Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr.Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention
du

Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Recherche Opérationnelle
Par

ABLOUL ZAHIRA et DAOUD RADHIA

Thème

Variables aléatoires discrètes dégénérées

Composition du Jury :

Mr.	RAHMANI MOURAD, prof, USTHB
Mme.	GUETTAI GHANIA, MCB, UYFM
Mr.	SEBAOUI MADJID, MCB, UYFM
Mr.	LAISSAOUI DIFFALAH, MCA, UYFM

Date de soutenance : *30 Juin 2021*

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements **i**

Dédicase **ii**

Dédicase **iii**

Résumé **iv**

Abstract **v**

Notations **vi**

Liste des tableaux **viii**

Introduction Générale **1**

1 PRÉLIMINAIRES ET RAPPELS **3**

1.1 Arrangement . . . 3
1.1.1 Arrangement avec répétition . . . 3
1.1.2 Arrangement sans répétition . . . 3
1.2 Permutation . . . 3
1.2.1 Permutation sans répétition . . . 3
1.2.2 Permutation avec répétition . . . 4
1.3 Combinaison . . . 4
1.3.1 Combinaison sans répétitions . . . 4
1.3.2 Combinaison avec répétition . . . 4
1.3.3 Propriétés de combinaison . . . 5
1.4 Polynômes binomiaux . . . 5
1.4.1 Série du binôme . . . 5
1.4.2 Formule du binôme de Newton . . . 5
1.4.3 Triangle de Pascal . . . 5
1.5 Factorielle montante . . . 6
1.6 Factorielle descendante . . . 6
1.7 Partition d'un ensemble . . . 6
1.8 Fonctions génératrices . . . 6
1.8.1 Fonction génératrice ordinaire . . . 6
1.8.2 Fonction génératrice exponentielle . . . 7
1.9 Les nombres de Stirling de première espèce . . . 7

1.10 Les nombres de Stirling de seconde espèce 8
1.10.1 Formule explicite : 9
1.10.2 Définition algébrique des nombres de Stirling de seconde espèce 9
1.11 Transformation de Stirling 10
1.12 Nombres et polynômes de Bell 11
1.12.1 Nombres de Bell 11
1.12.2 Polynôme de Bell 11
1.13 Nombres de Lah 12

2 Probabilités **14**
2.1 Ensemble fondamental et évènements 14
2.2 Probabilité d'un évènement 14
2.3 Espace de probabilité 14
2.3.1 Propriétés des espaces de probabilités 15
2.4 Variable aléatoire 15
2.5 La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète 15
2.6 Fonction de répartition 16
2.7 Espérance et variance 16
2.7.1 Espérance mathématique 16
2.7.2 Variance 17
2.8 Les lois de probabilité discrètes 17
2.8.1 La loi de Bernoulli 17
2.8.2 Loi binomiale 17
2.8.3 Loi de Poisson 18
2.8.4 Loi Hypergéométrique 20

3 Dégénérer des variables aléatoires **22**
3.1 Introduction 22
3.1.1 Factorielle descendante généralisé 22
3.1.2 Fonction exponentielle dégénérée 22
3.1.3 Nombres du stirling de second espècce dégénérés 22
3.1.4 Polynôme de Bell dégénéré 23
3.1.5 Propriètés 24
3.2 La loi binomial dégénérée 27
3.3 La loi de poisson dégénérée 31
3.4 La loi hypergéométrique dégénérée 38

Bibliographie **41**

Remerciements

Nous remercions en premier lieu ***ALLAH*** *pour la foi, la confiance et la volonté, il nous a dotés pour la réalisation de ce travail.*

Nos remerciements vont à ***Mr. LAISSAOUI Diffalah*** *sans qui, notre thèse n'aurait pu voir lieu. Nous tenons à lui montrer toute notre reconnaissance pour s'être rendu disponible dans une période très difficile. Ce dernier a su faire preuve de patience, de professionnalisme et de savoir-faire tout au long de la durée de la recherche.*

Nous exprimons nos remerciements chaleureux à ***Mr. RAHMANI MOURAD*** *qui notre a honoré en acceptant d'être président du jury de notre mémoire.*

Nos remerciements s'adressent également à ***Mme. GUETTAI GHANIA*** *qui nous a honorés en acceptant de faire partie de notre jury et d'examiner notre travail.*

Nos remerciements s'adressent également à ***Mr. SEBAOUI MADJID*** *qui nous a honorés en acceptant de faire partie de notre jury et d'examiner notre travail.*

Enfin, nous remercions tous nos enseignants, et tous ceux qui de près ou de loin, ont contribué à ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents,

Qui m'ont comblé d'amour et d'affection, qui m'ont toujours encouragés pour achever mes études tout en espérant voir le fruit de leurs sacrifices,

Que dieu les garde pour moi,

A mes chers frères : ***MUSTAPHA et ADEL,***

KHALED *et sa marie* ***MERIEM*** *et sa fille* ***NIHEL****,*

A toutes ma familles : ***ABLOUL, HASNAOUI,***

A ma chère binôme ***RADHIA*** *et sa famille,*

Mes chères cousines : ***AHLAM, HADJER, IKRAM, MERIEM, IPTISSAM, KHADIDJA, FERIAL, OUMAIMA.***

Mes oncles,

A mes chères amies : ***NOUR ELHOUDA, IMAN, MARWA, NADIA, SOUMIA, KAMILIA, ZINEB...***

A tous mes collègues de la promotion 2021,

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

ABLOUL ZAHIRA

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents,

Qui m'ont comblé d'amour et d'affection, qui m'ont toujours encouragés pour achever mes études tout en espérant voir le fruit de leurs sacrifices,

Que dieu les garde pour moi,

A mes chers frères : ***RABEH, FARES, MAHDI***

A ma cher sœur : ***TEFFAHA***

A toutes ma familles : ***DAOUD, FERRAH,***

A ma chère binôme ***ZAHIRA*** *et sa famille,*

A mon chère grand- père,

A ma chère grand-mère,

Qui je leur souhaite une bonne santé.

A mes chèrs cousines : ***Maroua, Zineb, Abd Elkarim***

Mes oncles,

A mes chères amies : ***NOUR ELHOUDA, IMAN, MARWA, NADIA, SOUMIA, KAMILIA, ZINEB...***

A tous mes collègues de la promotion 2021,

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

DAOUD RADHIA

Résumé

Ce mémoire de Master intitulé " Variables aléatoires discrètes dégénérées " a pour but d'étudier les variables aléatoires dégénérées suivant la loi binomiale et poisson, plus précisément nous calculons la distribution et le moment d'ordre n et la variance pour chaque loi montionnée précédement, puis on va établissons la relation entre le moment d'ordre n de cette variable et le polynôme de Bell dégénéré.
Mots clés : nombres de stirling, nombres et polynôme de Bell, nombres de Lah, fonction génératrice, variable aléatoire dégénérée.

Abstract

This Master thesis entitled "Degenerate discrete random variables " aims to study the degenerate random variables according to the binomial and Poisson law, more precisely we calculate the distribution and the moment of order n and the variance for each law assembled previously, then we will establish the relation between the moment of order n of this variable and the degenerate Bell polynomial.
Keywords : Stirling numbers, Bell numbers and polynomial, Lah numbers, generating function, degenerate random variable.

Notations

$\mathbb{N}$: *L'ensemble des entiers naturels.*

$\mathbb{R}$: *L'ensemble des réels.*

$\mathbb{N}^*$: *L'ensemble des entiers naturels non nuls.*

$x^{\overline{n}}$: *Factorielle montante.*

$x^{\underline{n}}$: *Factorielle descendante.*

A_n^p : *Arrangement.*

P_n : *Permutation.*

$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$ *ou* C_n^p : *Combinaison.*

$A(x)$: *Fonction génératrice ordinaire.*

$B(x)$: *Fonction génératrice exponenetielle.*

$s(n,k)$: *Nombres de Stirling de première espèce signés.*

$\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]$: *Nombres de Stirling de première espèce non signés.*

$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$ *ou* $S(n,k)$: *Nombres de Stirling seconde espèce.*

B_n : *Nombres de Bell.*

$[n]$: *l'ensemble des entiers de* 1 *jusqu'*à n.

$B_n(x) : Polynôme \quad de \quad Bell.$

$Bel_n(x) : Nouveau \quad type \quad des \quad Polynômes \quad de \quad Bell \quad dégénéré.$

$L(n,k) : Nombre \quad de \quad Lah.$

$X : Variable \quad aléatoire.$

$E(X) : Espérence \quad mathématique \quad de \quad X.$

$E(X^n) : Moment \quad d'ordre \quad n.$

$V(X) : Variance \quad de \quad X.$

$\Omega : Espace \quad fondamentale.$

$p(A) : Probabilité \quad de \quad l'évènement \quad A.$

$(x)_{n,\alpha} : Factorielle \quad descendante \quad dégénérée.$

$X_\alpha : Variable \quad aléatoire \quad dégénérée.$

$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}_\alpha : Combinaison \quad dégénérée.$

LISTE DES TABLEAUX

1.1 Triangle de Pascal 6
1.2 Nombre de Stirling de première espèce 8
1.3 Nombre de Stirling de seconde espèce 10
1.4 Les premiers valeurs des nombres de Bell 11
1.5 Les premiers valeurs des nombres de Lah 12

2.1 Les valeurs de la loi binômiale 18
2.2 Comparaison des distributions binômiale et de Poisson 18

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les distributions de probabilité ont beaucoup d'importance et ont été couramment utilisées en statistique et en théorie des probabilités. Ils peuvent être donnés par un tableau ou une équation qui relie chaque résultat d'une expérience statistique à sa probabilité d'occurrence. L'une des distributions les plus utiles et applicables est la distribution de probabilité de Poisson. La distribution de Poisson est une distribution de probabilité discrète qui exprime la probabilité qu'un nombre donné d'événements se produisent dans un intervalle de temps ou d'espace si ces événements se produisent avec un taux constant connu et indépendamment du temps écoulé depuis le dernier événement. Plusieurs généralisations de la distribution de Poisson telles que le processus de Polya, la troncature du domaine, la distribution de Poisson de bégaiement, les combinaisons linéaires de variables de Poisson, le comptage de particules, la théorie du risque collectif, les distributions de Poisson mixtes. Ces dernières années, certains scientifiques ont envisagé plusieurs nouvelles extensions de la distribution de Poisson.Par exemple Mahmoudi [13] a introduit la distribution exponentielle de Weibull. Dans ce mémoire, nous considérons la nouvelle extension de Kim [9] pour la distribution de Poisson qui inclut la fonction exponentielle dégénérée et nous l'appelons la distribution de Poisson dégénérée. Ensuite nous avons calcules les moments d'ordre 1, 2, 3, 4 de cette distribution.
Par la suite nous introduisons un λ -analogue de variables aléatoires hypergéométriques, appelé les variables aléatoires hypergéométriques dégénérés, et en déduire l'espérance et la variance de ces variables aléatoires.

