UNIVERSITE YAHIA FARES DE MEDEA

FACULTE DES SCIENCES

DEPARTEMENT DES SCIENCES DE LA MATIERE

Mémoire

Présenté pour obtenir le diplôme de **Master**

En Physique

Spécialité : Physique Théorique

par :

Chaanane Mohamed

Thème :

Dynamique des particules non relativistes en interaction avec un potentiel trapézoïdal

Soutenue publiquement le : 24 /06/2024, Devant le jury composé de :

M. L. Dekar	Grade : MCA	Université de Médéa	Président
M. AHMED AMMAR Mohammed	Grade : MCA	Université de Médéa	Examinateur
M. LANGUEUR Omar	Grade : MCA	Université de Médéa	Directeur de Mémoire

Année universitaire 2023/2024

Abstract

At the beginning of this work, we presented an overview of physical systems subject to a variable potential (step potential, barrier potential, and trapezoidal potential) and a constant mass. Then, we conducted a detailed study of each potential in a separate chapter. In each chapter, we addressed the solution of the Schrödinger equation and applied continuity conditions to find the expressions for the transmission and reflection coefficients. In the third chapter, where we dealt with the trapezoidal potential, we discussed the Airy function, which allowed us to calculate the transmission and reflection coefficients. Finally, in the last chapter, we plotted the curves of these coefficients in terms of energy (E), potential (V_0), and barrier width (a).

Résumé

Au début de ce travail, nous avons fourni un aperçu des systèmes physiques soumis à des potentiels variables (potentiels de marche, potentiels de barrière, potentiels de barrière trapézoïdaux) et de masse constante. Ensuite, nous avons effectué une étude détaillée de chaque potentiel dans un chapitre distinct. Dans chaque chapitre, nous avons abordé la résolution de l'équation de Schrödinger, puis nous avons appliqué les conditions de continuité pour trouver les expressions des coefficients de transmission et de réflexion. Dans le troisième chapitre, où nous avons traité du potentiel trapézoïdal, nous avons abordé la fonction d'Airy, qui nous a permis de calculer les coefficients de transmission et de réflexion. Enfin, dans le dernier chapitre, nous avons tracé les courbes de ces coefficients en fonction de l'énergie (E), du potentiel (V_0) et de la largeur de la barrière (a).

ملخص

في بداية هذا العمل، قدمنا لمحة عامة عن الأنظمة الفيزيائية الخاضعة لإمكانات متغيرة (إمكانات المشي، وإمكانات الحاجز، وإمكانات الحاجز شبه المنحرف)و كتلة ثابتة، بعد ذلك قمنا بدراسة مفصلة لكل كمون في فصل.

حيث تطرقنا في كل فصل إلى حل معادلة شرود نغر، بعدها وظفنا شروط الاستمرارية لإيجاد عبارتي معامل التمرير والانعكاس، و في الفصل الثالث حيث قمنا بدراسة كمون الشبه المنحرف,ثم تطرقنا لدالة أيري و التي سمحت لنا بحساب معاملي التمرير و الانعكاس.

وفي الفصل الأخير قمنا برسم منحنيات هذه المعاملات بدلالة الطاقة (E)، الجهد (V_0) و عرض الحاجز (a).

Remercier

J'adresse mes remerciements à mon encadrant Dr. Langueur, pour ses efforts, et tous les professeurs qui m'ont suivi durant mes années universitaires.

Dédicace

À celle qui m'a porté quand j'étais faible, à celle pour qui j'ai tout l'amour et l'appréciation, ma chère mère, que Dieu fasse d'elle la prunelle de mes yeux.

A celui qui a été source de fierté, de force et de virilité, à celui qui m'a appris la générosité, la générosité et la générosité et qui ne m'a pas lésiné par son soutien matériel et moral, mon cher père, que Dieu ait pitié de lui.

A tous mes frères et parents d'ici ou d'ailleurs, et à tous mes camarades de classe.

Vous avez les plus douces expressions de remerciement, d'amour et de respect de ma part pour votre position et votre soutien, alors que Dieu vous récompense de tout le meilleur.

Sommaire

Introduction : 1

Chapitre I : Résolution de l'équation de Schrödinger pour une marche de potentiel : 4

I.Marche de potentiel : 5

I.1. La solution dans la région I : 5

I. 2. La solution dans la région II : 6

II. Les conditions de continuité : 7

III. Coefficients de réflexion et transmission : 7

III.1. La densité de courant incident : 8

III.2. La densité de courant réfléchi : 8

III.3. Ladensité de courant transmis : 9

III.4. Coefficient de réflexion : 9

III.5. Coefficient de transmission: 10

Chapitre II : Résolution de l'équation de Schrödinger pour une barrière rectangulaire de potentiel 11

II.1. Barrière rectangulaire de potentiel : 12

II.2. Résolution de l'équation de Schrödinger à une dimension avec masse constante : 12

II.2.1. La solution dans la région I : 12

II.2.2. La solution dans la région II : 13

II.2.3. La solution dans la région III : 13

II.3. Les conditions de continuité : 14

II.4. Les coefficients de transmission et réflexion : 16

II.4.1. Coefficient de réflexion : 16

II.4.2. Coefficient de transmission : 16

Chapitre III : Résolution de l'équation de Schrödinger pour une barrière trapézoïdale 18

III.1. Barrière trapézoïdale: 19

III.1.1. La solution dans la région 1 : 19

III.1.2. La solution dans la région II : 20

III.1.3.La solution dans la région III : 21

III.2. Les conditions de continuité : 22

III.3 : Etude approximative 27

III.4. Coefficient de réflexion 36

III.5. Coefficient de transmission : 37

Chapitre IV : Etude numérique 38

IV.1. Marche de potentiel : 39

IV.3. Barrière trapézoïdale: 42

Conclusion générale: 51

Annexe : 52

Bibliographie : 53

Tableau des figures

Chapitre I : Résolution de l'équation de Schrödinger généralisée pour une marche de potentiel :……..…4

Figure (01) : Marche de potentiel :……...……5

Chapitre II :Résolution de l'équation de Schrödinger généralisée pour une barrière rectangulaire de potentiel……..11

Figure (02) : barrière rectangulaire de potentiel :……..……..…12

Chapitre III : Résolution de l'équation de Schrödinger généralisée pour une barrière trapézoïdale……..18

III.1. Figure (03) : Barrière trapézoïdale:……..……..19

Chapitre IV : Etude numérique ……..38

Marche d'un potentiel :

Figure 04 : Variation de coefficient de transmission et réflexion pour une marche de potentiel en fonction d'énergie E **pour :** $V_0 = 3$**…..……..……...…... ….39**

Figure 05 : Variation de coefficients de transmission et réflexion pour une marche de potentiel en fonction de potentiel V_0 **pour :**$\mathrm{E} = 3$**……. ……..……..…40**

Barrière trapézoïdale:

Figure 06 : Variation de coefficients de transmission et réflexion pour une barrière trapézoïdale de potentiel en fonction d'énergie E **pour :**$V_0 = \mathbf{2}$, $a = 1$ et$\beta = 0.96$**….....42**

Figure 07 : Variation de coefficients de transmission et réflexion pour une barrière trapézoïdale de potentiel en fonction d'énergie E **pour :** $V_0 = 2$, $a = 10$ et $\beta = 0.96$ **..…… ……..…….....…..43**

Figure 08 : Variation de coefficients de transmission et réflexion pour une barrière trapézoïdale de potentiel en fonction d'énergie E **pour :** $V_0 = 2$, $a = 1$ et $\beta = 0.96$ **…...……..……... 45**

Figure 09: Variation de coefficients de transmission et réflexion pour une barrière trapézoïdale de potentiel en fonction du potentiel V_0 **pour :** $\mathrm{E} = 2$, $a = 10$ et $\beta = 0.96$ **……..…...…..…46**

Figure 10 : Variation de coefficients de transmission et réflexion pour une barrière trapézoïdale de potentiel en fonction ka **pour :** $V_0 = 2$, $\beta = 0.96$**……47**

Figure 11: Variation de coefficients de transmission et réflexion pour une barrière trapézoïdale de potentiel en fonction *ka* **pour :** $V_0 = 2$, $\beta = 0.01$**…….....……..……48**

Figure 12 : Variation de coefficients de transmission et réflexion en fonction de la largeur de la barrière trapézoïdale *a* **pour** $V_0 = 3$, $\mathrm{E} = 2$ et $\beta = 0.96$ **……..……..……49**

Figure 13 : La fonction *Ai(z)* est en rouge et *Bi(z)* en vert…….……..…….52

Introduction :

L'équation de Schrödinger [1] est une pierre angulaire de la mécanique quantique, décrivant l'évolution des systèmes quantiques. Lorsqu'elle est appliquée à des particules non relativistes en interaction avec un potentiel trapézoïdal, elle permet de sonder les comportements quantiques dans un cadre de potentiel complexe, intermédiaire entre une barrière et un puits de potentiel.

Le potentiel trapézoïdal, caractérisé par une région centrale plate encadrée par deux pentes linéaires, constitue un modèle intéressant pour étudier la dynamique des particules dans un environnement de potentiel variable. Ce type de potentiel trouve des applications dans des contextes variés tels que les pièges à ions, les structures semi-conductrices, et les dispositifs optiques, où les particules sont soumises à des forces non uniformes.

En mécanique quantique, l'équation de Schrödinger gouverne la dynamique des particules et permet de déterminer la fonction d'onde, $[\Psi(x)]$ qui contient toute l'information sur le système. Pour un potentiel trapézoïdal, la résolution de l'équation de Schrödinger offre des connaissances précieuses sur les états quantiques possibles, les niveaux d'énergie, et les probabilités de transition entre différents états. Ce potentiel permet de modéliser des situations où les particules peuvent être piégées, réfléchies ou transmises, en fonction de leur énergie et de la configuration du potentiel.

Il est intéressant de prédire le comportement quantique d'une particule plongée dans un potentiel trapézoïdal. L'analyse de la solution de l'équation de Schrödinger à potentiels trapézoïdaux met en évidence plusieurs phénomènes quantiques intéressants :

1 : États liés et quasi-liés : Pour certaines configurations du potentiel, des états liés peuvent exister où les particules sont confinées dans la région centrale plate. Ces états sont analogues aux niveaux d'énergie dans un puits de potentiel mais modifiés par les pentes du potentiel trapézoïdal.

2 : Effet tunnel : Les particules peuvent traverser les barrières formées par les pentes du potentiel par effet tunnel, un phénomène quantique sans analogue classique. La probabilité de tunnel dépend de la largeur et de la hauteur des pentes ainsi que de l'énergie de la particule.

3 : Réflexion et transmission : En interaction avec les pentes du potentiel trapézoïdal, une particule quantique peut être partiellement réfléchie et partiellement transmise, permettant l'étude des coefficients de réflexion et de transmission qui diffèrent des scénarios de marches et barrières de potentiel simples.

Quelles sont les applications et les implications de ces nouveaux phénomènes ? La compréhension des interactions des particules avec un potentiel trapézoïdal a des implications importantes pour diverses technologies quantiques. Par exemple, dans les dispositifs semi-conducteurs, la modulation des potentiels peut être utilisée pour contrôler les courants électroniques à l'échelle

nanométrique. Dans les pièges à ions, des potentiels trapézoïdaux peuvent aider à manipuler les ions avec une précision accrue pour des applications en métrologie et en informatique quantique.

En somme, l'étude de la dynamique des particules non relativistes en interaction avec un potentiel trapézoïdal via l'équation de Schrödinger enrichit notre compréhension des phénomènes quantiques dans des potentiels complexes. Elle ouvre la voie à des applications innovantes en technologie et en recherche fondamentale, illustrant la richesse des comportements dynamiques des systèmes quantiques dans des environnements potentiels variés.

L'équation de Schrödinger indépendante du temps

Pour une particule de masse *m* se déplaçant dans un potentiel *V(x),* l'équation de Schrödinger [1] indépendante du temps s'écrit :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right)\Psi(x)=E\Psi(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)+\frac{2m}{\hbar^2}(\mathrm{E}-V(x))\Psi(x)=0$$

Où :

- $\Psi(x)$: est la fonction d'onde de la particule
- $\hbar$: est la constante de Planck réduite,
- $V(x)$: est le potentiel.

L'équation de Schrödinger pour le Potentiel Linéaire :

Pour une particule de masse *m* en interaction avec un potentiel linéaire $V(x)=V_0+f(x)$ l'équation de Schrödinger indépendante du temps est donnée par :

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+\frac{2m}{\hbar^2}[\mathrm{E}-(V(x))]\psi(x)=0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+\frac{2m}{\hbar^2}\left[\mathrm{E}-\left(V_0+f(x)\right)\right]\psi(x)=0$$

Résous l'équation:

Pour résoudre cette équation, il est utile de faire un changement de variable pour simplifier l'expression. On introduit une nouvelle variable ξ définie par :

$$\xi=\left(\frac{2mf(x)}{\hbar^2}\right)^{1/3}\left(x+\frac{E-V_0}{f(x)}\right)$$

L'équation de Schrödinger se transforme alors en une forme connue de l'équation d'Airy :

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi) + \xi\psi(\xi) = 0$$

Les solutions de cette équation sont des fonctions d'Airy linéairement indépendantes, $A_i(-\xi)$ et $B_i(-\xi)$.

Chapitre I

Résolution de l'équation de Schrödinger pour une marche de potentiel

I. 1.Marche de potentiel :

Notre potentiel se définit comme suit :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x > 0 \end{cases}$$

Nous pouvons le représenter graphiquement comme suit :

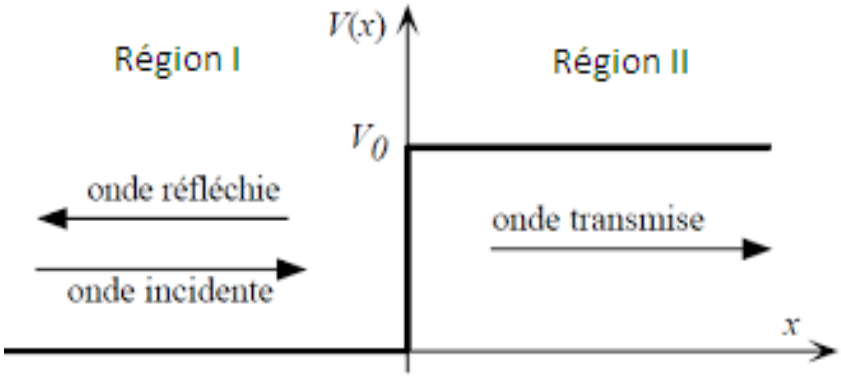


Figure (01) : Marche de potentiel.

L'équation de Schrödinger unidimensionnelle [2] s'écrit comme suit :

$$H\Psi(x) = E\Psi(x) \tag{I.1}$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(\mathrm{E} - V(x))\Psi(x) = 0 \tag{I.2}$$

Dans le cas où $\mathrm{E} > V_0$ initialement, l'équation (I.2) doit être résolue dans chaque région :

I.1.1.La solution dans la région I : pour $x < 0$ on à, $V(x) = 0$

À partir de l'équation (I.2) en substituant la valeur de $V(x)$, on trouve :

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(\mathrm{E} - 0)\Psi(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi_1(x) + \frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}\Psi_1(x) = 0 \tag{I.3}$$

On pose

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}}$$

En substituant la valeur de $k_1$dans l'équation (I.3) nous trouvons :

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2}\Psi_1(x) + k_1^2\,\Psi_1(x) = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre [3] dont la solution s'écrit:

$$\Psi_1(x) = c_1 e^{ik_1x} + c_2 e^{-ik_1x} \tag{I.4}$$

Tel que: c_1, c_2 sont des constantes réelles.

I. 2. La solution dans la région II : pour $x > 0$ on à, $V(x) = V_0$

En partant de l'équation (I.2) et en substituant la valeur de V(x), on trouve :

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\big(\mathrm{E} - V(x)\big)\Psi(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi_2(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(\mathrm{E} - V_0)\Psi_2(x) = 0 \tag{I.5}$$

On pose

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(\mathrm{E} - V_0)}{\hbar^2}}$$

Remplacement la valeur de k_2 dans l'équation (I.5):

Cette équation devient :

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi_2(x) + k_2^2\,\Psi_2(x) = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre dont la solution s'écrit:

$$\Psi_2(x) = c_3 e^{ik_2x} + c_4 e^{-ik_2x}$$

L'onde réfléchie n'existe plus dans la deuxième région donc la solution générale s'exprime comme suit :

$$c_4 e^{-ik_2x} = 0 \qquad \Rightarrow c_4 = 0$$

Donc

$$\Psi_2(x) = c_3 e^{ik_2x} \tag{I.6}$$

c_3 : C'est une constante réelle.

