,

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

Diplôme de Master en Mathématiques

Spécialité : Analyse et Modélisation Mathématique

Par

ZITOUNI Malika

Thème

Opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène sur l'espace de Bergman

Date de soutenance : juin 2017

Composition du Jury :

Président :	BENCHAA Mohamed	M.A.A	U.Y.F.M
Examinateur :	MAALOUM Khaled	M.A.A	U.Y.F.M
Directeur de Thése :	TOUMACHE Kamel	M.A.A	U.Y.F.M

Promotion : 2017

Remerciements

Au terme de ce mémoire je tiens à remercier tout naturellement en premier lieu Dieu le tout puissant qui nous a donné la force, le courage et la patience de bien terminer ce travail.

Ce travail a été réalise sous la direction de monsieur TOUMACHE Kamel qu'il trouve ainsi l'expression de ma profonde reconnaissance pour sa patience, et surtout pour sa confiance, ses remarques et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance.

Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude.

Je voudrais également remercier les membres du jury pour avoir accepter d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques, ainsi que l'ensemble des enseignants de l'université Dr.YAHIA FARES de Médéa, en particulier les enseignants du département de Mathématiques et Informatique. et également à toutes les personnes qui nous ont aidés de près ou de loin.

Malika

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chères parents qui m'ont suit dès ma naissance pour leur aides physiques et morales qu'ils soient heureux tout autant que moi j'espère qui dieu de leur préserver la vie pour longtemps.

A mes chères soeurs Sara et Siline.

A mes chères frères Mouataz, Abdelellah.

A toute la famille ZITOUNI et MASSAOUDI.

Spécial dédicace à mes chères amies : Rabia, Widad, Malika, Meriem, Somia.

Ainsi qu'à tous mes amis que j'ai connu pendant tous les cycles de mes études.

A tous ceux qui, par un mot, m'ont donné la force de continuer... .

Malika

Resumé

Le but de ce mémoire est l'étude des deux propriétés topologiques : bornitude et compacité de l'opérateur de projection sur l'espace de Bergman dit opérateur de Toeplitz, nous exposons les différentes traveaux concernant ces deux propriétes.

Mots-clés :

opérateur de Toeplitz, espace de Bergman.

Abstract

In this work, we prove characterizations of compact Toeplitz operators with radial symbols on the Bergman space of the unit disk.

Key word :

Toeplitz operator, Bergman space.

Notations et symboles

$< ., . >$: produit scalaire.

D : le disque unité ouvert dans $\mathbb{C}$.

∂D : la frontiere de D.

$\mathcal{A}(D)$: l'espace vectoriel des fonctions analytiques sur le disque unité D.

$dA(z)$: la mesure de Lebesgue normalisée sur D.

$\mathcal{C}(D)$: l'espace des fonctions continues sur D.

P : la projection orthogonale.

$L^2(D)$: l'ensemble des fonctions carré intégrable sur D.

$L^2_a(D)$: l'espace de Bergman sur D.

K : noyau reproduisant.

$Aut(D)$: L'ensemble des automorphisme du disque D.

$\tilde{f}$: la transformée de Berezin de f.

$\varphi_z(w)$: la fonction Möbius .

$\hat{f}$: la transformée de Mellin.

μ : une mesure de Borel.

Table des matières

Introduction **1**

1 Définitions et préliminaires **3**

1.1 Opérateurs bornés et compacts sur un espace de Banach 3

1.1.1 Espace de Banach 3

1.1.2 Opérateur borné 5

1.1.3 Opérateur compact 6

1.2 Fonctions analytiques 8

1.2.1 Fonctions analytiques 8

1.2.2 Fonctions harmoniques 9

1.2.3 Espace L^2 11

1.3 Espace de Bergman 12

1.3.1 Espace de Bergman 12

1.3.2 Noyau de Bergman 13

1.3.3 Projection de Bergman 16

2 Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman **19**

2.1 Opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman 19

2.2 Transformée de Berezin 23

2.3 Opérateur de Toeplitz à symboles quasihomogènes et radials 26

3 Bornitude et compacité de l'opérateur de Toeplitz **31**

3.1 Mesure de Carleson 31

3.2 Opérateur de Toeplitz borné 33

3.3 Opérateur de Toeplitz compact 36

Introduction

L'étude des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman a commencé dans les années 1980. Des résultats sur le produit des opérateurs, la caractérisation des opérateurs bornés, les opérateurs compacts ainsi que la classe de Schatten (classe des operateurs p-compact) qui ont étés obtenus.

Le sujet de ce mémoire est l'étude de la bornitude et de la compacité des opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène en particulier à symbole radial sur l'espace de Bergman. Ce mémoire expose l'article de Boris KORENBLUM et Kehe ZHU intitulé " An application of Tauberian theorems to Toeplitz operators ", et concerne deux théorèmes Tauberiannes et leurs utilisations pour obtenir la caractérisation de compacité de l'opérateur de Toeplitz à symboles radials sur l'espace de Bergman.

On pose D le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$, soit φ une fonction bornée dans D, on appelle opérateur de Toeplitz de symbole φ sur l'espace de Bergman L_a^2 des fonctions analytiques de carrré intégrable par rapport à la mesure de probabilité

$$dA = \frac{1}{\pi}\, dxdy = \frac{1}{\pi}\, rdrd\theta$$

qui est un sous espace fermé de l'espace L^2 sur D, et on note T_φ l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned} T_\varphi : L_a^2(D) &\to L_a^2(D) \\ f &\mapsto P(\varphi f). \end{aligned}$$

où P est la projection orthogonale de $L_a^2(D, dA)$ sur $L_a^2(D)$ et $f \in L^\infty(D)$.

Plusieurs questions naturelles se posent. Parmi elles, nous discuterons dans le cadre du mémoire la question suivante :

Sous quelles conditions l'opérateur de Toeplitz est-il borné ou bien compact ? (le chapitre 3 traite cette question).

Dans la définition de l'opérateur de Toeplitz il est claire que T_φ est borné sur $L^2_a(D)$ pour $\varphi \in L^\infty$, mais T_φ peut être borné sur $L^2_a(D)$ sans que son symbole ne soit borné, et il y a aucun relation entre la compacité de l'opérateurs de Toeplitz T_φ et la bornitude de son symbole φ.

Le mémoire est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre nous rapplons les notions de bases, en donnant les définitions et les propriétés élémentaires des opérateurs bornés et compacts sur l'espace de Banach, et on définit les fonctions analytiques et harmoniques, et on définie par la suite la définition de l'espace de Bergman ainsi que ses propriétés élémentaires qu'ils sont utiles dans l'étude des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman, puis nous donnons une propriété importante de l'espace de Bergman qui est contenue dans le théorème 1.3.10 qui établit l'existence de le noyau reproduisant de l'espace de Bergman $L^2_a(D, dA)$ et défini par $K(z, w) = \dfrac{1}{(1 - \overline{w}z)^2}$. Comme l'espace de Bergman $L^2_a(D)$ est un sous-espace fermé de $L^2(D, dA)$ et donc la projection orthogonale dite aussi projection de Bergman de $L^2(D, dA)$ dans $L^2_a(D)$ est bien définie, et nous donnons son expression par $Pf(z) = \int_D K(z, w) f(w)\, dA(w)$.

Le chapitre 2 est consacré à la présentation de l'opérateur de Toeplitz et la transformation de Berezin, la notion de fonction Möbius sur le disque D qui nous permis de définir cette transformation, et aussi l'opérateur de Toeplitz à symboles quasihomogènes ou radials sont introduit, soit $f \in L^\infty(D)$ tel que pour tout $0 \leq r < 1$ et $0 \leq \theta < 2\pi$,

$$f(re^{i\theta}) = e^{im\theta} f(r)$$

Si $m = 0$ alors f est dite radiale ; pour $m \in \mathbb{Z}^*$, f est dite quasihomogène.

Dans le dernier chapitre nous parlons de la mesure de Carlson, tel que on peut définir l'opérateur de Toeplitz à partir des mesures de Borel finies sur D par

$$T_\mu f(z) = \int_D K(z, w) f(w)\, d\mu(w), \quad \textit{pour } f \in L^2_a(D, dA).$$

Quand $d\mu(z) = \varphi(z)\, dA(z)$, on a $T_\mu = T_\varphi, \widetilde{\mu} = \widetilde{\varphi}$, et $\widehat{\varphi}_r = \widehat{\mu}_r$, d'après le résultat précédent nous approchons l'étude de la compacité et la bornitude de l'opérateurs de Toeplitz de symbole φ par la mesure de Carleson, nous obtenons deux résultats 3.2.3 et 3.3.4. et on obtient les conditions que que l"opérateur de Toeplitz doit vérifier pour que se dernier soit borné ou compact dans le cas des opérateurs à symbole positif, deux théorèmes importants 3.3.4 et 3.3.6 sont exposé.

Chapitre 1

Définitions et préliminaires

1.1 Opérateurs bornés et compacts sur un espace de Banach

1.1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1 *Un espace de Banach est un espace vectoriel (réel ou complexe) normé complet.*

Définition 1.1.2 *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle produit scalaire sur H toute application notée $\langle ., . \rangle$, de $H \times H$ à valeur dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $x, y, z \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ *et si* $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *est le conjugué dans* $\mathbb{C}$ *de* $\langle x, y \rangle$,
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, *et* $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$.

Dans la suite de cette section, on considérera le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 1.1.3 *On appelle espace hermitien H un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

Théorème 1.1.1 *(Inégalité de cauchy-schwarz) Pour tout $x, y \in H$, on a*

$$| \langle x, y \rangle | \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Définition 1.1.4 *(L'espace de Hilbert) Un espace de Hilbert H est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui complet pour la norme*

$$\|x\|_H = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Remarque 1.1.1 *Un espace de Hilbert est espace de Banach muni de produit scalaire.*

Example 1.1.1 *1. L'espace euclidien*

$$\mathbb{C}^k = \{x = (x_1, x_2..., x_k)\,; x_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, ..., k\}\,,$$

muni du produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i \overline{y_i},$$

est un espace de Hilbert.

2. L'espace $L^2 = L^2(X, \mu)$ muni du produit scalaire usuel donné par

$$< f, g >= \int_X f\overline{g}\, d\mu,\ \ f, g \in L^2,$$

et la norme associée $\|.\|_2$ définie par

$$\|f\|_2 = \left(\int_X |f(z)|^2\, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.1.5 *(L'espace dual $H^{'}$) L'ensemble des formes linéaires sur H est appelé dual topologique de H et noté $H^{'}$.*

$$H^{'} = \{f : H \to \mathbb{C}\ \textit{linéaires continue}\}$$

Si $l \in H^{'}$, on note pour $x \in H$, $l(x) = \langle l, x\rangle$.
L'espace $H^{'}$ muni de la norme

$$\|l\|_{H'} = \sup_{x\neq 0} \frac{|l(x)|}{\|x\|_H}.$$

Théorème 1.1.2 *[3](Théorème de représentation de Riesz-Fréchet) Etant donnée $l \in H^{'}$ il existe $x_0 \in H$ unique tel que :*

$$l(y) = \langle x_0, y\rangle\,, \forall y \in H.$$

De plus $\|x_0\|_H = \|l\|_{H'}$.