Chapitre 1 : Préliminaires et rappels

Nous commançons par un chapitre Préliminaires et rappels introduisent les notions dont nous avons besoin. Nous rappelons les définitions des objets qu'on va manipuler tout au long de ce mémoire, à savoir : arrangement, permutation, combinaison, polynômes binomiaux, factorielle montante, factorielle descendante, partition des ensembles, fonction génératrice exponentielle et ordinaire, nombres de Stirling du première et second éspèce nous donnons leurs interpritations combinatoire et leurs propriétés combinatoire à savoir les relations de réccurances, leurs formules éxplicites ainsi leurs fonctions génératrices et nous donnons aussi la transformation de Stirling.
Ensuite, nous introduisons les nombres et polynômes de Bell, nombres de Lah et nous représentons quelques propriétés de ces nombres.

Chapitre 2 : Probabilités

L'objet principale de ce chapitre est d'introduire les notions et les définitions fondamontaux de probabilité qui peut être montionné comme suit : ensemble fondamentale et évènement, probabilité d'un évènement, espace de probabilité, variable aléatoire, fonction de répartition, l'éspérance et la variance d'une variable aléatoire, puis nous terminons par les lois de probabilité discrètes.

Chapitre 3 : Dégénérer des variables aléatoires

Nous terminons ce mémoire par une étude des variables aléatoires dégénérées dont nous commançons ce chapitre par une introduction contient quelques lemme essentielle telle que : factorielle descendante dégénérée, la fonction exponentielle dégénérée, nombres de Stirling de second espèce dégénérés et polynôme de Bell dégénéré.
Ensuite, nous donnons la loi binomiale dégénérée, la loi de Poisson dégénérée puis la loi hypergéométrique dégénérée, et leurs caractéristiques numériques.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES ET RAPPELS

Dans ce chapitre, nous donnons des définitions de quelques notions de la combinatoire et présentons certains nombres et listons certains propriétés concernant notre sujet. Elles sont principalement extraites des ouvrages et les articles suivantes [2], [5], [6], [16].

1.1 Arrangement

Définition 1.1.1. *Étant donné un ensemble E de n objets, on appelle arrangement de p objets toutes suites ordonnées de p objets pris parmi les n objets.*
Le nombre d'arrangement de p objets pris parmi n est noté : A_n^p et $A_0^0 = 1$.

Remarque 1. *On a nécessairement $p \leq n$ et $n, p \in \mathbb{N}^*$.*
Si $n < p$ alors $A_n^p = 0$.
Deux arrangements de p objets sont donc distincts s'ils différent par la nature des objets qui les composent ou par leur ordre dans la suite.

1.1.1 Arrangement avec répétition

Lorsqu'un objet peut être observé plusieurs fois dans un arrangement, le nombre d'arrangement avec répétition de p objets parmi n objets est alors :

$$A_n^p = n^p \quad avec \quad 1 \leq p \leq n. \tag{1.1.1}$$

1.1.2 Arrangement sans répétition

Lorsque chaque objet ne peut être observé qu'une seule fois dans un arrangement, le nombre d'arrangements sans répétitions de p objets pris parmi n objets est alors :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad avec \quad 1 \leq p \leq n. \tag{1.1.2}$$

1.2 Permutation

1.2.1 Permutation sans répétition

Étant donné un ensemble E de n objets, on appelle permutation de n objets distincts toutes suites ordonnées de n objets ou tout arrangement n à n de ces objets. Le nombre de prmutations

de n objets est noté :

$$P_n = n!. \tag{1.2.1}$$

Remarque 2. *La permutation de n objets constitue un cas particulier d'arrangement sans répétition de p objets parmi n objets lorsque $p = n$ ainsi le nombre de pemutations de n objets parmi n objets est :*

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!. \tag{1.2.2}$$

1.2.2 Permutation avec répétition

Dans le cas où il existerait plusieurs répétitions k d'un même objet parmi n objets. Le nombre de permutations possibles de n objets doit être repporté aux nombres de permutations de k objets identiques.
Le nombre de permutations de n objets est alors :

$$P_n = \frac{n!}{k!}. \tag{1.2.3}$$

1.3 Combinaison

1.3.1 Combinaison sans répétitions

Etant donnée un ensemble E de n objets, on appelle combinaison de p objets tout ensemble de p objets pris parmi les n objets sans remise.
Le nombre de combinaison de p objets pris parmi n objets est alors : C_n^p.

Remarque 3. *On a nécessairement $p \leq n$ et $n, p \in \mathbb{N}$*
Si $n < p$ alors $C_n^p = 0$.

Le nombre de combinaison de p objets parmi n objets sans répétition est :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad noté \quad \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) \quad avec \quad p \leq n. \tag{1.3.1}$$

Remarque 4.

- $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \frac{1}{p!}\dfrac{n!}{(n-p)!}$.

1.3.2 Combinaison avec répétition

Le nombre de combinaison de p objets parmi n avec répétition est :

$$C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}. \tag{1.3.2}$$

1.3.3 Propriétés de combinaison

- La symétrie :

la propriété de symétrie est donnée par :
Si $0 \leq p \leq n$

$$C_n^{n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

,ainsi

$$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

1.4 Polynômes binomiaux

Les polynômes binomiaux $\begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix}$ de l'indéterminée x, x est un réel ou complexe sont définis par :

$$\begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-(k-1))}{k!}. \tag{1.4.1}$$

1.4.1 Série du binôme

Proposition 1.4.1. *Pour tout réel $x \in]-1,1[$ et tout complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ on a :*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k\geq 0} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} x^k. \tag{1.4.2}$$

1.4.2 Formule du binôme de Newton

Théorème 1.4.1. *Si x et y sont des éléments permutables d'un anneau unitaire : $xy = yx$. On a, pour tout entier $n \geq 0$:*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k}y^k = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + y^n. \tag{1.4.3}$$

1.4.3 Triangle de Pascal

Combinaisons composées au formule de Pascal :

$$Si \quad 0 \leq p \leq n, \quad C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$$

n/k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7

TABLE 1.1 – Triangle de Pascal

1.5 Factorielle montante

Définition 1.5.1. *Soit x un nombre réel ou complex et $n \in \mathbb{N}$, la factorielle montante d'ordre n noté $x^{\overline{n}}$, est définie par :*

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1) \qquad si \quad n \geq 1 \quad et \quad x^{\overline{0}} = 1. \tag{1.5.1}$$

1.6 Factorielle descendante

Définition 1.6.1. *Soit x un nombre réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}$, la fonction factorielle descendante d'ordre n noté $x^{\underline{n}}$, est définie par :*

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)\dots(x-(n-1)) \qquad si \quad n \geq 1 \quad et \quad x^{\underline{0}} = 1. \tag{1.6.1}$$

1.7 Partition d'un ensemble

Définition 1.7.1. *Soit un ensemble E quelconque. Un ensemble P de sous-ensembles de E est une partition de E si :*
- *Aucun élément de P n'est vide.*
- *L'union de tous les éléments de P est égale à N.*
- *Les éléments de P sont deux à deux disjoints.*
- *Les éléments de P sont appelés les parties de la partition.*

Exemple 1.7.1. *Soit $A = \{1, 2, 3\}$ les partitions de A sont :*
$\cdot\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
$\cdot\{\{1, 2\}, \{3\}\}$
$\cdot\{\{1, 3\}, \{2\}\}$
$\cdot\{\{1\}, \{2, 3\}\}$
$\cdot\{\{1, 2, 3\}\}$

1.8 Fonctions génératrices

1.8.1 Fonction génératrice ordinaire

Soient n un entier naturel et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes.
On appelle fonction génératrice ordinaire de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, la fonction :

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n. \tag{1.8.1}$$

Cette sérié génératrice à une indéterminée x et à coefficient $(a_n)_{n\geq 0}$ dans un anneau $\mathbb{K}$

- L'addition de deux sériés génératrices ordinaires est définie par :

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\geq 0} b_n x^n = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) x^n, \tag{1.8.2}$$

- La multiplication de deux sériés génératrices ordinaire est définie par :

$$(\sum_{n\geq 0} a_n x^n)(\sum_{n\geq 0} b_n x^n) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n. \tag{1.8.3}$$

avec

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

1.8.2 Fonction génératrice exponentielle

Soient n un entier naturel et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes, on appelle fonction génératrice exponentielle de la suite $(a_n)_{n\geq 0}$, la fonction :

$$B(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}, \tag{1.8.4}$$

- L'addition de deux sériés génératrices exponentielles est définie par :

$$\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) \frac{x^n}{n!}. \tag{1.8.5}$$

- La multiplication de deux sériés génératrices exponentielles est définie par :

$$(\sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!})(\sum_{n\geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}) = \sum_{n\geq 0} c_n \frac{x^n}{n!}, \tag{1.8.6}$$

avec

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a_k b_{n-k}$$

.