Les solutions peuvent s'écrire sous la forme :

$$\Psi(x) = \begin{cases} c_1 e^{ik_1x} + c_2 e^{-ik_1x} & x < 0 \\ c_3 e^{ik_2x} & x > 0 \end{cases}$$

II. Les conditions de continuité :

Les conditions de continuité sont nécessaires pour obtenir des solutions physiques cohérentes et significatives de l'équation de Schrödinger, assurant la conservation des probabilités et la normalisation de la fonction d'onde, ainsi que le comportement hermitien des opérateurs quantiques.

Les conditions de continuité pour Ψ et de $\frac{d\Psi}{dx}$ lorsque $x = 0$ sont explicitement :

$$\begin{cases} \Psi_1(0) = \Psi_2(0) & \text{(I.7)} \\ \frac{d\Psi_1(0)}{dx} = \frac{d\Psi_2(0)}{dx} & \text{(I.8)} \end{cases}$$

Basé sur les équations (1.4), (1.6),(1.7) et (1.8) on trouve :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = c_3 \\ ik_1(c_1 - c_2) = ik_2 c_3 \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = c_3 & \text{(I. 9)} \\ c_1 - c_2 = \frac{k_2}{k_1} c_3 & \text{(I. 10)} \end{cases}$$

On additionne les deux équations (I. 9)et (I. 10) :

$$\Rightarrow \quad 2c_1 = c_3\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)$$

$$c_1 = \left(\frac{k_1 + k_2}{2k_1}\right) c_3$$

Maintenant on soustrait les deux équations (I. 9) et (I. 10) :

$$\Rightarrow \quad 2c_2 = \left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) c_3$$

$$c_2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{2k_1}\right) c_3$$

III. Coefficients de réflexion et transmission :

Évaluation de la probabilité de réflexion (R) et de transmission (T) [4] en fonction de la densité de courant de particules *j(x):*

On à :

$$\mathrm{R} = \frac{\|\text{probabilité d}'\text{onde réfléchie}\|}{\|\text{probabilité d}'\text{onde incidente}\|}$$

Et

$$\mathrm{T} = \frac{\|\text{probabilité d}'\text{onde transmise}\|}{\|\text{probabilité d}'\text{onde incidente}\|}$$

Par définition, la densité de courant est donnée par la relation [5] :

$$j(x) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\right)$$

$\Psi(x)$:c'est une onde complexe qui a aussi un conjugué $\Psi^*(x)$

III.1.La densité de courant incident :

$$j_i(x) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi_i^* \frac{\partial \Psi_i}{\partial x} - \Psi_i \frac{\partial \Psi_i^*}{\partial x}\right)$$

On à

$$\Psi_i(x) = c_1 \boldsymbol{e}^{ik_1 x}$$

$$\Psi_i^* = c_1^* e^{-ik_1 x}$$

c_1^* : est un nombre complexe conjugué de c_1

$$j_i(x) = \frac{i\hbar}{2m}\left(c_1^* e^{-ik_1 x}(ik_1 c_1 \boldsymbol{e}^{ik_1 x}) + c_1 \boldsymbol{e}^{ik_1 x}(ik_1 c_1^* \boldsymbol{e}^{-ik_1 x})\right)$$

$$j_i(x) = \frac{-\hbar k_1}{m}(c_1^*\, c_1)$$

$$j_i = -\frac{\hbar k_1}{m}|c_1|^2$$

III.2. La densité de courant réfléchi :

$$j_r(x) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi_r^* \frac{\partial \Psi_r}{\partial x} - \Psi_r \frac{\partial \Psi_r^*}{\partial x}\right)$$

On à

$$\Psi_r(x) = c_2 \boldsymbol{e}^{-ik_1 x}$$

$$\Psi_r^* = c_2^* e^{ik_1 x}$$

c_2^*: est un nombre complexe conjugué de c_2

$$j_r(x) = \frac{i\hbar}{2m}\left(c_2^* e^{ik_1x}(ik_1c_2\boldsymbol{e}^{-ik_1x}) + c_2\boldsymbol{e}^{-ik_1x}(ik_1c_2^*\boldsymbol{e}^{ik_1x})\right)$$

$$j_r(x) = \frac{-\hbar k_1}{m}(c_2^*\, c_2)$$

$$j_r(x) = -\frac{\hbar k_1}{m}|c_2|^2$$

III.3.La densité de courant transmis :

$$j_t(x) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi_t^*\frac{\partial\Psi_t}{\partial x} - \Psi_t\frac{\partial\Psi_t^*}{\partial x}\right)$$

On à

$$\Psi_t(x) = c_3\boldsymbol{e}^{ik_2x}$$

$$\Psi_t^* = c_3^* e^{-ik_2x}$$

c_3^* : est un nombre complexe conjugué de c_3

$$j_t(x) = \frac{i\hbar}{2m}\left(c_3^* e^{-ik_2x}(ik_2c_3\boldsymbol{e}^{ik_2x}) + c_3\boldsymbol{e}^{ik_2x}(ik_2c_3^*\boldsymbol{e}^{-ik_2x})\right)$$

$$j_t(x) = \frac{-\hbar k_2}{m}(c_3^*\, c_3)$$

$$j_t = -\frac{\hbar k_2}{m}|c_3|^2$$

III.4. Coefficient de réflexion :

$$\mathrm{R} = \frac{\left\|\text{probabilité d'onde réfléchie}\right\|}{\|\text{probabilité d'onde ncidente}\|}$$

$$\mathrm{R} = \frac{j_r}{j_i} = \left|\frac{c_2}{c_1}\right|^2$$

$$R = \left| \frac{\left(\frac{k_1 - k_2}{2k_1}\right) c_3}{\left(\frac{k_1 + k_2}{2k_1}\right) c_3} \right|^2 = \left| \frac{(k_1 - k_2)}{(k_1 + k_2)} \right|^2$$

Donc :

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} \qquad (I.11)$$

III.5. Coefficient de transmission :

$$T = \frac{\|\text{probabilité d}'\text{onde transmise}\|}{\|\text{probabilité d}'\text{onde incidente}\|}$$

$$T = \frac{j_t}{j_i} = \frac{k_2}{k_1} \left| \frac{c_3}{c_1} \right|^2$$

$$T = \frac{k_2}{k_1} \left| \frac{c_3}{\left(\frac{k_1 + k_2}{2k_1}\right) c_3} \right|^2$$

$$T = \frac{k_2}{k_1} \left| \frac{2k_1}{(k_1 + k_2)} \right|^2 = \frac{4k_2 k_1}{(k_1 + k_2)^2}$$

Donc :

$$T = \frac{4k_2 k_1}{(k_1 + k_2)^2} \qquad (I.12)$$

Notez que la somme des coefficients de réflexion et de transmission est égale à 1.

$$R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

Et :

$$T = \frac{4k_2 k_1}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$R+T = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} + \frac{4k_2 k_1}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{k_1^2 + k_2^2 - 2k_2 k_1 + 4k_2 k_1}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{k_1^2 + k_2^2 + 2k_2 k_1}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = 1$$

Donc :

$$R+T=1$$

Chapitre II :

Résolution de l'équation de Schrödinger pour une barrière rectangulaire de potentiel

II.1.Barrière rectangulaire de potentiel:

La barrière rectangulaire de potentiel [6] dans les trois régions **I** à **III** par s'exprime :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

La figure ci-dessous représente la forme d'une barrière rectangulaire de potentiel :

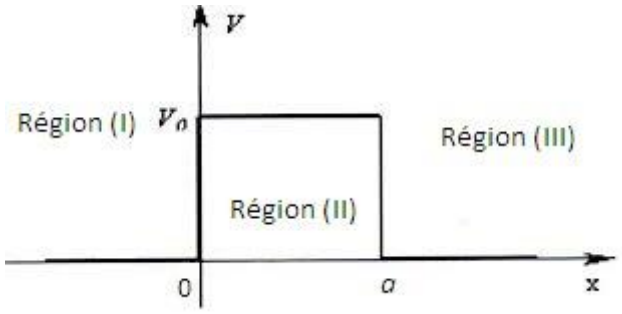


Figure (02) : barrière rectangulaire de potentiel

II.2. Résolution de l'équation de Schrödinger à une dimension avec masse constante :

En revenant ou premier chapitre, nous constatons que l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\Psi(x) = \mathrm{E}\Psi(x)$$

Alor :

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\big(\mathrm{E} - V(x)\big)\Psi(x) = 0 \qquad \text{(II.1)}$$

Dans le cas où $\mathrm{E} > V_0$ initialement, l'équation (II.1) doit être résolue dans chaque région :

II.2.1.La solution dans la région I : pour $x < 0$, $V(x) = 0$

En partant de l'équation (II.1) et en substituant la valeur de $V(x)$, on trouve :

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\big(\mathrm{E} - V(x)\big)\Psi(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi_1(x) + \frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}\Psi_1(x) = 0 \qquad \text{(II.2)}$$

On pose

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}}$$

En substituant la valeur de $k_1$dans l'équation (II.2) nous trouvons :

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2}\Psi_1(x) + k_1^2\,\Psi_1(x) = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre dont la solution s'écrit:

$$\Psi_1(x) = c_1 e^{ik_1 x} + c_2 e^{-ik_1 x} \tag{II.3}$$

Tel que

c_1: c_2: Ce sont des constantes réelles

II.2.2. La solution dans la région II : pour $0 < x < a$, $V(x) = V_0$

En partant de l'équation (II.1) et en substituant la valeur de $V(x)$, on trouve :

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\big(\mathrm{E} - V(x)\big)\Psi(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi_2(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\big(\mathrm{E} - V_0(x)\big)\Psi_2(x) = 0 \tag{II.4}$$

On pose

$$k_2 = \sqrt{\frac{2m(\mathrm{E} - V_0)}{\hbar^2}}$$

En substituant la valeur de k_2 dans l'équation (II.4) nous trouvons :

L'équation prend la forme :

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi_2(x) + k_2^2\,\Psi_2(x) = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre dont la solution s'écrit:

$$\Psi_2(x) = c_3 e^{ik_2 x} + c_4 e^{-ik_2 x} \tag{II.5}$$

Tel que

c_3: c_4: Ce sont des constantes réelles.

II.2.3. La solution dans la région III : pour $x > a$, $V(x) = 0$

En partant de l'équation (II.1) et en substituant la valeur de $V(x)$, on trouve :

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\big(\mathrm{E} - V(x)\big)\Psi(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi_1(x) + \frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}\Psi_1(x) = 0 \tag{II.6}$$

On pose

$$k_1 = \sqrt{\frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}}$$

En substituant la valeur de $k_1$dans l'équation (II.6) nous trouvons :

$$\Rightarrow \qquad \frac{d^2}{dx^2}\Psi_1(x) + k_1^2\,\Psi_1(x) = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre dont la solution s'écrit:

$$\Psi_3(x) = c_5 e^{ik_1x} + c_6 e^{-ik_1x}$$

On sait qu'il n'y a pas d'onde réfléchie ce qui signifie :

$$c_6 e^{-ik_1x} = 0 \qquad \Rightarrow c_6 = 0$$

Donc :

$$\Psi_3(x) = c_5 e^{ik_1x} \tag{II.7}$$

Tel que

c_5: C'est une constante réelle.

Les solutions de Ψ(x) dans les trois sont résumées comme suit :

$$\Psi(x) = \begin{cases} c_1 e^{ik_1x} + c_2 e^{-ik_1x} & x < 0 \\ c_3 e^{ik_2x} + c_4 e^{-ik_2x} & 0 < x < a \\ c_5 e^{ik_1x} & x > a \end{cases} \tag{II.8}$$

II.3.Les condition de continuité :

Les conditions de continuité à $x = 0$ et à $x = a$ pour la fonction d'onde ainsi que de sa dérivée :

$$\begin{cases} \Psi_1(0) = \Psi_2(0) & \text{(II.9)} \\ \frac{d\Psi_1(0)}{dx} = \frac{d\Psi_2(0)}{dx} & \text{(II.10)} \\ \Psi_2(a) = \Psi_3(a) & \text{(II.11)} \\ \frac{d\Psi_2(a)}{dx} = \frac{d\Psi_3(a)}{dx} & \text{(II.12)} \end{cases}$$

Sur la base des équations (II.8) , (II.9) , (II.10) , (II.11) et (II.12) on trouve :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = c_3 + c_4 \\ ik_1(c_1 - c_2) = ik_2(c_3 - c_4) \\ c_3 e^{ik_2a} + c_4 e^{-ik_2a} = c_5 e^{ik_1a} \\ ik_2\left(c_3 e^{ik_2a} - c_4 e^{-ik_2a}\right) = ik_1\, c_5 e^{ik_1a} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = c_3 + c_4 & (II.13) \\ c_1 - c_2 = \dfrac{k_2}{k_1}(c_3 - c_4) & (II.14) \\ c_3 e^{ik_2 a} + c_4 e^{-ik_2 a} = c_5 e^{ik_1 a} & (II.15) \\ \left(c_3 e^{ik_2 a} - c_4 e^{-ik_2 a}\right) = \dfrac{k_1}{k_2} c_5 e^{ik_1 a} & (II.16) \end{cases}$$

On additionne les deux équations (II. 13)et (II. 14) :

$$\Rightarrow \quad 2c_1 = c_3\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) + c_4\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)$$

$$c_1 = \left(\frac{k_1 + k_2}{2k_1}\right) c_3 + \left(\frac{k_1 - k_2}{2k_1}\right) c_4 \qquad (II.17)$$

Maintenant on soustrait les deux équations(II. 13)et (II. 14) :

$$\Rightarrow \quad 2c_2 = c_3\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) + c_4\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)$$

$$c_2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{2k_1}\right) c_3 + \left(\frac{k_1 + k_2}{2k_1}\right) c_4 \qquad (II.18)$$

On additionne les deux équations (II. 15)et (II. 16) :

$$\Rightarrow \quad 2c_3 e^{ik_2 a} = \left(1 + \frac{k_1}{k_2}\right) e^{ik_1 a} c_5$$

$$c_3 = \left(\frac{k_1 + k_2}{2k_2}\right) e^{i(k_1 - k_2)a} c_5 \qquad (II.19)$$

Maintenant on soustrait les deux équations (II. 15) et (II. 16) :

$$\Rightarrow \quad 2c_4 e^{-ik_2 a} = \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right) e^{ik_1 a} \; c_5$$

$$c_4 = \left(\frac{k_2 - k_1}{2k_2}\right) e^{i(k_1 + k_2)a} \; c_5 \qquad (II.20)$$

Remplace (II. 19)et (II. 20)dans (II. 17):

$$\Rightarrow \quad c_1 = \left(\frac{k_1 + k_2}{2k_1}\right) c_3 + \left(\frac{k_1 - k_2}{2k_1}\right) c_4$$

$$c_1 = \left(\frac{k_1 + k_2}{2k_1}\right)\left(\frac{k_1 + k_2}{2k_2}\right) e^{i(k_1 - k_2)a} c_5 + \left(\frac{k_1 - k_2}{2k_1}\right)\left(\frac{k_2 - k_1}{2k_2}\right) e^{i(k_1 + k_2)a} c_5$$

$$c_1 = \left[\frac{(k_1 + k_2)^2}{4k_1 k_2} e^{i(k_1 - k_2)a} - \frac{(k_1 - k_2)^2}{4k_1 k_2} e^{i(k_1 + k_2)a}\right] c_5 \qquad (II.21)$$

Remplace (II. 19)et (II. 20)dans (II. 18):

$$\Rightarrow \quad c_2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{2k_1}\right) c_3 + \left(\frac{k_1 + k_2}{2k_1}\right) c_4$$

$$c_2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{2k_1}\right)\left(\frac{k_1 + k_2}{2k_2}\right) e^{i(k_1 - k_2)a} c_5 + \left(\frac{k_1 + k_2}{2k_1}\right)\left(\frac{k_2 - k_1}{2k_2}\right) e^{i(k_1 + k_2)a} c_5$$

$$c_2 = \left[\frac{({k_1}^2 - {k_2}^2)}{4k_1 k_2} e^{i(k_1 - k_2)a} - \frac{({k_1}^2 - {k_2}^2)}{4k_1 k_2} e^{i(k_1 + k_2)a}\right] c_5 \qquad (II.22)$$

En conséquence, les constantes peuvent être écrites :

$$\begin{cases} c_1 = \left[\frac{(k_1+k_2)^2}{4k_1k_2} e^{i(k_1-k_2)a} - \frac{(k_1-k_2)^2}{4k_1k_2} e^{i(k_1+k_2)a}\right] c_5 \\ c_2 = \left[\frac{({k_1}^2-{k_2}^2)}{4k_1k_2} e^{i(k_1-k_2)a} - \frac{({k_1}^2-{k_2}^2)}{4k_1k_2} e^{i(k_1+k_2)a}\right] c_5 \\ c_3 = \left(\frac{k_1+k_2}{2k_2}\right) e^{i(k_1-k_2)a} \quad c_5 \\ c_4 = \left(\frac{k_2-k_1}{2k_2}\right) e^{i(k_1+k_2)a} \quad c_5 \end{cases}$$

II.4. Les coefficients de réflexion et de transmission :

Pour calculer les coefficients de transmission et réflexion T et R : il faut appliquer les conditions de continuité au borne de potentiel à $x = 0$ et à $x = a$ pour la fonction d'onde ainsi que de sa dérivée.