Définition 1.1.6 *(Base Hilbertienne) On appelle base Hilbertienne une suite (e_n) d'éléments de H tels que*

1. $\|e_n\| = 1\ \forall n,\ \langle e_n, e_m\rangle = 0\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n.$
2. *L'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans H.*

1.1.2 Opérateur borné

On désigne par $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ des espaces de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.7 *(Opérateur linéaire) Un opérateur T de E vers F est dit linéaire si on a :*

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y), \forall x, y \in E \text{ et } a, b \in \mathbb{K}.$$

Définition 1.1.8 *Un opérateur T de E vers F est dit borné s'il existe un réel positif M tel que*

$$\|T(x)\|_F \leq M \|x\|_E, \forall x \in E.$$

Dans ce cas, la norme de l'opérateur T est le plus petit M qui assure l'inégalité précédent, et on écrit aussi

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{||x||_E = 1} ||T(x)||_F.$$

Proposition 1.1.1 *Un opérateur linéaire $T : E \to F$ vérifie les propriétés équivalentes suivantes :*

1. *T est continu sur E,*
2. *T est continu en $(0, 0)$,*
3. *T est borné.*

Preuve. Il suffit de montrer que (2) entraîne (3) et (3) entraîne (1),
Supposons T continu en $(0, 0)$. On pose $D = \{z \in \mathbb{K} \mid |z| < 1\}$. Comme T est continu en $(0, 0)$ et $T(0, 0) = 0$, $T^{-1}(D)$ est un voisinage de $(0, 0)$ dans $E \times F$. Donc, il existe $r > 0$ tel que

$$\{(x, y) \in E \times F \mid \|x\| \leq r, \|y\| \leq r\} \subset T^{-1}(D)$$

Alors, pour tous $x, y \in E \setminus \{0\}$, on a

$$T\left(\frac{rx}{\|x\|}, \frac{ry}{\|y\|}\right) \in D,$$

autrement dit

$$\left|\left(\frac{rx}{\|x\|}, \frac{ry}{\|y\|}\right)\right| \leq 1,$$

d'où

$$|T(x,y)| \leq \frac{1}{r^2}\|x\|\|y\|,$$

qui est encore vrai si x ou y est nul.

Supposons maintenant qu'il existe $k \geq 0$ telle que, pour tous $x, y \in E$, on a

$$|T(x,y)| \leq k\|x\|\|y\|.$$

Soit $(a,b) \in E \times F$. Alors, pour tout $(x,y) \in E \times F$, on obtient

$$\begin{aligned} |T(x,y) - T(a,b)| &= |T(x-a,y) + T(a,b-y)| \\ &\leq k\|x-a\|\|y\| + k\|a\|\|b-y\| \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(a,b)]{} 0, \end{aligned}$$

ce qui montre la continuité de T en (a,b).

1.1.3 Opérateur compact

On désigne par $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ des espaces de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. De plus, pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(X, \|.\|_X)$, on désigne par B_X la boule unité fermée de X, i. e.

$$B_X = \{x \in X \mid \|x\|_X \leq 1\}.$$

Notation 1.1.1 *On note par $L(E,F)$ l'espace de Banach sur $\mathbb{K}$ des opérateurs de E dans F, tandis que $\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'espace de Banach sur $\mathbb{K}$ des opérateurs bornés de E dans F.*

Définition 1.1.9 *On dit que T est un opérateur compact de E dans F si $T \in L(E,F)$ et $T(B_E)$ est relativement compact dans F. L'ensemble des opérateurs compacts de E dans F est noté $\mathcal{K}(E,F)$. Lorsque $E = F$, on note simplement $\mathcal{K}(E,F) = \mathcal{K}(E)$.*

On rappelle que si (X, d) est un espace métrique et Y un sous-ensemble de X est dit relativement compact si son adhérence dans X est compacte.

Proposition 1.1.2 *[9] (Caractérisation des opérateurs compacts) Si $T \in L(E, F)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$T \in \mathcal{K}(E, F)$,*
2. *Pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge dans F.*

Lemme 1.1.1 *(Théorème de Riesz) Soit X un espace vectoriel normé. Alors, la boule unité fermée de X est compacte si et seulement si X est de dimension finie.*

Proposition 1.1.3 *Soient $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, G)$. Si S ou T est compact alors ST est compact.*

Preuve. Si $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Alors, pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(Tx_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $y \in F$. Puisque S est continu, $(S(Tx_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $Sy \in G$. Donc $ST \in \mathcal{K}(E, G)$.
Si $S \in \mathcal{K}(F, G)$, Alors, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E bornée par une constante M, la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans F. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|Tx_n\|_F \leq \|T\|\|x_n\|_E \leq M\|T\|.$$

Comme $S \in \mathcal{K}(F, G)$, la suite $(S(Tx_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(S(Tx_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $z \in G$. Donc $ST \in \mathcal{K}(E, G)$.

Définition 1.1.10 *Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que T est un opérateur de rang fini si $Im(T)$ est de dimension finie.*

Proposition 1.1.4 *Tout opérateur borné de rang fini est compact.*

Preuve. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un opérateur de rang fini. L'opérateur T est continu donc, pour tout $x \in B_E$,

$$\|T_x\| \leq \|T\|.$$

Alors $T(B_E)$ est borné dans F et, par conséquent, $\overline{T(B_E)}$ aussi. De plus, $Im(T)$ est fermé car c'est un espace vectoriel de dimension finie, d'où

$$\overline{T(B_E)} \subset \overline{Im(T)} = Im(T).$$

Finalement, $\overline{T(B_E)}$ est un fermé borné de l'espace vectoriel de dimension finie $Im(T)$, c'est donc un compact de $Im(T)$, d'où $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

L'espace $\mathcal{K}(E,F)$ est fermé et tout opérateur borné de rang fini est compact. On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 1.1.1 *Toute limite dans $\mathcal{L}(E,F)$ d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.*

La réciproque est fausse en général mais si F est un espace de Hilbert, on a le résultat suivant :

Théorème 1.1.3 *[9] Soient $(H,(.,.))$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{K}(E,H)$. Alors, il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{L}(E,H)$, d'opérateurs de rang fini, qui converge vers T dans $\mathcal{L}(E,H)$.*

1.2 Fonctions analytiques

1.2.1 Fonctions analytiques

Soient $\mathbb{C}$ le plan complexe et $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.2.11 (fonction analytique) *Soient z_0 dans $\mathbb{C}$, U un voisinage de z_0 et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. On dit que f est analytique en z_0 si f est développable en série entière au voisiange de z_0, i. e. s'il existe $r > 0$ et une série entière $(a_n z^n)_n \geq 0$ telle que :*

$$\forall z \in \overline{B}(z_0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Définition 1.2.12 *f est analytique sur U si et seulement si f est analytique en tout point de U.*

Notation 1.2.2 *On note $\mathcal{A}(D)$ l'espace vectoriel des fonctions analytiques sur le disque unité D.*

$\mathcal{A}(D)$ est muni la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Dire que la suite $(f_n)_n$ converge vers f signifie que, pour tout compact K de D, et tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que si $n \geq N$ alors

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon \, (z \in K).$$

Soit K_n une suite de compacts croissante par l'inclusion de D, c'est-à-dire que $K_n \subset K_{n+1}$ et que tout compact de D est contenu l'un des K_n, pour f et g dans $\mathcal{A}(D)$.

$$M_n(f) = \sup_{z \in K_n} |f(z)| \, , \; \delta(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \inf(M_n(f), 1) \, , \; d(f,g) = \delta(f-g).$$

Alors d est une distance sur $\mathcal{A}(D)$ et la topologie définie par cette distance est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.
Nous rappelons le théorème suivant de Weierstrass.

Théorème 1.2.4 *[5] Si $(f_k)_k$ est une suite de fonctions analytiques dans D qui converge uniformément sur tout compact, sa limite f est analytique. de plus $\dfrac{\partial f_k}{\partial z}$ converge vers $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ uniformément sur tout compact.*

Corollaire 1.2.2 *[8]*

1. *$\mathcal{A}(D)$ est fermé dans $\mathcal{C}(D)$ espace des fonctions continues muni de la convergence uniforme sur les compacts,*
2. *$\mathcal{A}(D)$ est un espace complet.*

Théorème 1.2.5 *(Principe du Maximum) Soit Ω un ouvert connexe et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction analytique. Si f admet un maximum relatif sur Ω, alors f est constante sur Ω.*

1.2.2 Fonctions harmoniques

Définition 1.2.13 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est harmonique sur Ω si f est de classe C^2 sur Ω et $\Delta f \equiv 0$ sur Ω, où Δf est le Laplacien de f défini par $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.*

De plus si la fonction f s'écrit sous la forme $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, où $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont deux fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, f est dite harmonique si les conditions suivantes sont satisfaisantes :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$$

et

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Les fonctions harmoniques sont intimement liées aux fonctions analytiques. Ainsi :

Théorème 1.2.6 *[4] Toute fonction analytique sur un ouvert Ω est harmonique sur Ω (c'est une conséquence des équations de Cauchy-Riemann).*

De plus, Une fonction f harmonique à valeurs réelles est localement la partie réelle d'une fonction analytique : pour tout a de Ω et tout disque $D(a,r)$ contenu dans Ω, il existe g analytique dans $D(a,r)$ telle que $f = Re(g)$ dans ce disque.

Remarque 1.2.2 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est harmonique si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont harmoniques sur Ω.*

La remarque ci-dessus est une conséquence immédiate du fait que :
$Re(\Delta f) = \Delta(Re(f))$ et $Im(\Delta f) = \Delta(Im(f))$.

Théorème 1.2.7 *[4] Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Si f est une fonction harmonique sur Ω alors il existe une fonction φ analytique sur Ω telle que $Re(\varphi) = f$.*

Proposition 1.2.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est harmonique sur Ω,*
2. *Pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ et φ analytique sur $D(z_0, r)$ tels que $f = Re(\varphi)$ sur $D(z_0, r)$.*

Les fonctions harmoniques sur un disque ouvert $D(a,r)$ ($a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$), continues sur le disque fermé $\overline{D(a,r)}$ et à valeurs complexes.