1.9 Les nombres de Stirling de première espèce

Définition 1.9.1. *Les nombres de Stirling de première espèce (non signés), noté* $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]$ *sont définis comme le nombre de permutation de l'ensemble* $[n]$ *ayant exactement* k*-cycles. Il apparaîssent comme coefficient de polynôme* $x^{\overline{n}}$ *écrit dans la base canonique* x^n*, c'est-à-dire :*

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right] x^k. \tag{1.9.1}$$

On définit aussi algébriquement, les nombres de Stirling de première espèce signés noté $s(n,k)$, par :

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0} s(n,k)x^k. \tag{1.9.2}$$

Voici les propriétés importantes concernant les nombres $s(n,k)$

Propriétés :

- **La relation de récurrence** : Les nombres de Stirling du première espèce $s(n,k)$ satisfont la relation de récurrence triangulaire

$$\begin{cases} s(n,k) = 0 & \text{si } n < k \\ s(n,n) = 1 & \\ s(n,0) = s(0,k) = 0 & \text{sauf } s(0,0) = 1 \\ s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k) & \text{pour } n,k \geq 1 \end{cases}$$

  Les premières valeurs de cette table s'obtiennent grâce à la récurrence :

n/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	-1	1							
3	2	-3	1						
4	-6	11	-6	1					
5	24	-50	35	-10	1				
6	-120	274	-225	85	-15	1			
7	720	-1764	1624	-735	175	-21	1		
8	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1	
9	40320	-109584	118124	-67284	22449	-4536	546	-36	1

TABLE 1.2 – Nombre de Stirling de première espèce

- **Formule explicite :** La formule explicite pour les nombres de Stirling de première espèce $s(n,k)$, est donnée par :

$$s(n,k) = \sum_{j,h=0}^{n-k} (-1)^{j+h} \left(\begin{array}{c} h \\ j \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} n-1+h \\ n-k+h \end{array} \right). \tag{1.9.3}$$

- **Fonction génératrice :** Les nombre de Stirling de première espèce $s(n,k)$ ont pour fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n \geq k} s(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(ln(1+x))^k \tag{1.9.4}$$

1.10 Les nombres de Stirling de seconde espèce

Définition 1.10.1. *Les nombres de Stirling de seconde espèce, notés par $S(n,k)$ ou $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$, comptent le nombre de partiton de l'ensemble à n élément en k blocs ; autrement dit, en k sous-ensembles non vides de [n] disjonts deux à deux, de réunion [n].*

1.10.1 Formule explicite :

Le nombre de k-partitions (comportant k blocs) d'un ensemble fini [n] à n éléments, $n > 0$, vaut :

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array}\right) j^n \tag{1.10.1}$$

1.10.2 Définition algébrique des nombres de Stirling de seconde espèce

Rappelons que la notation $x^{\underline{n}}$ désigne la factorielle descendante d'ordre n

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)...(x-(n-1)) = \prod_{j=0}^{n-1}(x-j) \tag{1.10.2}$$

En particulier $x^{\underline{0}} = 1$. Cette suite (échelonnée) des polynômes constitues comme on sait une base de $\mathbb{R}$ espace vectoriel des polynômes coefficients réels. Noté habituellement $\mathbb{R}[x]$.

Définition 1.10.2. *Les nombres de Stirling de second espèce $S(n,k)$ sont les coordonnées du monôme x^n dans la base $x^{\underline{n}}$. En d'autres termes, et cela constitue une second définition des $S(n,k)$ $(n,k) \in \mathbb{N}^2$:*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)^{\underline{k}} \quad . \tag{1.10.3}$$

Théorème 1.10.1. *Les nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ est au facteur multiplicatif $k!$ près, la différence d'ordre k en $x_0 = 0$ du monôme x^n. En d'autres termes :*

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\triangle^k\left(x^n\right)|_{x_0=0} . \tag{1.10.4}$$

Exemple 1.10.1. *Sin $= 1$ la seule partition de [n] (la partition grossière) est celle dont le seul bloc est [n] $S(1,1) = 1$ de tout $n \geqslant 1$ $S(n,n) = 1$ (parties à un seul élément) $S(n,1) = 1$ partition grossière*

si n=3 $N = \{a,b,c\}$ on trouve les cinq partition suivantes :
$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$
$\{\{a\},\{b,c\}\}$
$\{\{b\},\{a,c\}\}$
$\{\{c\},\{a,b\}\}$
$\{\{a,b,c\}\}$

Alors :
$S(3,0) = 0$
$S(3,1) = 1$
$S(3,2) = 3$
$S(3,3) = 1$

Proposition 1.10.1. *Pour tous entiers n et $k \in \mathbb{N}$, tel que $0 \leq n < k$, on a :*

$$S(n,k) = 0$$

Propriétés :

- **Relation de récurrence :** Les nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ satisfont la relation de récurrence triangulaire

$$\begin{cases} S(n,0) = S(0,k) = 0 & \text{sauf } S(0,0) = 1 \\ S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k) & \text{pour } n \geq k \geq 1 \end{cases}$$

.

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	9651	2646	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

TABLE 1.3 – Nombre de Stirling de seconde espèce

- **Fonction génératrice :** Les fonctions génératrices ordinaires et exponentielles de nombres de Stirling du seconde espèce $S(n,k)$ sont données respectivement par :

$$\sum_{n \geqslant k} S(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)...(1-kx)} \tag{1.10.5}$$

$$\sum_{n \geqslant k} S(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x-1)^k}{k!} \tag{1.10.6}$$

1.11 Transformation de Stirling

Définition 1.11.1.

- *La transformée de Stirling d'une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$ donnée par :*

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)a_n \tag{1.11.1}$$

où $S(n,k)$ est le nombre de Stirling de seconde espèce.

- *La transformation inverse est donnée par :*

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)b_n \tag{1.11.2}$$

où $s(n,k)$ est le nombre de Stirling de première espèce.

1.12 Nombres et polynômes de Bell

1.12.1 Nombres de Bell

Les nombres de Bell, notés B_n, comptent le nombre totale de partitions d'un ensemble à n éléments. Ou encore, ils sont définis comme étant la somme des nombres de Stirling de second espèce :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \tag{1.12.1}$$

Propriétés :

- **Relation de récurrence :** Les nombres de Bell B_n peuvent se calculer par la relation récurrente suivante :

$$\begin{cases} B_0 = 1 \\ B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} B_k \end{cases}$$

  Les premières valeurs de ces nombres sont données dans le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147	115975

TABLE 1.4 – Les premiers valeurs des nombres de Bell

- **Fonction génératrice :**
  La fonction génératrice ordinaire des nombres de Bell est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0} B_n x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(1-x)\dots(1-nx)}. \tag{1.12.2}$$

  La fonction génératrice exponentielle des nombres de Bell est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0} B_n \frac{x^n}{n!} = exp(e^x - 1). \tag{1.12.3}$$

1.12.2 Polynôme de Bell

Les polynômes de Bell $B_n(x)$, appelés aussi les polynômes exponentielles sont définis par :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^k \tag{1.12.4}$$

Les premiers polynômes de Bell, sont :

$$\begin{aligned} Bel_0(x) &= 1 \\ Bel_1(x) &= x \\ Bel_2(x) &= x + x^2 \\ Bel_3(x) &= x + 3x^2 + x^3 \\ Bel_4(x) &= x + 7x^2 + 6x^3 + x^4. \end{aligned}$$

La fonction génératrice exponentielle pour ces polynômes est la suivante :

$$\sum_{n\geq 0} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = exp(x(e^t - 1)). \tag{1.12.5}$$

On remarque alors que les nombres de Bell vérifient :

$$B_n = B_n(1)$$

.

1.13 Nombres de Lah

Définition 1.13.1. *Les nombres de Lah $L(n,k)$ ont une formule explicite simple donnée par :*

$$L(n,k) = \frac{n!}{k!}\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \tag{1.13.1}$$

Les nombres de Lah satisfaire la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} L(n,n) = 1 \\ L(n,k) = 0 & \text{si } n < k \\ L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1)L(n-1,k) \quad . \end{cases}$$

Les premières valeurs de ces nombres sont données dans le tableau suivant :

n/k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	2	1								
3	6	6	1							
4	24	36	12	1						
5	120	240	120	20	1					
6	720	1800	1200	300	30	1				
7	5040	15120	12600	4200	630	42	1			
8	4032	141120	141120	58800	11760	1176	56	1		
9	362880	1451520	1693440	846720	211680	28224	2016	72	1	
10	3628800	16329600	21772800	12700800	3810240	635040	60480	3240	90	1

TABLE 1.5 – Les premiers valeurs des nombres de Lah

Propriétés

- **Fonction génératrice :**

La fonction génératrice exponentielle des nombres de Lah est donnée par :

$$\sum_{n \geqslant k} L(n,k)\frac{x^k}{k!} = \frac{1}{k!}(\frac{x}{1-x})^k. \tag{1.13.2}$$

CHAPITRE 2

PROBABILITÉS

Dans ce chapitre, nous donnons les définitions fondamentaux de la probabilité et les lois de probabilité discrètes et leurs caractéristiques numériques. Pour des notions plus précises et détaillées, consulter les ouvrages [1], [12], [13], [14], [15].

2.1 Ensemble fondamental et évènements

Définition 2.1.1.

- *L'ensemble Ω de tous les résultats possibles d'une expérience donnée est appelé ensemble fondamental. Chaque résultat, c'est-à-dire un élément de Ω, s'appelle un élément de Ω.*

- *On appelle évènement A tout fait peuvent l'ors d'une expérience être réalisé ou non.*

2.2 Probabilité d'un évènement

On associe à chaque évènement un certain nombre proportionnel à sa possibilité de réalisation, ce nombre est appelé probabilité de cet évènement.
Si Ω est l'ensemble fondamental d'une expérience aléatoire telle que $|\Omega| = n$ et A est un évènement de Ω telle que $|A| = m$, la probabilité de l'évènement est donné par :

$$P(A) = \frac{nombres \quad des \quad cas \quad favorables}{nombres \quad des \quad cas \quad possibles} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n} = \alpha$$

telle que $0 \leq \alpha \leq 1$

2.3 Espace de probabilité

Définition 2.3.1. *on considère le triplet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ou Ω : espace fondamental ou bien l'univers et $\mathcal{F}$ est appelé tribu ou σ-algèbre. Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés les événements. La mesure P est appelée probabilité ou, mieux, mesure de probabilité, et pour un événement A de $\mathcal{F}$, le nombre réel $P(A)$ s'appelle la probabilité de l'événement A.*

Définition 2.3.2. *la tribu $\mathcal{F}$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. *Si* $A \in \mathcal{F}$ *alors* $\overline{A} \in \mathcal{F}$ *(ou $\overline{A}$ est l'évènement contraire de A).*
3. *Si* $A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{F}$ *alors* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Définition 2.3.3. *Le couple $(\Omega, \mathcal{F})$ ainsi défini est appelé* ***espace probabbilisable***

Définition 2.3.4. *P est une fonction défini sur les évènements qui apparaître à $\mathcal{F}$ et vérifient les conditions suivantes :*

1. $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F}$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad si \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (\forall \quad i \neq j)$.