II.4.1. Coefficient de réflexion :

Le coefficient de réflexion de la barrière s'écrit sous la forme

$$\mathrm{R} = \frac{\|\text{probabilité d'onde réfléchie}\|}{\|\text{probabilité d'onde incidente}\|}$$

$$\mathrm{R} = \left|\frac{c_2}{c_1}\right|^2$$

$$\mathrm{R} = \left|\frac{\left[\frac{({k_1}^2-{k_2}^2)}{4k_1k_2} e^{i(k_1-k_2)a} - \frac{({k_1}^2-{k_2}^2)}{4k_1k_2} e^{i(k_1+k_2)a}\right] c_5}{\left[\frac{(k_1+k_2)^2}{4k_1k_2} e^{i(k_1-k_2)a} - \frac{(k_1-k_2)^2}{4k_1k_2} e^{i(k_1+k_2)a}\right] c_5}\right|^2$$

Alors il prend la forme

$$\mathrm{R} = \left|\frac{\left[\left({k_1}^2-{k_2}^2\right)\left(e^{ik_2a}-\left(e^{-ik_2a}\right)\right]\right.}{\left[(k_1+k_2)^2e^{-ik_2a}-(k_1-k_2)^2e^{ik_2a}\right]}\right|^2$$

En le simplifiant, on arrive à :

$$\mathrm{R} = \left|\frac{\left[\left({k_1}^2-{k_2}^2\right)sin\,(k_2a)\right]}{\left[\left({k_1}^2+{k_2}^2\right)sin\,(k_2a)+(2ik_1k_2)\,cos\,(k_2a)\right]}\right|^2 \qquad (\text{II. 23})$$

II.4.2. Coefficient de transmission :

On introduit le coefficient de transmission T de la barrière

$$\mathrm{T} = \frac{\|\text{probabilité d'onde transmise}\|}{\|\text{probabilité d'onde incidente}\|}$$

Ce qui conduit à

$$\mathrm{T} = \left|\frac{c_5}{c_1}\right|^2$$

$$T = \left| \frac{c_5}{\left[\frac{(k_1+k_2)^2}{4k_1k_2} e^{i(k_1-k_2)a} - \frac{(k_1-k_2)^2}{4k_1k_2} e^{i(k_1+k_2)a} \right] c_5} \right|^2$$

$$T = \left| \frac{4k_1k_2e^{-ik_1a}}{[(k_1+k_2)^2e^{-ik_2a} - (k_1-k_2)^2e^{ik_2a}]} \right|^2$$

$$T = \left| \frac{4k_1k_2e^{-ik_1a}}{\left[\left(k_1{}^2 + k_2{}^2 + 2k_1k_2\right)e^{-ik_2a} - \left(k_1{}^2 + k_2{}^2 - 2k_1k_2\right)e^{ik_2a}\right]} \right|^2$$

Après simplification nous obtenons le coefficient ci-dessous

$$T = \frac{(4k_1k_2)^2}{[(k_1+k_2)^4-(k_1-k_2)^4-2(k_1+k_2)^2(k_1-k_2)^2\,cos\,2k_2a]}$$

Que l'on peut écrire également sous la forme :

$$T = \frac{4(k_1k_2)^2}{[(k_1{}^2-k_2{}^2)\,sin^2(k_2a)+4k_1{}^2k_2{}^2]} \qquad \text{(II. 24)}$$

Chapitre III :

Résolution de l’équation de Schrödinger pour une barrière trapézoïdale

III.1. Barrière trapézoïdale [7]:

Le potentiel de barrière trapézoïdale [8] s'exprime en trois régions **I** à **III** par :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 + \frac{(V_1 - V_0)}{a} x & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad , V_1 < V_0$$

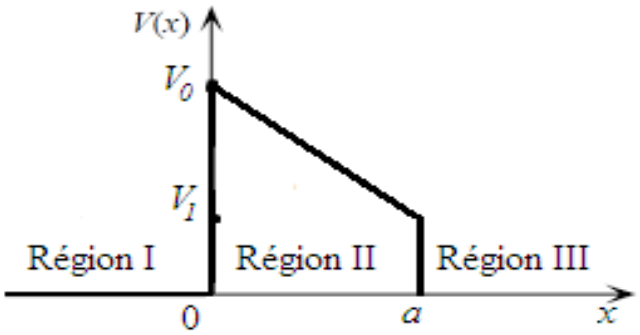


Figure (03) : Barrière trapézoïdale

Avec :

V_0, V_1: L'énergie potentielle d'une particule.

L'équation de Schrödinger à une dimension s'écrit :

$$H\Psi(x) = E\Psi(x)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(\mathrm{E} - V(x))\Psi(x) = 0 \qquad (\mathrm{III.1})$$

Dans le cas où $\mathrm{E} > V_0$ initialement, l'équation (III.1) doit être résolue dans chaque région :

III.1.1.La solution dans la région 1 : pour $x < 0$ on à $V(x) = 0$

En partant de l'équation $(\mathrm{III.1})$nous trouvons :

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi_1(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(\mathrm{E} - 0)\Psi_1(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi_1(x) + \frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}\Psi_1(x) = 0$$

On pose

$$k = \sqrt{\frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}}$$

⇨

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi_1(x) + k^2\Psi_1(x) = 0 \qquad (\mathrm{III.2})$$

Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre dont la solution s'écrit:

$$\Psi_1(x) = A\boldsymbol{e}^{ikx} + A' e^{-ikx} \qquad \text{(III. 3)}$$

Tel que

A et A' : Ce sont des constantes réelles.

III.1.2.La solution dans la région II : pour $0 < x < a$ on à $V(x) = V_0 + \frac{(V_1 - V_0)}{a} x$

En partant de l'équation (III. 1) nous trouvons :

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi_2(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\big(\mathrm{E} - V(x)\big)\Psi_2(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[\mathrm{E} - \left(V_0 + \frac{(V_1 - V_0)}{a} x\ \right)\right]\psi(x) = 0 \qquad \text{(III. 4)}$$

On pose :

$$\beta = \frac{V_1}{V_0} \qquad \text{Avec} \qquad 0 < \beta < 1$$

$$\Longrightarrow V_1 = V_0\,\beta$$

Et

$$\eta = 1 - \beta$$

$$\epsilon^2 = \frac{E}{V_0}\ ,\ k_0^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$$

On injecte le paramètre V_1 où obtient (III. 4):

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[\mathrm{E} - \left(V_0 + (\beta - 1)V_0\,\frac{x}{a}\right)\right]\psi(x) = 0 \qquad \text{(III. 5)}$$

On injecte les paramètres η , ϵ^2et k_0^2 on obtient (III. 5):

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}\left[\mathrm{E} - \left(V_0\left(1 - \eta\,\frac{x}{a}\right)\right]\right]\psi(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{2mV_0}{\hbar^2}\left[\frac{E}{V_0} + \eta\,\frac{x}{a} - 1\ \right)\right]\psi(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + k_0^2\left[\ \eta\,\frac{x}{a} + \epsilon^2 - 1\ \right)\right]\psi(x) = 0 \qquad \text{(III. 6)}$$

On pose

$$\xi = \xi(x) = q_0\left[\ \eta\,\frac{x}{a} + \epsilon^2 - 1\ \right]$$

Et

$$q_0 = (k_0 a)^{\frac{2}{3}}\,\eta^{\frac{-2}{3}}$$

On aura

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \frac{d\psi(x)}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{d\psi(x)}{d\xi}\frac{q_0\eta}{a}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{d\psi(x)}{d\xi}\frac{d\psi(x)}{dx}\frac{d\xi}{dx}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = \frac{d\psi(x)}{d\xi}\left(\frac{q_0\eta}{a}\frac{d\psi(x)}{d\xi}\right)\frac{q_0\eta}{a} = \left(\frac{q_0\eta}{a}\right)^2\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi)$$

En substituant dans l'équation (III. 6), nous trouvons :

$$\left(\frac{q_0\eta}{a}\right)^2\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi) + \frac{k_0^2}{q_0}\xi\,\psi(\xi) = 0$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi) + \frac{\frac{k_0^2}{q_0}}{\left(\frac{q_0\eta}{a}\right)^2}\xi\,\psi(\xi) = 0$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi) + \frac{k_0^2 a^3}{{q_0}^3\eta^2}\xi\,\psi(\xi) = 0$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi) + \frac{k_0^2\,a^2}{\left[(k_0a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{-2}{3}}\right]^3\eta^2}\xi\,\psi(\xi)=0$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\psi(\xi) + \xi\,\psi(\xi)=0 \qquad \text{(III. 7)}$$

Cette équation dont les solutions sont connues pour exprimées en termes de fonction d'Airy [9]

$A_i(-\xi)$ et $B_i(-\xi)$.

$$\psi_2(\xi) = BA_i(-\xi) + B'B_i(-\xi)$$

Tel que

B, B' : Ce sont des constantes réelles.

III.1.3.La solution dans la région III : pour $x > 0$ on à $V(x) = V_0$

En partant de l'équation (III. 1) nous trouvons :

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi_3(x) + \frac{2m}{\hbar^2}(\mathrm{E} - 0)\Psi_3(x) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi_3(x) + \frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}\Psi_3(x) = 0$$

On pose

$$k = \sqrt{\frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}}$$

Donc

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2}{dx^2}\Psi_3(x) + k^2\Psi_3(x) = 0$$

Il s'agit d'une équation différentielle de 2eme d'ordre dont la solution s'écrit :

$$\Psi_3(x) = C\boldsymbol{e}^{ikx} + C' e^{-ikx}$$

On sait qu'il n'y a pas d'onde réfléchie ce qui signifie :

$$C' e^{-ikx} = 0 \Rightarrow \quad C' = 0$$

Donc :

$$\Psi_3(x) = C\boldsymbol{e}^{ikx}$$

Tel que

C: Est une constante réelle.

Les solutions de $\Psi(x)$ dans les trois régions sont résumées comme suit :

$$\Psi(x) = \begin{cases} A\boldsymbol{e}^{i\,kx} + A' e^{-i\,kx} & x < 0 \\ BA_i(-\xi) + B' B_i(-\xi) & 0 < x < a \\ C\boldsymbol{e}^{i\,kx} & x > a \end{cases}$$

Pour diviser toutes les solutions par la constante A :

$$\Psi(x) = \begin{cases} \boldsymbol{e}^{i\,kx} + c_1 e^{-i\,kx} & x < 0 \\ c_2 A_i(-\xi) + c_3 B_i(-\xi) & 0 < x < a \\ c_4\boldsymbol{e}^{i\,kx} & x > a \end{cases}$$

Les quantités c_1,c_2 , c_3 et c_4 peuvent être déterminées comme d'habitude en imposant la continuité de la solution et sa dérivée aux frontières du potentiel.

III.2. Les conditions de continuité :

Les conditions de continuité à $x = 0$ et à $x = a$ pour la fonction d'onde ainsi que de sa dérivée :

$$\begin{cases} \Psi_1(0) = \Psi_2(0) \\ \dfrac{d\Psi_1(0)}{dx} = \dfrac{d\Psi_2(0)}{dx} \\ \Psi_2(a) = \Psi_3(a) \\ \dfrac{d\Psi_2(a)}{dx} = \dfrac{d\Psi_3(a)}{dx} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} 1 + c_1 = c_2 A_i(-\xi_0) + c_3 B_i(-\xi_0) & (\text{III. 8}) \\ ik(1 - c_1) = -\frac{q_0\eta}{a}[c_2 A_i'(-\xi_0) + c_3 B_i'(-\xi_0)] & (\text{III. 9}) \\ c_2 A_i(-\xi_a) + c_3 B_i(-\xi_a) = c_4\boldsymbol{e}^{ika} & (\text{III. 10}) \\ -\frac{q_0\eta}{a}[c_2 A_i'(-\xi_a) + c_3 B_i'(-\xi_a)] = ik\, c_4\boldsymbol{e}^{ika} & (\text{III. 11}) \end{cases}$$

On additionne les deux équations (III. 8)et (III. 9) :

$$2ik=c_2\left[ikA_i(-\xi_0)-\frac{q_0\eta}{a}A_i^{'}(-\xi_0)\right]+c_3\left[ikB_i(-\xi_0)-\frac{q_0\eta}{a}B_i^{'}(-\xi_0)\right] \quad \text{(III. 12)}$$

Maintenant on soustrait les deux équations (III. 8)et (III. 9) :

$$2ikc_1=c_2\left[ikA_i(-\xi_0)+\frac{q_0\eta}{a}A_i^{'}(-\xi_0)\right]+c_3\left[ikB_i(-\xi_0)+\frac{q_0\eta}{a}B_i^{'}(-\xi_0)\right] \quad \text{(III. 13)}$$

On additionne les deux équations (III. 10)et (III. 11) :

$$2ik\ c_4\boldsymbol{e}^{ika}=c_2\left[ikA_i(-\xi_a)-\frac{q_0\eta}{a}A_i^{'}(-\xi_a)\right]+c_3\left[ikB_i(-\xi_a)-\frac{q_0\eta}{a}B_i^{'}(-\xi_a)\right] \quad \text{(III. 14)}$$

Maintenant on soustrait les deux équations (III. 10)et (III. 11) :

$$c_2\left[ikA_i(-\xi_a)+\frac{q_0\eta}{a}A_i^{'}(-\xi_a)\right]+c_3\left[ikB_i(-\xi_a)+\frac{q_0\eta}{a}B_i^{'}(-\xi_a)\right]=0 \quad \text{(III. 15)}$$

Dans ce but, il convient d'introduire les fonctions $F(\xi)$ et $G(\xi)$ définies par :

$$F(\xi)=ikA_i(-\xi)-\frac{q_0\eta}{a}A_i^{'}(-\xi)\ ,\ \eta\neq 0$$

$$G(\xi)=ikB_i(-\xi)-\frac{q_0\eta}{a}B_i^{'}(-\xi)\ ,\ \eta\neq 0$$

En utilisant les fonctions $F(\xi)$ et $G(\xi)$,les équations deviennent (III. 12), (III. 13), (III. 14) et (III. 15):

$$2ik=c_2F(\xi_0)+c_3G(\xi_0) \quad \text{(III. 16)}$$

$$2ikc_1=c_2F^*(\xi_0)+c_3G^*(\xi_0) \quad \text{(III. 17)}$$

$$2ikc_4\boldsymbol{e}^{ika}=c_2F(\xi_a)+c_3G(\xi_a) \quad \text{(III. 18)}$$

$$c_2F^*(\xi_a)+c_3G^*(\xi_a)=0 \quad \text{(III. 19)}$$

A partir de l'équation (III. 19)nous trouvons :

$$c_2=-\frac{G^*(\xi_a)}{F^*(\xi_a)}c_3 \quad \text{(III. 20)}$$

En remplace l'équation (III. 20)dans la relation (III. 16)on à:

$$2ik=c_2F(\xi_0)+c_3G(\xi_0)$$

$$2ik=\frac{-F(\xi_0)G^*(\xi_a)+G(\xi_0)F^*(\xi_a)}{F^*(\xi_a)}c_3$$

$$\Rightarrow c_3=\frac{2ikF^*(\xi_a)}{-F(\xi_0)G^*(\xi_a)+G(\xi_0)F^*(\xi_a)}$$

On pose

$$\Delta=F^*(\xi_a)G(\xi_0)-F(\xi_0)G^*(\xi_a)$$

Donc

$$c_3=\frac{2\ ik}{\Delta}F^*(\xi_a)$$

A partir de l'équation (III. 20)nous trouvons :

$$c_2 = -\frac{G^*(\xi_a)}{F^*(\xi_a)} c_3$$

$$\Rightarrow c_3 = -\frac{F^*(\xi_a)}{G^*(\xi_a)} c_2 \qquad \text{(III. 21)}$$

En remplace l'équation (III. 21) dans la relation (III. 16) on à :

$$2ik = c_2 F(\xi_0) + c_3 G(\xi_0)$$

$$2ik = \frac{F(\xi_0)G^*(\xi_a) - F^*(\xi_a)G(\xi_0)}{G^*(\xi_a)} c_2$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{2ikG^*(\xi_a)}{F(\xi_0)G^*(\xi_a) - F^*(\xi_a)G(\xi_0)}$$