Corollaire 1.2.3 *Soit f une fonction continue sur $\overline{D(a,r)}$ ($a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$), harmonique sur $D(a,r)$ et à valeurs complexes. Alors on a la formule de la valeur moyenne pour le cercle $\mathcal{C}(a,r)$:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

et aussi pour le disque $D(a,r)$:

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\overline{D(a,r)}} f(x + iy)\, dxdy.$$

1.2.3 Espace L^2

Soit $dA(z)$ la mesure de Lebesgue normalisée sur D. Dans les coordonnées rectangulaires et polaires, On a

$$dA(z) = \frac{1}{\pi}\, dxdy = \frac{1}{\pi} r\, drd\theta$$

et

$$\int_D dA(z) = 1.$$

On désigne par $L^2(D, dA)$ l'espace des fonctions f définies sur le disque D telles que :

$$\|f\|_2 = \left(\int_D |f(z)|^2\, dA(z) \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Théorème 1.2.8 *(de Riesz-Fisher) Pour tout $p \in [1, +\infty]$, L^p est un espace de Banach.*

D'après le théorème de Riesz-Fisher, l'espace $L^2(D)$ muni de produit scalaire usuel donné par

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(z)\overline{g(z)}\, dA(z), \text{ pour tous } f, g \in L^2(D, dA).$$

est donc un espace de Hilbert.

Propriétés 1.2.1

1. *L'inégalité de Minkowski :*

$$\|u + v\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2}\, \|v\|_{L^2},$$

2. *Si $u \in L^2$ et $v \in L^2$ alors $uv \in L^1$ car l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée :*

$$\int_D |uv| \leq \left(\int_D |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_D |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On le note aussi :

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

1.3 Espace de Bergman

1.3.1 Espace de Bergman

Définition 1.3.14 *On définit l'espace de Bergman $L^2_a(D)$ comme étant l'ensemble des fonctions analytiques sur D qui sont de carré intégrable par rapport à la mesure $dA(z)$.*

$$L^2_a(D) = \mathcal{A}(D) \cap L^2(D).$$

On écrit $L^2_a(D) = L^2_a$ simplement.

On considère sur L^2_a la norme $\|.\|_2$ associée au produit scalaire

$$< f, g >= \int_D f(z)\overline{g(z)}\, dA(z)\ ,\ \textit{pour tous } f, g \in L^2_a.$$

Lemme 1.3.2 *Soit $\mathcal{C}(D)$ l'espace des fonctions continues sur D. Pour tout compact K de D, l'application restriction définie par :*

$$\begin{array}{rcl} (L^2_a(D), \|.\|_2) & \to & (\mathcal{C}(D), \sup\limits_{z\in K} |.|) \\ f & \to & f_{/K} \end{array}$$

est continue.

Lemme 1.3.3 *Soit $f \in L^2_a$ alors pour tout $z \in D$. On a*

$$f(z) \leq \frac{1}{(1-|z|)^2}\|f\|_2.$$

Preuve. Pour $z \in D$. On pose $r_z = 1 - |z|$, en utilisant la propriété de la moyenne. On a

$$f(z) = \frac{1}{{r_z}^2}\int_{|z-w|\leq r_z} f(w)\, dA(w)$$

D'où

$$|f(z)| \leq \frac{1}{{r_z}^2}\int_{|z-w|\leq r_z} f(w)\, dA(w) \leq \frac{\|f\|_2}{{r_z}^2} = \frac{\|f\|_2}{(1-|z|)^2}$$

Proposition 1.3.6 *L^2_a est un sous espace fermé de $L^2(D, dA)$.*

Preuve. Soit $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_2$ dans $L^2_a(D)$. Donc, la suite $(f_n)_n$ est aussi de Cauchy pour la topologie de $\mathcal{A}(D)$. Soit K un compact de D, alors par le lemme précédente, on a

$$\sup_{z\in K}|f_n(z)-f_m(z)| \leq \sup_{z\in K}\frac{\|f_n(z)-f_m\|_2}{(1-|z|)^2}$$

Comme $\mathcal{A}(D)$ est complet pour la convergence uniforme, Il existe donc f analytique sur D, telle que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{z\in K}|f_n(z)-f(z)| = 0, \forall K \text{ compact de } D.$$

De même $L^2(D,dA)$ est complet comme espace d'Hilbert, Donc il existe une fonction $g \in L^2(D,dA)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\|f_n-g\|_2 = 0.$$

ainsi il existe une sous-suite de $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge presque par tout vers g. Finalemet par la premiére inégalité $f=g$ presque partout et donc $f \in L^2_a(D)$. On conclut que l'espace L^2_a est un espace de Hilbert.

1.3.2 Noyau de Bergman

Théorème 1.3.9 *[2] Soit H un espace de Hilbert de fonctions définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire usuel et de la norme associée. On dit qu'une application K de $D\times D$ est un noyau reproduisant pour H si*

1. *Pour tous $z,w\in D$, $K_z(w)=K(z,w)$ est une fonction de w qui appartient à H.*
2. *Pour tout $z\in D$ et tout $f\in H$*

$$f(z)=\langle f,K_z\rangle$$

En particulier pour tous $z,w\in D$,

$$K_z(w)=\langle K_z,K_w\rangle \text{ et } \|K_z\|=\langle K_z,K_z\rangle^{\frac{1}{2}}=K(z,z)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.3.10 *[2] Soit H un espace de Hilbert de fonctions sur D. Alors H admet un noyau reproduisant si et seulement si l'évaluation ponctuelle $f\longmapsto f(z)$ est continue sur H pour tout $z\in D$.*

Preuve. Si H admet un noyau reproduisant K alors

$$|f(z)| = |\langle f, K_z\rangle| \leq \|f\| \times \|K_z\|.$$

Réciproquement si $f \longmapsto f(z)$ est linéaire continue sur H pour tout $z \in D$ alors par le théoréme de représentation de Riesz, pour chaque $z \in D$, il existe $g_z \in H$ tel que

$$f(z) = \langle f, g_z\rangle$$

et g_z vérifie (1) et (2) du théorème précédent ce qui conclu a preuve.

Proposition 1.3.7 *Soit H un espace de Hilbert de fonctions analytiques sur D admettant un noyau reproduisant K. Alors*

1. *K est unique,*
2. *Pour tout $z, w \in D$, $K(z,w) = \overline{K(w,z)}$*
3. *Soit $z \in D$, $K(z,z) = 0 \Longleftrightarrow f(z) = 0$ pour tout $f \in H$.*
4. *Pour tous $z, w \in D$, $|K(z,w)| \leq K(z,z)^{\frac{1}{2}} \times K(w,w)^{\frac{1}{2}}$. Pour tout $z \in D$, l'application $K_z = K(z,.)$ est borné sur tout compact de D et K est bornée sur tout compact de $D \times D$.*

Preuve.

1. Si K et K' sont deux noyaux reproduisants pour H alors

$$\begin{aligned} \|K_z - K'_z\|^2 &= \langle K_z - K'_z, K_z - K'_z\rangle \\ &= \langle K_z - K'_z, K_z\rangle - \langle K_z - K'_z, K'_z\rangle \\ &= (K_z - K'_z)(z) - (K_z - K'_z)(z) = 0. \end{aligned}$$

   Ainsi $\|K_z - K'_z\| = 0$ et $K_z = K'_z$ pour tout $z \in D$, donc $K = K'$.

2. $K(z,w) = \langle K_z, K_w\rangle = \overline{\langle K_w, K_z\rangle} = \overline{K(w,z)}$,

3. $\Longleftarrow$ est évident car $K_z \in H$.
   $\Longrightarrow$ on remarque que $0 = K(z,z) = \langle K_z, K_z\rangle = \|K_z\|^2$ donc $K_z = 0$.
   ainsi $|f(z)| = |\langle f, K_z\rangle| = 0$ *pour tout* $z \in D$,

4. L'inégalité est immédiate par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Comme $H \subset \mathcal{A}(D)$, K_z est analytique sur D donc borné sur les compacts de D. Il est alors clair que K est borné sur les compacts de $D \times D$.

Proposition 1.3.8 *Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de H alors pour tout $(z,w) \in D \times D$*

$$K_z(w) = \sum_{n\geq 0} e_n(w)\overline{e_n(z)}$$

où cette série converge absolument et uniformément sur tout compact de $D \times D$.

Lemme 1.3.4 *Les fonctions $e_n(z) = \sqrt{n+1}z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ constituent une base orthonormale de L^2_a.*

Preuve. Pour $n, m \in \mathbb{N}$ et $z \in D$, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle e_n, e_m\rangle &= \int_D \left(\sqrt{n+1}z^n\right)\overline{\left(\sqrt{m+1}z^m\right)}\,dA \\
&= \sqrt{n+1}\sqrt{m+1}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^n e^{in\theta} r^m e^{-im\theta}\frac{1}{\pi} r\,dr d\theta \\
&= \sqrt{\frac{(n+1)(m+1)}{\pi^2}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{n+m+1}e^{i(n-m)\theta}\,dr d\theta \\
&= \sqrt{\frac{(n+1)(m+1)}{\pi^2}}\frac{1}{n+m+2}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\,d\theta \\
&= \sqrt{\frac{(m+1)^2}{\pi^2}}\frac{2\pi}{2m+2}\,\delta_{n,m} \\
&= \delta_{n,m}.
\end{aligned}$$

où

$$\delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m \end{cases}$$

Définition 1.3.15 *L'application évaluation de L^2_a dans $\mathbb{C}$. qui à toute fonction f lui assosie sa valeur au point z, est continue pour tout $z \in D$, d'aprés le théoréme 1.3.10, $L^2_a(D)$ admet un noyau reproduisant K également appelé noyau de Bergman. D'aprés le lemme 1.3.4 La famille $e_n(z)$ est une base hilbertienne orthonormée de L^2_a ainsi par la proposition 1.3.8 on a pour tout $z, w \in D$,*

$$\begin{aligned}
K_z(w) &= \sum_{n\geq 0}(n+1)\overline{z}^n w^n \\
&= \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2}
\end{aligned}$$

Le noyau normalisé est alors

$$k_z(w) = \frac{K_z(w)}{\|K_z\|} = \frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}, \forall z, w \in D.$$

Ce noyau reproduisant a une propriété qui nous sera utile par la suite.

Lemme 1.3.5 *k_z converge faiblement vers 0 quand z tend vers le bord du disque.*

Preuve. Soit p un polynôme en z sur D, on a

$$\langle k_z, p\rangle = (1-|z|^2)\langle p, K_z\rangle = (1-|z|^2)p(z).$$

Cette expression tend clairement vers 0 quand $|z|$ tend vers 1. Enfin, comme l'ensemble des polynômes est dense dans L^2_a, k_z tend faiblement vers 0 quand z tend vers le bord de D.

Corollaire 1.3.4

$$\int_D \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4}\, dA(w) = 1 \text{ pour chaque } z \in D.$$

Preuve. pour tout $z \in D$ on a

$$\int_D \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4}\, dA(w) = (1-|z|^2)^2 \langle K_z, K_z\rangle = (1-|z|^2)^2 K(z,z) = 1.$$

1.3.3 Projection de Bergman

Rappelons que l'espace de Bergman $L^2_a(D)$ est un sous-espace fermé de $L^2(D, dA)$ et donc la projection orthogonale, dite aussi projection de Bergman, de $L^2(D, dA)$ dans $L^2_a(D)$ est bien définie. Notons par P cette projection.