Le triple $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est appelé ***espace de probabilité***

2.3.1 Propriétés des espaces de probabilités

Propriété 1.

- $\emptyset \in \mathcal{F}$.
- $Si \quad A_1, A_2 \in \mathcal{F} \quad alors \quad A_1 \cup A_2 \in \mathcal{F}$.
- $Si \quad A_1, A_2, ..., A_n, ... \in \mathcal{F} \quad alors \quad \cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.
- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.
- $p(\emptyset) = 0$.
- $p(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $A_1, A_2 \in \mathcal{F} \quad si \quad A_1 \subset A_2 \quad alors \quad p(A_1) \leq p(A_2)$.
- $\forall A \in \mathcal{F} \qquad 0 \leq p(A) \leq 1$.

2.4 Variable aléatoire

Définition 2.4.1. *Etant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on appelle variable aléatoire sur cet espace, toute application X de Ω dans $\mathbb{R}$ telle que :*

$$\begin{cases} X : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \\ \omega \to X(\omega) \end{cases}$$

Définition 2.4.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ un espace probabilisé, une variable aléatoire X est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}, p)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.*

Définition 2.4.3. *Une variable aléatoire X est dite discrète si elle ne prend que des valeurs discontinues dans un intervalle (borné ou non borné). L'ensemble des nombres entiers est discret. En règle générale, si $X(\Omega)$ est un ensemble fini ou dénombrable.*

2.5 La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

Définition 2.5.1. *La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est entierement déterminée par les probabilités P_i des évènements $\{X = k\}$*

Remarque 5. *Afin de simplifier l'écriture, nous notons dans la suite :*
$p(\{X = k\}) \quad équivalent \quad à \quad P(X = k)$

2.6 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire (discrète ou continue). On définit la fonction de répartition F de X par la fonction :

$$F : \mathbb{R} \to [0,1] \quad telle \quad que \quad F_X(x) = P(X < x)$$

- Si X est une variable aléatoire disrète ayant une loi de probabilité $P(X = k)$. F la fonction de répartition est une fonction en escalier définie par :

$$F_X(x) = \sum_{k<x} P(X = k).$$

- Par contre si X est une variable aléatoire continue ayant une loi de probabilité $f_X(x)$:

$$F_X(x) = \int_{\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

- Dans les deux cas, F est une fonction monotone croissante, c'est-à-dire :

$$F_X(a) \leq F_X(b) \qquad si \quad a \leq b.$$

- La limite de F_X à gauche est 0, et la limite à droite est 1 :

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0 \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1.$$

2.7 Espérance et variance

Une loi de probabilité peut caractérisée par certaines valeurs typiques correspondant aux notions de valeurs centrale, de dépression et de forme de distribution.

2.7.1 Espérance mathématique

Définition 2.7.1. *L'espérance d'une variable aléatoire $E(X)$ correspond à la moyenne des valeurs possibles de X pondérées par la probabilités associes à ces valeurs. C'est un paramètre de position qui correspond au moment d'ordre 1 de la variable aléatoire X.*

Théorème 2.7.1. *Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un univers probabilisé Ω. On appelle espérance de X, le réel défini par :*

$$E(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i p(X = x_i). \tag{2.7.1}$$

Propriété 2. *Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω , admettant une espérance, alors :*

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- $E(aX) = aE(X) \qquad \forall a \in \mathbb{R}$.
- $Si \quad X \geqslant 0 \quad alors \quad E(X) \geqslant 0$.
- *Si X est une variable aléatoire constant tel que :* $\forall w \in \Omega \quad X(w) = k \quad alors \quad E(X) = k$.

par simple indication, il vient

Corollaire 2.7.1. *Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires sur Ω, alors :*

$$E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \tag{2.7.2}$$

2.7.2 Variance

Définition 2.7.2. *Soit X une variable aléatoire ayant espérance $E(X)$. On appelle variance de X le réel :*

$$V(X) = E([X - E(X)]^2). \tag{2.7.3}$$

Ou bien :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2. \tag{2.7.4}$$

Définition 2.7.3. *Soit X une variable aléatoire ayant une variance $V(X)$. On appelle écart-type de X le réel :*

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \tag{2.7.5}$$

Propriété 3.

- $\forall a \in \mathbb{R} \quad V(aX) = a^2 V(X).$
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad V(aX + b) = a^2 V(X).$
- $V(X) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = E(X).$

2.8 Les lois de probabilité discrètes

2.8.1 La loi de Bernoulli

Définition 2.8.1. *Une variable aléatoire réelle X est de Bernoulli si elle ne prend que les valeurs 0 et 1 avec des probabilités non nulles*

$$P(X = k) = \begin{cases} p & si\ x = 1 \\ q & si\ x = 0 \end{cases}$$

On note $X \to B(p)$

Théorème 2.8.1. *Soit X une variable aléatoire suit la loi de Bernoulli de paramètre p tel que : $0 < p < 1$. L'ésperance, la variance et l'écart-type de X sont données par :*

- *Espérance* $E(X) = p$
- *Variance* $V(x) = p(1 - p) = pq$
- *Ecart-type* $\sigma = \sqrt{pq}$

2.8.2 Loi binomiale

Définition 2.8.2. *Une variable aléatoire réelle X suit la loi binomiale de paramètre n et p si :*

$$P(X = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k} \tag{2.8.1}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$
Où $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ *est le coefficient du binôme.*

On peut observe que la probabilité de n'avoire aucun succés est q^n, et par conséquent, la probabilité d'avoir au moins un succés est $1-q^n$

- Si l'on suppose que n et p sont constants, la fonction $p(k) = B(k,n,p)$ est une distribution de probabilité discrète :

k	0	1	2	...	n
$p(k)$	q^n	$\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} q^{n-1}p$	$\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} q^{n-2}p^2$	...	p^n

TABLE 2.1 – Les valeurs de la loi binômiale

Théorème 2.8.2. *Soit X une variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètre n et p. L'éspérance, la variance et l'ècart-type de X sont données par :*

- *Espérance :* $E(X) = np$
- *Variance :* $V(X) = npq$
- *Ecart-type :* $\sigma = \sqrt{npq}$

2.8.3 Loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire discrète, on dit que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et sa fonction de masse est donnée par :

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,\infty. \tag{2.8.2}$$

On note $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Théorème 2.8.3. *Soit X une variable aléatoire suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. L'ésperance, la variance et l'ècart-type de X sont données par :*

- *Espérance* $E(X) = \lambda.$
- *Variance* $V(X) = \lambda.$
- *Ecart-type* $\sigma = \sqrt{\lambda}.$

Bien que la distribution de Poisson ait un intérêt particulier, elle permet aussi d'obtenir une approximation de la loi de distribution binômiale pour k, pour vu que p soit petit et que $\lambda = np$, c'est que le tableau suivant fait apparaître pour $n = 100, \quad p = \frac{1}{100}, \quad \lambda = n, \quad p = 1$

k	0	1	2	3	4	5
binômiale	0,366	0,370	0,185	0,0610	0,0149	0,0029
poisson	0,368	0,368	0,184	0,0613	0,0153	0,00307

TABLE 2.2 – Comparaison des distributions binômiale et de Poisson

Corollaire 2.8.1. *Soit X une variable aléatoire suit la loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$. Le moment d'ordre n de X est donné par :*

$$E(X^n) = B_n(\lambda)$$

Preuve 2.8.1. *Soit $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda)$. D'une part, la fonction génératrice de X est donnée par :*

$$\begin{aligned} E(e^{tX}) &= \sum_{k\geq 0} e^{tk} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} \\ &= e^{\lambda(e^t-1)} \end{aligned}$$

D'autre part, la fonction génératrice exponentielle des polynômes de Bell est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{x(e^t-1)}$$

Donc :

$$\sum_{n\geq 0} B_n(\lambda) \frac{t^n}{n!} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} E(e^{tX}) &= E(\sum_{k\geq 0} \frac{(tX)^n}{n!}) \\ &= \sum_{k\geq 0} E(X^n) \frac{t^n}{n!} \\ &= e^{x(e^t-1)} \end{aligned}$$

Si on remplace x par λ on trouve :

$$E(e^{t\lambda}) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

Par identification, on trouve :

$$E(X^n) = B_n(\lambda)$$

Lemme 2.8.1. *Pour $n \geq 0$, On a :*

$$x^n = \sum_{k=0}^{\infty} Bel_k(x) s(n,k) \tag{2.8.3}$$

Preuve 2.8.2. *On a bien que la fonction génératrice des polynômes de Bel définie par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = e^{x(e^t-1)}$$

On remplace t par $[log(1+t)]$ *:*

$$\begin{aligned} e^{xt} &= \sum_{k=0}^{\infty} Bel_k(x)\frac{t^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} Bel_k(x)\frac{[log(1+t)]^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} Bel_k(x)\sum_{n=k}^{\infty} s(n,k)\frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty} Bel_k(x)s(n,k))\frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

Donc :

$$x^n = \sum_{k=0}^{\infty} Bel_k(x)s(n,k)$$

Avec $s(n,k)$*les nombres de Stirling premier espèce.*

Lemme 2.8.2. *Soit X une variable aléatoire suit la loi de Poisson de paramètre* $\lambda > 0$*. L'espérance de la factorielle descendante est donnée par :*

$$E[(X)_n] = \lambda^n \tag{2.8.4}$$

Preuve 2.8.3. *Soit X variable aléatoire suit la loi de Poisson avec le paramètre (*$\lambda > 0$*), d'aprés le lemme précédent on a :*