Donc

$$\Rightarrow c_2 = \frac{-2\,ik}{\Delta} G^*(\xi_a) \qquad \text{(III. 22)}$$

On remplace les deux équations (III. 21) et (III. 22) dans (III. 17):

$$2ikc_1 = c_2 F^*(\xi_0) + c_3 G^*(\xi_0)$$

$$2ikc_1 = \frac{-2\,ik}{\Delta} G^*(\xi_a)F^*(\xi_0) + \frac{2\,ik}{\Delta} F^*(\xi_a)G^*(\xi_0)$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{1}{\Delta}\left(F^*(\xi_a)G^*(\xi_0) - F^*(\xi_0)G^*(\xi_a)\right) \qquad \text{(III. 23)}$$

A partir de l'équation (III. 18)nous trouvons :

$$2ik\ c_4 \boldsymbol{e}^{i\,ka} = c_2 F(\xi_a) + c_3 G(\xi_a)$$

$$\Rightarrow c_4 = \frac{1}{2ik}\left(c_2 F(\xi_a) + c_3 G(\xi_a)\right)\boldsymbol{e}^{-i\,ka}$$

$$c_4 = \frac{1}{2\,ik}\left(-\frac{2\,ik}{\Delta} G^*(\xi_a)F(\xi_a) + \frac{2\,ik}{\Delta} F^*(\xi_a)G(\xi_a)\right)\boldsymbol{e}^{-i\,ka}$$

$$c_4 = \frac{1}{\Delta}\left(F^*(\xi_a)G(\xi_a) - G^*(\xi_a)F(\xi_a)\right)\boldsymbol{e}^{-i\,ka}$$

$c_4 =$

$$\frac{1}{\Delta}\left\{\begin{array}{l}\left[-k^2 A_i(-\xi_a)B_i(-\xi_a) + \frac{ikq_0\eta}{a}\left(A_i(-\xi_a)B_i'(-\xi_a) - A_i'(-\xi_a)B_i(-\xi_a)\right) - \left(\frac{q_0\eta}{a}\right)^2 A_i'(-\xi_a)B_i'(-\xi_a)\right] + \\ \left[k^2 A_i(-\xi_a)B_i(-\xi_a) + \frac{ikq_0\eta}{a}\left(A_i(-\xi_a)B_i'(-\xi_a) - A_i'(-\xi_a)B_i(-\xi_a)\right) + \left(\frac{q_0\eta}{a}\right)^2 A_i'(-\xi_a)B_i'(-\xi_a)\right]\end{array}\right\}\boldsymbol{e}^{-i\,ka}$$

$$c_4 = \frac{1}{\Delta}\left\{\frac{2ikq_0\eta}{a}\left[A_i(-\xi_a)B_i'(-\xi_a) - A_i'(-\xi_a)B_i(-\xi_a)\right]\right\}\boldsymbol{e}^{-i\,ka}$$

Nous avons utilisé la propriété de Wronskien des fonctions d'Airy [10] W[*Ai(x), Bi(x)*] = 1/π

$$c_4 = \frac{2\,ikq_0\eta}{\pi a\,\Delta}\boldsymbol{e}^{-i\,ka} \qquad \text{(III. 24)}$$

Les solutions peuvent donc s'écrire :

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{\Delta}\left(F^*(\xi_0)G^*(\xi_a) - F^*(\xi_a)G^*(\xi_0)\right) \\ c_2 = \dfrac{-2\,ik}{\Delta}G^*(\xi_a) \\ c_3 = \frac{2\,ik}{\Delta}F^*(\xi_a) \\ c_4 = \frac{2\,ik\,q_0\eta}{\pi a\,\Delta}\boldsymbol{e}^{-i\,ka} \end{cases}$$

Selon la relation (III. 23)on trouve :

$$c_1 = \frac{1}{\Delta}\left(F^*(\xi_0)G^*(\xi_a) - F^*(\xi_a)G^*(\xi_0)\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{\Delta}\left\{\begin{array}{l}\left(ikA_i(-\xi_0) + \dfrac{q_0\eta}{a}A_i^{'}(-\xi_0)\right)\left(ikB_i(-\xi_a) + \dfrac{q_0\eta}{a}B_i^{'}(-\xi_a)\right) \\ -\left(ikA_i(-\xi_a) + \dfrac{q_0\eta}{a}A_i^{'}(-\xi_a)\right)\left(ikB_i(-\xi_0) + \dfrac{q_0\eta}{a}B_i^{'}(-\xi_0)\right)\end{array}\right\}$$

$$c_1 = \frac{1}{\Delta}\left\{\begin{array}{l}\left[\left(-k^2A_i(-\xi_0)B_i(-\xi_a)\right) + \left(ik\dfrac{q_0\eta}{a}A_i(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)\right) + \left(ik\dfrac{q_0\eta}{a}A_i^{'}(-\xi_0)B_i(-\xi_a)\right) + \left(\left(\dfrac{q_0\eta}{a}\right)^2A_i^{'}(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)\right)\right] \\ -\left[\left(-k^2A_i(-\xi_a)B_i(-\xi_0)\right) + \left(ik\dfrac{q_0\eta}{a}A_i(-\xi_a)B_i^{'}(-\xi_0)\right) + \left(ik\dfrac{q_0\eta}{a}A_i^{'}(-\xi_a)B_i(-\xi_0)\right) + \left(\left(\dfrac{q_0\eta}{a}\right)^2A_i^{'}(-\xi_a)B_i^{'}(-\xi_0)\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$c_1 = \frac{1}{\Delta}\left\{\begin{array}{c}-k^2\left(A_i(-\xi_0)B_i(-\xi_a) - A_i(-\xi_a)B_i(-\xi_0)\right) - ik\dfrac{q_0\eta}{a}\left(A_i(-\xi_a)B_i^{'}(-\xi_0) - A_i^{'}(-\xi_0)B_i(-\xi_a)\right) \\ -ik\dfrac{q_0\eta}{a}\left(A_i^{'}(-\xi_a)B_i(-\xi_0) - \dfrac{q_0\eta}{a}A_i(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)\right) - \left(\dfrac{q_0\eta}{a}\right)^2\left(A_i^{'}(-\xi_a)B_i^{'}(-\xi_0) - A_i^{'}(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)\right)\end{array}\right\}\frac{{k_0}^2}{{k_0}^2}$$

$$c_1 = \frac{1}{\Delta}\left\{\begin{array}{c}-\epsilon^2\left(A_i(-\xi_0)B_i(-\xi_a) - A_i(-\xi_a)B_i(-\xi_0)\right) - i\dfrac{\epsilon q_0\eta}{k_0a}\left(A_i(-\xi_a)B_i^{'}(-\xi_0) - A_i^{'}(-\xi_0)B_i(-\xi_a)\right) \\ -i\dfrac{\epsilon q_0\eta}{k_0a}\left(A_i^{'}(-\xi_a)B_i(-\xi_0) - \dfrac{q_0\eta}{a}A_i(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)\right) - \left(\dfrac{q_0\eta}{\frac{\epsilon q_0\eta}{k_0a}a}\right)^2\left(A_i^{'}(-\xi_a)B_i^{'}(-\xi_0) - A_i^{'}(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)\right)\end{array}\right\}\frac{{k_0}^2}{{k_0}^2}$$

En introduisant les grandeurs auxiliaires :

$$R_1 = \epsilon^2[A_i(-\xi_0)B_i(-\xi_a) - A_i(-\xi_a)B_i(-\xi_0)] \qquad \text{(III. 25)}$$

$$R_2 = \left(\frac{q_0\eta}{k_0a}\right)^2\left[\left(A_i^{'}(-\xi_a)B_i^{'}(-\xi_0) - A_i^{'}(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)\right)\right] \qquad \text{(III. 26)}$$

$$I_1 = \frac{\epsilon q_0\eta}{k_0a}[A_i(-\xi_a)B_i^{'}(-\xi_0) - A_i^{'}(-\xi_0)B_i(-\xi_a)]\,, \quad \eta \neq 0 \qquad \text{(III. 27)}$$

Et

$$I_2 = \frac{\epsilon q_0\eta}{k_0a}[A_i^{'}(-\xi_a)B_i(-\xi_0) - A_i(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)]\,, \quad \eta \neq 0 \qquad \text{(III. 28)}$$

$$c_1 = -\frac{1}{\Delta}\left[{k_0}^2(R_1 + R_2) + i(I_1 + I_2)\right] \quad \text{(III. 29)}$$

On pose

$$N_{c1} = {k_0}^2(R_1 + R_2) + i(I_1 + I_2)$$

$$c_1 = \frac{-N_{c1}}{\Delta} \quad \text{(III. 30)}$$

Et

$$\Delta = F^*(\xi_a)G(\xi_0) - F(\xi_0)G^*(\xi_a)$$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l} \left(ikA_i(-\xi_a) + \frac{q_0\eta}{a}A_i^{'}(-\xi_a)\right)\left(ikB_i(-\xi_0) - \frac{q_0\eta}{a}B_i^{'}(-\xi_0)\right) \\ -\left(ikA_i(-\xi_0) - \frac{q_0\eta}{a}A_i^{'}(-\xi_0)\right)\left(ikB_i(-\xi_a) + \frac{q_0\eta}{a}B_i^{'}(-\xi_a)\right) \end{array} \right\}$$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} -k^2\left(A_i(-\xi_a)B_i(-\xi_0)\right) - ik\frac{q_0\eta}{a}\left(A_i(-\xi_a)B_i^{'}(-\xi_0)\right) \\ +ik\frac{q_0\eta}{a}\left(A_i^{'}(-\xi_a)B_i(-\xi_0)\right) - \left(\frac{q_0\eta}{a}\right)^2\left(A_i^{'}(-\xi_a)B_i^{'}(-\xi_0)\right) \\ +\left(k^2A_i(-\xi_0)B_i(-\xi_a)\right) - \left(ik\frac{q_0\eta}{a}A_i(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)\right) \\ +\left(ik\frac{q_0\eta}{a}A_i^{'}(-\xi_0)B_i(-\xi_a)\right) + \left(\left(\frac{q_0\eta}{a}\right)^2A_i^{'}(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)\right) \end{array} \right\}$$

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} -k^2[A_i(-\xi_0)B_i(-\xi_a) - A_i(-\xi_a)B_i(-\xi_0)] \\ +ik\frac{q_0\eta}{a}[A_i(-\xi_a)B_i^{'}(-\xi_0) - A_i^{'}(-\xi_0)B_i(-\xi_a)] \\ -ik\frac{q_0\eta}{a}[A_i^{'}(-\xi_a)B_i(-\xi_0) - A_i(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)] \\ +\left(\frac{q_0\eta}{k_0a}\right)^2[A_i^{'}(-\xi_a)B_i^{'}(-\xi_0) - A_i^{'}(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)] \end{array} \right\}\frac{{k_0}^2}{{k_0}^2}$$

$$\Delta = {k_0}^2\left\{ \begin{array}{c} \epsilon^2[A_i(-\xi_0)B_i(-\xi_a) - A_i(-\xi_a)B_i(-\xi_0)] \\ -i\frac{\epsilon q_0\eta}{k_0a}[A_i(-\xi_a)B_i^{'}(-\xi_0) - A_i^{'}(-\xi_0)B_i(-\xi_a)] \\ +i\frac{\epsilon q_0\eta}{k_0a}[A_i^{'}(-\xi_a)B_i(-\xi_0) - A_i(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)] \\ -\left(\frac{q_0\eta}{a}\right)^2[A_i^{'}(-\xi_a)B_i^{'}(-\xi_0) - A_i^{'}(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)] \end{array} \right\}$$

Donc

$$\Delta = {k_0}^2[(R_2 - R_1) + i(I_1 - I_2)]$$

La forme algébrique des nombres complexes [11] :

$$z = x + iy$$

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Avec

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$tan\,\theta = \frac{x}{y}$$

En exprimant N_{c1} et Δ en représentation polaire :

$$N_{c1} = |N_{c1}|e^{i\alpha}$$

Avec

$$|N_{c1}| = k^2\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (I_1 + I_2)^2}$$

$$tan\,\alpha = \frac{I_1 + I_2}{R_1 + R_2}$$

Et

$$\Delta = |\Delta|e^{i\gamma}$$

Avec

$$|\Delta| = k^2\sqrt{(R_2 - R_1)^2 + (I_1 - I_2)^2}$$

$$tan\,\gamma = \frac{I_1 - I_2}{R_2 - R_1}$$

Le coefficient de réflexion peut s'écrire de manière très compacte comme :

$$c_1 = -\frac{|N_{c1}|}{|\Delta|}e^{i\alpha}e^{-i\gamma} \qquad \text{(III. 31)}$$

III.3 : ETUDE APPROXIMATIVE

Utilisent le développement de Taylor [12] étendant la fonction Airy Ai(x) au voisinage du point x_0 on aura

$$A_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}{A_i}^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \qquad \text{(III. 32)}$$

Et comme *Ai(x)* et une solution de l'équation (III. 4) donc :

$$A_i{}''(x) = xA_i(x) \qquad \text{(III. 33)}$$

Donc

$$A_i(x) = \left\{ \begin{array}{l} A_i(x_0) + \frac{1}{1!}A_i{}'(x_0)(x - x_0)^1 + \frac{1}{2!}A_i{}^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}A_i{}^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 \\ + \frac{1}{4!}A_i{}^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4 + \frac{1}{5!}A_i{}^{(5)}(x_0)(x - x_0)^5 + \frac{1}{6!}A_i{}^{(6)}(x_0)(x - x_0)^6 \\ + \frac{1}{7!}A_i{}^{(7)}(x_0)(x - x_0)^7 + \frac{1}{8!}A_i{}^{(8)}(x_0)(x - x_0)^8 + \cdots \end{array} \right\}$$

On pose

$$X = x - x_0$$

$$Z = X\sqrt{x_0}$$

$$A_i(x) = \left\{ \begin{array}{l} A_i(x_0) + A_i{}'(x_0)X + \frac{1}{2!}\big((x_0)A_i(x_0)\big)X^2 + \frac{1}{3!}\big((x_0)A_i{}'(x_0) + A_i(x_0)\big)X^3 \\ + \frac{1}{4!}\big(2A_i{}'(x_0) + {x_0}^2A_i(x_0)\big)X^4 + \frac{1}{5!}\big({x_0}^2A_i{}'(x_0) + 4x_0A_i(x_0)\big)X^5 \\ + \frac{1}{6!}\big(6x_0A_i{}'(x_0) + (4 + {x_0}^3A_i(x_0)\big)X^6 + \frac{1}{7!}\big((10 + {x_0}^3)A_i{}'(x_0) + 7{x_0}^2A_i(x_0)\big)X^7 \\ + \frac{1}{8!}\big(6x_0A_i{}'(x_0) + (10{x_0}^2A_i{}'(x_0) + 24 + {x_0}^4A_i(x_0)\big)X^8 \end{array} \right\}$$

$$A_i(x) = \left\{ \begin{array}{l} A_i(x)\left[\frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} + \frac{Z^6}{6!} + \cdots 1 + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^3}{6} + \cdots + \frac{x_0X^5}{30} + \frac{x_0X^8}{1440} + \cdots\right] \\ + A_i{}'(x_0)\left[X\left(\frac{X^2}{3!} + \frac{{x_0}^2X^4}{5!} + \cdots\right) + \frac{X^4}{12} + \frac{X^7}{504} + \cdots + \frac{x_0X^6}{120} + \frac{13x_0X^9}{90720} + \cdots\right] \end{array} \right\}$$

On a sait que le développement de cosh x et sinh x s'écrit :

$$cosh\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$sinh\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$A_i(x) = A_i(x_0)[cosh\, z] + A_i{}'(x_0)\frac{X}{Z}[sinh\, Z] + O(X^3) \qquad \text{(III. 34)}$$

