6, 33])

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \frac{(n+r-1)!}{(k+r-1)!} \binom{n-r}{k-r} = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \binom{n+r-1}{k+r-1} \quad n \geq k \geq r, \tag{1.29}$$

et dans [34, Théorème 3.7] la formule explicite de ces nombres, est donnée comme suit

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \frac{n!}{k!} \binom{n+2r-1}{k+2r-1}.$$

2.6 Nombres et polynômes de Bell

Les nombres de Bell (A000110 dans [41]), notés ϕ_n, comptent le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Les nombres de Bell sont aussi définis comme étant la somme des nombres de Stirling de deuxième espèce

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Properiétés

1. **Relations de récurrences :** les nombres de Bell vérifient la relation récurrente suivante :
$$\phi_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi_k.$$
Les premières valeurs de ces nombres sont données dans le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ϕ_n	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975	678570	4213597

TABLE 1.6 – Les premières valeurs des nombres de Bell.

2. **Fonctions génératrices :** les fonctions génératrices exponentielle et ordinaire des nombres de Bell sont données respectivement par
$$\sum_{n\geq 0} \phi_n \frac{x^n}{n!} = \exp\left(e^x - 1\right), \text{et} \sum_{n\geq 0} \phi_n x^n = \sum_{k\geq 0} x^k \prod_{j=0}^{k} (1 - jx)^{-1}.$$

3. **Formule de Dobinski :** on a la formule de Dobinski suivante
$$\phi_n = \frac{1}{e} \sum_{k\geq 0} \frac{k^n}{k!},$$
une autre formule explicite définie par B.N. Guo et F. Qi dans [23] en terme de fonction hypergéométrique de Kummer et le nombre de Stirling de deuxième espèce
$$\phi_n = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k! \left\{ {n \atop k} \right\} {}_1F_1(k+1; 2; 1).$$

Les polynômes de Bell $\phi_n(x)$ sont définis par :
$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k. \tag{1.30}$$

Ces polynôme sont appelés les polynômes de Bell a une seule variable ou les polynômes exponentiels.

La fonction génératrice exponentielle pour ces polynômes est la suivante :
$$\sum_{n\geq 0} \phi_n(x) \frac{z^n}{n!} = \exp\left(x\left(e^z - 1\right)\right). \tag{1.31}$$

Les premiers polynômes de Bell sont :

$$\begin{aligned}
&\phi_0(x) = 1,\\
&\phi_1(x) = x,\\
&\phi_2(x) = x + x^2,\\
&\phi_3(x) = x + 3x^2 + x^3,\\
&\phi_4(x) = x + 7x^2 + 6x^3 + x^4.
\end{aligned}$$

2.7 Polynômes de Laguerre et polynômes de Laguerre associés

On appelle équation différentielle de Laguerre l'équation suivante :

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0,$$

où $n = 0, 1, 2, ...$

Les solutions de cette équation sont les polynômes de Laguerre, s'écrivent par l'équation différentielle suivante :

$$\mathbb{L}_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}).$$

Properiétés :

1. **Relation de récurrence :** les polynômes de Laguerre satisfont les deux relations de récurrence suivantes :

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad \text{pour} \quad n \geq 1,$$

et

$$xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x) \quad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

Les premiers polynômes de Laguerre sont :

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_0(x) =& 1\\
\mathbb{L}_1(x) =& -x + 1\\
\mathbb{L}_2(x) =& \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right)\\
\mathbb{L}_3(x) =& \frac{1}{6}\left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6\right)\\
\mathbb{L}_4(x) =& \frac{1}{24}\left(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24\right)\\
\mathbb{L}_5(x) =& \frac{1}{120}\left(-x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120\right)\\
\mathbb{L}_6(x) =& \frac{1}{720}\left(x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720\right)
\end{aligned}$$

2. **Fonction génératrice :** la fonction génératrice des polynômes de Laguerre est

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}.$$

Maintenant, pour un nombre réel arbitraire m on définit l'équation différentielle généralisée suivante [1, p. 781] :

$$xy'' + (m+1-x)y' + ny = 0.$$

Les solutions polynômiales de cette équation sont appelés polynômes de Laguerre associés ou polynômes de Laguerre généralisés. Les polynôme de Laguerre associés, notés par $\mathbb{L}_n^{(m)}(x)$, sont définis par la formule suivante [1, 2, 29] :

$$\mathbb{L}_n^{(m)}(x) = \frac{x^{-m}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+m}), \quad \text{pour} \quad n \geq 0. \tag{1.32}$$

Avec $\mathbb{L}_n^{(0)}(x) = \mathbb{L}_n(x)$.

Properiétés

1. **Relations de récurrences :** les polynômes de Laguerre généralisés satisfont

$$(n+1)\mathbb{L}_{n+1}^{(m)}(x) = (-x+m+2n+1)\mathbb{L}_n^{(m)}(x) - (n+m)\mathbb{L}_{n-1}^{(m)}(x), \quad \text{pour} \quad n \geq 1. \tag{1.33}$$

   En utilisant (1.32) et (1.33), on obtient les premiers polynômes de Laguerre associés comme suit :
   $\mathbb{L}_0^{(m)}(x) = 1$,
   $\mathbb{L}_1^{(m)}(x) = 1+m-x$,
   $\mathbb{L}_2^{(m)}(x) = \frac{1}{2}\left[(1+m)(1+2) - 2(2+m)x + x^2\right]$.

2. **Fonction génératrice :** la fonction génératrice est donnée par

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{L}_n^{(m)}(x)t^n = \frac{1}{(1-t)^{m+1}}\frac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}.$$

3. **Formules explicite :** les polynômes de Laguerre s'expriment en terme de fonction hyergéométrique Confluente par la formule

$$\mathbb{L}_n^{(m)}(x) = \frac{(n+m)!}{m!n!}{}_1F_1\left(\begin{matrix}-n\\ m+1\end{matrix};x\right).$$

2.8 Les nombres et les polynômes de Bernoulli

Les nombres de Bernoulli, notés par B_n, construisent une suite de nombres rationnels pouvant définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} B_0 &= 1 \\ B_n &= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k. \end{cases}$$

Les premières valeurs de B_n sont données dans la table suivante :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B_n	1	$-1/2$	$1/6$	0	$-1/30$	0	$1/42$	0	$1/30$	0	$5/66$	0	$-691/2730$

TABLE 1.7 – Les premières valeurs des nombres de Bernoulli.

La suite des polynômes de Bernoulli, notée $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, est la suite dont le premier terme $B_0(x) = 1$ et qui est vérifiée :

$$B_n'(x) = nB_{n-1}(x),\ (n \geq 1) \text{ et } \int_0^1 B_n(x)\,dx = 0,\ (n \geq 1).$$

Voici les premières valeurs de ces polynômes

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x, \\ B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}. \end{aligned}$$

On peut aussi définir ces polynômes par la série génératrice exponentielle

$$\sum_{n\geq 0} B_n(x)\frac{z^n}{n!} = \frac{ze^{xz}}{e^z - 1}.$$

Propriétés élémentaires

Les polynômes de Bernoulli vérifient les identités suivantes :

1. $\forall n \geq 0 : B_n(0) = B_n(1)$.
2. $\forall n \geq 0 : B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0$.

3. $\forall n \geq 0 : B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$.

4. $\forall n \geq 0 : B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.

5. $\forall n \geq 0 : B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k x^k$.

3 Log-concavité et unimodalité

Les suites unimodales et log-concaves apparaîssent dans de nombreux domaines des mathématiques, combinatoire, algèbre, analyse, géométrie, informatique, probabilités et statistiques. Pour divers résultats sur l'unimodalité et la log-concavité voir [4, 12, 43].

Définition 1.6. *Une suite $a_0, a_1, ..., a_n$ de nombres réels est dite log-concave si*

$$a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1} \qquad (i = 1, ..., n-1), \tag{1.34}$$

et dite fortement log-concave si l'inégalité ci-dessus est stricte.

Définition 1.7. *Une suite $a_0, a_1, ..., a_n$ de nombres réels est dite unimodale s'il existe un indice l pour lequel on a :*

$$a_0 \leq a_1 \leq ... \leq a_l \geq a_{l+1} \geq a_{l+2} \geq ... \tag{1.35}$$

L'entier l est appelé mode de la suite $a_0, a_1, ..., a_n$.

Si l'inégalité ci-dessus est stricte, alors la suite est dite strictement log-concave .

Proposition 1.8. *Toute suite de nombres positifs strictement log-concave est unimodale.*

Théorème 1.9. ***(Inégalité de Newton** [30])*

Si le polynôme $G(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,à coefficients positifs, ne possède que des racines réelles (négatives), alors :

$$a_i^2 \geq a_{i+1}a_{i-1}\left(\frac{i}{i-1}\right)\left(\frac{n-i+1}{n-i}\right), \quad pour \quad 2 \leq i \leq n-1.$$

Remarque 1.10. *L'inégalité de Newton implique la log-concavité stricte.*

2

Sur les nombres et les polynômes poly-Bell

1 Introduction

Dans ce chapitre nous exposons une tentative de généralisation de la suite des polynômes de Bell classiques à l'aide de la fonction hypergéométrique de Kummer. La motivation est l'identité de Ramanujan

$$\int_0^x \phi_n(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{\phi_k(x)\,B_{n+1-k}}{k+1}.$$

qui regroupe deux suites remarquables, la première, la suites des polynômes de Bell $\phi_n(x)$ qui représente le domaine de la combinatoire et l'autre suite classique de la théorie des nombres à savoir la suite des nombres de Bernoulli B_n.

Notre objectif principal dans ce chapitre est de considérer une classe de fonctions dont la fonction génératrice suivante généralise les nombres de Bell

$$f_p(z) = p! \sum_{n\geq 0} \frac{(e^z-1)^n}{(n+p)!}.$$

et nous donnons certaines de ses propriétés [22].

2 Les nombres p-Bell

Dans cette section, nous présentons et nous étudions une nouvelle classe des nombres qui généralise les nombres de Bell et que nous appelons les nombres p-Bell.

Pour toute entier $p \geq 0$, nous définissons une suites des nombres rationnels noté $\mathcal{B}_{n,p}$ $(n \geq 0)$, par la fonction génératrice suivante :

$$f_p(z) := \sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n,p} \frac{z^n}{n!} = {}_1F_1\left(\begin{matrix} 1 \\ p+1 \end{matrix}; e^z - 1\right) = \sum_{n\geq 0} \binom{n+p}{p}^{-1} \frac{(e^z-1)^n}{n!}, \tag{2.1}$$

où $\mathcal{B}_{n,0} := \phi_n$ les nombres de Bell classiques et ${}_1F_1\left(\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; z\right)$ la fonction hypergéométrique confluent de Kummer.

Les trois premières fonctions génératrices exponentielles sont :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n,1} \frac{z^n}{n!} &= \frac{\exp(e^z-1)-1}{e^z-1}, \\ \sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n,2} \frac{z^n}{n!} &= \frac{2\left(\exp(e^z-1)-e^z\right)}{(e^z-1)^2}, \\ \sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n,3} \frac{z^n}{n!} &= \frac{3\left(2\exp(e^z-1)-e^{2z}-1\right)}{(e^z-1)^3}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.1 Fonctions génératrices et formules explicites

Nous commençons par une formule explicite pour les nombres p-Bell $\mathcal{B}_{n,p}$ en fonction des nombres de Stirling de deuxième espèce.