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$$

$$E[(X)_n] = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)E(X^k)$$

D'aprés corollaire (2, 8, 1), on trouve que :

$$B_n(\lambda) = E(X^n)$$

Donc, remplaçons $E(X^k)$ *par* $Bel_k(\lambda)$ *on trouve :*

$$E[(X)_n] = \sum_{k=0}^{\infty} s(n,k)Bel_k(\lambda)$$

D'aprés lemme (2, 8, 1), on trouve :

$$E[(X)_n] = \lambda^n$$

2.8.4 Loi Hypergéométrique

Une variable aléatoire réelle X suit une loi Hypergéométrique de paramètre N, n, p si :

$$p(X=k) = \frac{\begin{pmatrix} k \\ N_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-k \\ N_q \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ N \end{pmatrix}} = \frac{C_{N_p}^k C_{N_q}^{n-k}}{C_N^n} \quad k = 0,1,2,....,n, \quad N_p + N_q = N$$

On not $X \rightsquigarrow \mathcal{H}(N,n,p)$

Théorème 2.8.4. *Soit X une variable aléatoire suit la loi Hypergéométrique de paramètre N, n, p. L'ésperance, la variance et l'écart-type de X sont données par :*

- *Espérance* $E(X) = np$
- *Variance* $V(X) = np(1-p)\frac{N-n}{N-1} = npq\frac{N-n}{N-1}$
- *Ecart-type* $\sigma = \sqrt{npq\frac{N-n}{N-1}}$

CHAPITRE 3

DÉGÉNÉRER DES VARIABLES ALÉATOIRES

Dans ce chapitre, nous donnons la loi binomiale dégénérée, la loi de poisson dégénérée et la loi hypergéométrique dégénérée. Pour plus des détailles consulter les ouvrages [9] [10] [11] [4] [17] [7] [8].

3.1 Introduction

3.1.1 Factorielle descendante généralisé

Nous définissons, le factorielle descendante dégénéré $(x)_{n,\alpha}$ par :

$$(x)_{n,\alpha} = \begin{cases} x(x-\alpha)(x-2\alpha)...(x-(n-1)\alpha) & \text{si } n = 1, 2, ... \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

3.1.2 Fonction exponentielle dégénérée

la fonction exponentielle dégénérée est défini par :

$$e_\alpha^x(t) = (1+\alpha t)^{\frac{x}{\alpha}} \quad et \quad \lim_{\alpha \to 0} e_\alpha^x(t) = e^{xt}$$

pour $x = 1$

$$e_\alpha^1(t) = e_\alpha(t) = e_\alpha^t = (1+\alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} \quad et \quad \lim_{\alpha \to 0} e_\alpha(t) = e^t$$
$$e^{xt} = \sum_{n \geq 0} \frac{(xt)^n}{n!} \quad et \quad e_\alpha^x(t) = \sum_{n \geq 0} (x)_{n,\alpha} \frac{t^n}{n!}$$

3.1.3 Nombres du stirling de second espècce dégénérés

Les nombres de Stirling du second espèce dégénérés sont définis par :

$$(x)_{n,\alpha} = \sum_{k=0}^{n} S_{2,\alpha}(n,k)(x)_k, \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.1.1}$$

- **Fonction génératrice :** Les nombres de Stirling du second espèce dégénérés $S_{2,\alpha}(n,k)$ ont pour fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n=k}^{\infty} S_{2,\alpha}(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e_\alpha^t - 1)^k \qquad k \geq 0 \tag{3.1.2}$$

- **Formule explicite :** la formule explicite des nombres de Stirling du second espèce dégénérés $S_{2,\alpha}(n,k)$ est donnée par :

$$S_{2,\alpha}(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ l \end{array} \right)(-1)^{k-l}(l)_{n,\alpha} \qquad n \geq k \tag{3.1.3}$$

Corollaire 3.1.1.

$$\lim_{\alpha\to 0} S_{2,\alpha}(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\left(\begin{array}{c} k \\ l \end{array} \right)(-1)^{k-l}l^n = S(n,k)$$

3.1.4 Polynôme de Bell dégénéré

Les polynômes de Bell dégénérés $B_{n,\alpha}$ sont définis par :

$$B_{n,\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{n} S_{2,\alpha}(n,k)x^k, (n \geqslant 0) \tag{3.1.4}$$

- **Fonction génératrice :** Les polynômes de Bell dégénérés $B_{n,\alpha}$ ont pour fonction génératrice :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\alpha}(x)\frac{t^n}{n!} = e^{x(e_\alpha^t - 1)} \tag{3.1.5}$$

Corollaire 3.1.2.

$$\lim_{\alpha\to 0} B_{n,\alpha}(x) = B_n(x) \qquad n \geq 0$$

Lemme 3.1.1.

$$B_{n,\alpha}(x) = e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}(k)_{n,\alpha}\frac{x^k}{k!} \tag{3.1.6}$$

Preuve 3.1.1. *a partir de la fonction génératrice de polynôme dégénéré de Bel on trouve :*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\alpha}(x)\frac{t^n}{n!} &= e^{x(e_\alpha^t - 1)} \\
&= e^{-x}e^{xe_\alpha^t} \\
&= e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(xe_\alpha^t)^k}{k!} \\
&= e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty} e_\alpha^{kt}\frac{x^k}{k!} \\
&= e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(k)_{n,\alpha} \\
&= e^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty}(k)_{n,\alpha}\frac{x^k}{k!})\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}(k)_{n,\alpha}\frac{x^k}{k!})\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

Donc :

$$B_{n,\alpha}(x) = e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}(k)_{n,\alpha}\frac{x^k}{k!}$$

Lemme 3.1.2. *Nouveau type du polynôme de Bel dégénéré $Bel_{n,\alpha}(x)$ est donné par :*

$$Bel_{n,\alpha}(x) = e_{\alpha}^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}(1)_{k,\alpha}x^k\frac{k^n}{k!} \tag{3.1.7}$$

Preuve 3.1.2. *On a :*

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}Bel_{n,\alpha}(x)\frac{t^n}{n!} &= e_{\alpha}^{-x}e_{\alpha}^{xe^t}\\ &= e_{\alpha}^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}(1)_{k,\alpha}x^k\frac{e^{kt}}{k!}\\ &= e_{\alpha}^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}(1)_{k,\alpha}x^k\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k^nt^n}{n!}\\ &= e_{\alpha}^{-x}\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{\infty}(1)_{k,\alpha}x^k\frac{k^n}{k!})\frac{t^n}{n!}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(e_{\alpha}^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}(1)_{k,\alpha}x^k\frac{k^n}{k!})\frac{t^n}{n!}\end{aligned}$$

D'ou :

$$Bel_{n,\alpha} = e_{\alpha}^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}(1)_{k,\alpha}x^k\frac{k^n}{k!}$$

3.1.5 Propriètés

Lemme 3.1.3.

$$(x)_{n+1,\alpha} = x(x-\alpha)_{n,\alpha}$$

Preuve 3.1.3.

$$\begin{aligned}(x)_{n+1,\alpha} =& x(x-\alpha)(x-2\alpha)...(x-n\alpha)\\ =& x(x-\alpha)((x-\alpha)-\alpha)((x-\alpha)-2\alpha)...((x-\alpha)-(n-1)\alpha)\\ =& x(x-\alpha)_{n,\alpha}\end{aligned}$$

Lemme 3.1.4. *pour ($n \geq 0, \alpha \in \mathbb{C}$), On a :*

$$(x)_{n+2,\alpha} = x(x-\alpha)(x-2\alpha)_{n,\alpha}$$

Preuve 3.1.4.

$$\begin{aligned}(x)_{n+2,\alpha} =& x(x-\alpha)(x-2\alpha)...(x-(n+1)\alpha)\\ =& x(x-\alpha)((x-2\alpha)((x-2\alpha)-\alpha)((x-2\alpha)-2\alpha)...((x-2\alpha)-(n-1)\alpha)\\ =& x(x-\alpha)(x-2\alpha)_{n,\alpha}\end{aligned}$$

Lemme 3.1.5. *: pour* $(n \geq 0, (x, \alpha \in \mathbb{C}))$*, On a :*

$$(x)_{n+3,\alpha} = x(x-\alpha)(x-2\alpha)(x-3\alpha)_{n,\alpha}$$

Preuve 3.1.5.

$$\begin{aligned}(x)_{n+3,\alpha} =& x(x-\alpha)(x-2\alpha)(x-3\alpha)...(x-(n+2)\alpha)\\ =& x(x-\alpha)((x-2\alpha)((x-3\alpha)((x-3\alpha)-\alpha)((x-3\alpha)-2\alpha)...((x-3\alpha)-(n-1)\alpha)\\ =& x(x-\alpha)(x-2\alpha)(x-3\alpha)_{n,\alpha}\end{aligned}$$

Lemme 3.1.6. *: pour* $(n \geq 0, \alpha \in \mathbb{C})$*, On a :*

$$(x)_{n+4,\alpha} = x(x-\alpha)(x-2\alpha)(x-3\alpha)(x-4\alpha)_{n,\alpha}$$

Preuve 3.1.6.

$$\begin{aligned}(x)_{n+4,\alpha} =& x(x-\alpha)(x-2\alpha)...(x-(n+3)\alpha)\\ =& x(x-\alpha)(x-2\alpha)(x-3\alpha)(x-4\alpha)((x-4\alpha)-\alpha)((x-4\alpha)-2\alpha)...((x-4\alpha)-(n-1)\alpha)\\ =& x(x-\alpha)(x-2\alpha)(x-3\alpha)(x-4\alpha)_{n,\alpha}\end{aligned}$$

Lemme 3.1.7. *: Pour tout* $(n \geqslant 2, \alpha \in \mathbb{C})$*, on a :*

$$(1-2\alpha)_{n-2,\alpha} = \frac{(1)_{n,\alpha}}{(1-\alpha)}$$

Preuve 3.1.7.

$$\begin{aligned}(1-2\alpha)_{n-2,\alpha} &= (1-2\alpha)((1-2\alpha)-\alpha)((1-2\alpha)-2\alpha)...((1-2\alpha)-(n-3)\alpha)\\ &= \frac{(1\alpha)}{(1-\alpha)}[(1-2\alpha)((1-2\alpha)-\alpha)((1-2\alpha)-2\alpha)...((1-2\alpha)-(n-3)\alpha)]\\ &= \frac{1}{(1-\alpha)}[(1-\alpha)(1-2\alpha)(1-3\alpha)...(1-(n-1)\alpha)]\\ &= \frac{(1)_{n,\alpha}}{(1-\alpha)}\end{aligned}$$

Corollaire 3.1.3. *:pour* $(n \geqslant k, k \in \mathbb{N}), \quad (x, y, \alpha \in \mathbb{C})$*, on a la formule suivante :*

$$(x+y)_{n,\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (x)_{k,\alpha}(y)_{n-k,\alpha}$$

Lemme 3.1.8. *: Pour tout* $(n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{C})$*, on a :*

$$\begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix}_{\alpha} = \frac{x}{n} \begin{pmatrix} x-\alpha \\ n-1 \end{pmatrix}_{\alpha}$$

Preuve 3.1.8.