Maintenant, nous calculons la dérivée $A_i{}'(x)$:

$$A_i{}'(x) = \frac{d}{dx}A_i(x) = \frac{dZ}{dZ}\frac{d}{dx}A_i(x) = \frac{d}{dZ}A_i(x)\ \frac{dZ}{dx}$$

$$\frac{d}{dZ}A_i(x)\frac{dZ}{dx} = A_i(x_0)\ sinh\, Z + A_i{}'(x_0)$$

$$A_i{}'(x) = A_i{}'(x_0)[cosh\, z] + A_i(x_0)x_0\frac{X}{Z}[sinh\, Z] + O(X^2) \qquad \text{(III. 35)}$$

En suivant les mêmes étapes, on obtient les développements de Taylor :

$$B_i(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}B_i{}^{(n)}(x_0)(x\ -\ x_0)^n$$

Tel que

$$B_i{}''(x) = x_0B_i(x_0)$$

Donc

$$B_i(x) = \left\{\begin{array}{c} B_i(x_0) + \frac{1}{1!}B_i{}'(x_0)(x - x_0)^1 + \frac{1}{2!}B_i{}^{(2)}(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}B_i{}^{(3)}(x_0)(x - x_0)^3 \\ + \frac{1}{4!}B_i{}^{(4)}(x_0)(x - x_0)^4 + \frac{1}{5!}B_i{}^{(5)}(x_0)(x - x_0)^5 + \frac{1}{6!}B_i{}^{(6)}(x_0)(x - x_0)^6 \\ + \frac{1}{7!}B_i{}^{(7)}(x_0)(x\ -\ x_0)^7 + \frac{1}{8!}B_i{}^{(8)}(x_0)(x\ -\ x_0)^8 \end{array}\right\}$$

$$B_i(x) = \left\{\begin{array}{c} B_i(x_0) + A_i{}'(x_0)X\ + \frac{1}{2!}\big((x_0)B_i(x_0)\big)X^2 + \frac{1}{3!}\big((x_0)B_i{}'(x_0) + B_i(x_0)\big)X^3 \\ + \frac{1}{4!}\big(2B_i{}'(x_0) + x_0{}^2B_i(x_0)\big)X^4 + \frac{1}{5!}\big(x_0{}^2B_i{}'(x_0) + 4x_0B_i(x_0)\big)X^5 \\ + \frac{1}{6!}\big(6x_0B_i{}'(x_0) + (4 + x_0{}^3B_i(x_0)\big)X^6\ \ + \frac{1}{7!}\big((10 + x_0{}^3)B_i{}'(x_0) + 7x_0{}^2B_i(x_0)\big)X^7 \\ + \frac{1}{8!}\big(6x_0B_i{}'(x_0) + (10x_0{}^2B_i{}'(x_0) + 24 + x_0{}^4B_i(x_0)\big)X^8 \end{array}\right\}$$

$$B_i(x) = \left\{\begin{array}{c} B_i(x)\left[\frac{Z^2}{2!} + \frac{Z^4}{4!} + \frac{Z^6}{6!} + \cdots 1 + \frac{X^3}{3!} + \frac{X^3}{6} + \cdots + \frac{x_0X^5}{30} + \frac{x_0X^8}{1440} + \cdots\right] \\ + B_i{}'(x_0)\left[X\left(\frac{X^2}{3!} + \frac{x_0{}^2X^4}{5!} + \cdots\right) + \frac{X^4}{12} + \frac{X^7}{504} + \cdots + \frac{x_0X^6}{120} + \frac{13x_0X^9}{90720} + \cdots\right] \end{array}\right\}$$

Donc

$$B_i(x) = B_i(x_0)[\cosh z] + B_i^{'}(x_0)\frac{X}{Z}[\sinh Z] + O(X^3) \qquad \text{(III. 36)}$$

Maintenant nous calculons la dérivée :

$$B_i^{'}(x) = \frac{d}{dx}B_i(x) = \frac{dZ}{dZ}\frac{d}{dx}B_i(x) = \frac{d}{dZ}B_i(x)\frac{dZ}{dx}$$

$$\frac{d}{dZ}B_i(x)\frac{dZ}{dx} = B_i(x_0)\sinh Z + B_i^{'}(x_0)$$

$$B_i^{'}(x) = B_i^{'}(x_0)[\cosh z] + B_i(x_0)x_0\frac{X}{Z}[\sinh Z] + O(X^2) \qquad \text{(III. 37)}$$

Revenant au problème principal de cette section :

$$\xi = \xi(x) = q_0\left[\eta\frac{x}{a} + \epsilon^2 - 1\right]$$

$$x_0 = -\xi_0 = -\xi(0) = -q_0[\epsilon^2 - 1] \qquad \text{(III. 38)}$$

$$x_0 = -q_0\left[\frac{k^2 - {k_0}^2}{{k_0}^2}\right] = \frac{q_0\rho^2}{{k_0}^2} = \frac{(k_0a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{-2}{3}}\rho^2}{{k_0}^2}$$

Ou

$$\rho^2 = {k_0}^2 - k^2$$

Et

$$x = -\xi_a = -q_0[\eta + \epsilon^2 - 1] = -(\eta q_0 + \xi_0) \qquad \text{(III. 39)}$$

On à

$$Z = X\sqrt{x_0}$$

$$Z = (x - x_0)\sqrt{x_0} = (-\eta q_0)\sqrt{x_0}$$

$$Z = (-\eta q_0)\sqrt{\frac{(k_0 a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{-2}{3}}\rho^2}{{k_0}^2}} = \left(-\eta (k_0 a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{-2}{3}}\right)\frac{(k_0 a)^{\frac{1}{3}}\eta^{\frac{-1}{3}}\rho}{k_0}$$

$$Z = -\rho a \qquad \text{(III. 40)}$$

Et

$$X = x - x_0 = -(\eta q_0 + \xi_0) - (-\xi_0)$$

$$X = -\eta q_0 \qquad \text{(III. 41)}$$

En remplace les relations(III. 38),(III. 39), (III. 40)et (III. 41)dans (III. 34), (III. 35), (III. 36)et (III. 37) :

Retour à la relation (III. 34):

$$A_i(x) = A_i(x_0)[\cosh z] + {A_i}'(x_0)\frac{X}{Z}[\sinh Z] + O(X^3)$$

$$A_i(-\xi_a) = A_i(-\xi_0)\cosh(\rho a) - (k_0 a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}{A_i}'(-\xi_0)\frac{1}{\rho a}\sinh(\rho a) + O(X^3)$$

Retour à la relation (III. 35):

$${A_i}'(x) = {A_i}'(x)[\cosh z] + A_i(x_0)x_0\frac{X}{Z}[\sinh Z] + O(X^2)$$

$${A_i}'(x) = {A_i}'(-\xi_a)\cosh(\rho a) + A_i(-\xi_0)\frac{x_0 X}{\rho a}\sinh(\rho a) + O(X^2)$$

On à

$$x_0 X = \frac{q_0\rho^2}{{k_0}^2}(-q_0\eta) = -\eta\frac{{q_0}^2\rho^2}{{k_0}^2} = -\eta\frac{\rho^2}{{k_0}^2}\left((k_0 a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{-2}{3}}\right)^2$$

$$x_0 X = -\rho^2\left(\eta^{\frac{-1}{3}}a^{\frac{4}{3}}{k_0}^{\frac{-2}{3}}\right) = -\frac{\rho^2(k_0 a)^{\frac{4}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}{k_0}^2}$$

La notation O [13] :

$$X^3 = (-\eta q_0)^3 = -\eta^3 (k_0 a)^2 \, \eta^{-2} = -\eta (k_0 a)^2$$

$$\Longrightarrow O(X^3) = O(\eta)$$

Donc

$$A_i(-\xi_a) = A_i(-\xi_0)\, cosh(\rho a) - (k_0 a)^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{1}{3}} A_i{}'(-\xi_0) \frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta) \qquad (III.42)$$

$$A_i{}'(x) = A_i{}'(-\xi_0)\, cosh(\rho a) - \frac{\rho^2 (k_0 a)^{\frac{4}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}} {k_0}^2} A_i(-\xi_0) \frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta) \qquad (III.43)$$

Retour à la relation (III. 36) :

$$B_i(x) = B_i(-\xi_0)[cosh\, z] + B_i'(-\xi_0) \frac{X}{Z} [sinh\, Z] + O(X^3)$$

$$B_i(-\xi_a) = B_i(-\xi_0)\, cosh(\rho a) - (k_0 a)^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{1}{3}} B_i'(-\xi_0) \frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta) \qquad (III.44)$$

Retour à la relation (III. 37):

$$B_i'(x) = B_i'(x)[cosh\, z] + B_i(x_0) x_0 \frac{X}{Z} [sinh\, Z] + O(X^2)$$

$$B_i'(x) = B_i'(-\xi_a)\, cosh(\rho a) + B_i(-\xi_0) \frac{x_0 X}{\rho a} sinh(\rho a) + O(X^2)$$

$$B_i'(x) = B_i'(-\xi_a)\, cosh(\rho a) - \frac{\rho^2 (k_0 a)^{\frac{4}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}} {k_0}^2} B_i(-\xi_0) \frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta) \qquad (III.45)$$

Sur la base de l'équation(III. 25), nous trouvons :

$$I_1 = \frac{\epsilon q_0 \eta}{k_0 a} [A_i(-\xi_a) B_i'(-\xi_0) - A_i'(-\xi_0) B_i(-\xi_a)]$$

En remplace les résultats(III. 42),(III. 43), (III. 44)et (III. 45)dans l'équation (III. 25)nous trouvons :

$$I_1 = \frac{\epsilon q_0 \eta}{k_0 a} \left\{ \begin{array}{l} \left[A_i(-\xi_0)\, cosh(\rho a) - (k_0 a)^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{1}{3}} A_i{}'(-\xi_0) \frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta) \right] B_i'(-\xi_0) \\ -A_i'(-\xi_0) \left[B_i(-\xi_0)\, cosh(\rho a) - (k_0 a)^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{1}{3}} B_i'(-\xi_0) \frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta) \right] \end{array} \right\}$$

$$I_1 = \frac{\epsilon q_0 \eta}{k_0 a} \left\{ \begin{array}{c} cosh(\rho a)[A_i(-\xi_0) B_i'(-\xi_0) - A_i'(-\xi_0) B_i(-\xi_0)] \\ -(k_0 a)^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{1}{3}} \frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) \underbrace{[A_i{}'(-\xi_0) B_i'(-\xi_0) - A_i'(-\xi_0) B_i'}_{=0}(-\xi_0)] \end{array} \right\}$$

$$A_i(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_0) - A_i^{'}(-\xi_0)B_i(-\xi_0) = \frac{1}{\pi}$$

$$I_1 = \frac{\epsilon q_0 \eta}{\pi k_0 a}\ cosh(\rho a) + O(X^3) = \frac{K(k_0 a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}}{\pi {k_0}^2 a} cosh(\rho a) + O(\eta) \quad \text{(III. 46)}$$

$$I_2 = \frac{\epsilon q_0 \eta}{k_0 a}\{[A_i^{'}(-\xi_a)B_i(-\xi_0) - A_i(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)]\}$$

$$I_2 = \frac{\epsilon q_0 \eta}{k_0 a}\begin{Bmatrix}\left[A_i^{'}(-\xi_a)\,cosh(\rho a) - \frac{\rho^2 (k_0 a)^{\frac{4}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}{k_0}^2} A_i(-\xi_0)\frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta)\right] B_i(-\xi_0) \\ -A_i(-\xi_0)\left[B_i^{'}(-\xi_a)\,cosh(\rho a) - \frac{\rho^2 (k_0 a)^{\frac{4}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}{k_0}^2} B_i(-\xi_0)\frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta)\right]\end{Bmatrix}$$

$$I_2 = \frac{\epsilon q_0 \eta}{k_0 a}\begin{Bmatrix} cosh(\rho a)[A_i^{'}(-\xi_a)B_i(-\xi_0) - A_i(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)] \\ -\frac{\rho^2 (k_0 a)^{\frac{4}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}{k_0}^2}\frac{1}{\rho a} sinh(\rho a)\,[-A_i(-\xi_0)B_i(-\xi_0) + A_i(-\xi_0)B_i(-\xi_0)]\end{Bmatrix}$$

$$I_2 = -\frac{\epsilon q_0 \eta}{k_0 a}\frac{1}{\pi} cosh(\rho a) + \ O(\eta) = -I_1 \quad \text{(III. 47)}$$

Donc

$$I_1 + I_2 = 0$$

$$I_1 - I_2 = 2\frac{k(k_0 a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}}{\pi {k_0}^2 a} cosh(\rho a) + \ O(\eta) \quad \text{(III. 48)}$$

$$R_1 = \epsilon^2[A_i(-\xi_0)B_i(-\xi_a) - A_i(-\xi_a)B_i(-\xi_0)]$$

$$R_1 = \epsilon^2\begin{Bmatrix} A_i(-\xi_0)\left[B_i(-\xi_0)\,cosh(\rho a) - (k_0 a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}B_i^{'}(-\xi_0)\frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta)\right] \\ -B_i(-\xi_0)\left[A_i(-\xi_0)\,cosh(\rho a) - (k_0 a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}A_i^{'}(-\xi_0)\frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta)\right]\end{Bmatrix}$$

$$R_1 = \epsilon^2\begin{Bmatrix} cosh(\rho a)[A_i(-\xi_0)B_i(-\xi_0) - B_i(-\xi_0)A_i(-\xi_0)] \\ +(k_0 a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\rho a} sinh(\rho a)\,[A_i(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_0) - A_i^{'}(-\xi_0)B_i(-\xi_0)]\end{Bmatrix}$$

$$R_1 = \epsilon^2(k_0 a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta) \quad \text{(III. 49)}$$

$$R_2 = \left(\frac{q_0 \eta}{k_0 a}\right)^2 [A_i^{'}(-\xi_a)B_i^{'}(-\xi_0) - A_i^{'}(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_a)]$$

$$R_2 = \left(\frac{q_0\eta}{k_0 a}\right)^2 \begin{Bmatrix} B_i^{'}(-\xi_0)\left[A_i^{'}(-\xi_0)\,cosh(\rho a) - \frac{\rho^2(k_0a)^{\frac{4}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}{k_0}^2} A_i(-\xi_0)\frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta)\right] \\ -A_i^{'}(-\xi_0)\left[B_i^{'}(-\xi_0)\,cosh(\rho a) - \frac{\rho^2(k_0a)^{\frac{4}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}{k_0}^2} B_i(-\xi_0)\frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta)\right] \end{Bmatrix}$$

$$R_2 = \left(\frac{q_0\eta}{k_0 a}\right)^2 \begin{Bmatrix} cosh(\rho a)[A_i^{'}(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_0) - A_i^{'}(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_0)] \\ -\frac{\rho^2(k_0a)^{\frac{4}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}{k_0}^2}\frac{1}{\rho a} sinh(\rho a)\,[A_i(-\xi_0)B_i^{'}(-\xi_0) - A_i^{'}(-\xi_0)B_i(-\xi_0)] \end{Bmatrix}$$

$$R_2 = -\left(\frac{q_0\eta}{k_0 a}\right)^2 \frac{\rho^2(k_0a)^{\frac{4}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}{k_0}^2}\frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta) \qquad \text{(III. 50)}$$

Donc

$$R_2 + R_1 = -\left(\frac{q_0\eta}{k_0 a}\right)^2 \frac{\rho^2(k_0a)^{\frac{4}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}{k_0}^2}\frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta) + \epsilon^2(k_0a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta)$$

$$R_2 + R_1 = \frac{1}{\rho a} sinh(\rho a)\left[\epsilon^2(k_0a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{(k_0a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{-2}{3}}\eta}{k_0 a}\right)^2 \frac{\rho^2(k_0a)^{\frac{4}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}{k_0}^2}\right]$$

$$R_2 + R_1 = \frac{(k_0a)^{\frac{2}{3}}}{\pi}\,\eta^{\frac{1}{3}}\frac{sinh(\rho a)}{\rho a} + O(\eta)$$

$$R_2 - R_1 = -\left(\frac{q_0\eta}{k_0 a}\right)^2 \frac{\rho^2(k_0a)^{\frac{4}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}{k_0}^2}\frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta) - \epsilon^2(k_0a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}\frac{1}{\rho a} sinh(\rho a) + O(\eta)$$

$$R_2 - R_1 = -\frac{(k_0a)^{\frac{2}{3}}}{{k_0}^2\pi}\,\eta^{\frac{1}{3}}\frac{sinh(\rho a)}{\rho a}(\rho^2 - k^2) + O(\eta) \qquad \text{(III. 51)}$$