Théorème 2.1. *Pour $p \geq 0$, on a*

$$\mathcal{B}_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p}{k}^{-1} \left\{ {n \atop k} \right\}. \tag{2.3}$$

Démonstration. A l'aide de la fonction génératrice des nombres de Stirling de deuxième espèce

(1.20), on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n}\binom{k+p}{k}^{-1}\left\{ n\atop k\right\}\frac{z^n}{n!} &= \sum_{k\geq 0}\binom{k+p}{k}^{-1}\sum_{n\geq k}\left\{ n\atop k\right\}\frac{z^n}{n!}\\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{p!k!}{(k+p)!}\frac{\left(e^z-1\right)^k}{k!}\\ &= \sum_{k\geq 0}\frac{(1)^{\overline{k}}}{(p+1)^{\overline{k}}}\frac{\left(e^z-1\right)^k}{k!}\\ &= {}_1F_1\left(\begin{matrix}1\\ p+1\end{matrix};e^z-1\right)\\ &= \sum_{n\geq 0}\mathcal{B}_{n,p}\frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

En comparant les coefficients de $\frac{z^n}{n!}$, des deux côtés, on arrive au résultat (2.3). □

En particulier, pour $p=1$ on trouve

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n,1} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\left\{ n\atop k\right\}\\ &= \int_0^1 \phi_n\left(t\right)dt,\end{aligned}$$

où $\phi_n\left(t\right)$ sont les polynômes de Bell, et on peut aussi écrire $\mathcal{B}_{n,1}$ sous la forme suivante :

Théorème 2.2. *Pour $n\geq 0$, on a*

$$\mathcal{B}_{n,1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\phi_{k+1}B_{n-k}}{k+1}, \tag{2.4}$$

où B_n est le n-ième nombre de Bernoulli [20], qui est défini par la fonction génératrice suivante :

$$\sum_{n\geq 0}B_n\frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z-1}.$$

Démonstration. On peut écrire (2.2) comme

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\mathcal{B}_{n,1}\frac{z^n}{n!} &= \frac{z}{e^z-1}\left(\frac{\exp\left(e^z-1\right)-1}{z}\right)\\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\phi_{k+1}B_{n-k}}{k+1}\right)\frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

Les coefficients de $\frac{z^n}{n!}$ sont égaux, d'où le résultat. □

Remarque 2.3. *Notons que la formule (2.4) est un cas particulier de l'identité de Ramanujan [8,*

Exemple 4, p. 51].

$$\int_0^x \phi_n(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{\phi_k(x)\, B_{n+1-k}}{k+1}.$$

Théorème 2.4. *La fonction génératrice exponentielle double de $\mathcal{B}_{n,p}$ est donnée par :*

$$\sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq p} \mathcal{B}_{n,p} \frac{z^n}{n!}\frac{y^p}{p!} = \frac{(e^z-1)\exp(e^z-1)}{e^z-1-y}.$$

Démonstration. En utilisant l'expression (2.1), on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq p} \mathcal{B}_{n,p} \frac{z^n}{n!}\frac{y^p}{p!} &= \sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq 0} \frac{(e^z-1)^n}{(n+p)!} y^p \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{(e^z-1)^n}{n!} \sum_{p\geq 0} \left(\frac{y}{e^z-1}\right)^p \\
&= \frac{(e^z-1)\exp(e^z-1)}{e^z-1-y}.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. □

Maintenant, on utilise la transformation de Stirling généralisée [37], on obtient le résultat suivant.

Théorème 2.5. *Pour $n, m \geq 0$, on a*

$$\sum_{k=0}^{m} s(m,k)\, \mathcal{B}_{n+k,p} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+m \atop k+m} \right\}_m \binom{m+k+p}{p}^{-1}.$$

Dans la suite, nous donnons des formules de représentations intégrales pour $f_p(z)$ et $\mathcal{B}_{n,p}$ en fonction des polynômes exponentiels.

Théorème 2.6. *Pour $p \geq 1$, on a*

$$\sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n,p} \frac{z^n}{n!} = p \int_0^1 \exp((e^z-1)\,t)\,(1-t)^{p-1}\,dt. \tag{2.5}$$

Corollaire 2.7. *Pour $p \geq 1$, on a*

$$\mathcal{B}_{n,p} = p \int_0^1 (1-t)^{p-1}\,\phi_n(t)\,dt. \tag{2.6}$$

Démonstration. On a

$$\sum_{n\geq 0}\mathcal{B}_{n,p}\frac{z^n}{n!}=p\int_0^1\sum_{n\geq 0}\phi_n\left(t\right)\frac{z^n}{n!}\left(1-t\right)^{p-1}dt$$
$$=\sum_{n\geq 0}\left(p\int_0^1\phi_n\left(t\right)\left(1-t\right)^{p-1}dt\right)\frac{z^n}{n!}.$$

En comparant les coefficients de $\frac{z^n}{n!}$, des deux côtés, on obtient le résultat (2.6). □

La représentation intégrale (2.6) peut être prouvée en utilisant un résultat bien connu de Sury [44]

$$\binom{n}{k}^{-1}=(n+1)\int_0^1 x^k\left(1-x\right)^{n-k}dx$$

et d'après (2.3), on écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n,p}&=\sum_{k=0}^{n}\binom{k+p}{k}^{-1}\left\{{n\atop k}\right\}\\&=\int_0^1\left(1-x\right)^p\sum_{k=0}^{n}\left(k+p+1\right)\left\{{n\atop k}\right\}x^k dx\\&=\int_0^1\left(1-x\right)^p\left(\left(p+1\right)\phi_n\left(x\right)+x\frac{d}{dx}\phi_n\left(x\right)\right)dx\\&=\left(p+1\right)\int_0^1\left(1-x\right)^p\phi_n\left(x\right)dx+\int_0^1\left(1-x\right)^p x\left(\frac{d}{dx}\phi_n\left(x\right)\right)dx\\&=p\int_0^1\left(1-x\right)^p\phi_n\left(x\right)dx+p\int_0^1\left(1-x\right)^{p-1}x\phi_n\left(x\right)dx\\&=p\int_0^1\left(1-x\right)^{p-1}\phi_n\left(x\right)dx.\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la formule de Dobinski pour les polynômes de Bell [17]

$$\phi_n\left(x\right)=e^{-x}\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}x^k,\tag{2.7}$$

on obtient, la formule de Dobinski pour les nombres p-Bell.

Corollaire 2.8. *Les nombres p-Bell $\mathcal{B}_{n,p}$ peuvent être aussi écrits comme*

$$\mathcal{B}_{n,p} = \sum_{k\geq 0} \binom{p+k}{k}^{-1} {}_1F_1\left(\begin{matrix} k+1 \\ p+k+1 \end{matrix}; -1\right) \frac{k^n}{k!}. \tag{2.8}$$

Démonstration. En appliquant les relations (2.6) et (2.7) , on obtient

$$\mathcal{B}_{n,p} = p \sum_{k\geq 0} \frac{k^n}{k!} \int_0^1 e^{-t} (1-t)^{p-1} t^k dt,$$

et (2.8) suit de (1.11). □

Nous présentons ici une autre expression de la fonction génératrice de $\mathcal{B}_{n,p}$ impliquant la fonction gamma incomplète inférieure. Rappelons que la fonction gamma incomplète inférieure $\gamma(s,z)$ est définie par :

$$\gamma(s,z) = \int_0^z e^{-t} t^{s-1} dt.$$

Théorème 2.9. *Pour $p \geq 1$, la fonction génératrice exponentielle des nombres p-Bell est donnée par*

$$\sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n,p} \frac{z^n}{n!} = \frac{p\left(\exp(e^z-1)\right)}{(e^z-1)^p} \gamma\left(p, e^z-1\right).$$

Démonstration. Par un simple changement de variable $t = 1 - y/(e^z-1)$ dans (2.5), on obtient le résultat désiré. □

Théorème 2.10. *La fonction génératrice exponentielle pour les nombres p-Bell est donnée par*

$$\sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n,p} \frac{z^n}{n!} = \frac{p!\left(\exp(e^z-1)\right)}{(e^z-1)^p} - \sum_{k=1}^{p} \frac{p^{\underline{k}}}{(e^z-1)^k}. \tag{2.9}$$

Démonstration. Après une intégration par parties, on peut réécrire (2.5) comme

$$f_p(z) = \frac{p}{e^z-1} f_{p-1}(z) - \frac{p}{e^z-1}. \tag{2.10}$$

Maintenant, en appliquant (2.10) par induction, nous obtenons le résultat souhaité. □

Dans la suite, nous allons montrer une relation entre les nombres p-Bell et les nombres de Bernoulli généralisés. Rappelons que les polynômes de Bernoulli généralisés $B_n^{(\alpha)}(x)$ sont définis par la fonction génératrice exponentielle [10, 42] suivantes :

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} \quad (|t| < 2\pi;\ 1^{\alpha} := 1) \tag{2.11}$$

où α est un paramètre arbitraire. En particulier $B_n^{(\alpha)}(0) := B_n^{(\alpha)}$ sont les nombres de Bernoulli généralisés d'ordre α, et $B_n^{(1)}(x)$ sont les polynômes de Bernoulli classiques.

Corollaire 2.11. *Pour $n, p \geq 0$, on a*

$$\mathcal{B}_{n,p} = \sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} \binom{n+p}{p}^{-1} \phi_{n+p-k} B_k^{(p)} - \sum_{k=1}^{p} \binom{n+k}{k}^{-1} \binom{p}{k} B_{n+k}^{(k)}. \tag{2.12}$$

Démonstration. La relation (2.9) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n,p} \frac{z^n}{n!} &= p! \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \phi_{n-k} B_k^{(p)} \right) \frac{z^{n-p}}{n!} - \sum_{n\geq 0} \sum_{k=1}^{p} p^{\underline{k}} B_n^{(k)} \frac{z^{n-k}}{n!} \\
&= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n+p} \binom{n+p}{k} \binom{n+p}{p}^{-1} \phi_{n+p-k} B_k^{(p)} \right) \frac{z^n}{n!} \\
&\quad - \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{n+k}{k}^{-1} \binom{p}{k} B_{n+k}^{(k)} \right) \frac{z^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Comparant les coefficients de $\frac{z^n}{n!}$, des deux cotés, on obtient le résultat (2.12). □

Le lemme suivant sera utile pour la preuve du théorème suivant.

Lemme 2.12. *Pour $p \geq 0$, on a*

$${}_1F_1\left(\begin{matrix} p+1 \\ p+2 \end{matrix} ; 1-e^z \right) = (-1)^p (p+1) \left(e^{-z} \frac{d}{dz} \right)^p {}_1F_1\left(\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} ; 1-e^z \right)$$

et

$${}_1F_1\left(\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} ; 1-e^z \right) = \left(\frac{1-\exp(1-e^z)}{e^z-1} \right).$$

Démonstration. Par induction sur p. □

Théorème 2.13. *Pour $p \geq 1$, on a*

$$\sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n,p} \frac{z^n}{n!} = \exp(e^z - 1) (-1)^{p-1} p \left(e^{-z} \frac{d}{dz} \right)^{p-1} \left(\frac{1-\exp(1-e^z)}{e^z-1} \right).$$

Démonstration. Par la transformation de Kummer [2], on peut écrire

$${}_1F_1\left(\begin{matrix} 1 \\ p+1 \end{matrix} ; e^z - 1 \right) = \exp(e^z - 1) \; {}_1F_1\left(\begin{matrix} p \\ p+1 \end{matrix} ; 1-e^z \right).$$

Finalement, par le lemme ci-dessus on obtient le résultat. □

Le résultat suivant, donne la représentation intégrale de type Cesàro [15] pour les nombres p-Bell.