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{c} x \\ n \end{array} \right)_\alpha =& \frac{(x)_{n,\alpha}}{n!} \\ =& \frac{x(x-\alpha)(x-2\alpha)...(x-(n-1)\alpha)}{n!} \\ =& \frac{x}{n}\frac{(x-\alpha)((x-\alpha)-\alpha)...((x-\alpha)-(n-2)\alpha)}{(n-1)!} \\ =& \frac{x}{n}\frac{(x-\alpha)_{n-1,\alpha}}{(n-1)!} \\ =& \frac{x}{n}\left(\begin{array}{c} x-\alpha \\ n-1 \end{array} \right)_\alpha\end{aligned}$$

Lemme 3.1.9. *: pour $n \geq 1$, On a :*

$$\left(\begin{array}{c} x-\alpha \\ n-1 \end{array} \right)_\alpha = \frac{x-\alpha}{n-1}\left(\begin{array}{c} x-2\alpha \\ n-2 \end{array} \right)_\alpha$$

Preuve 3.1.9.

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{c} x-\alpha \\ n-1 \end{array} \right)_\alpha =& \frac{(x-\alpha)_{n-1,\alpha}}{(n-1)!} \\ =& \frac{(x-\alpha)(x-2\alpha)...(x-(n-2)\alpha)}{(n-1)(n-2)!} \\ =& \frac{(x-\alpha)(x-2\alpha)((x-2\alpha)-\alpha)...((x-2\alpha)-(n-3)\alpha)}{(n-1)(n-2)!} \\ =& \frac{x-\alpha}{n-1}\frac{(x-2\alpha)((x-2\alpha)-\alpha)...((x-2\alpha)-(n-3)\alpha)}{(n-2)!} \\ =& \frac{x-\alpha}{n-1}\left(\begin{array}{c} x-2\alpha \\ n-2 \end{array} \right)_\alpha\end{aligned}$$

Lemme 3.1.10.

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} x \\ k \end{array} \right)_\alpha \left(\begin{array}{c} y \\ n-k \end{array} \right)_\alpha = \left(\begin{array}{c} x+y \\ n \end{array} \right)_\alpha$$

Preuve 3.1.10. *Soit $X \sim \mathcal{H}(N,m,n)$, pour $N,m,k > 0$,*
et soit b une constante, On a :

$$\begin{aligned} b =& E(b) \\ =& \sum_{k\geqslant 0} b\frac{\left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array} \right)_\alpha}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right)_\alpha} \\ =& b\sum_{k\geqslant 0} \frac{\left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array} \right)_\alpha}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right)_\alpha}\end{aligned}$$

$$1 = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right)_\alpha} \sum_{k \geqslant 0} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array} \right)_\alpha$$

$$\sum_{k \geqslant 0} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array} \right)_\alpha = \left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right)_\alpha$$

3.2 La loi binomial dégénérée

Dans cette section, nous supposons que $\alpha \in (0,1)$, et p est la probabilité de succès d'une expérience. Pour $\alpha \in (0,1)$, X_α est la variable aléatoire binomiale dégénérée de paramètre n, p notée $X_\alpha \sim \mathcal{B}_\alpha(n,p)$, sa la fonction de masse de probabilité de est donnée par :

$$P(X_\alpha = k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (p)_{k,\alpha}(1-p)_{n-k,\alpha} \frac{1}{(1)_{n,\alpha}}, \tag{3.2.1}$$

où k=0,1,2,...,n.
Maintenant, On va montrer que $\mathcal{B}_\alpha(n,p)$ est une loi de probabilité :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} P(X_\alpha = k) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (p)_{k,\alpha}(1-p)_{n-k,\alpha} \frac{1}{(1)_{n,\alpha}} \\ &= \frac{1}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (p)_{k,\alpha}(1-p)_{n-k,\alpha} \\ &= \frac{1}{(1)_{n,\alpha}} (p+1-p)_{k+n-k,\alpha} \\ &= \frac{(1)_{n,\alpha}}{(1)_{n,\alpha}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}_\alpha(n,p)$ est une loi de probabilité.

Théorème 3.2.1. *Soit $X_\alpha \sim \mathcal{B}_\alpha(n,p), (n \geq 0)$, le moment d'ordre 1 et le moment d'ordre 2 sont données par :*

- $E(X_\alpha) = \frac{np}{(1)_{n,\alpha}}(1-\alpha)_{n-1,\alpha}$
- $E(X_\alpha^2) = \frac{np}{(1)_{n,\alpha}}(1-2\alpha)_{n-2,\alpha}[p(n-1)+1-n\alpha]$

Preuve 3.2.1.

- *On calcule le moment d'ordre 1 (l'éspérance) :*

$$\begin{aligned}
E(X_\alpha) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X_\alpha = k) \\
&= \frac{1}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (p)_{k,\alpha}(1-p)_{n-k,\alpha} \\
&= \frac{1}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n} k \frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} (p)_{k,\alpha}(1-p)_{n-k,\alpha} \\
&= \frac{n}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right) (p)_{k,\alpha}(1-p)_{n-k,\alpha} \\
&= \frac{n}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right) (p)_{k+1,\alpha}(1-p)_{n-(k+1),\alpha} \\
&= \frac{n}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right) (p)_{k+1,\alpha}(1-p)_{n-k-1,\alpha} \\
&= \frac{n}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right) p(p-\alpha)_{k,\alpha}(1-p)_{n-k-1,\alpha} \\
&= \frac{np}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right) (p-\alpha)_{k,\alpha}(1-p)_{n-k-1,\alpha} \\
&= \frac{np}{(1)_{n,\alpha}} (p-\alpha+1-p)_{k+n-k-1,\alpha} \\
&= \frac{np}{(1)_{n,\alpha}} (1-\alpha)_{n-1,\alpha}
\end{aligned}$$

- *On calcule le moment d'ordre 2 :*

$$
\begin{aligned}
E(X_\alpha^2) &= \frac{1}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n} k^2 P(X_\alpha = k) \\
&= \frac{1}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n} k^2 \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (p)_{k,\alpha}(1-p)_{n-k,\alpha} \\
&= \frac{1}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n} k(k-1+1) \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (p)_{k,\alpha}(1-p)_{n-k,\alpha} \\
&= \frac{1}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (p)_{k,\alpha}(1-p)_{n-k,\alpha} + \frac{1}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n} k \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (p)_{k,\alpha}(1-p)_{n-k,\alpha} \\
&= \frac{1}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (p)_{k,\alpha}(1-p)_{n-k,\alpha} + E(X_\alpha) \\
&= \frac{1}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \frac{n(n-1)(n-2)!}{k(k-1)k-2)!(n-k)!} (p)_{k,\alpha}(1-p)_{n-k,\alpha} + E(X_\alpha) \\
&= \frac{1}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n} n(n-1) \left(\begin{array}{c} n-2 \\ k-2 \end{array} \right) (p)_{k,\alpha}(1-p)_{n-k,\alpha} + E(X_\alpha) \\
&= \frac{n(n-1)}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=2}^{n} \left(\begin{array}{c} n-2 \\ k \end{array} \right) (p)_{k+2,\alpha}(1-p)_{n-(k+2),\alpha} + E(X_\alpha) \\
&= \frac{n(n-1)}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\begin{array}{c} n-2 \\ k \end{array} \right) p(p-\alpha)(p-2\alpha)_{k,\alpha}(1-p)_{n-2-k,\alpha} + E(X_\alpha) \\
&= \frac{n(n-1)p(p-\alpha)}{(1)_{n,\alpha}} \sum_{k=0}^{n-2} \left(\begin{array}{c} n-2 \\ k \end{array} \right) (p-2\alpha)_{k,\alpha}(1-p)_{n-2-k,\alpha} + E(X_\alpha) \\
&= \frac{n(n-1)p(p-\alpha)}{(1)_{n,\alpha}} (p-2\alpha+1-p)_{n-2,\alpha} + \frac{np}{(1)_{n,\alpha}} (1-\alpha)_{n-1,\alpha} \\
&= \frac{n(n-1)p(p-\alpha)}{(1)_{n,\alpha}} (1-2\alpha)_{n-2,\alpha} + \frac{np}{(1)_{n,\alpha}} (1-\alpha)_{n-1,\alpha} \\
&= \frac{n(n-1)p(p-\alpha)}{(1)_{n,\alpha}} (1-2\alpha)_{n-2,\alpha} + \frac{np}{(1)_{n,\alpha}} (1-\alpha)(1-2\alpha)_{n-2,\alpha} \\
&= \frac{np}{(1)_{n,\alpha}} (1-2\alpha)_{n-2,\alpha}[(n-1)(p-\alpha) + (1-\alpha)] \\
&= \frac{np}{(1)_{n,\alpha}} (1-2\alpha)_{n-2,\alpha}[p(n-1) + 1 - n\alpha]
\end{aligned}
$$