On à

$$N_{c1} = |N_{c1}|e^{i\alpha}$$

Avec

$$|N_{c1}| = k^2\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (I_1 + I_2)^2}$$

En remplace dans les résultats(III. 47), (III. 48), (III. 49)et (III. 50):

$$|N_{c1}| = k^2\sqrt{\left(\frac{(k_0a)^{\frac{2}{3}}}{\pi}\,\eta^{\frac{1}{3}}\frac{sinh(\rho a)}{\rho a}\right)^2}$$

$$|N_{c1}| = k^2 \left(\frac{(k_0 a)^{\frac{2}{3}}}{\pi} \, \eta^{\frac{1}{3}} \frac{sinh(\rho a)}{\rho a} \right) \tag{III.52}$$

$$tan\,\alpha = \frac{I_1 + I_2}{R_1 + R_2} = 0 \tag{III.53}$$

On à

$$\Delta = |\Delta| e^{i\gamma}$$

Avec

$$|\Delta| = {k_0}^2 \sqrt{\left(-\frac{(k_0 a)^{\frac{2}{3}}}{{k_0}^2 \pi} \, \eta^{\frac{1}{3}} \frac{sinh(\rho a)}{\rho a} (\rho^2 - k^2) \right)^2 + \left(2 \frac{k (k_0 a)^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{1}{3}}}{\pi {k_0}^2 a} cosh(\rho a) \right)^2}$$

$$|\Delta| = {k_0}^2 \left[\frac{(k_0 a)^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{1}{3}}}{a \, {k_0}^2 \pi} \left\{ \left(\frac{\rho^2 - k^2}{\rho} \right)^2 sinh^2(\rho a) + 4k^2 cosh^2(\rho a) \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$|\Delta| = {k_0}^2 \left[\frac{(k_0 a)^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{1}{3}}}{a \, {k_0}^2 \pi} \left\{ \left(\frac{\rho^2 - k^2}{\rho} \right)^2 sinh^2(\rho a) + 4k^2 \left(1 + sinh^2(\rho a) \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$|\Delta| = {k_0}^2 \left[\frac{(k_0 a)^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{1}{3}}}{a \, {k_0}^2 \pi} \left\{ sinh^2(\rho a) \left(\left(\frac{\rho^2 - k^2}{\rho} \right)^2 + 4k^2 \right) + 4k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$|\Delta| = {k_0}^2 \left[\frac{(k_0 a)^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{1}{3}}}{a \, {k_0}^2 \pi} \left\{ sinh^2(\rho a) \left(\frac{\rho^4 + k^4 + 2k^2 \rho^2}{\rho^2} \right) + 4k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$|\Delta| = {k_0}^2 \left[\frac{(k_0 a)^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{1}{3}}}{a \, {k_0}^2 \pi} \left\{ sinh^2(\rho a) \left(\frac{{k_0}^4}{\rho^2} \right) + 4k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$|\Delta| = \left[\frac{(k_0 a)^{\frac{2}{3}} \eta^{\frac{1}{3}}}{a \, {k_0}^2 \pi} \frac{{k_0}^2}{\rho} \left\{ sinh^2(\rho a) + \frac{4\rho^2 k^2}{{k_0}^4} \right\}^{\frac{1}{2}} \right] \tag{III.54}$$

$$tan\,\gamma = \frac{I_1 - I_2}{R_2 - R_1}$$

$$tan\,\gamma = -\frac{\frac{2k(k_0a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}cosh(\rho a)}{\pi {k_0}^2 a}}{\frac{(k_0a)^{\frac{2}{3}}}{{k_0}^2\pi}\eta^{\frac{1}{3}}\frac{sinh(\rho a)}{\rho a}\left(\rho^2-k^2\right)}$$

$$tan\,\gamma = \frac{2k\rho\,cosh(\rho a)}{(\rho^2-k^2)\,sinh(\rho a)} = \frac{2k\rho}{(\rho^2-k^2)}coth(\rho a)$$

On pose

$$k = k_0 cos\theta$$

Et

$$\rho = k_0 sin\theta$$

$$tan\,\gamma = \frac{2k_0 cos\theta k_0 sin\theta}{((k_0 sin\theta)^2-(k_0 cos\theta)^2)}coth(\rho a)$$

$$tan\,\gamma = \frac{2cos\theta sin\theta}{cos2\theta}coth(\rho a)$$

$$tan\,\gamma = tan\,2\theta\,coth(\rho a) \qquad (III.55)$$

III.4. Coefficient de réflexion

Nous sommes maintenant prêts à évaluer le coefficient de réflexion $c_1$donné dans l'équation. (III. 31), pour un potentiel trapézoïdal, à la limite où η tend vers zéro. Lorsque les équations. (III. 52) Et(III. 54) sont remplacés dans (III. 31) on obtient, puisque $\alpha = 0$:

$$R = [c_1]^2 = \left[\frac{|N_{c1}|}{|\Delta|}e^{i\alpha}e^{-i\gamma}\right]^2$$

$$\mathrm{R} = \left[\frac{\left|{k_0}^2\left(\frac{(k_0a)^{\frac{2}{3}}}{\pi}\eta^{\frac{1}{3}}\frac{sinh(\rho a)}{\rho a}\right)\right|}{\left|\frac{(k_0a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}}{a\,{k_0}^2\pi}\frac{{k_0}^2}{\rho}\left\{sinh^2(\rho a)+\frac{4\rho^2k^2}{{k_0}^4}\right\}^{\frac{1}{2}}\right|}e^{-i\gamma}\right]^2$$

$$\mathrm{R} = \left[\frac{sinh(\rho a)}{\left\{sinh^2(\rho a)+\frac{4\rho^2k^2}{{k_0}^4}\right\}^{\frac{1}{2}}}e^{-i\gamma}\right]^2 \qquad (III.56)$$

L'équation (III. 56)est exactement le coefficient de réflexion pour une barrière trapézoïdale.

III.5. Coefficient de transmission :

L'évaluation du coefficient de transmission c_4 est également simple dans l'équation(III. 24), pour un potentiel trapézoïdal, à la limite où η tend vers zéro. Tout d'abord, laissez-nous réécrivons (III. 24)comme :

$$\mathrm{T} = [c_4]^2 = \left[\frac{2ikq_0\eta}{\pi a\Delta}\boldsymbol{e}^{-ika}\right]^2 = \left[\frac{2ik(k_0a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}}{\pi a\Delta}\boldsymbol{e}^{-ika}\right]^2 \qquad \text{(III. 57)}$$

Où l'on a utilisé l'équation

$$q_0 = (k_0a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{-2}{3}}$$

Lorsque les équations. (III. 54)sont remplacés dans l'équation(III. 57), on obtient

$$\mathrm{T} = \left[\frac{2ik(k_0a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}}{\pi a|\Delta|e^{i\gamma}}\boldsymbol{e}^{-ika}\right]^2 = \left[\frac{2ik(k_0a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}}{\pi a|\Delta|}\boldsymbol{e}^{-ika}\,\boldsymbol{e}^{-i\gamma}\right]^2$$

$$\mathrm{T} = \left[\frac{2\,ik(k_0a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}}{\pi a\left[\frac{(k_0a)^{\frac{2}{3}}\eta^{\frac{1}{3}}}{a\,{k_0}^2\pi}\frac{{k_0}^2}{\rho}\left\{sinh^2(\rho a)+\frac{4\rho^2k^2}{{k_0}^4}\right\}^{\frac{1}{2}}\right]}\boldsymbol{e}^{-ika}\,\boldsymbol{e}^{-i\gamma}\right]^2$$

$$\mathrm{T} = \left[\frac{2i\left(k\rho/{k_0}^2\right)}{\left\{sinh^2(\rho a)+\frac{4\rho^2k^2}{{k_0}^4}\right\}^{\frac{1}{2}}}e^{-i\gamma}\right]^2 \qquad \text{(III. 58)}$$

Qui est le coefficient de transmission pour une barrière trapézoïdale.

Chapitre IV :

ETUDE NUMERIQUE

Dans ce chapitre, nous tracerons les coefficients R et T en fonction d'une variable (E,V_0 , a) à la fois.

IV.1. Marche d'un potentiel :

On peut traces l'évolution des des coefficients de transmission (I. 11)et réflexion ((I. 10), en fonction de l'énergie E et potentiel V_0, on obtient les graphiques suivants :

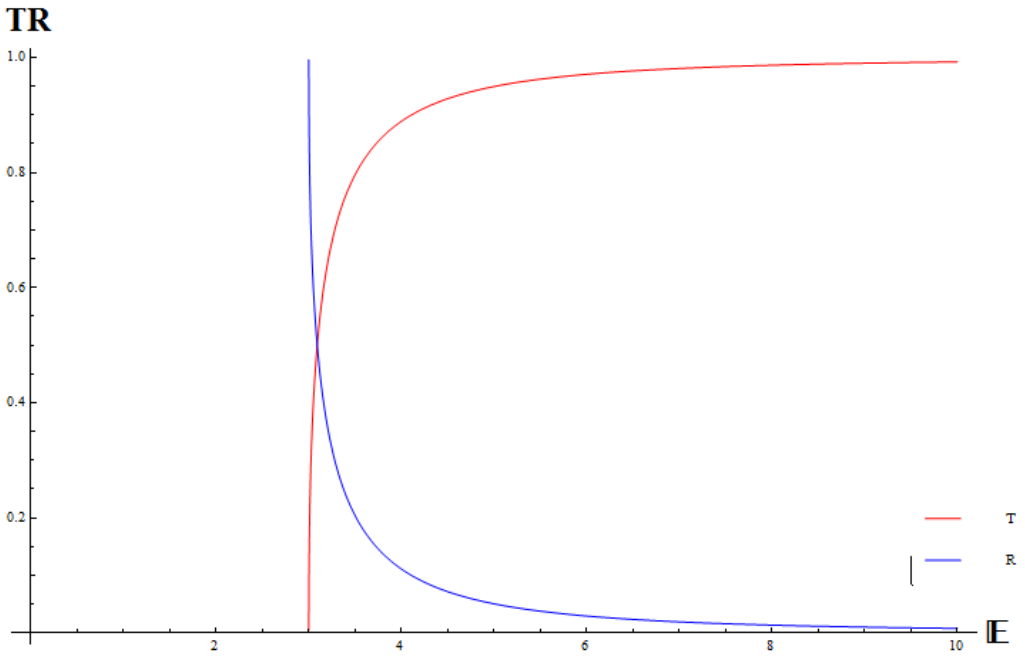


Figure 04 : Variation de coefficient de transmission et réflexion pour une marche de potentiel

Eq **:** (I. 11), (I. 12) **en fonction d'énergie** E **pour :** $V_0 = 3$

Courbe de Transmission (T) - en rouge :

- On observe que pour des énergies inférieures à une certaine valeur (approximativement E = 3) le coefficient de transmission est presque nul, ce qui signifie que presque aucune particule ne traverse la barrière de potentiel.
- À mesure que l'énergie augmente au-delà de ce seuil, le coefficient de transmission augmente rapidement jusqu'à atteindre presque 1 pour des énergies élevées (approximativement $E \approx 6$). Cela indique qu'à des énergies suffisamment élevées, presque toutes les particules traversent la barrière.

Courbe de Réflexion (R) - en bleu :

- Inversement au coefficient de transmission, pour des énergies inférieures à la même valeur seuil (approximativement E = 3). Le coefficient de réflexion est proche de 1, signifiant que presque toutes les particules sont réfléchies.
- Lorsque l'énergie dépasse ce seuil, le coefficient de réflexion diminue rapidement, tendant vers zéro pour des énergies élevées (approximativementE $\approx$ 6). Cela signifie qu'à des énergies élevées, très peu de particules sont réfléchies.

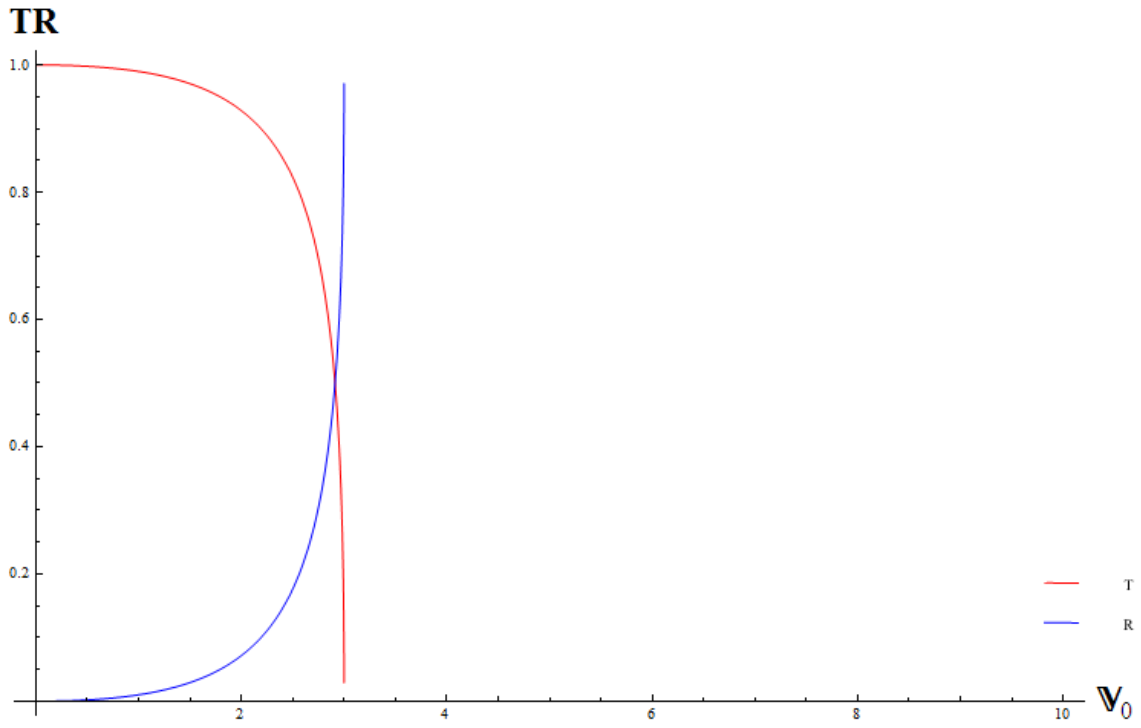


Figure 05 : Variation de coefficients de transmission et réflexion pour une marche de potentiel Eq ((I. 11), (I. 12))**en fonction de potentiel** V_0 **pour :** E = 3

Courbe de Transmission (T) - en rouge :

- Pour des valeurs de V_0 inférieures à une certaine valeur (approximativement V_0 = 3, le coefficient de transmission est proche de 1, indiquant que la majorité des particules traversent la marche de potentiel sans difficulté.

- À mesure que V_0, augmente, le coefficient de transmission diminue rapidement. Au-delà d'une certaine valeur de V_0 (approximativement $V_0 > 3$, le coefficient de transmission devient presque nul, signifiant que très peu de particules parviennent à traverser la barrière.

Courbe de Réflexion (R) - en bleu :

- Inversement au coefficient de transmission, pour des valeurs de V_0, inférieures à **3**, le coefficient de réflexion est proche de 0, signifiant que peu de particules sont réfléchies.
- Lorsque V_0, augmente, le coefficient de réflexion augmente rapidement. Pour des valeurs de V_0 supérieures à **3**, le coefficient de réflexion approche **1**, indiquant que presque toutes les particules sont réfléchies.