Théorème 2.14. *Pour $n \geq 1$, on a*

$$B_{n,p} = \frac{2n!p!}{\pi e} \operatorname{Im} \int_0^{\pi} \left(\frac{\exp(\left(\exp\left(e^{i\theta}\right)\right))}{\left(\exp\left(e^{i\theta}\right)-1\right)^p} - e \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\left(\exp\left(e^{i\theta}\right)-1\right)^{l-p}}{l!} \right) \sin\left(n\theta\right) d\theta, \tag{2.13}$$

où $\operatorname{Im}(z)$*, la partie imaginaire de* z*.*

Démonstration. En utilisant l'identité intégrale :

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{2n!}{\pi} \operatorname{Im} \int_0^{\pi} \frac{\left(\exp\left(e^{i\theta}\right)-1\right)^k}{k!} \sin\left(n\theta\right) d\theta$$

et la formule (2.3), on obtient (2.13). □

2.2 Relation de récurrence

Nous allons présenter dans cette section les différentes relations de récurrence pour les nombres p-Bell $\mathcal{B}_{n,p}$.

Théorème 2.15. *Les nombres p-Bell satisfont la relation de récurrence suivante :*

$$\mathcal{B}_{n+1,p} = \left(n+1\right) \mathcal{B}_{n,p} - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \left(-1\right)^{n-k} \mathcal{B}_{k+1,p} - \frac{p}{p+1} \mathcal{B}_{n,p+1} \tag{2.14}$$

avec la suite initiale $\mathcal{B}_{0,p} = 1$.

Démonstration. On dérivons la formule (2.5) par rapport à z, nous obtenons :

$$\begin{aligned} e^{-z} \frac{d}{dz} f_p\left(z\right) &= p \int_0^1 t \exp(\left(e^z-1\right)t\right) \left(1-t\right)^{p-1} dt \\ &= -p \int_0^1 \left(1-t-1\right) \exp(\left(e^z-1\right)t\right) \left(1-t\right)^{p-1} dt \\ &= -p \int_0^1 \exp(\left(e^z-1\right)t\right) \left(1-t\right)^{p} dt + p \int_0^1 \exp(\left(e^z-1\right)t\right) \left(1-t\right)^{p-1} dt \\ &= -\frac{p}{p+1} f_{p+1}\left(z\right) + f_p\left(z\right), \end{aligned}$$

d'où

$$e^{-z} \sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n+1,p} \frac{z^n}{n!} = -\frac{p}{p+1} \sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n,p+1} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n,p} \frac{z^n}{n!}.$$

Après quelques manipulations algébriques, nous obtenons

$$\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-1\right)^{n-k} \mathcal{B}_{k+1,p} \right) \frac{z^n}{n!} = -\frac{p}{p+1} \sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n,p+1} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n,p} \frac{z^n}{n!}.$$

Le résultat suit par la comparaisons des coefficients de $\frac{z^n}{n!}$, sur les deux côtés. □

La formule (2.14) donne les nombres p-Bell $\mathcal{B}_{n,p}$ pour $0 \leq n \leq 6$ et $0 \leq p \leq 3$

$$\mathcal{S}_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & \mathcal{B}_{0,p} \\ 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & \mathcal{B}_{1,p} \\ 2 & 5/6 & 1/2 & 7/20 & \cdots & \mathcal{B}_{2,p} \\ 5 & 7/4 & 14/15 & 3/5 & \cdots & \mathcal{B}_{3,p} \\ 15 & 68/15 & 13/6 & 179/140 & \cdots & \mathcal{B}_{4,p} \\ 52 & 167/12 & 127/21 & 185/56 & \cdots & \mathcal{B}_{5,p} \\ 203 & 2057/42 & 235/12 & 8389/840 & \cdots & \mathcal{B}_{6,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \mathcal{B}_{n,0} & \mathcal{B}_{n,1} & \mathcal{B}_{n,2} & \mathcal{B}_{n,3} & & \end{pmatrix}$$

Pour $p = 0$, la formule (2.14) devient

Corollaire 2.16. *On a*

$$\phi_{n+1} = (n+1)\,\phi_n + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{n}{k-1} \phi_k \,.$$

Le résultat suivant présente un autre type de récurrence pour les nombres p-Bell $\mathcal{B}_{n,p}$. Le lemme suivant sera très utile pour la preuve du Théorème 2.18.

Lemme 2.17. *On a*

$${}_1F_1\left(\begin{matrix} 1 \\ p+1 \end{matrix}; z\right) = \left(1 + \frac{z}{p+1}\right) {}_1F_1\left(\begin{matrix} 1 \\ p+2 \end{matrix}; z\right) - \frac{z}{p+2}\, {}_1F_1\left(\begin{matrix} 1 \\ p+3 \end{matrix}; z\right). \tag{2.15}$$

Démonstration. Le résultat découle directement de la formule (1.5). □

Théorème 2.18. *Les nombres p-Bell satisfont à la relation de récurrence suivante :*

$$\mathcal{B}_{n+1,p+1} = \mathcal{B}_{n+1,p} - \frac{n+1}{p+1}\mathcal{B}_{n,p+1} + \frac{n+1}{p+2}\mathcal{B}_{n,p+2}$$

avec la suite initiale $\mathcal{B}_{0,p} = 1$ et la suite finale $\mathcal{B}_{n,0} = \phi_n$.

Démonstration. Par (2.15) avec $z := e^z - 1$, on a

$$f_p(z) = \left(1 + \frac{z}{p+1}\right) f_{p+1}(z) - \frac{z}{p+2} f_{p+2}(z)$$

$$\sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n,p} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \left(\mathcal{B}_{n,p+1} + \frac{1}{p+1} n\mathcal{B}_{n-1,p+1} - \frac{1}{p+2} n\mathcal{B}_{n-1,p+2}\right) \frac{z^n}{n!}.$$

En comparant les coefficients de $\frac{z^n}{n!}$, des deux membres, et en utilisant (2.14), on obtient le résultat désiré. □

Dans la suite, on propose un simple algorithme, basé sur une relation de récurrence à trois termes, pour calculer les nombres p-Bell.

Nous considérons la suite suivante $\mathcal{Z}_{n,m}(p)$ avec deux indices par

$$\mathcal{Z}_{n,m}(p) = \binom{m+p}{p} \sum_{k=0}^{m} s(m,k)\, \mathcal{B}_{n+k,p}. \tag{2.16}$$

Du théorème 2.5, on peut écrire

$$\mathcal{Z}_{n,m}(p) = \binom{m+p}{p} \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+m \atop k+m} \right\}_{m} \binom{m+k+p}{p}^{-1},$$

avec

$$\mathcal{Z}_{0,m}(p) = 1 \text{ et } \mathcal{Z}_{n,0}(p) = \mathcal{B}_{n,p}.$$

Théorème 2.19. *$\mathcal{Z}_{n,m}(p)$ satisfait la relation de récurrence à trois termes suivante :*

$$\mathcal{Z}_{n+1,m}(p) = \frac{m+1}{m+p+1} \mathcal{Z}_{n,m+1}(p) + m\mathcal{Z}_{n,m}(p), \tag{2.17}$$

avec la suite initiale donnée par $\mathcal{Z}_{0,m}(p) = 1$.

Démonstration. De (1.15) et (2.16), on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{n,m+1}(p) &= \binom{m+p+1}{p} \sum_{k=0}^{m+1} s(m+1,k)\, \mathcal{B}_{n+k,p} \\
&= \binom{m+p+1}{p} \sum_{k=0}^{m+1} \left(s(m,k-1) - ms(m,k) \right) \mathcal{B}_{n+k,p} \\
&= \binom{m+p+1}{p} \sum_{k=0}^{m} s(m,k)\, \mathcal{B}_{n+k+1,p} - \binom{m+p+1}{p} m \sum_{k=0}^{m} s(m,k)\, \mathcal{B}_{n+k,p} \\
&= \frac{m+p+1}{m+1} \mathcal{Z}_{n+1,m}(p) - m \frac{m+p+1}{m+1} \mathcal{Z}_{n,m}(p),
\end{aligned}$$

ce qui est évidemment équivalent à (2.17). □

Remarque 2.20. *Notons que pour $p = 0$, la relation de récurrence (2.17) se réduit à une formule connu dans l'article de Rahmani [37].*

3 Les nombres Poly-Bell

La formule de Cauchy pour l'intégration répétée [35] est donnée par :

$$\mathcal{D}^{-n} f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)\, dt, \tag{2.18}$$

où $\mathcal{D}^{-n}$ est l'intégrale n-fois et f une fonction continue sur la droite réelle. Comparant la formule (2.18) à la formule (2.6) on obtient :

Théorème 2.21. *Pour $p \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n,p} &= p!\mathcal{D}^{-p}\,\phi_n(x)|_{x=1} \\ &= p!\int_0^1 dx_p \int_0^{x_p} dx_{p-1}\cdots\int_0^{x_2}\phi_n(x_1)\,dx_1. \end{aligned} \tag{2.19}$$

L'expression (2.19) des intégrale itérée, motive la définition des nombres poly-Bell. Définissons les nombres poly-Bell $\mathbb{B}_n^{(p)}$ comme suit :

$$\mathbb{B}_n^{(p)} = \frac{\mathcal{B}_{n,p}}{p!}.$$

La fonction génératrice de poly-Bell $\mathbb{B}_n^{(p)}$ est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{B}_n^{(p)}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\frac{(e^z-1)^n}{\Gamma(n+p+1)}$$

et peut être étendu à p négatif

$$\sum_{n\geq 0}\mathbb{B}_n^{(-p)}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n\geq p}\frac{(e^z-1)^n}{\Gamma(n-p+1)}. \tag{2.20}$$

Une formule explicite des nombres poly-Bell avec un indice supérieur négatif p, peut être obtenu par une utilisation directe de (2.20).

Théorème 2.22. *Les nombres poly-Bell $\mathbb{B}_n^{(-p)}$ sont positifs et on a*

$$\mathbb{B}_n^{(-p)} = \sum_{k=p}^{n}\frac{k!}{(k-p)!}\left\{{n \atop k}\right\}. \tag{2.21}$$

Corollaire 2.23. *Pour $p \geq 0$, on a*

$$\begin{aligned}\mathbb{B}_n^{(-p)} &= \frac{d^p}{dx^p}\,\phi_n(x)|_{x=1} \\ &= p!\sum_{j=p}^{n}\binom{n}{j}\left\{{j \atop p}\right\}\phi_{n-j}.\end{aligned}$$

Démonstration. De (1.30), on a

$$\begin{aligned}\frac{d^p}{dx^p}\phi_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}\frac{d^p}{dx^p}x^k \\ &= p!\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}\left\{{n \atop k}\right\}x^{k-p}\end{aligned}$$

ce qui réduit à $\mathbb{B}_n^{(-p)}$ en prenant $x = 1$. D'autre part, de (1.31), on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\frac{d^p}{dx^p}\phi_n(x)\frac{z^n}{n!} &= \frac{d^p}{dx^p}\exp\left(x\left(e^z-1\right)\right)\\ &= \left(e^z-1\right)^p\exp\left(x\left(e^z-1\right)\right)\\ &= p!\sum_{n\geq p}\left\{{n\atop p}\right\}\frac{z^p}{p!}\sum_{n\geq 0}\phi_n(x)\frac{z^n}{n!}\\ &= p!\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left\{{j\atop p}\right\}\phi_{n-j}(x)\right)\frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

En comparant les coefficients de $\frac{z^n}{n!}$ et en prenant $x = 1$, on obtient le résultat. □

Une question naturelle qui se pose est la suivante : les nombres poly-Bernoulli $\mathfrak{B}_n^{(p)}$ ont la propriété de la dualité [3, 24]

$$\mathfrak{B}_n^{(-p)} = \mathfrak{B}_p^{(-n)}.$$

Qu'en est-il des nombres poly-Bell ?