Corollaire 3.2.1. *Soit $X_\alpha \sim \mathcal{B}_\alpha(n,p), (n \geq 0)$, la variance de X_α est donnée par :*

$$Var(X_\alpha) = \frac{np}{(1)_{n,\alpha}} (1-2\alpha)_{n-2,\alpha} \left[p(n-1) + 1 - n\alpha - (1-\alpha)E(X_\alpha)\right]$$

Preuve 3.2.2.

$$\begin{aligned}
Var(X_\alpha) &= E(X_\alpha^2) - (E(X_\alpha))^2 \\
&= \frac{np}{(1)_{n,\alpha}}(1-2\alpha)_{n-2,\alpha}[p(n-1)+1-n\alpha] - (\frac{np}{(1)_{n,\alpha}})^2((1-\alpha)_{n-1,\alpha})^2 \\
&= \frac{np}{(1)_{n,\alpha}}\{(1-2\alpha)_{n-2,\alpha}[p(n-1)+1-n\alpha] - \frac{np}{(1)_{n,\alpha}}((1-\alpha)_{n-1,\alpha})^2\} \\
&= \frac{np}{(1)_{n,\alpha}}\{(1-2\alpha)_{n-2,\alpha}[p(n-1)+1-n\alpha] - \frac{np}{(1)_{n,\alpha}}((1-\alpha)(1-2\alpha)_{n-2,\alpha})^2\} \\
&= \frac{np}{(1)_{n,\alpha}}(1-2\alpha)_{n-2,\alpha}\{[p(n-1)+1-n\alpha] - \frac{np}{(1)_{n,\alpha}}(1-\alpha)^2(1-2\alpha)_{n-2,\alpha}\} \\
&= \frac{np}{(1)_{n,\alpha}}(1-2\alpha)_{n-2,\alpha}\{p(n-1)+1-n\alpha-(1-\alpha)E(X_\alpha)\}
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.2.

- $\lim_{\alpha\to 0} E(X_\alpha) = np = E(X)$.
- $\lim_{\alpha\to 0} Var(X_\alpha) = np(1-p) = Var(X)$.

Preuve 3.2.3.

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0} E(X_\alpha) &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{np}{(1)_{n,\alpha}}(1-\alpha)_{n-1,\alpha} \\
&= \lim_{\alpha\to 0} \frac{np}{(1+\alpha)^{n/\alpha}}(1+\alpha)^{(n-1)/\alpha} \\
&= \lim_{\alpha\to 0} \frac{np}{(1+\alpha)^{1/\alpha}}
\end{aligned}$$

D'aprés :

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = 1$$

D'ou :

$$\lim_{\alpha\to 0} E(X_\alpha) = \lim_{\alpha\to 1} \frac{np}{(1+\alpha)^{1/\alpha}} = np = E(X)$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to 0} Var(X_\alpha) &= \lim_{\alpha\to 0} \frac{np}{(1)_{n,\alpha}}(1-2\alpha)_{n-2,\alpha}\{p(n-1)+1-n\alpha-(1-\alpha)E(X_\alpha)\} \\
&= \lim_{\alpha\to 0} np[\frac{1}{(1)_{n,\alpha}}(1-2\alpha)_{n-2,\alpha}(p(n-1)+1) - \frac{1}{(1)_{n,\alpha}}(1-2\alpha)_{n-2,\alpha}n\alpha \\
&- \frac{1}{(1)_{n,\alpha}}(1-2\alpha)_{n-2,\alpha}] \\
&= np[(p(p-1)+1) - 0 - (1-\alpha)np] \\
&= np(1-p) \\
&= Var(X)
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{\alpha\to 0} Var(X_\alpha) = Var(X)$$

3.3 La loi de poisson dégénérée

Dans cette section, nous considérons une extension de la distribution de Poisson via la fonction exponentielle dégénérée $e_\alpha^x(t)$ et le factorielle descendante $(x)_{n,\alpha}$; Nous l'appelons la distribution de Poisson dégénérée. Nous effectuons ensuite pour obtenir les premiers moments bruts pour la distribution précitée. Soit X_α une variables aléatoire suit la loi de poisson dégénérer

$$P(X_\alpha = k) = e_\alpha^{-\lambda}\frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} \quad , \quad k = 0, 1, 2, ..., \infty \tag{3.3.1}$$

On note par $X_\alpha \sim \mathcal{P}_\alpha(\lambda)$.
On va montrer que $\mathcal{P}_\alpha(\lambda)$ est une loi de probabilité.

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} P(X_\alpha = k) =& \sum_{k\geq 0} e_\alpha^{-\lambda}\frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!}\\ =& e_\alpha^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}\frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!}\\ =& e_\alpha^{-\lambda}e_\alpha^{\lambda}\\ =& (1+\alpha)^{\frac{-\lambda}{\alpha}}(1+\alpha)^{\frac{\lambda}{\alpha}}\\ =& (1+\alpha)^{\frac{-\lambda}{\alpha}+\frac{\lambda}{\alpha}}\\ =& (1+\alpha)^0\\ =& 1\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_\alpha(\lambda)$ est une loi de probabilité.

Théorème 3.3.1. *Soit $X_\alpha \sim \mathcal{P}_\alpha(n, k)$, le moment d'ordre 1 et le moment d'ordre 2 de X_α sont données par :*

- $E(X_\alpha) = \frac{\lambda}{(1+\alpha)}$
- $E(X_\alpha^2) = \frac{\lambda^2+\lambda}{(1+\alpha)^2}$

Preuve 3.3.1.

- *On calcule le moment d'ordre 1(l'espérance) :*

$$\begin{aligned}E(X_\alpha) =& \sum_{k\geq 0} kP(X_\alpha = k)\\ =& \sum_{k\geq 0} ke_\alpha^{-\lambda}\frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!}\\ =& e_\alpha^{-\lambda}\sum_{k\geq 0} k\frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k(k-1)!}\\ =& e_\alpha^{-\lambda}\sum_{k\geq 1}\frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{(k-1)!}\end{aligned}$$

On pose n=k-1 :

$$= e_\alpha^{-\lambda}\sum_{n\geq 0}\frac{(\lambda)_{n+1,\alpha}}{n!}$$

D'aprés lemme (3,1,3), remplaçons $(\lambda)_{n+1,\alpha} = \lambda(\lambda-\alpha)_{n,\alpha}$ *on trouve :*

$$\begin{aligned}
E(X_\alpha) =& e_\alpha^{-\lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda(\lambda-\alpha)_{n,\alpha}}{n!} \\
=& \lambda e_\alpha^{-\lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{(\lambda-\alpha)_{n,\alpha}}{n!} \\
=& \lambda e_\alpha^{-\lambda} e_\alpha^{\lambda-\alpha} \\
=& \lambda(1+\alpha)^{\frac{-\lambda}{\alpha}}(1+\alpha)^{\frac{\lambda-\alpha}{\alpha}} \\
=& \lambda(1+\alpha)^{\frac{-\lambda+\lambda}{\alpha}-1} \\
=& \lambda(1+\alpha)^{-1}
\end{aligned}$$

D'ou :

$$E(X_\alpha) = \frac{\lambda}{(1+\alpha)}$$

- *On calcule le moment d'ordre 2 :*

$$\begin{aligned}
E(X_\alpha^2) &= \sum_{k\geq 0} k^2 p(X_\alpha = k) \\
&= \sum_{k\geq 0} k^2 e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} \\
&= e_\alpha^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} k^2 \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!}
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
k^n &= \sum_{j=0}^{n} S(n,j)(k)_j \\
k^2 &= \sum_{j=0}^{2} S(2,j)(k)_j \\
&= S(2,0)(k)_0 + S(2,1)(k)_1 + S(2,2)(k)_2 \\
&= k + k(k-1)
\end{aligned}$$

Remplaçons $k^2 = k + k(k-1)$*, on trouve :*

$$\begin{aligned}
E(X_\alpha^2) =& e_\alpha^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} [k(k-1)+k] \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} \\
=& e_\alpha^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} k(k-1) \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} + e_\alpha^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} k \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} \\
=& e_\alpha^{-\lambda} \sum_{k\geq 0} k(k-1) \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k(k-1)(k-2)!} + E(X_\alpha) \\
=& e_\alpha^{-\lambda} \sum_{k\geq 2} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{(k-2)!} + E(X_\alpha)
\end{aligned}$$

On pose n=k-2 :

$$=e_\alpha^{-\lambda}\sum_{n\geq 0}\frac{(\lambda)_{n+2,\alpha}}{(n)!}+E(X_\alpha)$$

D'aprés lemme(3,1,4), remplaçons $(\lambda)_{n+2,\alpha}=\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)_{n,\alpha}$ *on trouve :*

$$\begin{aligned}
E(X_\alpha^2) =& e_\alpha^{-\lambda}\sum_{n\geq 0}\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)_{n,\alpha}}{(n)!}+E(X_\alpha)\\
=&\lambda(\lambda-\alpha)e_\alpha^{-\lambda}\sum_{n\geq 0}\frac{(\lambda-2\alpha)_{n,\alpha}}{(n)!}+E(X_\alpha)\\
=&\lambda(\lambda-\alpha)e_\alpha^{-\lambda}e_\alpha^{\lambda-2\alpha}+E(X_\alpha)\\
=&\lambda(\lambda-\alpha)(1+\alpha)^{\frac{-\lambda}{\alpha}}(1+\alpha)^{\frac{\lambda-2\alpha}{\alpha}}+E(X_\alpha)\\
=&\lambda(\lambda-\alpha)(1+\alpha)^{\frac{-\lambda+\lambda}{\alpha}-2}+E(X_\alpha)\\
=&\lambda(\lambda-\alpha)(1+\alpha)^{-2}+E(X_\alpha)\\
=&\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2}+\frac{\lambda}{(1+\alpha)}\\
=&\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2}+\frac{\lambda(1+\alpha)}{(1+\alpha)^2}
\end{aligned}$$

D'ou :

$$E(X_\alpha^2)=\frac{\lambda^2+\lambda}{(1+\alpha)^2}$$

Corollaire 3.3.1. *Soit* X_α *une variable aléatoire suit la loi de poisson dégénérée, la variance de* X_α *est donnée par :*

$$V(X_\alpha)=\frac{\lambda}{(1+\alpha)^2}$$

Preuve 3.3.2.

$$\begin{aligned}
V(X_\alpha) =& E(X_\alpha^2)-[E(X_\alpha)]^2\\
=&\frac{\lambda^2+\lambda}{(1+\alpha)^2}-\left[\frac{\lambda}{(1+\alpha)}\right]^2\\
=&\frac{\lambda}{(1+\alpha)^2}
\end{aligned}$$

D'ou :

$$V(X_\alpha)=\frac{\lambda}{(1+\alpha)^2}$$

Corollaire 3.3.2.