Proposition 1.3.9 *Pour toute fonction $f \in L^2(D, dA)$ et tout $z \in D$,*

$$Pf(z) = \int_D K(z,w) f(w)\, dA(w).$$

Preuve. Par la propriété reproduisant de $K(z,w) = \overline{K_z(w)}$, on a

$$\begin{aligned} Pf(z) &= \langle Pf, K_z\rangle = \langle f, PK_z\rangle = \langle f, K_z\rangle \\ &= \int_D f(w)\overline{K_z(w)}\, dA(w) \\ &= \int_D K(z,w) f(w)\, dA(w). \end{aligned}$$

Remarque 1.3.3 *La projection de Bergman satisfait les propriétés suivantes :*

1. *P est une projection bornée de $L^2(D, dA)$ sur $L^2_a(D, dA)$,*
2. *$P^* = P$, et $P^2 = P$,*
3. *$\|P\| = 1$, où $\|.\|$ est la norme de l'opérateur.*

Chapitre 2

Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman

2.1 Opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman

Définition 2.1.1 *Soit φ une fonction bornée sur D, on définit l'opérateur de Toeplitz à symbole φ par*

$$\begin{aligned} T_\varphi : L^2_a(D) &\to L^2_a(D) \\ f &\mapsto P(\varphi f). \end{aligned}$$

En utilisant la représentation intégrale de P, nous pouvons voir T_φ comme un opérateur intégrale donné par :

$$T_\varphi f(z) = P(\varphi f)(z) = \langle \varphi f, K_z \rangle = \int_D \frac{\varphi(w) f(w)}{(1 - z\overline{w})^2}\, dA(w), \forall z \in D.$$

Proposition 2.1.1 *Soit $\varphi \in L^\infty(D)$*

1. $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$,
2. $T_1 = Id$ *tel que* Id *est l'identité de* $L^2_a(D)$,
3. $T_{\overline{\varphi}}$ *est l'adjoint de* T_φ,
4. *Pour tous* $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g \in L^\infty(D)$, $T_{\lambda f+g} = \lambda T_f + T_g$ *(i. e. l'opérateur de Toeplitz sur* L^2_a *est linéairement dépondant de son symbole),*
5. $T_\varphi = 0$ *si et seulement si* $\varphi = 0$.

Preuve. (1) on a pour $f \in L^2_a(D)$

$$\|T_\varphi(f)\| = \|P(\varphi f)\| \leq \|P\| \, \|\varphi f\| \leq \|\varphi\|_\infty \, \|f\|$$

car P est de norme 1. Il s'ensuit que $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$ et (1) est vérifié.
(2), (3) et (4) découlent immédiatement de la définition de l'opérateur de Toeplitz.
(5) si T_φ est nul alors pour tous m et n dans $\mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \langle T_\varphi z^n, z^m \rangle &= \langle P(\varphi z^n), z^m \rangle \\ &= \langle \varphi z^n, z^m \rangle \\ &= \langle \varphi, \overline{z}^n z^m \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

mais la famille $z^{-n} z^m$ est dense dans $L^2_a(D, dA)$ donc φ est nulle.

Remarque 2.1.1 *1. On peut aussi définir cet opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman à partir des symboles non bornés sur D,*

2. L'opérateur de Toeplitz T_ϕ sur $L^2_a(D)$ est borné si le symbole ϕ est borné, mais T_ϕ peut être borné sur $L^2_a(D)$ sans que son symbole ne soit borné.

Dans la suite, nous allons présenter la notion de fonction Möbius sur le disque D.

Définition 2.1.2 *Une fonction Möbius sur le disque D est une fonction de la forme*

$$\varphi_z(w) = \frac{z - w}{1 - \overline{z}w}, \; w \in D$$

qui transforme z à 0 et 0 à z ($z \in D$).

Proposition 2.1.2 *Une fonction Möbius φ_z a les propriétés suivantes :*

1. $\varphi_z^{-1} = \varphi_z$,

2. Le déterminant réel du Jacobienne de φ_z en w est

$$|J_{\varphi_z}(w)| = |\dot{\varphi}_z(w)|^2 = \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - \overline{z}w|^4},$$

3. $1 - |\varphi_z(w)|^2 = \dfrac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - \overline{z}w|^2}$.

Preuve. (1) On trouve facilement que

$$\begin{aligned}(\varphi_z \circ \varphi_z)(w) &= \frac{z-\varphi_z(w)}{1-\overline{z}\varphi_z(w)} \\ &= \frac{z-\dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}}{1-\overline{z}\dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}} \\ &= w.\end{aligned}$$

(2) On a

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_z(w) &= \frac{-(1-\overline{z}w)+\overline{z}(z-w)}{(1-\overline{z}w)^2} \\ &= \frac{-1+\overline{z}w+|z|^2-\overline{z}w}{(1-\overline{z}w)^2} \\ &= -\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2},\end{aligned}$$

et donc

$$|\dot{\varphi}_z(w)|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}.$$

De plus si on pose $\varphi_z(w) = P(x,y) + iQ(x,y)$ on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_z}{\partial y}(w) &= \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y) = -i\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}, \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial x}(w) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = -\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}.\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial \varphi_z}{\partial x}(w) = i\frac{\partial \varphi_z}{\partial y}(w)$$

les condition de Cauchy-Rieman sont satisfaisantes, et alors la matrice réelle Jacobienne de φ_z donnée par :

$$J_{\varphi_z}(w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial x} \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{aligned}|J_{\varphi_z}(w)| &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\overline{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)} \\ &= \left(-\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}\right)\overline{\left(-\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}\right)} \\ &= \left|\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}\right|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}.\end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned} 1-\frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2} &= \frac{|1-\overline{z}w|^2-(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2} \\ &= \frac{(1-\overline{z}w)(1-z\overline{w})-(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2} \\ &= \frac{|w|^2+|z|^2-\overline{z}w-z\overline{w}}{|1-\overline{z}w|^2} \\ &= |\varphi_z(w)|^2. \end{aligned}$$

On rappelle qu'un automorphisme de D est un application bijective bi-analytique de D dans D. Tout automorphisme φ de D peut s'écrire comme $\varphi(w)=\varphi_z(\epsilon w)$, où $z=\varphi(0)\in D$, $|\epsilon|=1$.

Notation 2.1.1 *L'ensemble des automorphisme du disque D appelé aussi groupe de Möbius, est noté $Aut(D)$.*

Corollaire 2.1.1 *Si $\varphi\in Aut(D)$, alors*

$$K(z,w)=\varphi'(z)K(\varphi(z),\varphi(w))\overline{\varphi'(w)}$$

pour toutes $z,w\in D$, où

$$\frac{1}{(1-z\overline{w})^2}=\frac{\varphi'(z)\overline{\varphi'(w)}}{(1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)})^2}$$

pour toutes $z,w\in D$.

Preuve. Soit $\{e_n : n\geq 0\}$ est une base orthonormale de L^2_a. On pose

$$\sigma_n(z)=e_n(\varphi(z))\varphi'(z),\ n\geq 0,$$

Ainsi

$$\begin{aligned} K(z,w) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sigma_n(z)\overline{\sigma_n(w)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}e_n(\varphi(z))\overline{e_n(\varphi(w))}\varphi'(z)\overline{\varphi'(w)} \\ &= \varphi'(z)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}e_n(\varphi(z))\overline{e_n(\varphi(w))}\right)\overline{\varphi'(w)} \\ &= \varphi'(z)K(\varphi(z),\varphi(w))\overline{\varphi'(w)}. \end{aligned}$$

La proposition suivante qui donne la formule de l'images de noyau reproduisant $k_z\,(a\in D)$ par un opérateur T_f.

Proposition 2.1.3 *[12] Soit $f \in L^\infty(D, dA)$. Pour tout $z \in D$ alors*

$$T_f(k_z) = (P(f \circ \varphi_z) \circ \varphi_z)k_z$$

Dans la suite, nous allons présenter quelques situations où nous pouvons affirmer que l'opérateur de Toeplitz est borné. Pour cela il nous faut introduire tout d'abord la transformation de Berezin qui joue un rôle crucial dans la théorie des opérateurs de Toeplitz.

2.2 Transformée de Berezin

Définition 2.2.3 *Soit $f \in L^1(D)$, la transformée de Berezin $\tilde{f}$ de f est donnée par*

$$\tilde{f}(z) = \langle fk_z, k_z \rangle = \int_D f(w) \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}\, dA(w), \forall z \in D.$$

De plus, Soient $f \in L^2_a(D)$ et $\varphi_z(w) \in Aut(D)$, pour $z, w \in D$. Donc f vérifie la propriété de la moyenne :

$$f(0) = \int_D f(w)\, dA(w)$$

Donc, On a

$$z = \varphi_z(0)$$

On obtient

$$f(z) = f(\varphi_z(0)) = \int_D f(\varphi_z(w))\, dA(w)$$

Le changement de variable $y = \varphi_z(w)$ donne

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_D f(y)|J_{\varphi_z}(y)|\, dA(y) \\ &= \int_D f(y) \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}y|^4}\, dA(y). \end{aligned}$$

En fait, on peut définir plus généralement la transformée de Berezin d'un opérateur T borné sur un espace de Hilbert de fonctions sur D, possédant un noyau reproduisant normalisé k_z, la transformée de Berezin (symbole de Berezin) de T est la fonction $\tilde{T}$ de D dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\tilde{T}(z) = \langle Tk_z, k_z \rangle, \forall z \in D.$$

On a alors pour tout $z \in D$,

$$\tilde{T}_f(z) = \langle T_f k_z, k_z \rangle = \langle f k_z, k_z \rangle = \tilde{f}(z),$$

ainsi la transformée de Berezin de f et de T_f coïncident.

Proposition 2.2.4 *Soit* $\varphi \in L^\infty(D, dA)$

$$\limsup_{z \to \partial D} |\widetilde{\varphi}(z)| \leq \limsup_{z \to \partial D} \|T_\varphi k_z\|_2 \leq \|T_\varphi\|_e \leq \|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty .$$

Avec $\|T_\varphi\|_e = \inf_{K \in D} \|T_\varphi - K\|$.