Théorème 2.24. *La fonction génératrice double de* $\mathbb{B}_n^{(-p)}$ *est donnée par*

$$\sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq p}\mathbb{B}_n^{(-p)}\frac{z^n}{n!}\frac{y^p}{p!} = \exp\left(\left(y+1\right)\left(e^z-1\right)\right).$$

Par le théorème ci-dessus, nous pouvons répondre négativement à la question précédente, la propriété de la dualité n'est pas valable pour les nombres poly-Bell.

Démonstration. La fonction génératrice de $\mathbb{B}_n^{(-p)}$ peut être obtenue en utilisant (2.20) et (1.20)

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq p}\mathbb{B}_n^{(-p)}\frac{z^n}{n!}\frac{y^p}{p!} &= \sum_{p\geq 0}\sum_{n\geq p}\frac{\left(e^z-1\right)^n}{(n-p)!}\frac{y^p}{p!}\\ &= \sum_{p\geq 0}\left(y\left(e^z-1\right)\right)^p\frac{1}{p!}\sum_{i\geq 0}\frac{\left(e^z-1\right)^i}{i!}\\ &= \exp\left(\left(y+1\right)\left(e^z-1\right)\right).\end{aligned}$$

□

En conséquence du théorème 2.24, nous obtenons la fonction génératrice des nombres poly-Bell $\mathbb{B}_n^{(-p)}$ dans l'indice supérieur p est négatif.

Corollaire 2.25. *On a*

$$\sum_{p\geq 0}\mathbb{B}_n^{(-p)}\frac{y^p}{p!} = \phi_n(1+y).$$

Démonstration. Le résultat découle immédiatement de

$$\exp\left(\left(y+1\right)\left(e^{z}-1\right)\right)=\sum_{n\geq 0}\phi_{n}\left(1+y\right)\frac{z^{n}}{n!}.$$

□

Les premières valeurs de $\mathbb{B}_{n}^{(p)}\left(-4\leq p\leq -1,0\leq n\leq 9\right)$ sont données dans la table suivante :

$p\backslash n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-1	0	1	3	10	37	151	674	3263	17007	94828
-2	0	0	2	12	62	320	1712	9604	56674	351792
-3	0	0	0	6	60	450	3120	21336	147756	1048830
-4	0	0	0	0	24	360	3720	33600	287784	2424744

TABLE 2.1 – Quelques valeurs des nombres poly-Bell.

4 Les polynômes p-Bell

On considère les polynômes p-Bell $\mathcal{B}_{n,p}\left(x\right)$ sont définis par la fonction génératrice suivante

$$F_{p}\left(x\right):=\sum_{n\geq 0}\mathcal{B}_{n,p}\left(x\right)\frac{z^{n}}{n!}=\ {}_{1}F_{1}\left(\begin{array}{c}1\\ p+1\end{array};e^{z}-1\right)e^{xz}. \tag{2.22}$$

Maintenant, en utilisant (2.22) nous pouvons obtenir la formule explicite pour les polynômes p-Bell.

$$\mathcal{B}_{n,p}\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{B}_{k,p}x^{n-k}, \tag{2.23}$$

pour tout entier p, on définit aussi la classe suivante d'un polynôme $\mathbb{B}_{n}^{(p)}\left(x\right)$, que nous appelons polynômes Poly-Bell, par

$$\mathbb{B}_{n}^{(p)}\left(x\right)=\frac{\mathcal{B}_{n,p}(x)}{p!}.$$

Les premières expressions des polynômes p-Bell sont :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_{0,p}\left(x\right)=1,\\
&\mathcal{B}_{1,p}\left(x\right)=x+\frac{1}{p+1},\\
&\mathcal{B}_{2,p}\left(x\right)=x^{2}+\frac{2x}{p+1}+\frac{p+4}{\left(p+1\right)\left(p+2\right)},\\
&\mathcal{B}_{3,p}\left(x\right)=x^{3}+\frac{3x^{2}}{p+1}+\frac{3\left(p+4\right)x}{\left(p+1\right)\left(p+2\right)}+\frac{p^{2}+11p+30}{\left(p+1\right)\left(p+2\right)\left(p+3\right)}
\end{aligned}$$

et

$$\mathcal{B}_{4,p}(x) = x^4 + \frac{4x^3}{p+1} + \frac{6(p+4)x^2}{(p+1)(p+2)} + \frac{4(p^2+11p+30)x}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \frac{p^3+23p^2+160p+360}{(p+1)(p+2)(p+3)(p+4)}.$$

Nous présentons ici une autre expression de la formule explicite de $\mathcal{B}_{n,p}(x)$ en fonction des nombres de Stirling à poids $S_n^k(x)$ de deuxième espèce [14]. Rappelons que $S_n^k(x)$ sont définis par :

$$\begin{aligned} S_n^k(x) &= \frac{1}{k!}\Delta^k x^n \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left\{ i \atop k \right\} x^{n-i}, \end{aligned} \tag{2.24}$$

où Δ est l'opérateur de différence directe. Ces nombres sont liés respectivement aux nombres r-Stirling de deuxième espèce $\left\{ n \atop k \right\}_r$ et aux nombres r -Whitney $W_{m,r}(n,k)$ de deuxième espèce [38] par :

$$S_n^k(r) = \left\{ n+r \atop k+r \right\}_r \text{ et } S_n^k\left(\frac{r}{m}\right) = \frac{1}{m^{n-k}} W_{m,r}(n,k).$$

Rappelons que, pour tout entier positif m, les nombres r -Whitney de deuxième espèce

$$W_{m,r}(n,p) = m^{n-p}\mathcal{S}_n^p\left(\frac{r}{m}\right),$$

sont les coefficients dans l'expression suivante [31, 38] :

$$(mx+r)^n = \sum_{p=0}^{n} m^k W_{m,r}(n,p)(x)_p$$

et sont donnés par la fonction génératrice suivante :

$$\sum_{n=p}^{\infty} W_{m,r}(n,p)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{m^p p!} e^{rz}\left(e^{mz}-1\right)^p.$$

Clairement, on a

$$W_{1,0}(n,p) = \left\{ n \atop p \right\} \qquad \text{et} \qquad W_{1,r}(n,p) = \left\{ n+r \atop p+r \right\}_r.$$

Théorème 2.26. *Pour $p \geq 0$, on a*

$$\mathcal{B}_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+p}{k}^{-1} S_n^k(x). \tag{2.25}$$

Démonstration. De la formule (2.25) et la fonction génératrice de $S_n^k(x)$

$$\frac{1}{k!} e^{xz}\left(e^z-1\right)^k = \sum_{n\geq k} S_n^k(x)\frac{z^n}{n!}, \tag{2.26}$$

on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{k+p}{k}^{-1}S_n^k(x)\right)\frac{z^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+p}{k}^{-1}\sum_{n\geq 0}S_n^k(x)\frac{z^n}{n!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+p}{k}^{-1}\frac{1}{k!}e^{xz}\left(e^z-1\right)^k\\ &= e^{xz}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p!}{(k+p)!}\left(e^z-1\right)^k\\ &= e^{xz}\sum_{n\geq 0}\mathcal{B}_{n,p}\frac{z^n}{n!}\\ &= \sum_{n\geq 0}\mathcal{B}_{n,p}(x)\frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

□

En particulier, on a

$$\mathcal{B}_{n,p}(r) = \sum_{k=0}^{n}\binom{k+p}{k}^{-1}\left\{\begin{matrix}n+r\\k+r\end{matrix}\right\}_r$$

et

$$\mathcal{B}_{n,p}\left(\frac{r}{m}\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{m^{n-k}}\binom{k+p}{k}^{-1}W_{m,r}(n,k).$$

On veut maintenant généraliser le théorème 2.19 au cas des polynômes. Considérons les polynômes $\mathcal{Z}_{n,m}(z;p)$ définis par

$$\mathcal{Z}_{n,m}(x;p) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{Z}_{k,m}(p)\,x^{n-k} \tag{2.27}$$

avec $\mathcal{Z}_{0,m}(x;p) = 1$ et $\mathcal{Z}_{n,0}(x;p) = \mathcal{B}_{n,p}(x)$.

Théorème 2.27. *Les polynômes $\mathcal{Z}_{n,m}(x;p)$ satisfont la relation de récurrence à trois termes suivante :*

$$\mathcal{Z}_{n+1,m}(x;p) = \frac{m+1}{m+p+1}\mathcal{Z}_{n,m+1}(x;p) + (m+x)\,\mathcal{Z}_{n,m}(x;p) \tag{2.28}$$

avec la suite initiale donnée par

$$\mathcal{Z}_{0,m}(x;p) = 1.$$

Démonstration. De (2.27) et (2.17), on a

$$x\frac{d}{dx}\mathcal{Z}_{n,m}(x;p) = n\mathcal{Z}_{n,m}(x;p) - \frac{n(m+1)}{m+p+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\mathcal{Z}_{k,m+1}(p)\,x^{n-k-1} - nm\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\mathcal{Z}_{k,m}(p)\,x^{n-k-1}.$$

Ainsi

$$x\mathcal{Z}_{n-1,m}(x;p) = \mathcal{Z}_{n,m}(x;p) - \frac{m+1}{m+p+1}\mathcal{Z}_{n-1,m+1}(x;p) - m\mathcal{Z}_{n-1,m}(x;p),$$

ce qui équivalent à (2.28). □

Le théorème suivant établit la représentation intégrale pour les polynôme p-Bell.

De la définition (2.22) et la formule(2.5), on a

$$F_p(x) = p\int_0^1 (1-t)^{p-1}\exp(xz + t(e^z-1))dt.$$

Comme

$$\begin{aligned}\exp(xz + t(e^z-1)) &= \sum_{n\geq 0} G_{n,x}(t)\frac{z^n}{n!}\\ &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\phi_k(t)\,x^{n-k}\right)\frac{z^n}{n!},\end{aligned}$$

on obtient le théorème suivant.

Théorème 2.28. *Les polynômes p-Bell $\mathcal{B}_{n,p}(x)$ satisfont la représentation intégrale suivante*

$$\mathcal{B}_{n,p}(x) = p\int_0^1 (1-t)^{p-1} G_{n,x}(t)\,dt. \tag{2.29}$$

Les polynômes $G_{n,x}(t)$ sont un cas particulier des polynômes plus généraux considérés par Corcino et al. dans [18]. Maintenant, en utilisant les propriétés de $G_{n,x}(t)$, on obtient les corollaires suivants.