IV.2. Barrière trapézoïdale :

On peut traces l'évolution des coefficients de transmission (III. 58) et réflexion (III. 56) pour différentes valeurs de l'énergie totale E , ou bien pour une valeur constante de E et potentiel V_0 varie, on obtient les graphes suivantes :

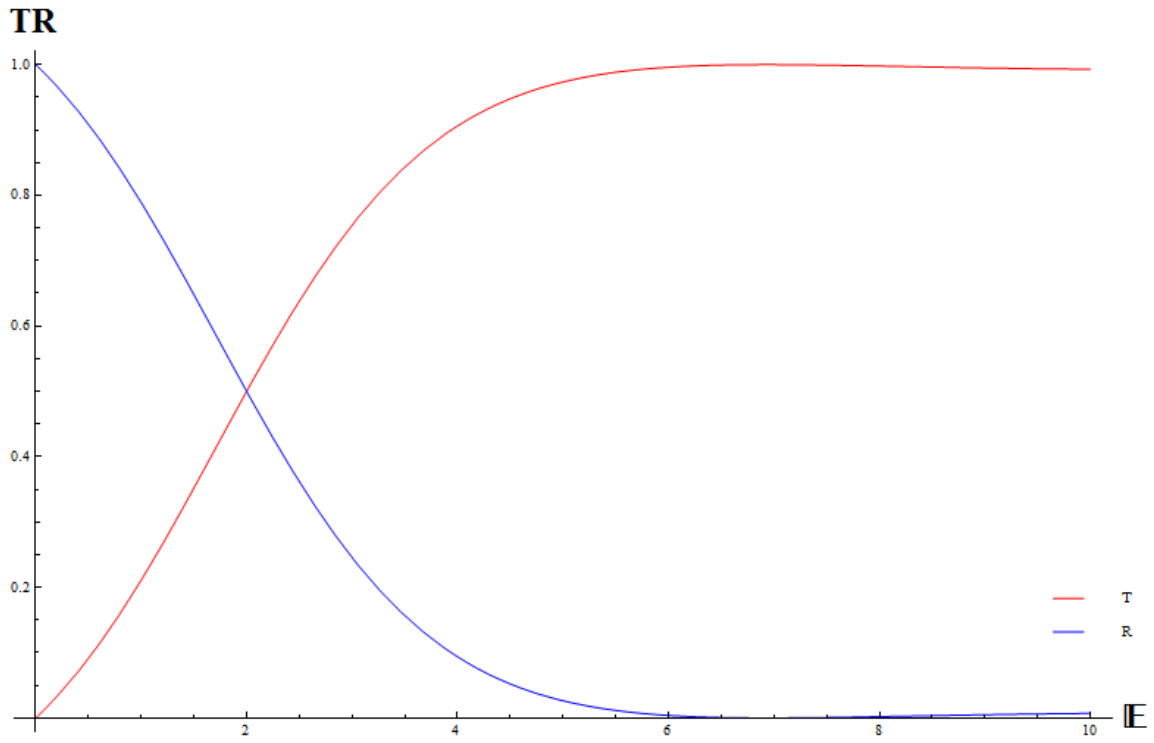


Figure 06 : Variation de coefficients de transmission et réflexion pour une barrière trapézoïdale de potentiel Eq ((III. 56), (III. 58)) **en fonction d'énergie E pour :**

$$V_0 = 2\,, a = 1 \text{ et } \beta = 0.96$$

Courbe de Transmission (T) - en rouge :

- Comportement initial : La transmission commence à une valeur très faible pour des énergies proches de zéro.
- Augmentation avec l'énergie: La transmission augmente rapidement avec l'augmentation de l'énergie, atteignant une valeur proche de 1 (100%) pour $E > 6$
- Régime stationnaire : Pour des valeurs élevées d'énergie, la transmission se stabilise près de 1, indiquant que presque toutes les particules ou ondes traversent la barrière sans être réfléchies.

Courbe de Réflexion (R) - en bleu :

- Comportement initial : La réflexion commence à une valeur proche de 1 (100%) pour des énergies proches de zéro.
- Diminution avec l'énergie : La réflexion diminue rapidement avec l'augmentation de l'énergie, atteignant une valeur proche de zéro pour $E > 6$.
- Régime stationnaire: Pour des valeurs élevées d'énergie, la réflexion se stabilise près de zéro, indiquant que la barrière ne réfléchit presque plus les particules ou ondes.

* À basse énergie, la barrière est essentiellement opaque, réfléchissant presque toutes les particules ou ondes.

* À haute énergie, la barrière devient transparente, permettant la transmission presque complète.

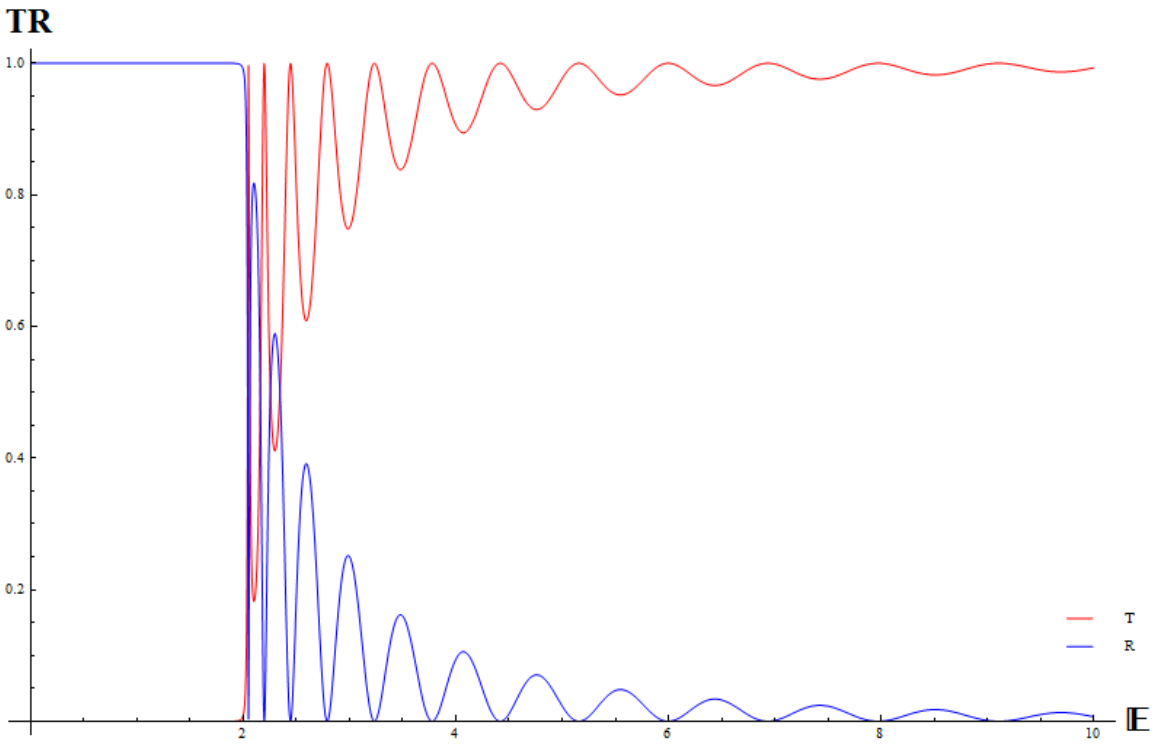


Figure 07 : Variation de coefficients de transmission et réflexion pour une barrière trapézoïdale de potentiel Eq ((III. 56), (III. 58)) **en fonction d'énergie** E **pour :**

$V_0 = 2\,, a = 10$ et $\beta = 0.96$

Courbe de Transmission (T) - en rouge :

- Comportement initial : La transmission est nulle pour les énergies très faibles.
- Transition rapide : Il y a une transition très rapide vers une transmission élevée pour des valeurs d'énergie autour de$E = 2$.
- Oscillations : Après la transition, la transmission montre des oscillations régulières avec une amplitude progressivement décroissante et se stabilise autour de $T \approx 1$ pour des énergies plus élevées.

Courbe de Réflexion (R) - en bleu :

- Comportement initial : La réflexion est de 100% pour les énergies très faibles.
- Transition rapide : Il y a une transition très rapide vers une réflexion faible pour des valeurs d'énergie autour de $E = 2$
- Oscillations : Après la transition, la réflexion montre des oscillations régulières avec une amplitude décroissante et se stabilise autour de $R \approx 0$ pour des énergies plus élevées.

* Les oscillations dans les courbes de transmission et de réflexion sont typiques des effets de résonance quantique dans les barrières de potentiel.

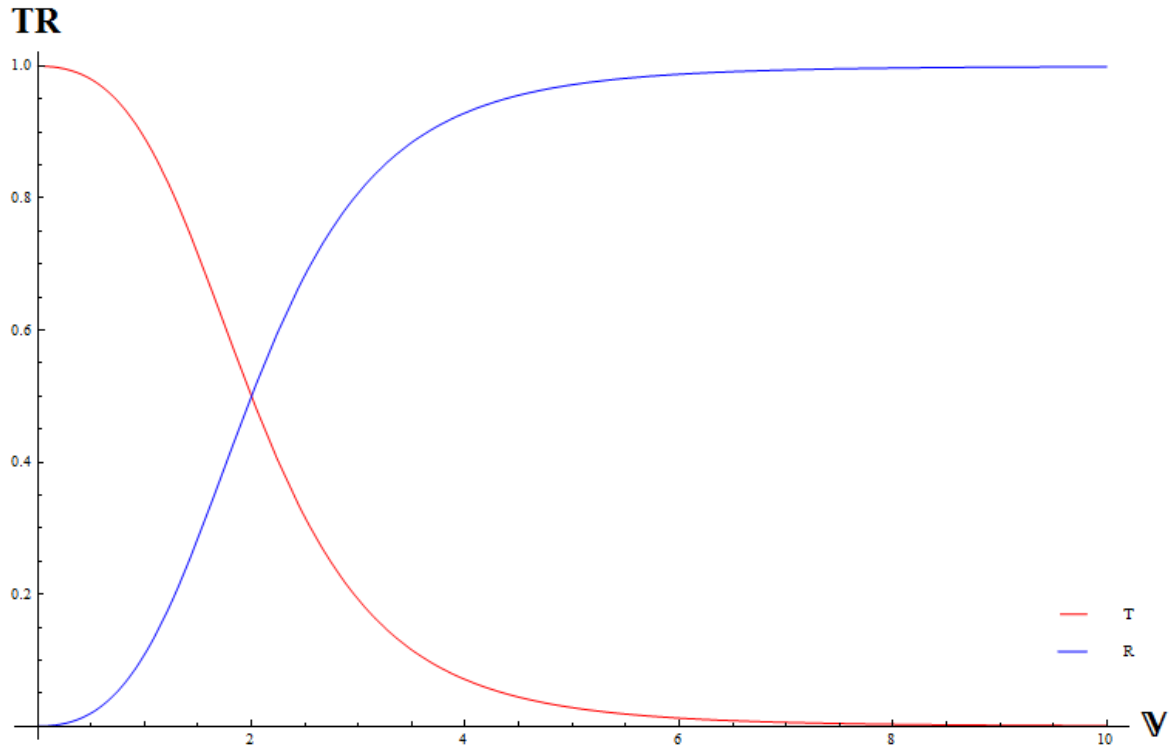


Figure 08 : Variation de coefficients de transmission en réflexion pour une barrière trapézoïdale de potentiel Eq ((III. 56), (III. 58)) **en fonction du potentiel V_0 pour :**

$$\mathrm{E} = 2\,, a = 1\; et\;\; \beta = 0.96$$

Relation entre le coefficient de transmission et le coefficient de réflexion d'une barrière trapézoïdale Dans la plage 0 à 2, la valeur de **T**est maximale et commence à aller vers 0, (a la valeur a=1 il est T=R=0.5). Après la valeur *a*=2, R : est maximum et T et minimum

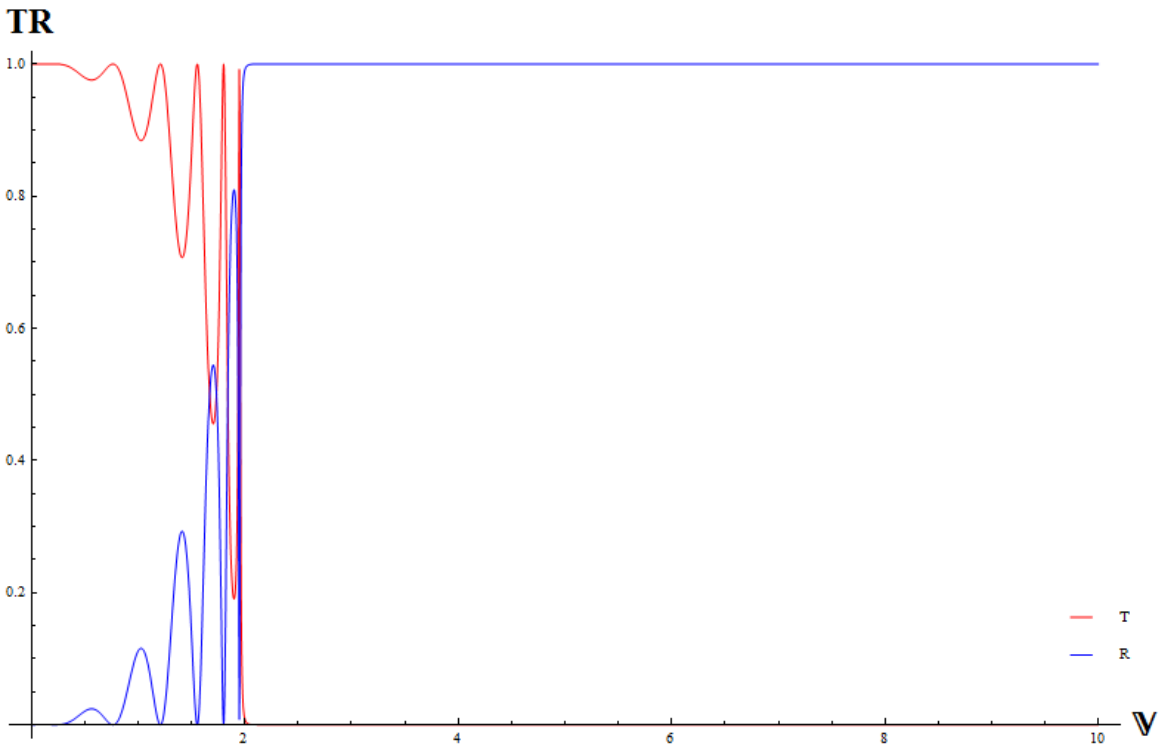


Figure 09 : Variation de coefficients de transmission et réflexion pour une barrière trapézoïdale de potentiel Eq ((III. 56), (III. 58)) **en fonction du potentiel** V_0 **pour :**

$$\mathrm{E} = 2\,, a = 10\; et\;\; \beta = 0.96$$

1. Courbe de Transmission (T) - en rouge :

- Comportement initial : Au début, la transmission est faible et présente des oscillations importantes. Cela signifie que la majorité des particules ou des ondes sont soit réfléchies soit absorbées par la barrière.
- Transition : Autour de *V(x)*=2, il y a une transition brusque où la transmission augmente rapidement pour atteindre une valeur proche de 1 (100%).
- Régime stationnaire : Après cette transition, la transmission reste constante à 1, indiquant que presque toutes les particules ou ondes passent à travers la barrière sans être réfléchies.

2. Courbe de Réflexion (R) - en bleu :

- Comportement initial : La réflexion est élevée au début, avec des oscillations significatives similaires à celles observées dans la courbe de transmission.
- Transition : Autour de *V(x)*=2, la réflexion diminue brusquement jusqu'à presque zéro.
- Régime stationnaire : Après la transition, la réflexion reste proche de zéro, indiquant que la barrière ne réfléchit pratiquement plus les particules ou ondes.

Les courbes montrent clairement qu'à une tension inférieure à $V(x)$=2, la barrière réfléchit la plupart des particules ou ondes, mais au-delà de $V(x)$=2, elle les laisse passer presque complètement. Ce comportement peut être typique de certaines structures quantiques ou dispositifs électroniques où un changement de potentiel modifie radicalement les propriétés de transmission et de réflexion.