Preuve. $\|T_\varphi\|_e \leq \|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$ est claire, il reste donc à montrer les deux premières inégalités. Soit $z \in D$ alors

$$|\widetilde{\varphi}(z)| = |\langle \varphi k_z, k_z \rangle| = |\langle T_\varphi k_z, k_z \rangle| \leq \|T_\varphi k_z\|_2 .$$

Soit K un opérateur compact sur $L^2_a(D)$ alors $K k_z$ converge vers 0 quand $|z|$ tend vers 1 car k_z tend faiblement vers 0. Ainsi pour tout K compact on a

$$\limsup_{z \to \partial D} \|T_\varphi k_z\|_2 = \limsup_{z \to \partial D} \|(T_\varphi - K) k_z\|_2 \leq \|T_\varphi - K\| .$$

Donc

$$\limsup_{z \to \partial D} \|T_\varphi k_z\|_2 \leq \inf_{K \in D} \|T_\varphi - K\| = \|T_\varphi\|_e .$$

Maintenant on va prouver que la transformation de Berezin est Möbius invariante effectivement. On a :

Proposition 2.2.5 *Pour tout* $\varphi \in Aut(D)$ *et toute fonction* $f \in L^1(D, dA)$

$$\widetilde{f \circ \varphi} = \tilde{f} \circ \varphi.$$

Preuve. Soit $\sigma \in Aut(D)$ et $z \in D$. On pose

$$\varphi_z(w) = \frac{z - w}{1 - \overline{z} w} \text{ et donc } \varphi_{\sigma(z)}(w) = \frac{\sigma(z) - w}{1 - \overline{\sigma(z)} w}.$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z(0) &= \varphi_{\sigma(z)}(\sigma(z)) = 0 \\ \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z &\in \mathcal{A}(D) \\ \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z(D) &= D, \text{ et } \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z \text{ est bijection.} \end{aligned}$$

D'où d'après le lemme de Schwarz, il existe un constante complexe c de module 1 telle que pour tout $w \in D$

$$\varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z(w) = cw$$

Pour $f \in L^1(D, dA)$, on a

$$\widetilde{f \circ \sigma} = \int_D (f \circ \sigma)(y) \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}y|^4}\, dA(y).$$

En effectuant le changement de variable $y = \varphi_z(w)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\widetilde{f \circ \sigma}(z) &= \int_D (f \circ \sigma \circ \varphi_z)(w)\, dA(w) \\
&= \int_D (f \circ \varphi_{\sigma(z)} \circ \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z)(w)\, dA(w) \\
&= \int_D (f \circ \varphi_{\sigma(z)})(cw)\, dA(w) \\
&= \int_D (f \circ \varphi_{\sigma(z)})(u)\, dA(u) \\
&= \tilde{f}(\sigma(z)) \\
&= \tilde{f} \circ \sigma(z).
\end{aligned}$$

Nous allons énoncer une propriété fondamentale qui lie les fonctions harmoniques et la transformée de Berezin.

Lemme 2.2.1 *Si $f \in L^1(D, dA)$ est harmonique, alors*

$$\widetilde{f} = f.$$

Preuve. Si $f \in L^1(D, dA)$ est une fonction harmonique sur D alors $f \circ \varphi$ est aussi harmonique pour tout $\varphi \in Aut(D)$. D'après la propriété de la valeur moyenne, pour tout $\varphi \in Aut(D)$ tel que $\varphi(0) = z$, on a

$$f(z) = f \circ \varphi_z(0) = \int_D f \circ \varphi_z(w)\, dA(w) = \tilde{f}(z).$$

2.3 Opérateur de Toeplitz à symboles quasihomogènes et radials

Définition 2.3.4 *$F \in L^1$ est dite radiale si pour tout $z \in D$*

$$F(z) = F(|z|).$$

Définition 2.3.5 *Soit $m \in \mathbb{Z}$. Une fonction $F \in L^\infty(D, dA)$ est dite m-quasihomogène. s'il existe $f \in L^\infty([0,1])$ tel que pour tout $z = re^{i\theta} \in D$, $0 \leq r < 1$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, On a*

$$F(re^{i\theta}) = e^{im\theta} f(r).$$

On appelle f la partie radiale de F et m le coefficient de quasihomogènéité de F. On note $F \sim (f, m)$.

Si $m = 0$ alors F est radiale. On distingue le cas radial du cas quasihomogène est le cas plus simple à écrire.

Si une fonction F est le symbole d'un opérateurs de Toeplitz alors nous dirons que T_F est quasihomogène de degré m.

Lemme 2.3.2 *Soit F un symbole m-quasihomogène (ou radial) borné alors*

$$T_F e_n = \begin{cases} 0 & si\ n + m < 0 \\ c_n(F) e_{n+m} & sinon \end{cases}$$

où

$$c_n(F) = 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1} \int_0^1 f(r) r^{2n+m+1} dr.$$

Preuve. Il suffit de calculer $\langle T_F e_n, e_p \rangle = \langle F e_n, e_p \rangle$ pour tous $p, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \langle T_F e_n, e_p \rangle &= \sqrt{n+1}\sqrt{p+1} \int_D F(z) z^n \bar{z}^p \, dA(z) \\ &= \frac{1}{\pi}\sqrt{n+1}\sqrt{p+1} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{im\theta} f(r) r^n e^{in\theta} r^p e^{-ip\theta} r \, dr d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\sqrt{n+1}\sqrt{p+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+n-p)\theta} d\theta \int_0^1 f(r) r^{n+p+1} \, dr \\ &= 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1} \int_0^1 f(r) r^{2n+m+1} \, dr \, \delta_{m+n,p}. \end{aligned}$$

Car $\int_0^{2\pi} e^{i(m+n-p)\theta}\, d\theta = 2\pi\, \delta_{m+n,p}$.

La transformée de Mellin est très utilisée dans l'étude d'opérateur de Toeplitz à symbole quasihomogène.

Définition 2.3.6 *On définir la transformée de Mellin de $f \in L^\infty(0,1)$ par*

$$\hat{f} : z \mapsto \int_0^1 f(r) r^{z-1} dr.$$

On appelle l'intégrale $\int_0^1 f(r) r^{n-1} dr$ le coefficient de Mellin d'ordre n de f.

Définition 2.3.7 *Soit f une fonction intégrable sur D. On définit la radialisation de f, et on note $rad(f)$, par*

$$rad(f(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta} z) d\theta.$$

L'intégrale est existe et finie presque partout car $f \in L^1(D, dA)$. Il découle directement de cette définition qu'une fonction f est radiale si et seulement si $f = rad(f)$.

Définition 2.3.8 *Pour $f \in L^\infty(0,1)$, la transformeé de Berezin de f est celle de $F \sim (0,1)$. Selon la définition 2.2.3, On a $\forall z \in D$*

$$\tilde{f}(z) = \tilde{F}(z) = \int_D f(|w|) \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}\, dA(w).$$

Lemme 2.3.3 *[10] (page 32) Suppose que $\lambda \geq 0$ et*

$$\lim_{t \to 1^-} (1-t)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0$$

si $a_n \geq -C(n+1)^{\lambda-1}$ pour $C > 0$ et pour tout $n \geq 0$, alors

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^n a_k}{(n+1)^\lambda} = 0.$$

Théorème 2.3.1 *[7] Suppose que $f \in L^\infty[0,1)$ et*

$$a_n(f) = (n+1) \int_0^1 f(r) r^n\, dr,\ n \geq 0$$

Alors $a_n(f) \to 0$ quand $n \to \infty$ si et seulement si

$$\lim_{t \to 1^-} (1-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n(f) t^n = 0.$$

Preuve. Comme

$$(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n = 1$$

pour tout $t \in [0,1)$, et $a_n(f) \to 0$ $(n \to \infty)$ alors

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n(f)t^n = 0.$$

pour montre l'autre implication, nous utilisions le lemme précédent, alors on suppose

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n(f)t^n = 0.$$

avec un changement de variable, on trouve

$$\lim_{t\to 1^-}\left[a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_n(f) - na_{n-1}(f)]t^n\right] = 0.$$

par la définition de $a_n(f)$, on obtient

$$\begin{aligned}(n+1)a_n(f) - na_{n-1}(f) &= (n+1)^2\int_0^1 f(r)r^n\,dr - n^2\int_0^1 f(r)r^{n-1}\,dr \\ &= (2n+1)\int_0^1 f(r)r^n\,dr + n^2\int_0^1 f(r)(r-1)r^{n-1}\,dr\end{aligned}$$

par un calcul élémentaire on trouve que, la formule au-dessus est bornée en n, si f est bornée. pour termine le proof on utilise le lemme suivante .

Lemme 2.3.4 *(avec $\lambda = 1$) Si*

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n(f)t^n = 0$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0(f) + \sum_{k=0}^{n}[(k+1)a_k(f) - ka_{k-1}(f)]}{n+1} = 0,$$

où

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(f) = 0.$$

Lemme 2.3.5 *[13] Soient $K_1, K_2 \in L^1[0,+\infty)$. Si*

$$\int_0^{+\infty} K_j(t)t^{ix}\,dt \neq 0$$

pour $j = 0, 1$ et pour tout x, alors les deux conditions suivantes

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty} K_1(t)g(\varepsilon t)\,dt = 0,\ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty} K_2(t)g(\varepsilon t)\,dt = 0$$

sont équivalent pour $g \in L^\infty[0,+\infty)$.

Théorème 2.3.2 *[7] Supppose que $f \in L^\infty[0,1)$, alors*

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt = 0$$

si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 f(t)t^n\,dt = 0.$$

Preuve. Soit

$$h(x) = \frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt,\ x \in [0,1).$$

On applique la théoréme de Fubini, on obtient

$$(n+1)(n+1)\int_0^1 h(x)x^n(1-x)\,dx = (n+2)\int_0^1 f(t)t^{n+1}\,dt$$

pour tout $n \geq 0$.

Pour montre l'équivalence, on utilisie le lemme 2.3.5.

Comme f est bornée, alors

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 f(t)t^n\,dt = 0$$

est équivalent à (compare t^s et t^n pour $n < s \leq n+1$)

$$\lim_{n\to+\infty} s\int_0^1 f(t)t^s\,dt = 0$$

On fait changement de variable, on trouve

$$\begin{aligned} s\int_0^1 f(t)t^s\,dt &= s\int_0^1 f(1-t)(1-t)^s\,dt \\ &= s\int_0^1 f(1-\frac{t}{s})(1-\frac{t}{s})^s\,dt = \int_0^{+\infty} K_\epsilon(t)g(\epsilon t)\,dt, \end{aligned}$$

où $\epsilon = \frac{1}{s}$

$$g(t) = \begin{cases} f(1-t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \qquad\quad , & \text{si } t > \frac{1}{\epsilon}. \end{cases}$$

et

$$K_\epsilon(t) = \begin{cases} (1-\epsilon t)^{\frac{1}{\epsilon}}, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{\epsilon} \\ 0 \qquad\quad , & \text{si } t > \frac{1}{\epsilon}. \end{cases}$$

Comme $0 \leq K_\epsilon(t) \leq e^{-t}$ alors $K_\epsilon(t) \to e^{-t}$ sur $L^1[0,+\infty)$ quand $\epsilon \to 0^+$.