Corollaire 2.29 (Formule de Dobinski). *Pour $p \geq 1$, on a*

$$\mathcal{B}_{n,p}(x) = p\sum_{k\geq 0}\frac{(x+k)^n}{k!}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}k+1\\ p+k+1\end{matrix};-1\right).$$

Démonstration. De [18, Formule (1.18)], on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n,p}(x) &= p\int_0^1 (1-t)^{p-1}\left(e^{-t}\sum_{k\geq 0}\frac{t^k}{k!}(x+k)^n\right)dt.\\ &= p\sum_{k\geq 0}\frac{(x+k)^n}{k!}\int_0^1 e^{-t}t^k(1-t)^{p-1}\,dt.\\ &= p\sum_{k\geq 0}\frac{(x+k)^n}{k!}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}k+1\\ p+k+1\end{matrix};-1\right).\end{aligned}$$

□

Corollaire 2.30 (Relations de récurrence). *Pour $p \geq 0$, on a*

$$\mathcal{B}_{n+1,p}(x) = x\mathcal{B}_{n,p}(x) - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{p}{p+1}\mathcal{B}_{k,p+1}(x) - \mathcal{B}_{k,p}(x)\right). \tag{2.30}$$

Démonstration. De [18, formule (2.9)], on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_{n+1,p}(x) &= p\int_0^1 (1-t)^{p-1}\left(xG_{n,x}(t) + \sum_{k=0}^{n} t\binom{n}{k}G_{n-k,x}(t)\right)dt\\ &= xp\int_0^1 (1-t)^{p-1}G_{n,x}(t)\,dt\\ &\quad - p\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 ((1-t)-1)(1-t)^{p-1}G_{n-k,x}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Après quelques manipulations, on obtient (2.30). □

5 Représentation probabiliste

Cette section a pour but de présenter une interprétation probabiliste de la suite $\mathcal{B}_{n,p}(x)$. Pour cela, nous nous considérons une variable aléatoire Z qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose en outre que λ est une variable aléatoire suit une loi bêta : $\lambda \rightsquigarrow \text{beta}(1,p)$. La fonction de densité de probabilité, pour $0 \leq t \leq 1$, et du paramètre $p > 0$ est définie comme suit :

$$\begin{aligned}f_\lambda(t) &= \frac{1}{\beta(1,p)}(1-t)^{p-1}\\ &= p(1-t)^{p-1},\end{aligned}$$

car

$$\beta(1,p)=\frac{1}{p},$$

où β est la fonction bêta. Alors, la distribution résultante est un cas particulier de la distribution beta-Poisson [21, 28].

La fonction de masse de probabilité de Z est donnée par

$$\begin{aligned} f_Z(k) &= \int_{\mathbb{R}} f_{(Z,\lambda)}(k,t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_{Z/\lambda}(k/t)f_\lambda(t)dt \\ &= \int_0^1 p(1-t)^{p-1}\frac{t^k e^{-t}}{k!}dt \\ &= \frac{1}{ek!}\frac{\Gamma(1+p)\Gamma(p+k)}{\Gamma(1+p+k)\Gamma(p)}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}1\\ p+k+1\end{matrix};1\right), \end{aligned}$$

ainsi, la fonction de masse de probabilité d'une distribution de Poisson pondérée. La fonction génératrice de moments de la distribution beta-Poisson est donnée par :

$$M(t)=\mathbb{E}\left[e^{tZ}\right]=\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}p\\ p+1\end{matrix};e^t-1\right),$$

où $\mathbb{E}$ est l'espérance mathématique.

Il est bien connu que les moments d'ordre supérieur $\mathbb{E}[Z^n]$ de la distribution de Poisson sont $\phi_n(t)$. Dans le paragraphe suivant, nous montrons que $\mathcal{B}_{n,p}(x)$ peut être vu comme le $n$ième moment d'une variable aléatoire $x+Z$ où Z suit la loi beta-Poisson.

Théorème 2.31. *Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi beta-Poisson, on a*

$$\mathcal{B}_{n,p}(x)=\mathbb{E}\left[(x+Z)^n\right].$$

Démonstration. De (2.29) et [18, p. 13, formule $(4,17)$], on a

$$\mathcal{B}_{n,p}(x)=p\int_0^1(1-t)^{p-1}\mathbb{E}\left[(x+Z)^n/\lambda=t\right]dt,$$

d'autre part, on a

$$\mathbb{E}\left[(x+Z)^n\right]=\mathbb{E}[\mathbb{E}((x+Z)^n/\lambda=t)],$$

par comparaison on obtient le résultat. □

3

Sur les polynômes s-Lah

Notre but dans ce chapitre est de généraliser la transformation de Lah (1.26). L'idée est de construire une matrice infinie $\mathcal{M} = (a_{n,m})_{n,m\geq 0}$ dans laquelle la première ligne $\alpha_m = a_{0,m}$ de la matrice est la suite initiale et la première colonne $\beta_m = a_{n,0}$ est la suite finale. Ce qui revient à étudier la relation de récurrence à trois termes :

$$a_{n+1,m}(x) \quad = \quad (n+m)a_{n,m}(x) + xa_{n,m+1}(x), \tag{3.1}$$

avec x un nombre complexe différent de zéro. Par la suite, nous définissons une nouvelle classe de polynômes, appelés les polynômes s-Lah. Et nous établissons une relation avec les polynômes de Laguerre associés. En conséquence, nous prouvons que la suite $\left(\frac{n!}{k!}\binom{n+s-1}{k+s-1}\right)_k$ est unimodale [45].

1 Transformation de Lah généralisée

Théorème 3.1. *Etant donné une suite initiale $\alpha_m = a_{0,m}(x)$, nous définissons la matrice $\mathcal{M}$ associée à la suite initale par (3.1), alors*

1. *Les composantes de la matrice $\mathcal{M}$ sont données par :*

$$a_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n+m-1}{k+m-1} x^k \alpha_{m+k}. \tag{3.2}$$

2. *Soit*

$$A_s(z) = \sum_{k\geq 0} \alpha_{k+s} \frac{z^k}{k!}$$

la fonction génératrice exponentielle de la suite initiale α_{m+s}. *Alors la fonction génératrice exponentielle de la suite* $(a_{n,s}(x))_{n\geq 0}$, *la* s*-ième colonne de la matrice* $\mathcal{M}$, *est donnée par*

$$B_s(z;x) = \sum_{n\geq 0} a_{n,s}(x) \frac{z^n}{n!} \tag{3.3}$$

$$= \frac{1}{(1-z)^s} A_s\left(\frac{xz}{1-z}\right). \tag{3.4}$$

Démonstration.

1. La preuve se fait par récurrence sur n. Si $n = 0$, le résultat est vrai. Maintenant nous supposons que (3.2) est vrai pour n et nous démontrons qu'elle est vrai pour $n+1$. De (3.1), on a

$$\begin{aligned}
a_{n+1,m}(x) =& (n+m)a_{n,m}(x) + xa_{n,m+1}(x) \\
=& (n+m)\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n+m-1}{k+m-1} x^k \alpha_{m+k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n+m}{k+m} x^{k+1}\alpha_{m+k+1} \\
=& (n+m)n!\binom{n+m-1}{m-1}\alpha_m + (n+m)\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!}\binom{n+m-1}{k+m-1} x^k \alpha_{m+k} \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!}\binom{n+m}{k+m} x^{k+1}\alpha_{m+k+1} + x^{n+1}\alpha_{m+n+1} \\
=& (n+m)n!\binom{n+m-1}{m-1}\alpha_m + (n+m)\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(k+1)!}\binom{n+m-1}{k+m} x^{k+1}\alpha_{m+k+1} \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!}\binom{n+m}{k+m} x^{k+1}\alpha_{m+k+1} + x^{n+1}\alpha_{m+n+1} \\
=& (n+m)n!\binom{n+m-1}{m-1}\alpha_m + x^{n+1}\alpha_{m+n+1} \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{n!}{k!}\binom{n+m}{k+m} + (n+m)\frac{n!}{(k+1)!}\binom{n+m-1}{k+m}\right] x^{k+1}\alpha_{m+k+1}
\end{aligned}$$

Après quelques réarrangements, on obtient

$$\begin{aligned}
a_{n+1,m}(x) &= (n+1)!\binom{n+m}{m-1}\alpha_m + x^{n+1}\alpha_{m+n+1} \\
&+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!}\binom{n+m}{k+m}x^{k+1}\alpha_{m+k+1} \\
&= (n+1)!\binom{n+m}{m-1}\alpha_m + x^{n+1}\alpha_{m+n+1} \\
&+\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+1)!}{k!}\binom{n+m}{k+m-1}x^{k}\alpha_{m+k} \\
&=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(n+1)!}{k!}\binom{n+m}{k+m-1}x^{k}\alpha_{m+k}
\end{aligned}$$

2. En utilisant (3.2), on obtient

$$\begin{aligned}
B_s(z;x) &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\binom{n+s-1}{k+s-1}x^k\alpha_{k+s}\right)\frac{z^n}{n!} \\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}x^k\alpha_{k+s}\sum_{n\geq 0}\binom{n+s-1}{k+s-1}z^n.
\end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{n\geq 0}\binom{n+s-1}{k+s-1}z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+s}},$$

on trouve

$$B_s(z;x) = \frac{1}{(1-z)^s}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\alpha_{k+s}\left(\frac{xz}{1-z}\right)^k \tag{3.5}$$

$$= \frac{1}{(1-z)^s}A_s\left(\frac{xz}{1-z}\right). \tag{3.6}$$

Ce qui achève la démonstration. □

Théorème 3.2. *Etant donnée une suite finale $\beta_m = a_{n,0}(x)$, nous définissons la matrice $\mathcal{M}$ associée à la suite finale par :*

$$a_{n,m+1}(x) = \frac{1}{x}\left(a_{n+1,m}(x) - (n+m)\,a_{n,m}(x)\right). \tag{3.7}$$

Alors

1. *Les composantes de la matrice $\mathcal{M}$ sont données par*

$$a_{n,m}(x) = \frac{1}{x^m}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}\frac{m!}{k!}\binom{m+n-1}{k+n-1}\beta_{n+k}\ . \tag{3.8}$$

2. *Soit*

$$\mathcal{B}_s(z) = \sum_{k\geq 0} \beta_{k+s} \frac{z^k}{k!}$$

la fonction génératrice exponentielle de la suite finale β_{n+s}. Alors la fonction génératrice exponentielle de la suite $(a_{s,m}(x))_{m\geq 0}$, la s-ième ligne de la matrice $\mathcal{M}$, est donnée par

$$\mathcal{A}_s(z;x) = \sum_{m\geq 0} a_{s,m}(x) \frac{z^m}{m!} = \frac{x^s}{(x+z)^s} \mathcal{B}_s\left(\frac{z}{x+z}\right). \tag{3.9}$$

Démonstration.