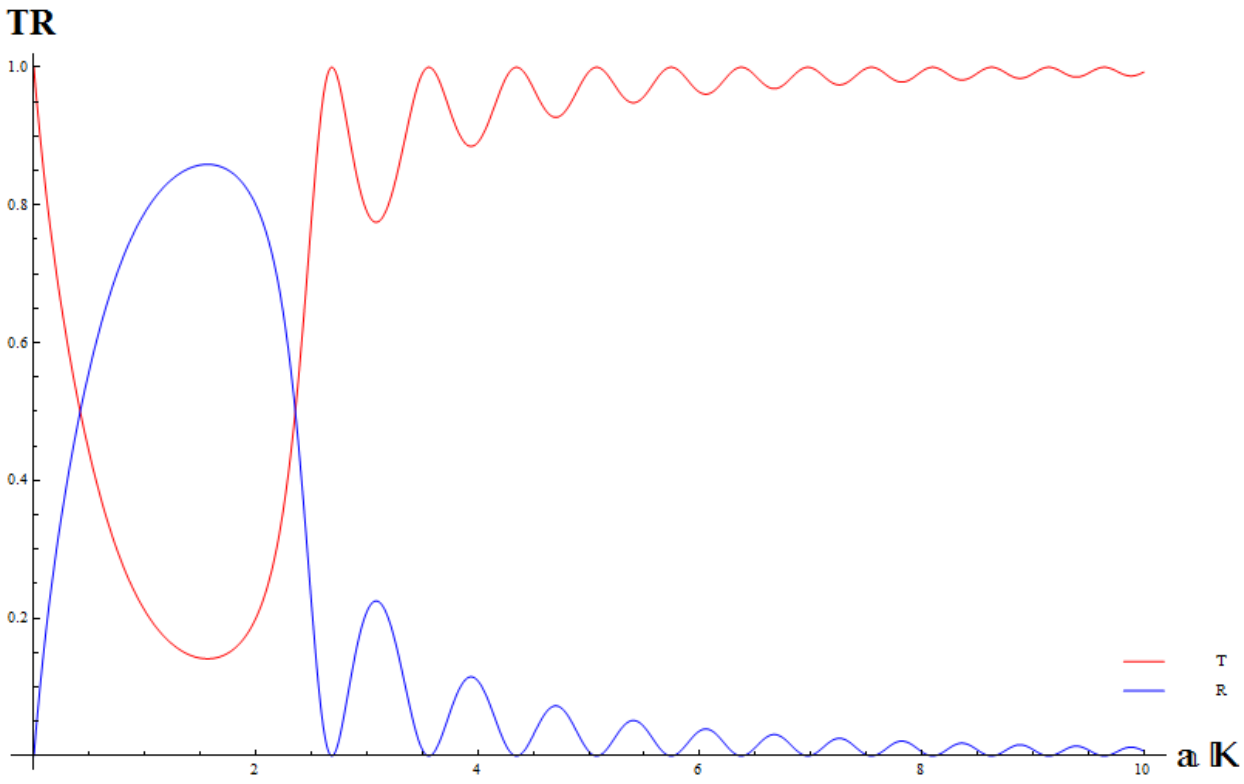


Figure 10 : Variation de coefficients de transmission et réflexion pour une barrière trapézoïdale de potentiel Eq ((III. 56), (III. 58)) **en fonction** ka **pour :**

$$V_0 = 2\,, \beta = 0.96$$

Courbe de Transmission (T) - en rouge :

- Comportement initial : La transmission commence à 1 (100%) lorsque ka est très faible, indiquant que toutes les particules ou ondes traversent la barrière sans être réfléchies.
- 2. Oscillations : Au fur et à mesure que k_0a augmente, la transmission diminue rapidement puis commence à osciller. Les oscillations deviennent moins prononcées et se stabilisent autour d'une valeur moyenne d'environ 0.6 à 0.7 pour des valeurs plus grandes de ka.

Courbe de Réflexion (R) - en bleu :

- Comportement initial: La réflexion est initialement nulle lorsque ka est très faible, ce qui est cohérent avec une transmission parfaite.
- 2. Oscillations : Au fur et à mesure que ka augmente, la réflexion augmente et commence à osciller en phase opposée par rapport à la transmission. Les oscillations deviennent moins prononcées et se stabilisent autour d'une valeur proche de zéro pour des valeurs plus grandes de ka.

Les courbes montrent que la transmission est initialement parfaite, mais qu'elle commence à osciller avec l'augmentation de ka, se stabilisant finalement autour d'une valeur moyenne. La réflexion présente un comportement complémentaire, débutant à zéro et oscillant jusqu'à se stabiliser autour de zéro. Ce comportement peut être typique des structures ayant des propriétés de résonance ou des interférences multiples

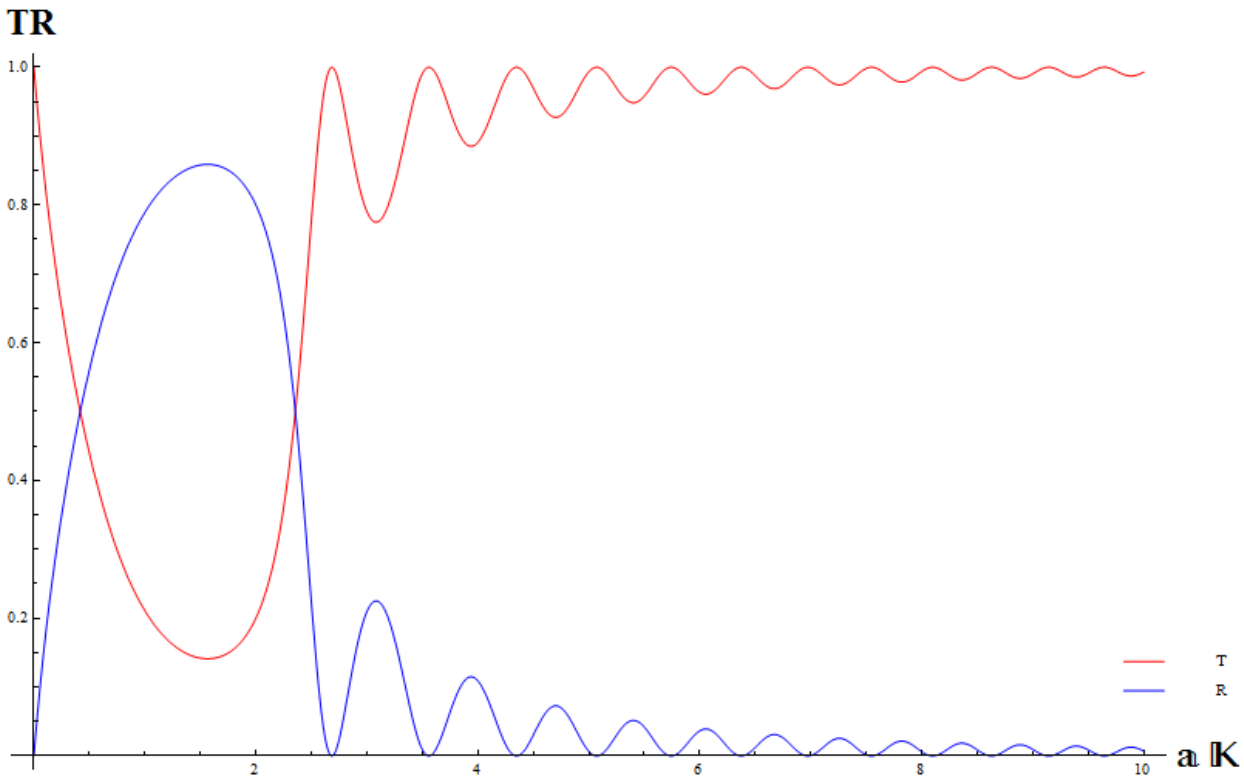


Figure 11 : Variation de coefficients de transmission et réflexion pour une barrière trapézoïdale de potentiel Eq ((III. 56), (III. 58)) **en fonction en fonction** ka **pour :**

$V_0 = 2\,,\ \beta = 0.01$ **(barrière rectangulaire)**

On remarque les mêmes coefficients de transmission et de réflexion sur les figures 10et 11 malgré le changement de la valeur de β

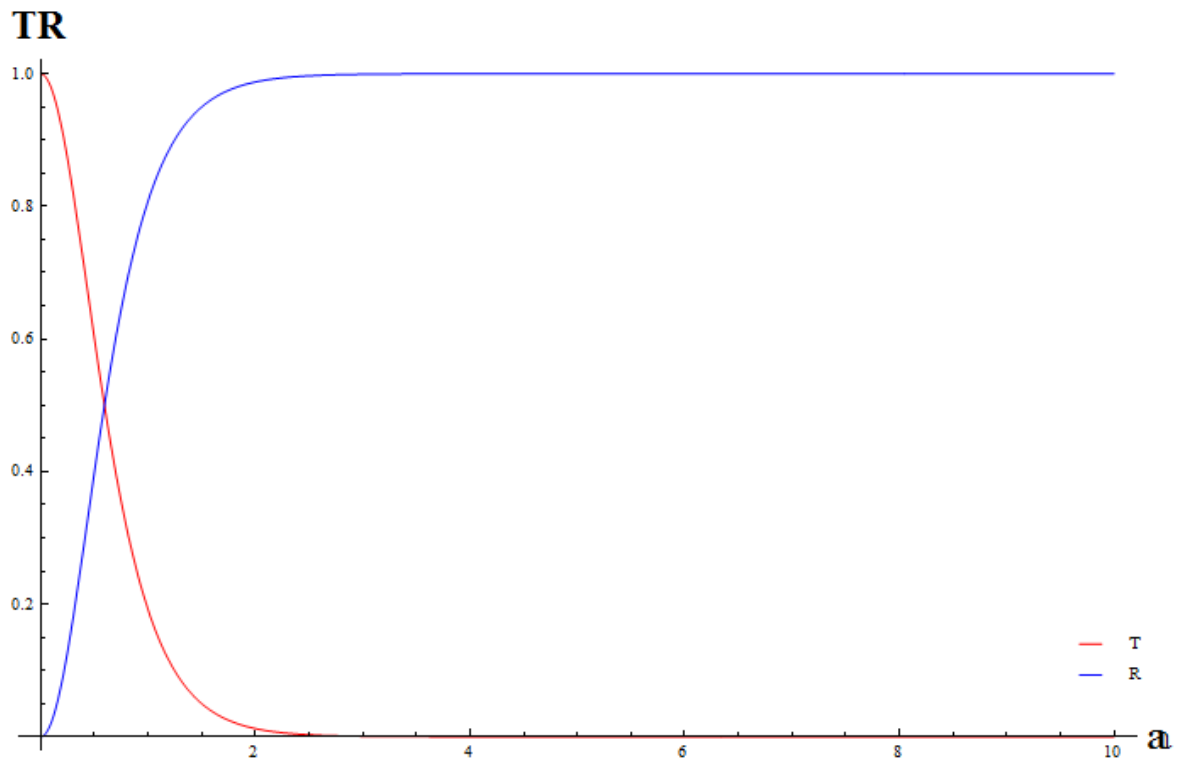


Figure 12 : Variation de coefficients de transmission et réflexion en fonction de la largeur de la barrière trapézoïdale a pour :

$V_0 = 3$, E $= 2$ et $\beta = 0.96$ **(barrière dentaire)**

Courbe de Transmission (T) - en rouge :

- Comportement initial: La transmission commence à 1 (100%) pour a très petit, indiquant que toutes les particules ou ondes traversent la barrière sans être réfléchies.
- Diminution rapide: Au fur et à mesure que a augmente, la transmission diminue rapidement et approche de zéro, montrant que la barrière devient de moins en moins transparente.

Courbe de Réflexion (R) - en bleu :

- Comportement initial : La réflexion commence à zéro pour a très petit, ce qui est cohérent avec une transmission parfaite.

- Augmentation rapide : Au fur et à mesure que a, augmente, la réflexion augmente rapidement pour atteindre une valeur proche de 1 (100%), indiquant que la barrière devient presque entièrement réfléchissante.

La forme trapézoïdale de la barrière et l'augmentation de sa dimension a, affectent de manière significative la manière dont les particules ou ondes interagissent avec elle.

Pour des valeurs petites de a, la barrière est essentiellement transparente, permettant la transmission presque complète.

Pour des valeurs plus grandes de a, la barrière devient plus opaque, reflétant presque toutes les particules ou ondes.

Conclusion générale :

L'étude des particules non relativistes en interaction avec un potentiel trapézoïdal conduit à plusieurs conclusions importantes concernant leur comportement dynamique et les applications potentielles de ces systèmes, l'étude des particules non relativistes en interaction avec un potentiel trapézoïdal offre des insignes précieux sur leur dynamique, avec des implications significatives pour la recherche fondamentale et les applications technologiques. La capacité à moduler les trajectoires des particules via des potentiels structurés ouvre des avenues prometteuses pour des avancées dans divers domaines scientifiques et technologiques.

Annexe :

L'équation d'Airy

L'équation différentielle de la forme $\frac{d^2}{dZ^2}\omega = Z\omega$

Cette équation dont les solutions sont connues pour exprimées en termes de fonction d'Airy $A_i(Z)$ et $B(Z)$.

Tel que: $\omega = c_0 A_i(Z) + c_1 B_i(Z)$

La fonction d'Airy est définie en tout z réel par la formule :

$$A_i(Z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} cos\left(\frac{1}{3}t^3 + zt\right)dt \qquad \text{et:} \qquad B_i(Z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} exp\left(-\frac{1}{3}t^3 + zt\right)dt + sin\left(\frac{1}{3}t^3 - zt\right)dt$$

Valeurs initiales

$$A_i(0) = \frac{1}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = 0.3550280538 \ldots \qquad B_i(0) = \frac{1}{3^{1/6}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = 0.6149266274 \ldots$$

$$A_i{}'(0) = -\frac{1}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} = -0.2588194037 \ldots \qquad B_i{}'(0) = \frac{3^{1/6}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} = 0.4482883573 \ldots$$

Maclaurin séries :

$$A_i(Z) = A_i(0)\left(1 + \frac{Z^3}{3!} + \frac{1.4.Z^6}{6!} + \cdots\right) + A_i{}'(0)\left(Z + \frac{2.Z^4}{4!} + \frac{2.5.Z^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$A_i{}'(Z) = A_i{}'(0)\left(1 + \frac{2.Z^3}{3!} + \frac{2.5.Z^6}{6!} + \cdots\right) + A_i(0)\left(\frac{Z^2}{2!} + \frac{1.4.Z^5}{5!} + \cdots\right)$$

$$B_i(Z) = A_i(0)\left(1 + \frac{Z^3}{3!} + \frac{1.4.Z^6}{6!} + \cdots\right) + B_i{}'(0)\left(Z + \frac{2.Z^4}{4!} + \frac{2.5.Z^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$B_i{}'(Z) = A_i{}'(0)\left(1 + \frac{2.Z^3}{3!} + \frac{2.5.Z^6}{6!} + \cdots\right) + B_i(0)\left(\frac{Z^2}{2!} + \frac{1.4.Z^5}{5!} + \cdots\right)$$

Wronskians:

Wronskians des fonctions d'Airy W [*Ai(z), Bi(z)*] = 1/π

Graphiquement:

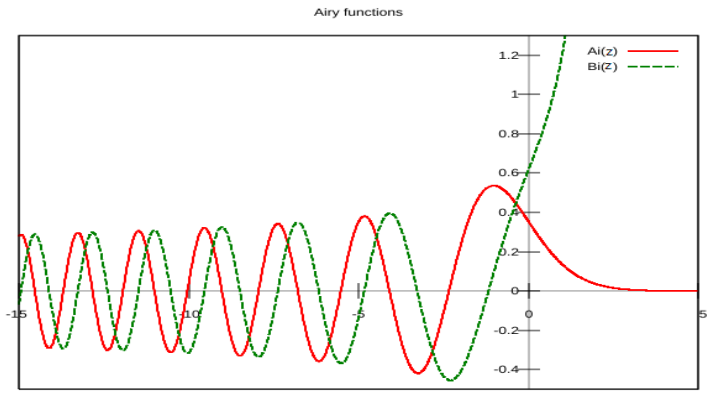


Figure 13 : La fonction *Ai(z)* est en rouge et *Bi(z)* en vert.

Bibliographie

[1] MORIN, David. Introduction to quantum mechanics. Ch, vol. 10, p. 1-20, 2008.

[2] A.Ammar, Équation de Schrödinger, Chapitre III, Université Dr. Yahya Farès Médéa,2023.

[3] Coddington, E. A. An introduction to ordinary differential equations. Courier Corporation. (2012).

[4]Zettili, N. Quantum mechanics: concepts and applications. (2009).

[5] Fitts, D. D. Principles of quantum mechanics: as applied to chemistry and chemical physics. Cambridge University Press.(1999).

[6] De Broglie, Louis. "Passage des corpuscules électrisés à travers les barrières de potentiel." Annales de l'institut Henri Poincaré. Vol. 3. No. 4. 1933.

[7] Iwamoto, H., V. M. Aquino, and V. C. Aguilera-Navarro. "Scattering coefficients for a trapezoidal potential." International Journal of Theoretical Physics 42 : 1795-1807(2003).

[8]LANGUEUR, Omar et MERAD, M. Etude de la dynamique des particules relativistes en interaction avec une certaine classe des potentiels. 2020.

[9] OLVER, Frank W., LOZIER, Daniel W., BOISVERT, Ronald F., et al. NIST handbook of mathematical functions. Cambridge university press, 2010.

[10] Reinders, Martin. "On the zeros of the Wronskian of an entire or meromorphic function and its derivatives." Annales Fennici Mathematici 22.1: 89-112 (1997).

[11] Elias M. Stein, Rami Shakarchi, ComplexAnalysis, Princeton University Press, 2010.

[12] William F. Trench, Introduction to Real Analysis**,**University San Antonio, Texas, USA, 12-2013.

[13] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest and Clifford Stein. Introduction to Algorithms",2002, The MIT Press Cambridge, Massachusetts London, England.