Donc (et d'aprés le lemme 2.3.5)

$$\lim_{s\to+\infty} s\int_0^1 f(t)t^s\,dt = 0$$

est équivalent à

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty} e^{-t}g(\epsilon t)\,dt = 0.$$

de même

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt = 0$$

est équivalent à

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty} \mathcal{X}_{[0,1]}g(\epsilon t)\,dt = 0.$$

Chapitre 3

Bornitude et compacité de l'opérateur de Toeplitz

3.1 Mesure de Carleson

On peut définir l'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman à partir des mesures finies sur D. Soit μ une mesure de Borel finie sur D, on définit l'opérateur T_μ sur $L^2_a(D, dA)$ par :

$$T_\mu f(z) = \int_D K(z, w) f(w) d\mu(w),\ f \in L^2_a(D, dA).$$

Quand $d\mu(z) = \varphi(z)\, dA(z)$, on a $T_\mu = T_\varphi$.
Dans ce cas, c'est facile de vérifier cela $T_\varphi f = P(\varphi f)$ pour tout les polynômes f (lesquels sont denses dans $L^2_a(D, dA)$).
Notre problème dans cet chapiter est trouver des conditions sur μ ou φ qui nous assurera la bornitude et la compacité de l'opérateurs de Toeplitz T_μ où T_φ. Quand μ ou φ est positif, les conditions que nous obtenons sont nécessaires et suffisants.

Proposition 3.1.1 *Soient $f, g \in L^2_a(D, dA)$, alors*

$$\langle T_\mu f, g\rangle = \int_D f(w)\overline{g(w)} d\mu(w), w \in D,$$

où μ une mesure de Borel positive et finie sur D.

Preuve. Soient $f, g \in L^2_a(D, dA)$, et μ une mesure de Borel positive et finie sur D alors

$$\begin{aligned}
\langle T_\mu f, g\rangle &= \int_D T_\mu f(z)\overline{g(z)}dA(z) \\
&= \int_D \left[\int_D f(w)K(z,w)d\mu(w)\right]\overline{g(z)}dA(z) \\
&= \int_D\int_D K(z,w)f(w)\overline{g(z)}d\mu(w)dA(z), \textit{ d'après le théorème de Fubini} \\
&= \int_D \left[\int_D \overline{g(z)}K(z,w)dA(z)\right] f(w)d\mu(w) \\
&= \int_D \overline{\left[\int_D g(z)\overline{K(w,z)}dA(z)\right]} f(w)d\mu(w), \textit{ car } K(z,w) = \overline{K(w,z)} \\
&= \int_D f(w)\overline{g(w)}d\mu(w).
\end{aligned}$$

Proposition 3.1.2 *Soient $f \in L^2_a(D, dA)$ et μ une mesure de Borel positive et finie sur D alors*

$$\|T_\mu f\| = \sup\left\{|\langle T_\mu f, g\rangle| : \|g\| = 1 \textit{ dans } L^2_a(D, dA)\right\}.$$

Nous avons besoin de présenter le concept du transformation de Berezin et la fonction moyenne au cas d'espace de Bergman. Soit μ une mesure de Borel finie sur D, on note $\tilde{\mu}$ la transformée de Berezin de l'opérateurs de Toeplitz T_μ sur $L^2_a(D, dA)$ définie par :

$$\tilde{\mu}(z) = \langle T_\mu k_z, k_z\rangle, z \in D,$$

où $\langle ., .\rangle$ est le produit scalaire sur $L^2_a(D, dA)$ et k_z est le nayau reproduisant normalisée de $L^2_a(D, dA)$, donc d'après la proposition 3.1.1 on a

$$\tilde{\mu}(z) = \int_D |k_z|^2 d\mu(w), z \in D.$$

Si $r > 0$, on définit la fonction moyenne $\widehat{\mu}_r(z)$ sur D par :

$$\widehat{\mu}_r(z) = \frac{\mu(D(z,r))}{|D(z,r)|}, z \in D.$$

On a $|D(z,r)| = A(D(z,r))$, $\widehat{\mu}_r(z) = \dfrac{\mu(D(z,r))}{A(D(z,r))}$, laquelle est la moyenne sur $D(z,r)$ de la fonction φ en ce qui concerne à dA quand $d\mu(z) = \varphi(z)\, dA$. Donc nous pouvons penser à

$\widehat{\mu}_r(z)$ comme une fonction moyenne μ en ce qui concerne à dA.

Pour toute $\varphi \in L^1(D, dA)$ et $r > 0$, on définit la fonction moyenne $\widehat{\varphi}_r$ de φ sur D par

$$\widehat{\varphi}_r(z) = \frac{1}{|D(z,r)|} \int_{D(z,r)} \varphi(w) dA(w), z \in D.$$

Définition 3.1.1 *Soient μ une mesure de Borel positive finie sur D, on dit que μ est une mesure de Carleson sur l'espace de Bergman $L^2_a(D, dA)$ s'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\int_D |f(z)|^2 d\mu(z) \leq c \int_D |f(z)|^2 dA(z) \text{ pour tout } f \in L^2_a(D, dA).$$

Remarque 3.1.1

1. *On dit que μ est mesure de Carleson sur $L^2_a(D, dA)$ si et seulement si $L^2_a(D, dA) \subset L^2(D, d\mu)$ et que l'injection canonique*

$$i_2 : L^2_a(D, dA) \to L^2(D, d\mu)$$

   est bornée.

2. *La mesure de Carleson μ sur $L^2_a(D, dA)$ est dit une mesure de Carleson nulle à l'infini si l'application i_2 est de plus compacte.*

Théorème 3.1.1 *[14] (page 185) Soit μ une mesure de Borel positive finie sur D, $r > 0$ alors μ est une mesure de Carleson sur $L^2_a(D, dA)$ si et seulement si*

$$\sup \left\{ \frac{\mu(D(z,r))}{(1-|z|^2)^2}, z \in D \right\} < \infty.$$

Théorème 3.1.2 *[14] (page 188) Soit μ une mesure de Borel positive finie sur D, $r > 0$ alors on a : μ est une mesure de Carleson nulle à l'infini dans $L^2_a(D, dA)$ si et seulement si*

$$\lim_{|z| \to 1^-} \frac{\mu(D(z,r))}{|D(z,r)|} = 0.$$

3.2 Opérateur de Toeplitz borné

Corollaire 3.2.1 *Soit $\varphi \in L^1(D, dA)$ une fonction harmonique alors T_φ est borné si et seulement si φ est bornée,*

Preuve. Soit $\varphi \in L^1(D, dA)$ harmonique, supposons que φ soit borné, dans ce cas il existe $M > 0$ tel que

$$\|T_\varphi f\| \leq M \|f\|, f \in L^2_a(D)$$

Par conséquent T_φ est borné. Réciproquement, supposons que T_φ soit borné alors on a

$$|\tilde{\varphi}(z)| = |\langle T_\varphi k_z, k_z \rangle| \leq \|T_\varphi\| \|k_z\|^2 = \|T_\varphi\| \ \ car \ \ \|k_z\| = 1$$

dans $L^2_a(D)$. Par conséquent, en utilisant le lemme 2.2.1 $\tilde{\varphi} = \varphi$ est borné et la corollaire est ainsi démontré.

Lemme 3.2.1 *Soit F un symbole quasihomogène ou radial borné. On a*

1. $$\|T_F\| = \sup_{n \geq 0} |c_n(F)|,$$

2. $$\|T_F\|_e = \limsup_{n \longrightarrow \infty} |c_n(F)|.$$

Preuve. Supposons que F est m-quasihomogène.

1. Soit $v = \sum_{i \geq 0} a_i e_i \in L^2_a(D)$ en utilisant le lemme 2.3.2. On voit que

   $$T_F v = \sum_{n \geq \max(0, -m)} a_n c_n(F) e_{n+m}$$

   et ainsi l'assertion 1, est évidente.

2. On note $T_{F,n}$ la compression de T_F à $Vect(e_0, ..., e_{n-1})$, Il est clair que

   $$\|T_F - T_{F,n}\| = \sup_{k \geq n} |c_k(F)|.$$

   Comme $T_{F,n}$ est compact, ceci implique que

   $$\|T_F\|_e = \inf_{K \in D} \|T_F - K\| \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \|T_F - T_{F,n}\| = \limsup_{n \longrightarrow \infty} |c_n(F)|.$$

Lemme 3.2.2 *Soit F une fonction m-quasihomogène bornée non nulle alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ |c_n(F)| < \|F\|_\infty.$$

La méme conclusion reste vraie si F est radiale, non constante et bornée.

Preuve. Si $F \sim (f, m)$ est m-quasihomogène alors pour $n > -m$

$$c_n(F) = 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1}\int_0^1 f(r)r^{2n+m+1}dr$$

et

$$|c_n(F)| \leq \|f\|_\infty \frac{2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1}}{2n+m+2} < \|F\|_\infty$$

Si F est radiale, bornée et non constante, il existe $\varepsilon > 0$ et $E \subset (0,1)$ tel que $|E| > 0$ et $f(E) \subset [0, \|f\|_\infty - \varepsilon]$. On peut écrire

$$\begin{aligned} c_n(F) &= (2n+2)\int_0^1 f(r)r^{2n+1}dr \\ &= (2n+2)\int_E f(r)r^{2n+1}dr + (2n+2)\int_{(0,1)\setminus E} f(r)r^{2n+1}dr \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} |c_n(F)| &\leq (\|f\|_\infty - \varepsilon)(2n+2)\int_E r^{2n+1}dr + \|f\|_\infty(2n+2)\int_{(0,1)\setminus E} r^{2n+1}dr \\ &\leq \|f\|_\infty - \varepsilon(2n+2)\int_E r^{2n+1}dr < \|F\|_\infty. \end{aligned}$$

Théorème 3.2.3 *[14] On suppose que μ une mesure de Borel positive finie sur D. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T_μ est borné sur $L^2_a(D, dA)$,*
2. *Le symbole de Berezin $\tilde{\mu}(z)$ est borné sur D,*
3. *μ est une mesure de Carleson sur $L^2_a(D, dA)$.*

Preuve. Montrons que (1) implique (2) : Supposons donc que (1) est vérifiée, on a :

$$|\tilde{\mu}(z)| = |\langle T_\mu k_z, k_z\rangle| \leq c\,\|k_z\|^2 = c$$

où $c > 0$ existe car T_μ est borné sur $L^2_a(D, dA)$. Et on obtient (2).

Supposons cette fois-ci que (2) soit vérifié et montrons (3), On a pour $r > 0$:

$$\frac{\mu(D(z,r))}{|D(z,r)|} \leq \frac{\int_D |k_z|^2 d\mu(w)}{(r^2(1-r)^4)} = \frac{|\tilde{\mu}(z)|}{(r^2(1-r)^4)} \leq M$$

car $\tilde{\mu}$ est borné sur D. D'où

$$\sup_{z\in D} \frac{\mu(D(z,r))}{|D(z,r)|} \leq M < \infty,$$

d'après le théorème 3.1.1 on conclut que μ est une mesure de Carleson sur l'espace de Bergman.

Montrons maintenant que (3) implique (1) ; supposons que μ est une mesure de Carleson sur l'espace de Bergman, alors il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\int_D |f(z)|d\mu(z) \leq c \int_D |f(z)|dA(z) \text{ pour tout } f \in L^1_a(D, dA).$$

Ainsi, si $f, g \in L^2_a(D, dA)$ alors $fg \in L^1_a(D, dA)$ et

$$\begin{aligned} |\langle T_\mu f, g\rangle| &= \left| \int_D f(z)\overline{g(z)}d\mu(z) \right| \leq \int_D |f(z)g(z)|\, d\mu(z) \\ &\leq c \int_D |f(z)g(z)|\, dA(z) \leq c\|f\|\|g\| \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder. Par conséquent en utilisant le proposition 3.1.2 on obtient T_μ est borné sur D .