1. Par réccurence sur m. Le résultat est vrai pour $m = 0$. En utilisant (3.7), on trouve

$$\begin{aligned}
a_{n,m+1}(x) =& \frac{1}{x}(a_{n+1,m}(x) - (n+m)a_{n,m}(x)) \\
=& \frac{1}{x^{m+1}} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} \frac{m!}{k!} \binom{m+n}{k+n} \beta_{n+k+1} \\
& -(n+m) \frac{1}{x^{m+1}} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} \frac{m!}{k!} \binom{m+n-1}{k+n-1} \beta_{n+k} \\
=& \frac{1}{x^{m+1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} \frac{m!}{k!} \binom{m+n}{k+n} \beta_{n+k+1} + \frac{1}{x^{m+1}} \beta_{n+m+1} \\
& -(n+m) \frac{1}{x^{m+1}} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m+k} \frac{m!}{k!} \binom{m+n-1}{k+n-1} \beta_{n+k} \\
& -(n+m) \frac{1}{x^{m+1}} (-1)^m m! \binom{m+n-1}{n-1} \beta_n \\
=& \frac{1}{x^{m+1}} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m+k-1} \frac{m!}{(k-1)!} \binom{m+n}{k+n-1} \beta_{n+k} + \frac{1}{x^{m+1}} \beta_{n+m+1} \\
& -(n+m) \frac{1}{x^{m+1}} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m+k} \frac{m!}{k!} \binom{m+n-1}{k+n-1} \beta_{n+k} \\
& -(n+m) \frac{1}{x^{m+1}} (-1)^m m! \binom{m+n-1}{n-1} \beta_n \\
=& \frac{1}{x^{m+1}} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m+k+1} \left[\frac{m!}{(k-1)!} \binom{m+n}{k+n-1} + (n+m) \frac{m!}{k!} \binom{m+n-1}{k+n-1} \right] \beta_{n+k} \\
& +(n+m) \frac{1}{x^{m+1}} (-1)^{m+1} m! \binom{m+n-1}{n-1} \beta_n + \frac{1}{x^{m+1}} \beta_{n+m+1}
\end{aligned}$$

Après quelques réarrangements, on obtient

$$
\begin{aligned}
a_{n,m+1}(x) =& \frac{1}{x^{m+1}} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m+k+1} \frac{(m+1)!}{k!} \binom{m+n}{k+n-1} \beta_{n+k} \\
&+ \frac{1}{x^{m+1}} (-1)^{m+1} (m+1)! \binom{m+n}{n-1} \beta_n + \frac{1}{x^{m+1}} \beta_{n+m+1} \\
=& \frac{1}{x^{m+1}} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{m+k+1} \frac{(m+1)!}{k!} \binom{m+n}{k+n-1} \beta_{n+k}
\end{aligned}
$$

2. D'après (3.8), on a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_s(z;x) &= \sum_{m\geq 0} \left(\frac{1}{x^m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} \frac{m!}{k!} \binom{m+s-1}{k+s-1} \beta_{s+k} \right) \frac{z^m}{m!} \\
&= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{1}{k!} \beta_{s+k} \sum_{m\geq 0} (-1)^m \binom{m+s-1}{k+s-1} \left(\frac{z}{x}\right)^m \\
&= \frac{x^s}{(x+z)^s} \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{1}{k!} \beta_{s+k} \ (-1)^k \left(\frac{z}{x+z}\right)^k \\
&= \frac{x^s}{(x+z)^s} \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} \beta_{s+k} \ \left(\frac{z}{x+z}\right)^k \\
&= \frac{x^s}{(x+z)^s} \mathcal{B}_s \left(\frac{z}{x+z}\right).
\end{aligned}
$$

Ce qui achève la démonstration.

□

De Théorème 3.1 et Théorème 3.2 on obtien le Corollaire suivant :

Corollaire 3.3. *Pour $n, m \geq 0$, on a*

$$
\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n+m-1}{k+m-1} x^k \alpha_{k+m} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} \frac{m!}{k!} \binom{m+n-1}{k+n-1} x^{-m} \beta_{n+k}. \tag{3.10}
$$

L'identité (3.10) est appelée la transformation de Lah généralisée est se réduit à la transformation de Lah de la suite α_n pour $m = 0$ et $x = 1$ et à la transformation inverse de Lah de la suite β_m pour $n = 0$ et $x = 1$.

2 Sur les polynômes s-Lah

En prenant la suite initiale $a_{0,m} = 1$ dans (3.1), on construit la matrice suivante :

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ x & 1+x & 2+x & 3+x & \cdots \\ x^2+2x & x^2+4x+2 & x^2+6x+6 & \vdots & \\ x^3+6x^2+6x & x^3+9x^2+18x+6 & \vdots & & \\ x^4+12x^3+36x^2+24x & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

Comme $A_s(z) = e^z$, la relation (3.3) donne la fonction génératrice exponentielle de la suite finale :

$$B_s(z;x) = \frac{1}{(1-z)^s} \exp\left(\frac{xz}{1-z}\right). \tag{3.11}$$

En particulier, pour $s = 0$, on a

$$\begin{aligned} B_0(z;x) &= \exp\left(\frac{xz}{1-z}\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} L_n(x) \frac{z^n}{n!}, \end{aligned}$$

où $L_n(x)$ sont les polynômes de Lah.

Le Corollaire 3.3 nous donne l'identité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n+m-1}{k+m-1} x^k = x^{-m} \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+k} \frac{m!}{k!} \binom{m+n-1}{k+n-1} L_{n+k}(x).$$

On prend $n = 0$, on obtient

$$x^m = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} L_k(x).$$

Définition 3.4. *Nous définissons les polynômes s-Lah, notée $L_{n,s}(x)$ par :*

$$\begin{aligned} L_{n,s}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n+s-1}{k+s-1} x^k \\ &= x^{-s} \sum_{k=0}^{s} (-1)^{s+k} \frac{s!}{k!} \binom{s+n-1}{s-k} L_{n+k}(x). \end{aligned}$$

Maintenant, nous discutons les deux cas où le nombre s dans la fonction génératrice exponentielle (3.11) est pair où impaire.

Pour $s = 2r$ dans (3.11) et on pose $Y_{n,r}(x) = a_{n,2r}(x)$, alors

$$B_{2r}(z;x) = \sum_{n\geq 0} Y_{n,r}(x) \frac{z^n}{n!}$$

avec

$$Y_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n+2r-1}{k+2r-1} x^k. \tag{3.12}$$

$$= x^{-2r} \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k \frac{(2r)!}{k!} \binom{n+2r-1}{k+n-1} L_{n+k}(x). \tag{3.13}$$

De Théorème 3.7 dans [34] nous reconnaissons que

$$\left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor_r = \frac{n!}{k!} \binom{n+2r-1}{k+2r-1},$$

est la formule explicite des nombres r-Lah (de première espèce).

Maintenant, pour $s = 2r+1$ dans (3.11), on pose $Z_{n,r}(x) = a_{n,2r+1}(x)$, alors

$$B_{2r+1}(z;x) = \sum_{n\geq 0} Z_{n,r}(x) \frac{z^n}{n!}$$

avec

$$Z_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} \binom{n+2r}{k+2r} x^k \tag{3.14}$$

$$= x^{-2r-1} \sum_{k=0}^{2r+1} (-1)^{k-1} \frac{(2r+1)!}{k!} \binom{2r+n}{k+n-1} L_{n+k}(x). \tag{3.15}$$

De même manière que les nombres r-Lah de première espèce, nous définissons les nombres r-Lah de deuxième espèce $\left\lceil \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rceil_r$ par la formule explicite suivante :

$$\left\lceil \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rceil_r = \frac{n!}{k!} \binom{n+2r}{k+2r} \text{ pour } n \geq k \geq 0 \text{ et } r \geq 0. \tag{3.16}$$

Les résultats suivants sont déduits de (3.16).

Théorème 3.5. 1. *Les nombres r-Lah de deuxième espèce satisfont la relation de récurrence suivante :*

$$\left\lceil \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\rceil_r = \left\lceil \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\rceil_r + (n+k+2r+1) \left\lceil \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rceil_r.$$

2. *On a*

$$(x+2r+1)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left\lceil \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rceil_r x^{\underline{k}} \text{ et } (x-2r-1)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\lceil \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rceil_r x^{\overline{k}}.$$

3. *La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres r-Lah de deuxième espèce est donnée par*

$$\sum_{n\geq k} \left\lceil \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rceil_r \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!} \frac{z^k}{(1-z)^{k+2r+1}}.$$

Théorème 3.6. *Les polynômes $L_{n,s}(x)$ satisfont la relation de récurrence suivante :*

$$L_{n+1,s}(x) = sL_{n,s+1}(x) + xL_{n,s+2}(x).$$

Démonstration. On a

$$\frac{d}{dz}B_s(z;x) = sB_{s+1}(x,z) + xB_{s+2}(x,z).$$

Ainsi

$$\sum_{n\geq 0} L_{n+1,s}(x)\frac{z^n}{n!} = s\sum_{n\geq 0} L_{n,s+1}(x)\frac{z^n}{n!} + x\sum_{n\geq 0} L_{n,s+2}(x)\frac{z^n}{n!}.$$

En comparant les coefficients de $\frac{z^n}{n!}$, on obtient le résultat. □

En particulier, on a

$$Y_{n+1,r}(x) = 2rZ_{n,r}(x) + xY_{n,r+1}(x)$$

et

$$Z_{n+1,r}(x) = (2r+1)Y_{n,r+1}(x) + xZ_{n,r+1}(x).$$

Le résultat suivant donne une formule explicite des polynômes s-Lah en terme de la fonction hypergéométrique confluente de Kummer.

Théorème 3.7. *On a*

$$L_{n,s}(x) = \frac{(n+s-1)!}{(s-1)!}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}-n\\ s\end{matrix};-x\right),$$

où ${}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\ b\end{matrix};z\right)$ *est la fonction hypergéométrique confluente de paramètres complexes* a, b *et d'une variable complexe* z.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} L_{n,s}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\binom{n+s-1}{k+s-1}x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\frac{(n+s-1)!}{(k+s-1)!(n-k)!}x^k, \end{aligned}$$

d'autre part on a $(k+s-1)! = s^{\overline{k}}(s-1)!$ et $(n-k)! = \frac{n!}{(-1)^k(-n)^{\overline{k}}}$, alors

$$\begin{aligned} L_{n,s}(x) &= \frac{(n+s-1)!}{(s-1)!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)^{\overline{k}}}{s^{\overline{k}}k!}(-x)^k \\ &= \frac{(n+s-1)!}{(s-1)!}\,{}_1F_1\left(\begin{matrix}-n\\ s\end{matrix};-x\right). \end{aligned}$$

□

Maintenant, on peut écrire les polynômes $s-$ Lah sous la forme suivante :

Théorème 3.8. *On a*

$$\begin{aligned} L_{n,s}(x) &= n!\mathbb{L}_n^{(s-1)}(-x) \qquad (3.17)\\ &= \frac{(-1)^n}{e^x x^{s-1}} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^x x^{n+s-1}\right). \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des polynômes de Laguerre associés [2], nous pouvons obtenir plus de propriétés des polynômes $s-$Lah. Par exemple, nous avons

$$\frac{d}{dx} L_{n,s}(x) = nL_{n-1,s+1}(x).$$

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} L_{n,s}(x) &= n! \frac{d}{dx} \mathbb{L}_n^{(s-1)}(-x) \qquad (3.18)\\ &= n!\mathbb{L}_{n-1}^{(s)}(-x) \qquad (3.19)\\ &= \frac{n!}{(n-1)!} L_{n-1,s+1}(x) \qquad (3.20)\\ &= nL_{n-1,s+1}(x). \end{aligned}$$

Remarque 3.9. *Pour $s = 0$, le Théorème 3.8, est réduit au résultat connu récemment par Boyadzhiev dans [11].*

Puisque les racines des polynômes de Laguerre associés $\mathbb{L}_n^{(m)}(x)$ sont positives, on peut prouver le résultat suivant :

Théorème 3.10. *Les polynômes $L_{n,s}(x)$ ne possède que des racines réelles négatives.*

Corollaire 3.11. *La suite $\left(\frac{n!}{k!}\binom{n+s-1}{k+s-1}\right)_k$ est strictement log-concave, donc est unimodale.*

Démonstration. D'après le Théorème 3.10 et l'inégalité de Newton, la suite $\left(\frac{n!}{k!}\binom{n+s-1}{k+s-1}\right)_k$ est strictement log-concave et d'après la Proposition 1.8 elle est unimodale. □

Remarque 3.12. *Le cas particulier où $s = 2r$, se réduit immédiatement à un résultat connu donné par Mihoubi et Reggane [33, Proposition 3].*

Application

Une application du Théorème 3.8, Barry prouve que pour $m \geq 1$,

$$\det M_m = (m-1)!\mathbb{L}_{m-1}^{(1)}(1),$$

où $\det M_m$ est le déterminant de la matrice $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ avec $m_{i,i} = i, m_{i,j} = 1$ si $i > j$, $m_{i,j} = j - i$ si $j > i$

$$M_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & & n-1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & 3 & 1 & \ddots & & \\ & \vdots & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \vdots & 1 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & & & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & & & \cdots & 1 & n \end{pmatrix}_{m\times m}$$

avec

$$\sum_{m\geq 0} \det M_{m+1} \frac{z^m}{m!} = \frac{1}{(1-z)^2} \exp\left(\frac{z}{z-1}\right).$$

Maintenant, à partir de la relation (3.8), on obtient la formule explicite suivante, pour la suite $A066668$ dans [41]

$$\begin{aligned} \det M_n &= (n-1)!\mathbb{L}_{n-1}^{(1)}(1) \\ &= L_{n-1,2}(-1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} \binom{n}{k+1} (-1)^k \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(i-1)!} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \left[\begin{matrix} n \\ i \end{matrix}\right] \text{ pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

On peut aussi monter le résultat précédent par les fonctions génératrice. Si nous commençons par la suite finale $a_{n,0} = 1$, on obtient :

$$\mathcal{B}_0(z) = e^z$$

$$\mathcal{A}_0(z;x) = \frac{x^0}{(x+z)^0} \mathcal{B}_0\left(\frac{z}{x+z}\right)$$

Pour $x = -1$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0(z;x) &= \exp\left(\frac{z}{z-1}\right) \\
-\frac{d}{dz}\mathcal{A}_0(z;x) &= \frac{1}{(1-z)^2}\exp\left(\frac{z}{z-1}\right) \\
-\frac{d}{dz}\mathcal{A}_0(z;x) &= \sum_{m\geq 0}\det M_{m+1}\frac{z^m}{m!} \\
-\sum_{m\geq 0}a_{0,m+1}\frac{z^m}{m!} &= \sum_{m\geq 0}\det M_{m+1}\frac{z^m}{m!}
\end{aligned}$$

d'où

$$\det M_{m+1} = -a_{0,m+1}$$

De Corollaire 3.3, pour $m \geq 1$, on a

$$-\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\binom{n+m-1}{k+m-1}(-1)^{k+m}\det M_{m+k} = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}\frac{m!}{k!}\binom{m+n-1}{k+n-1}. \tag{3.21}$$

En particulier pour $n = 0$, on obtient pour $m \geq 1$ le théorème suivant :

Théorème 3.13.

$$\begin{aligned}
\det M_m &= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{m!}{k!}\binom{m-1}{k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\left\lfloor\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right\rfloor.
\end{aligned}$$

Si $m = 0$, on a

$$1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n!}{k!}\binom{n-1}{k-1}\det M_k = 0.$$

4

Une formule de récurrence à trois termes pour les polynômes de Bernoulli généralisés

1 Introduction

Les polynômes de Bernoulli d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, sont définis par la fonction génératrice suivante :

$$\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^{\alpha} e^{xz} = \sum_{n\geq 0} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{z^n}{n!}.$$

Pour $x = 0$, $B_n^{(\alpha)}(0) := B_n^{(\alpha)}$ sont appelés les nombres de Bernoulli d'ordre α.

Clairement, on a

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_i^{(\alpha)} x^{n-i}. \tag{4.1}$$

Boutiche et *al.* [10] ont prouvé que la formule explicite pour $B_n^{(\alpha)}(x)$: est la suivante :

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n+m}{m}^{-1} \binom{n+\alpha}{n-m} \binom{\alpha+m-1}{m} \mathcal{S}_{n+m}^{m}(x), \tag{4.2}$$

où $\mathcal{S}_n^k(x)$ sont les nombres de Stirling à poids de deuxième espèce ,

Les polynômes de Bernoulli classiques $B_n(x)$ sont donnés par :

$$B_n(x) := B_n^{(1)}(x)$$

et peut être calculé [39] en construisant une matrice infinie $\left(B_{n,p}(x)\right)_{n,p\geq 0}$ dont la première ligne de la matrice $B_{0,p}(x)=1$, et chaque composante $B_{n,p}(x)$ est donnée récursivement par

$$B_{n+1,p}(x)=(x+p)\,B_{n,p}(x)-\frac{(p+1)^2}{p+2}B_{n,p+1}(x). \tag{4.3}$$

La première colonne de la matrice $B_{n,0}(x)=B_n(x)$ sont les polynômes de Bernoulli.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ x-\frac{1}{2} & x-\frac{1}{3} & x-\frac{1}{4} & x-\frac{1}{5} & \cdots & \\ x^2-x+\frac{1}{6} & x^2-\frac{2}{3}x & x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{20} & \vdots & & \\ x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{x}{2} & x^3-x^2+\frac{1}{15} & \vdots & & & \\ x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30} & \vdots & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la formule de récurrence à trois termes pour les polynômes de Bernoulli généralisés d'ordre $k\geq 1$. Pour cela, nous rappelons quelques définitions et quelques résultats sur les polynômes de Daehee d'ordre supérieur et nous présenterons des formules explicites pour ces polynômes. Ensuite, nous introduisons une suite à deux indices qui nous permettera de calculer les nombres de Bernoulli généralisés d'ordre k.

2 Les polynômes de Daehee d'odre α

Récemment, Kim et *al.* dans [25] ont défini les polynômes d'ordre supérieur de Daehee $D_n^{(k)}(x)$ $(k\geq 1)$ par la fonction génératrice suivante :

$$\left(\frac{\log(1+z)}{z}\right)^k(1+z)^x=\sum_{n\geq 0}D_n^{(k)}(x)\frac{z^n}{n!}, \tag{4.4}$$

et ont prouvé que

$$D_n^{(k)}(x)=\sum_{i=0}^{n}s(n,i)\,B_i^{(k)}(x) \tag{4.5}$$

$$=B_n^{(n+k+1)}(x+1) \tag{4.6}$$

où $s(n,m)$ sont les nombres de Stirling de première espèce signés.
Maintenant, pour $x=0$ dans (4.4), $D_n^{(k)}:=D_n^{(k)}(0)$ sont appelés les nombres de Daehee d'ordre k et donnés explicitement par

$$D_n^{(k)}=\binom{n+k}{k}^{-1}s(n+k,k). \tag{4.7}$$

Maintenant, par la transformation de Stirling [37], on peut généraliser (4.5).

Proposition 4.1. *Pour $n, m \geq 0$, on a*

$$\sum_{i=0}^{m} s(m,i)\, B_{n+i}^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n+m \atop i+m} \right\}_{m} D_{m+i}^{(k)}(x).$$

Les relations (4.2) et (4.6) donnent facilement une formule explicite pour $D_n^{(k)}(x)$ en termes des nombres de Stirling à poids de deuxième espèce. De plus, le $D_n^{(k)}(x)$ peut être étendu aux polynômes de Daehee $D_n^{(\alpha)}(x)$ d'ordre α, qui peut être défini par :

$$D_n^{(\alpha)}(x) = B_n^{(n+\alpha+1)}(x+1).$$

Théorème 4.2. *On a*

$$D_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n+i}{i}^{-1} \binom{2n+\alpha+1}{n-i} \binom{n+\alpha+i}{i} \mathcal{S}_{n+i}^{i}(x+1). \tag{4.8}$$

Les premiers polynômes $D_n^{(\alpha)}(x)$ $(0 \leq n \leq 4)$ sont :

$$\begin{aligned}
D_0^{(\alpha)}(x) &= 1, \\
D_1^{(\alpha)}(x) &= x - \frac{\alpha}{2}, \\
D_2^{(\alpha)}(x) &= x^2 - (\alpha+1)\, x + \frac{\alpha}{12}(3\alpha+5), \\
D_3^{(\alpha)}(x) &= x^3 - 3\left(\frac{\alpha}{2}+1\right) x^2 + \frac{(\alpha+1)(3\alpha+8)}{4} x - \frac{\alpha(\alpha+2)(\alpha+3)}{8},
\end{aligned}$$

et

$$D_4^{(\alpha)}(x) = x^4 - 2(\alpha+3)\, x^3 + \frac{(\alpha+2)(3\alpha+11)}{2} x^2 - \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)(\alpha+4)}{2} x + \frac{\alpha\left(15\alpha^3 + 150\alpha^2 + 485\alpha + 502\right)}{240}.$$

En particulier, nous obtenons une représentation explicite des polynômes de Daehee d'ordre α à des arguments rationnels en fonction des nombres r -Whitney de deuxième espèce.

$$D_n^{(\alpha)}\left(\frac{r}{m}\right) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{\binom{2n+\alpha+1}{n-i}\binom{n+\alpha+i}{i}}{m^n \binom{n+i}{i}} W_{m,r+m}(n+i, i).$$

Si on pose $x = r$ et $m = 1$ dans (4.8), on obtient

$$D_n^{(\alpha)}(r) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i \binom{2n+\alpha+1}{n-i}\binom{n+\alpha+i}{i}}{\binom{n+i}{i}} \left\{ {n+i+r+1 \atop i+r+1} \right\}_{r+1}.$$

3 Relation de récurrence pour les polynômes de Bernoulli généralisés d'ordre k

Dans le Théorème suivant, on propose un algorithme basé sur une relation de récurrence à trois termes pour calculer les nombres de Bernoulli d'odre k. Il convient d'indroduire la suite suivante $\mathfrak{B}_{n,m}^{(k)}$ avec deux indices par :

$$\mathfrak{B}_{n,m} := \mathfrak{B}_{n,m}^{(k)} = \frac{\binom{m+k}{k}}{s\left(m+k,k\right)} \sum_{i=0}^{n} \left\{ {n+m \atop i+m} \right\}_{m} D_{m+i}^{(k)} \tag{4.9}$$

avec $\mathfrak{B}_{0,m} = 1$ et $\mathfrak{B}_{n,0} = B_n^{(k)}$.