Corollaire 3.2.2 *On suppose que $r > 0$, et $\varphi \in L^1(D, dA)$ est une fonction positive sur D. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T_φ est borné sur $L^2_a(D, dA)$,*
2. *$\widetilde{\varphi}$ est bornée sur D,*
3. *$\widehat{\varphi}_r(z)$ est bornée sur D.*

Preuve. Soient $\varphi \in L^1(D, dA)$, $\varphi \geq 0$ et $r > 0$, d'après le théorème de Radon-Nikodym. on peut définir la mesure de Borel positive, finie sur D

$$\mu(D(z, r)) = \int_{D(z,r)} \varphi(w)dA(w), z \in D.$$

Et $\widehat{\varphi}_r(z) = \dfrac{\mu(D(z, r))}{|D(z, r)|} = \widehat{\mu}_r(z)$; de plus $T_\varphi = T_\mu$ et $\widetilde{\mu} = \widetilde{\varphi}$. Ainsi en appliquant le théorème 3.2.3 on obtient le corollaire. .

3.3 Opérateur de Toeplitz compact

Proposition 3.3.3 *Si ϕ est une fonction intégrable et à support compact dans D alors T_ϕ sur $L^2_a(D)$ est compact.*

Preuve. Soit (f_n) une suite bornée dans $L^2_a(D)$. pour $z \in D$, on définie $\varphi_z \in Aut(D)$ par

$$\varphi_z(w) = \frac{z-w}{1-\overline{z}w}, \forall w \in D$$

Comme les fonctions f_n sont analytiques et donc harmoniques sur D alors en particulier elles vérifient la propriété de la valeur moyenne invariante suivante :

$$f_n(0) = \int_D f_n(w)\, dA(w),$$

donc on obtient

$$f_n(z) = f_n(\varphi_z(0)) = \int_D f_n(\varphi_z(w))\, dA(w).$$

Le changement de variables $y = \varphi_z(w)$ donne

$$f_n(z) = \int_D f_n(y) \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}y|^4}\, dA(y).$$

Or $\dfrac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}y|^4} \leq \dfrac{(1-|z|^2)}{(1-|z|)^4} \leq \dfrac{1}{(1-|z|)^4}$. Donc pour tout n, on a

$$|f_n(z)| \leq \int_D |f_n(y)| \frac{1}{(1-|z|)^4}\, dA(y).$$

Pour tout compact K de D, il existe $0 < r_K < 1$ tel que K soit inclus dans le disque fermé $\overline{D(0, r_K)}$, et alors, pour cet r_K, on a $\dfrac{1}{(1-|z|)^4} \leq \dfrac{1}{(1-r_K)^4}, \forall z \in K$. Par la suite pour tout entier n et tout compact K de D, il existe $0 < r_K < 1$ tel que

$$\sup_{z\in K} |f_n(z)| \leq \frac{1}{(1-r_K)^4} ||f_n(y)||_2.$$

D'où pour tout compact K de D, on a

$$\sup_n (\sup_{z\in K} |f_n(z)|) \leq \frac{1}{(1-r_K)^4} \sup_n ||f_n(y)||_2.$$

Donc la suite (f_n) admet une sous suite (f_{n_i}) qui converge uniformément sur tout les compact K de D vers une fonction f analytique sur D. Soit K_ϕ le support compact de la fonction ϕ. Il vient que

$$\begin{aligned} ||\phi f_{n_i} - \phi f||_2 &= \left(\int_{K_\phi} |\phi(z)|^2 |f_{n_i}(z) - f(z)|^2 dA(w) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq ||\phi(z)||_2 \sup_{z\in K_\phi} |f_{n_i}(z) - f(z)|. \end{aligned}$$

Comme $\sup_{z\in K_\phi}|f_{n_i}(z)-f(z)|\to 0$ quand $n_i\to+\infty$, alors $\phi f_{n_i}\to\phi f$ en norme $\|.\|_2$. D'autre part la projection de Bergman P est continue sur $L^2_a(D)$, donc $P(\phi f_{n_i})$ converge vers $P(\phi f)$ en norme $\|.\|_2$ quand $n_i\to+\infty$. i. e. $T_{\phi f_{n_i}}$ converge vers $T_{\phi f}$ dans $L^2_a(D)$. Donc T_ϕ est bien un opérateur compact.

Corollaire 3.3.3 *Soit $\varphi\in L^1(D,dA)$ une fonction harmonique alors T_φ est compact si et seulement si φ est nulle sur ∂D.*

Preuve. Soit $\varphi\in L^1(D,dA)$ harmonique, Supposons que T_φ est compact, alors

$$\tilde{\varphi}(z)=\varphi(z)=\langle T_\varphi k_z,k_z\rangle\xrightarrow[|z|\to 1^-]{}0 \ \textit{car}\ k_z\xrightarrow[|z|\to 1^-]{}0$$

faiblement dans $L^2_a(D)$, ainsi $\varphi\equiv 0$ sur ∂D.
Réciproquement, $\varphi\in L^1(D,dA)$ harmonique et nulle sur ∂D alors il existe une suite (φ_n) de fonctions continues à support compact sur D telle que

$$\|\varphi-\varphi_n\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Or

$$\|T_\varphi-T_{\varphi_n}\|=\|T_{\varphi-\varphi_n}\|\le\|\varphi-\varphi_n\|_\infty.$$

D'où la suite des opérateurs (T_{φ_n}) tend fortement vers T_φ quand $n\to+\infty$. Puisque les opérateurs T_{φ_n} sont compacts, donc T_φ est compact.

Théorème 3.3.4 *[14] On suppose que μ est une mesure de Borel positive sur D. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T_μ est compact sur $L^2_a(D,dA)$,*
2. *$\tilde{\mu}(z)\to 0$ quand $|z|\to 1^-$,*
3. *μ est une mesure de Carleson nulle à l'infini sur les espace de Bergman $L^2_a(D,dA)$.*

Preuve. Montrons que (1) implique (2) ; supposons donc que T_μ est compact sur $L^2_a(D,dA)$ avec μ une mesure de Borel positive et finie sur D. Comme $k_z\to 0$ faiblement quand $|z|\to 1^-$ alors on déduit que

$$\tilde{\mu}(z)=\langle T_\mu k_z,k_z\rangle\xrightarrow[|z|\to 1^-]{}0.$$

Et on obtient (2).

Maintenant montrons que (2) implique (3) c'est à dire supposons que $\tilde{\mu}(z) \xrightarrow[|z|\to 1^-]{} 0$ et montrons que μ est une mesure de Carleson nulle à l'infini sur l'espace de Bergman. Soit $r > 0$ et considérons

$$\int_{D(z,r)} |k_z(w)|^2 \, d\mu(w) \leq \int_D |k_z(w)|^2 \, d\mu(w)$$

comme $|D(z,r)|$ est comparable à $\inf\left\{|k_z(w)|^2, w \in D(z,r)\right\}$ alors

$$\lim_{|z|\to 1^-} \frac{\mu(D(z,r))}{|D(z,r)|} = 0$$

et d'après le théorème 3.1.2, on obtient le résultat. Supposons maintenant que μ est une mesure de Carleson nulle à l'infini sur l'espace de Bergman et montrons que T_μ est compact sur $L^2_a(D, dA)$. Soit $f \in L^2_a(D, dA)$, on a

$$\begin{aligned} \|T_\mu f\| &= \sup\left\{|\langle T_\mu f, g\rangle| : \|g\| = 1 \ \textit{dans}\ L^2_a(D, dA)\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\int_D f(z)\overline{g(z)} d\mu(z)\right| : \|g\| = 1 \ \textit{dans}\ L^2_a(D, dA)\right\} \\ &\leq \|f\|_{L^2(D,d\mu)} \sup\left\{\|g\|_{L^2(D,d\mu)} : \|g\| = 1 \ \textit{dans}\ L^2_a(D, dA)\right\}. \end{aligned}$$

Comme μ est une mesure de Carleson nulle à l'infini sur $L^2_a(D, dA)$, alors il existe une constante $c > 0$. Telle que

$$\|g\|_{L^2(D,d\mu)} \leq c\,||g|| \ \textit{pour tout}\ g \in L^2_a(D, dA),$$

d'où $\|T_\mu f\| \leq c\,\|f\|_{L^2(D,d\mu)}$ pour tout $f \in L^2_a(D, dA)$, si on a $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ faiblement dans $L^2_a(D, dA)$, comme $i_2 : L^2_a(D, dA) \to L^2(D, d\mu)$ est compact alors

$$\|f_n\|_{L^2(D,d\mu)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Il s'ensuit que $\|T_\mu f_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par conséquent T_μ est compact et le théorème est entièrement prouvé.

Corollaire 3.3.4 *On suppose que $r > 0$, et $\varphi \in L^1(D, dA)$ est une fonction positive sur D. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T_φ est compact sur $L^2_a(D, dA)$,*
2. *$\widetilde{\varphi}(z) \to 0$ quand $|z| \to 1^-$,*

3. $\widehat{\varphi}_r(z) \to 0$ *quand* $|z| \to 1^-$.

Preuve. Comme $\varphi \geq 0$ dans $L^1(D, dA)$ et $d\mu(z) = \varphi(z)\, dA(z)$ est une mesure de Borel positive et finie sur D. Ainsi $T_\varphi = T_\mu$, $\widetilde{\mu} = \widetilde{\varphi}$, $\widehat{\varphi}_r = \widehat{\mu}_r$, et $r > 0$ et en appliquant le théorème précédent et le théorème 3.1.2 on obtient le corollaire.

Théorème 3.3.5 *[12] Soit $f \in L^\infty(D, dA)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T_f est compact,*
2. *$\|P(f \circ \varphi_z)\| \to 0$ quand $z \to \partial D$.*

Preuve. On fixe la fonction $f \in L^\infty(D, dA)$. Soit $M_f : L^2_a(D) \to L^2(D, dA)$ définie par $M_f(g) = fg$ pour $g \in L^2_a(D)$, P est le projection orthogonal de $L^2(D, dA)$ dans $L^2_a(D)$. On note que T_f est de la forme $PM_f = T_f g$.

On montre que : (1) $\Rightarrow$ (2). Suppose que PM_f est compact, par les propriétés de noyau reproduisant On obtient $\|k_z\|_2^2 = k_z(z)$. Si g est une fonction analytique bornée sur D, alors $\left\langle g, \dfrac{k_z}{\|k_z\|_2} \right\rangle = k_z(z)^{\frac{-1}{2}} g(z) \to 0$ quand $z \to \partial D$ (car $k_z(z) \to 0$ quand $z \to \partial D$).