Théorème 4.3. *Les $\mathfrak{B}_{n,m}^{(k)}$ satisfont à la relation de récurrence à trois termes suivante :*

$$\mathfrak{B}_{n+1,m} = \frac{m+1}{m+k+1} \frac{s\left(m+k+1,k\right)}{s\left(m+k,k\right)} \mathfrak{B}_{n,m+1} + m\mathfrak{B}_{n,m} \tag{4.10}$$

avec la suite initiale donnée par

$$\mathfrak{B}_{0,m} = 1.$$

Démonstration. De la Proposition 4.1 et (1.15), on a

$$\mathfrak{B}_{n,m+1} = \frac{\binom{m+k+1}{k}}{s\left(m+k+1,k\right)} \sum_{i=0}^{m+1} \left(s\left(m,i-1\right) - ms\left(m,i\right)\right) B_{n+i}^{(k)}.$$

Après quelques réarrangements, on trouve que

$$\mathfrak{B}_{n,m+1} = \frac{m+k+1}{m+1} \frac{s\left(m+k,k\right)}{s\left(m+k+1,k\right)} \left(\mathfrak{B}_{n+1,m} - m\mathfrak{B}_{n,m}\right).$$

Ceci complète évidemment la preuve du Théorème 4.3. □

Finalement, nous considérons les polynômes $\mathfrak{B}_{n,m}^{(k)}\left(x\right)$ qui sont definis par :

$$\mathfrak{B}_{n,m}\left(x\right) := \mathfrak{B}_{n,m}^{(k)}\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathfrak{B}_{i,m}^{(k)} x^{n-i}.$$

C'est évidemment de (4.1) que $\mathfrak{B}_{0,m}^{(k)}\left(x\right) = 1$ et $\mathfrak{B}_{n,0}^{(k)}\left(x\right) = B_n^{(k)}\left(x\right)$.

Théorème 4.4. *Les polynômes $\mathfrak{B}_{n,m}^{(k)}\left(x\right)$ vérifient la relation de récurrence à trois termes suivante :*

$$\mathfrak{B}_{n+1,m}\left(x\right) = \frac{m+1}{m+k+1} \frac{s\left(m+k+1,k\right)}{s\left(m+k,k\right)} \mathfrak{B}_{n,m+1}\left(x\right) + \left(m+x\right) \mathfrak{B}_{n,m}\left(x\right). \tag{4.11}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ x-\frac{k}{2} & x+\frac{1}{6}-\frac{k}{2} & x-\frac{3k^2+3k-2}{2(3k+5)} & \cdots & \\ x^2-kx+\frac{k(3k-1)}{12} & x^2-\frac{(3k-1)}{3}x+\frac{k(k-1)}{4} & \vdots & & \\ x^3-\frac{3}{2}kx^2+\frac{k(3k-1)}{4}x-\frac{k^2(k-1)}{8} & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

Démonstration. On voit facilement que

$$x\frac{d}{dx}\mathfrak{B}_{n,m}(x)=n\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\mathfrak{B}_{i,m}^{(k)}x^{n-i}-n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\mathfrak{B}_{i+1,m}^{(k)}x^{n-i-1}.$$

Utilisant (4.10), on obtient

$$x\frac{d}{dx}\mathfrak{B}_{n,m}(x) \;=\; n\mathfrak{B}_{n,m}(x)-n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}x^{n-i-1}\left(\frac{m+1}{m+k+1}\frac{s(m+k+1,k)}{s(m+k,k)}\mathfrak{B}_{i,m+1}+m\mathfrak{B}_{i,m}\right).$$

Après quelques manipulations, on trouve (4.11). □

Remarque 4.5. *Pour $k=1$ et de la relation $s(n,1)=(-1)^{n+1}(n-1)!$, on obtient (4.3).*

Remarque 4.6. *Notons aussi que les $s(n+k,k)$ peut être déterminé par les relations (4.7) et (4.8)*

$$s(n+k,k)=\binom{n+k}{k}D_n^{(k)}.$$

On a

$$\begin{aligned} s(k,k) &= 1,\\ s(k+1,k) &= -\frac{k}{2}(k+1),\\ s(k+2,k) &= \frac{k}{24}(k+1)(k+2)(3k+5),\\ s(k+3,k) &= -\frac{k}{48}(k+1)(k+2)^2(k+3)^2,\\ s(k+4,k) &= \frac{k}{5760}(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\left(15k^3+150k^2+485k+502\right). \end{aligned}$$

Conclusion, Perspectives

Le travail présenté dans cette thèse est le fruit de 2 ans de recherche dans le domaine de la combinatoire énumérative autour des suites classiques (Bernoulli, Bell, Lah etc.). La plupart des résultats présentés dans ce mémoire sont de nature analytiques (séries génératrices) où algorithmique (récurrence a trois termes) .

Plus précisément, le deuxième chapitre a été consacrée à la généralisation des nombres de Bell classique. Cette généralisations a donner une nouvelle généralisation de la transformation de Stirling qui a été étudier par Rahmani en 2014. Nous nous proposons d'étudier à l'avenir le cas générale, c'est-à-dire pour n'importe quel suite initiale.

Dans le chapitre trois, nous avons introduit un nouveau coefficient, qu'on a appelé le nombre de r-Lah de deuxième espèce. La question naturelle qui se pose est l'interprétation combinatoire de ce nombre.

Nous présentons ici quelques directions qui peuvent faire l'objet de travaux de recherche ultérieur ainsi que des idées pouvant faire suite aux résultats obtenus dans ce travail :

— Généraliser les résultats obtenu dans le chapitre deux, on remplaçant $\exp(z) - 1$ par une fonction $\phi(z)$ avec $\phi(0) = 0$.
— Revisiter la loi beta-Poisson avec les outils que nous avons développer dans le chapitre deux.
— Introduire les q-analogues des polynômes s-Lah.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, editors. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Publications, Inc., New York, 1992. Reprint of the 1972 edition.

[2] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy. *Special functions*, volume 71 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[3] T. Arakawa, T. Ibukiyama, and M. Kaneko. *Bernoulli numbers and zeta functions*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Tokyo, 2014. With an appendix by Don Zagier.

[4] M. Balazard. Quelques exemples de suites unimodales en théorie des nombres. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 2(1) :13–30, 1990.

[5] P. Barry. Some observations on the Lah and Laguerre transforms of integer sequences. *J. Integer Seq.*, 10(4) :Article 07.4.6, 18, 2007.

[6] H. Belbachir and A. Belkhir. Cross recurrence relations for r-Lah numbers. *Ars Combin.*, 110 :199–203, 2013.

[7] H. Belbachir and I. E. Bousbaa. Combinatorial identities for the r-Lah numbers. *Ars Combin.*, 115 :453–458, 2014.

[8] B. C. Berndt. *Ramanujan's notebooks. Part I*. Springer-Verlag, New York, 1985. With a foreword by S. Chandrasekhar.

[9] M. Boutiche, G. Guettai, M. Rahmani, and **M. Sebaoui**. A three-term recurrence formula for the generalized bernoulli polynomials. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, In press :1–7, 2018.

[10] M. A. Boutiche, M. Rahmani, and H. M. Srivastava. Explicit formulas associated with some families of generalized Bernoulli and Euler polynomials. *Mediterr. J. Math.*, 14(2) :Art. 89, 10, 2017.

[11] K. N. Boyadzhiev. Lah numbers, Laguerre polynomials of order negative one, and the nth derivative of $\exp(1/x)$. *Acta Univ. Sapientiae Math.*, 8(1) :22–31, 2016.

[12] F. Brenti. *Unimodal log-concave and Pólya frequency sequences in combinatorics*. Number 413. American Mathematical Soc., 1989.

[13] A. Z. Broder. The r-Stirling numbers. *Discrete Math.*, 49(3) :241–259, 1984.

[14] L. Carlitz. Weighted Stirling numbers of the first and second kind. I. *Fibonacci Quart.*, 18(2) :147–162, 1980.

[15] E. Cesàro. Sur une équation aux différences mêlées. *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, 4 :36–40, 1885.

[16] C. A. Charalambides. *Enumerative combinatorics*. CRC Press Series on Discrete Mathematics and its Applications. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.

[17] L. Comtet. *Advanced combinatorics*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, enlarged edition, 1974. The art of finite and infinite expansions.

[18] R. B. Corcino and C. B. Corcino. On generalized Bell polynomials. *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, pages Art. ID 623456, 21, 2011.

[19] D. Foata and G.-N. Han. Principes de combinatoire classique. *Lecture notes, Strasbourg*, 2000.

[20] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, second edition, 1994. A foundation for computer science.

[21] J. Grandell. *Mixed Poisson processes*, volume 77 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London, 1997.

[22] G. Guettai, D. Laissaoui, M. Rahmani, and **M. Sebaoui**. On poly-bell numbers and polynomials. *Arxiv*, Available electronically at https ://arxiv.org/pdf/1812.04136.pdf :1–23, 2018.

[23] B.-N. Guo and F. Qi. An explicit formula for bell numbers in terms of stirling numbers and hypergeometric functions. *Glob. J. Math. Anal*, 2(4) :243–248, 2014.

[24] M. Kaneko. Poly-Bernoulli numbers. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 9(1) :221–228, 1997.

[25] D. S. Kim, T. Kim, S.-H. Lee, and J.-J. Seo. Higher-order Daehee numbers and polynomials. *Int. J. Math. Anal. (Ruse)*, 8(5-8) :273–283, 2014.

[26] I. Lah. *A new kind of numbers and its application in the actuarial mathematics*. 1954.

[27] I. Lah. Eine neue Art von Zahlen, ihre Eigenschaften und Anwendung in der mathematischen Statistik. *Mitteilungsbl. Math. Statist.*, 7 :203–212, 1955.

[28] K. L. Leask and L. M. Haines. The beta-Poisson distribution in Wadley's problem. *Comm. Statist. Theory Methods*, 43(23) :4962–4971, 2014.

[29] N. N. Lebedev. *Special functions and their applications*. Revised English edition. Translated and edited by Richard A. Silverman. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.

[30] E. H. Lieb. Concavity properties and a generating function for Stirling numbers. *J. Combinatorial Theory*, 5 :203–206, 1968.

[31] I. Mező. A new formula for the Bernoulli polynomials. *Results Math.*, 58(3-4) :329–335, 2010.

[32] M. Mihoubi and M. Rahmani. The partial r-Bell polynomials. *Afr. Mat.*, 28(7-8) :1167–1183, 2017.

[33] M. Mihoubi and L. Reggane. The s-degenerate r-Lah numbers. *Ars Combin.*, 120 :333–340, 2015.

[34] G. Nyul and G. Rácz. The r-Lah numbers. *Discrete Math.*, 338(10) :1660–1666, 2015.

[35] I. Podlubny. *Fractional differential equations*, volume 198 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1999. An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications.

[36] J. Quaintance and H. W. Gould. *Combinatorial identities for Stirling numbers*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2016. The unpublished notes of H. W. Gould, With a foreword by George E. Andrews.

[37] M. Rahmani. Generalized Stirling transform. *Miskolc Math. Notes*, 15(2) :677–690, 2014.

[38] M. Rahmani. Some results on Whitney numbers of Dowling lattices. *Arab J. Math. Sci.*, 20(1) :11–27, 2014.

[39] M. Rahmani. On p-Bernoulli numbers and polynomials. *J. Number Theory*, 157 :350–366, 2015.

[40] J. Riordan. *An introduction to combinatorial analysis*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2002. Reprint of the 1958 original [Wiley, New York ; MR0096594 (20 #3077)].

[41] N. J. A. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences. 2017.

[42] H. M. Srivastava and J. Choi. *Zeta and q-Zeta functions and associated series and integrals*. Elsevier, Inc., Amsterdam, 2012.

[43] R. P. Stanley. Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry. In *Graph theory and its applications : East and West (Jinan, 1986)*, volume 576 of *Ann. New York Acad. Sci.*, pages 500–535. New York Acad. Sci., New York, 1989.

[44] B. Sury. Sum of the reciprocals of the binomial coefficients. *European J. Combin.*, 14(4) :351–353, 1993.

[45] **M. Sebaoui**, D. Laissaoui, G. Guettai, and M. Rahmani. On s-lah polynomials. *Ars Combinatoria*, 142 :111–118, 2019.