Comme les fonctions analytiques bornées sur D sont dense dans L^2_a, ce montre que $\dfrac{k_z}{\|k_z\|_2} \to 0$ faiblement dans L^2_a quand $z \to \partial D$. Ainsi

$$\left\| PM_f \left(\frac{k_z}{\|k_z\|_2} \right) \right\|_2 \to 0 \text{ quand } z \to \partial D$$

par la proposition 2.1.3, $PM_f(k_z) = (P(f \circ \varphi_z) \circ \varphi_z) k_z$. on a

$$\left\| PM_f \left(\frac{k_z}{\|k_z\|_2} \right) \right\|_2 = \|P(f \circ \varphi_z)\|_2$$

alors $\|P(f \circ \varphi_z)\|_2 \to 0$ quand $z \to \partial D$.

On montre que : (2) $\Rightarrow$ (1). Suppose que $\|P(f \circ \varphi_z)\| \to 0$ quand $z \to \partial D$. Et on montre que l'opérateur $(PM_f)^*$ est compact.

Soit $g \in P(L^2(D, dA))$. Alors $(PM_f)^* g \in L^2_a$, pour $z \in D$ on a

$$\begin{aligned} ((PM_f)^* g)(z) &= \langle (PM_f)^* g, k_z \rangle = \langle g, (P(f \circ \varphi_z) \circ \varphi_z) k_z \rangle \\ &= \int_D g(w) \overline{P(f \circ \varphi_z)(\varphi_z(w)) k_z(w)}\, dA(w). \end{aligned} \tag{3.1}$$

c'est pour ça on définie pour $0 < r < 1$ l'opérateur $S_r : P(L^2(D, dA)) \to L^2_a$ par

$$(S_r g)(z) = \mathcal{X}_{rD}(z) \int_D g(w)\overline{P(f \circ \varphi_z)(\varphi_z(w))k_z(w)}\, dA(w),$$

pour $g \in P(L^2(D, dA))$ *et* $z \in D$. Alors d'aprés le théoréme de Fubini et par changement de variable on obtient

$$\begin{aligned}\int_D \left(\int_D \mathcal{X}_{rD}(z)|P(f \circ \varphi_z)(\varphi_z(w))|^2 |k_z(w)|^2\, dA(w) \right) dA(w) \\ = \int_{rD} k_z(z)\|P(f \circ \varphi_z)\|_2^2\, dA(z) < \infty,\end{aligned}$$

D'aprés 3.1 et la définition de S_r nous trouvons que pour $z \in D$:

$$(((PM_f)^* - S_r)g)(z) = \int_D K(z, w)g(w)dA(w)$$

où $K(w, z) = \mathcal{X}_{rD}(z)\overline{P(f \circ \varphi_z)(\varphi_z(w))k_z(w)}$. On voit que $\|(PM_f)^* - S_r\| \xrightarrow[r\to 1^-]{} 0$ Comme $\|P(f \circ \varphi_z)\| \to 0$ quand $z \to \partial D$ alors $S_r \to (PM_f)^*$ quand $r \to 1^-$, et comme S_r est compact alors $(PM_f)^*$ est compact, donc PM_f est compact.

Corollaire 3.3.5 *Soit $f \in L^\infty(D)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *M_f est compact,*
2. *$|\tilde{f}|^2(z) \to 0$ quand $z \to \partial D$.*

Preuve. On montre que (2) $\Rightarrow$ (1), pour $f \in L^2(D, dA)$ on définie $\tilde{f}$ par

$$\begin{aligned}\tilde{f}(z) &= \left\langle f\frac{k_z}{\|k_z\|_2}, \frac{k_z}{\|k_z\|_2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{k_z(z)} \int_D f(w)|k_z(w)|^2\, dA(w),\ z \in D \\ &= \int_D f \circ \varphi_z\, dA.\end{aligned}$$

Donc pour $z \in D$:

$$|\tilde{f}|^2(z) = \|f \circ \varphi_z\|_2^2 = \|P(f \circ \varphi_z)\|_2^2 + \|f \circ \varphi_z - P(f \circ \varphi_z)\|_2^2.$$

Alors si $|\tilde{f}|^2(z) \to 0$ quand $z \to \partial D$, ainsi

$$\|P(f \circ \varphi_z)\|_2 \to 0 \text{ et } \|f \circ \varphi_z - P(f \circ \varphi_z)\|_2 \to 0 \text{ quand } z \to \partial D,$$

d'après le théorème précédent T_f est compact, donc M_f est compact.
On montre que (1) $\Rightarrow$ (2), on a

$$|\tilde{f}|^2(z) = \left\| M_f\left(\frac{k_z}{\|k_z\|_2}\right)\right\|_2^2.$$

On déjà remarque que $\dfrac{k_z}{\|k_z\|_2} \to 0$ faiblement dans L^2_a quand $z \to \partial D$, alors si M_f est compact alors $|\tilde{f}|^2(z) \to 0$ quand $z \to \partial D$.

Corollaire 3.3.6 *Soit $f \in L^\infty(D)$ est à support compact de D. Alors T_f est compact.*

Preuve. Si $f \in L^\infty(D)$ à support compact, alors $|\tilde{f}|^2(z) \to 0$ quand $z \to \partial D$.

Lemme 3.3.3 *Soit f une fonction quasihomogène ou radial borné sur D. T_f est compact si et seulement si*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} c_n(f) = 0.$$

Preuve. Soient K un opérateur compact sur $L^2_a(D)$ et $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que $\lim_{n\longrightarrow\infty}|c_{\eta_n}(f)| = \limsup_{n\longrightarrow\infty}|c_n(f)|$. Comme (e_{η_n}) converge faiblement vers 0, on a $\lim_{n\longrightarrow\infty}\|Ke_{\eta_n}\| = 0$, d'aprés le lemme 3.2.1

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\|(T_f - K)e_{\eta_n}\| = \lim_{n\longrightarrow\infty}\|T_f e_{\eta_n}\| = \lim_{n\longrightarrow\infty}|c_{\eta_n}(f)|,$$

et donc

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}|c_n(f)| \leq \|T_f - K\|$$

ce qui démontre le lemme.

Théorème 3.3.6 *[7] Soit f une fonction radial bornée sur D, Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$T_f : L^2_a(D) \to L^2_a(D)$ est compact,*
2. *$\tilde{f}(z) \to 0$ quand $|z| \to 1^-$,*
3. *$\frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt \to 0$ quand $z \to 1^-$.*

Preuve. On montre que (1) $\Leftrightarrow$ (2), On sait que si f est radial alors le transformée de Berezin $\tilde{f}$ de f est

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(z) &= (1-|z|^2)^2 \int_D \frac{f(w)\,dA(w)}{|1-z\overline{w}|^4} \\
&= (1-|z|^2)^2 \int_D f(w) \left| \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \overline{w}^n \right|^2 dA(w) \\
&= 2(1-|z|^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 |z|^{2n} \int_0^1 f(r) r^{2n+1}\,dr \\
&= (1-|z|^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 |z|^{2n} \int_0^1 f(\sqrt{r}) r^n\,dr.
\end{aligned}$$

soit $f^*(r) = f(\sqrt{r}), 0 \leq r < 1$, d'aprés le théoréme 2.3.1. alors $\tilde{f}(z) \to 0$ quand $|z| \to 1^-$ si et seulement si $a_n(f^*) \to 0$ quand $n \to +\infty$, tel que

$$a_n(f^*) = (n+1) \int_0^1 f^*(r) r^n\,dr,\ n \geq 0.$$

D'autre part, Les fonctions suivantes constituent une base orthonormale de $L^2_a(D)$.

$$e_n(z) = \sqrt{n+1} z^n,\ n = 0, 1, 2, ...$$

lorsque f est fonction radial , et T_f dans la base $\{e_n\}$ alors

$$\langle T_f e_n, e_n \rangle = (n+1) \int_0^1 f(\sqrt{r}) r^n\,dr = a_n(f^*).$$

Donc, pour une fonction radial f l'opérateur T_f est compact sur $L^2_a(D)$ si et seulement si $a_n(f^*) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Finalement, On montre que (1) $\Leftrightarrow$ (3),

D'aprés le théoréme 2.3.2 on déduire que T_f est compact si et seulement si

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} \int_x^1 f^*(t)\,dt = 0. \tag{3.2}$$

Comme f est bornée et

$$\frac{1}{1-x} \int_x^1 f^*(t)\,dt = \frac{2}{1+\sqrt{x}} \left[\frac{1}{1-\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^1 f(t)(t-1)\,dt + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^1 f(t)\,dt \right].$$

on trouve que 3.2 est équivalent à

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} \int_x^1 f(t)\,dt = 0.$$

Et le théorème est entièrement prouvé.

Conclusion

Ce mémoire s'intéresse à la bornitude et la compacité des opérateurs de Toeplitz à symbole quasihomogène plus particulièrement à symbole radial sur l'espace de Bergman du disque unité.

Nous avons étudier la compacité de l'opérateur T_φ dans plusieurs cas différents, le cas au le symbole est harmonique, le cas au le symbole est positif où nul et en fin le cas de symbole radial.

Plusieurs questions restes ouverts parmi ces questions la suivante :

Sous quelles conditions l'opérateur à symbole quelconque est-il compact ?

Bibliographie

[1] S. Axler and D. Zheng. Compact Operators via the Berezin Transform. 25 July 1998.

[2] B. Barusseau. Propriétés spectrales des opérateurs de Toeplitz. Thèse présentée à l'Université Bordeaux 1. Spécialité mathématiques pures. Mai. 2010.

[3] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. Masson, Paris, 1996.

[4] I. Chalendar. Fonctions Harmoniques, classe de Nevanlinna, espaces de Hardy, et une introduction aux opérateurs de Toeplitz et de Hankel. Université Lyon I. 2008.

[5] F. Hélein. Fonctions holomorphes

[6] H. Hedenmalm, B. Korenblum et K. Zhu. Theory of Bergman spaces. Springer Verlag, New York, 2000.

[7] B. Korenblum and K. Zhu. An application of Tauberian theorems to Toeplitz operators. J. Operator Theory.

[8] I. Louhichi. Produit d'opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman. Thèse présentée à l'Université Bordeaux 1. Spécialité mathématiques pures. Nov. 2005.

[9] S. Maingot et D. Manceau. Théorie spectrale.

[10] A. G. Postnikov. Tauberian theory and its applications.1979.

[11] F. R. Randriamahaleo. Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman harmonique et opérateurs de Toeplitz tronqués de rang fini. Mémoire présentée à l'Université D'Antananarivo et de l'Université de Bordeaux. Spécialité mathématiques pures. 20 juillet 2015.

[12] K. Stroethoff and D. Zheng. Toeplitz and Hankel operators on Bergman spaces. transactions of the american mathematical society. 1992.

[13] N. Wiener. Tauberian theorems, 1932.

[14] K. Zhu . Operator Theory in Function Spaces. The American Mathematical, Rhode Island , Second Edition , 2007.