- $\lim\limits_{\alpha\to 0}E(X_\alpha)=\lambda=E(X)$.
- $\lim\limits_{\alpha\to 0}Var(X_\alpha)=\lambda=Var(X)$.

Théorème 3.3.2. *Soit* $X_\alpha\sim P_\alpha(\lambda)$*, le moment d'ordre 3 et le moment d'ordre 4 de* X_α *sont données par :*

- $E(X_\alpha^3)=\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3}+3\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2}+\frac{\lambda}{(1+\alpha)}$
- $E(X_\alpha^4)=\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)(\lambda-3\alpha)}{(1+\alpha)^4}+6\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3}+7\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2}+\frac{\lambda}{(1+\alpha)}$

Preuve 3.3.3.

- *On calcule le moment d'ordre 3 :*

$$\begin{aligned} E(X_\alpha^3) &= \sum_{k\geq 0} k^3 p(X_\alpha = k) \\ &= \sum_{k\geq 0} k^3 e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} k^n &= \sum_{j=0}^{n} S(n,j)(k)_j \\ k^3 &= \sum_{k=0}^{3} S(3,k)(x)_k \\ &= S(3,0)(k)_0 + S(3,1)(k)_1 + S(3,2)(k)_2 + S(3,3)(k)_3 \\ &= k + 3k(k-1) + k(k-1)(k-2) \end{aligned}$$

Remplaçons $k^3 = k + 3k(k-1) + k(k-1)(k-2)$*, on trouve*

$$\begin{aligned} E(X_\alpha^3) &= \sum_{k\geq 0} \left[k + 3k(k-1) + k(k-1)(k-2)\right] e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} \\ &= \sum_{k\geq 0} k e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} + 3\sum_{k\geq 0} k(k-1) e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} + \sum_{k\geq 0} k(k-1)(k-2) e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} \end{aligned}$$

On a :

$$\sum_{k\geq 0} k(k-1) e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} = \frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2}$$

$$\begin{aligned} &= E(X_\alpha) + 3\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + \sum_{k\geq 0} k(k-1)(k-2) e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} \\ &= E(X_\alpha) + 3\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + \sum_{k\geq 0} k(k-1)(k-2) e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k(k-1)(k-2)(k-3)!} \\ &= E(X_\alpha) + 3\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + e_\alpha^{-\lambda} \sum_{k\geq 3} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{(k-3)!} \end{aligned}$$

On pose $n = k - 3$ *:*

$$= E(X_\alpha) + 3\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + e_\alpha^{-\lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{(\lambda)_{n+3,\alpha}}{n!}$$

D'aprés lemme(3,1,5), remplaçons $(\lambda)_{n+3,\alpha} = \lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)(\lambda-3\alpha)_{n,\alpha}$ *on trouve :*

$$\begin{aligned}
E(X_\alpha^3) =& E(X_\alpha) + 3\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + e_\alpha^{-\lambda}\sum_{n\geq 0}\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)(\lambda-3\alpha)_{n,\alpha}}{n!}\\
=& E(X_\alpha) + 3\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + \lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)e_\alpha^{-\lambda}\sum_{n\geq 0}\frac{(\lambda-3\alpha)_{n,\alpha}}{n!}\\
=& E(X_\alpha) + 3\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + \lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)e_\alpha^{-\lambda}e_\alpha^{\lambda-3\alpha}\\
=& E(X_\alpha) + 3\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + \lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)(1+\alpha)^{\frac{-\lambda}{\alpha}}(1+\alpha)^{\frac{\lambda-3\alpha}{\alpha}}\\
=& E(X_\alpha) + 3\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + \lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)(1+\alpha)^{\frac{-\lambda+\lambda}{\alpha}-3}\\
=& E(X_\alpha) + 3\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + \lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)(1+\alpha)^{-3}\\
=& E(X_\alpha) + 3\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + \frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3}
\end{aligned}$$

Donc :

$$E(X_\alpha^3) = \frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3} + 3\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + \frac{\lambda}{(1+\alpha)}$$

- *On calcule le moment d'ordrre 4 :*

$$\begin{aligned}
E(X_\alpha^4) &= \sum_{k\geq 0} k^4 p(X_\alpha = k)\\
&= \sum_{k\geq 0} k^4 e_\alpha^{-\lambda}\frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!}
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
k^n &= \sum_{j=0}^{n} S(n,j)(k)_j\\
k^4 &= \sum_{k=0}^{4} S(4,j)(k)_j\\
&= S(4,0)(k)_0 + S(4,1)(k)_1 + S(4,2)(k)_2 + S(4,3)(k)_3 + S(4,4)(k)_4\\
&= k + 7k(k-1) + 6k(k-1)(k-2) + k(k-1)(k-2)(k-3)
\end{aligned}$$

Remplaçons $k^4 = k + 7k(k-1) + 6k(k-1)(k-2) + k(k-1)(k-2)(k-3)$*, on trouve :*

$$\begin{aligned}
E(X_\alpha^4) =& \sum_{k\geq 0}\left[k + 7k(k-1) + 6k(k-1)(k-2) + k(k-1)(k-2)(k-3)\right]e_\alpha^{-\lambda}\frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!}\\
=& \sum_{k\geq 0} k e_\alpha^{-\lambda}\frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} + 7\sum_{k\geq 0} k(k-1)e_\alpha^{-\lambda}\frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} + 6\sum_{k\geq 0} k(k-1)(k-2)e_\alpha^{-\lambda}\frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!}\\
&+ \sum_{k\geq 0} k(k-1)(k-2)(k-3)e_\alpha^{-\lambda}\frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!}
\end{aligned}$$

On a :

$$\sum_{k\geq 0} k e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} = \frac{\lambda}{(1+\alpha)}$$
$$\sum_{k\geq 0} k(k-1) e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} = \frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2}$$
$$\sum_{k\geq 0} k(k-1)(k-2) e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} = \frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
E(X_\alpha^4) =& \frac{\lambda}{(1+\alpha)} + 7\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + 6\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3} \\
&+ \sum_{k\geq 0} k(k-1)(k-2)(k-3) e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k!} \\
=& \frac{\lambda}{(1+\alpha)} + 7\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + 6\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3} \\
&+ \sum_{k\geq 0} k(k-1)(k-2)(k-3) e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)!} \\
=& \frac{\lambda}{(1+\alpha)} + 7\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + 6\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3} + \sum_{k\geq 4} e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{k,\alpha}}{(k-4)!}
\end{aligned}$$

On pose $n = k-4$:

$$= \frac{\lambda}{(1+\alpha)} + 7\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + 6\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3} + \sum_{n\geq 0} e_\alpha^{-\lambda} \frac{(\lambda)_{n+4,\alpha}}{(n)!}$$

D'prés lemme (3,1,6), remplaçons $(\lambda)_{n+4,\alpha} = \lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)(\lambda-3\alpha)(\lambda-4\alpha)_{n,\alpha}$ *on trouve :*

$$\begin{aligned}
E(X_\alpha^4) =& \frac{\lambda}{(1+\alpha)} + 7\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + 6\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3} + e_\alpha^{-\lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)(\lambda-3\alpha)(\lambda-4\alpha)_{n,\alpha}}{(n)!} \\
=& \frac{\lambda}{(1+\alpha)} + 7\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + 6\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3} + \lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)(\lambda-3\alpha) e_\alpha^{-\lambda} \sum_{n\geq 0} \frac{(\lambda-4\alpha)_{n,\alpha}}{(n)!} \\
=& \frac{\lambda}{(1+\alpha)} + 7\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + 6\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3} + \lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)(\lambda-3\alpha) e_\alpha^{-\lambda} e_\alpha^{(\lambda-4\alpha)} \\
=& \frac{\lambda}{(1+\alpha)} + 7\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + 6\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3} + \lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)(\lambda-3\alpha)(1+\alpha)^{\frac{-\lambda}{\alpha}}(1+\alpha)^{\frac{\lambda-4\alpha}{\alpha}} \\
=& \frac{\lambda}{(1+\alpha)} + 7\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + 6\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3} + \lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)(\lambda-3\alpha)(1+\alpha)^{\frac{-\lambda+\lambda}{\alpha}-4} \\
=& \frac{\lambda}{(1+\alpha)} + 7\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + 6\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3} + \lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)(\lambda-3\alpha)(1+\alpha)^{-4} \\
=& \frac{\lambda}{(1+\alpha)} + 7\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + 6\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3} + \frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)(\lambda-3\alpha)}{(1+\alpha)^4}
\end{aligned}$$

Donc :

$$E(X_\alpha^4) = \frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)(\lambda-3\alpha)}{(1+\alpha)^4} + 6\frac{\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-2\alpha)}{(1+\alpha)^3} + 7\frac{\lambda(\lambda-\alpha)}{(1+\alpha)^2} + \frac{\lambda}{(1+\alpha)}$$

Corollaire 3.3.3. *Soit X_α une variable aléatoire dégénérée suit la loi de poisson dégénérée de paramètre $\lambda > 0$. Le moment d'ordre n de X_α est donné par :*

$$E[X_\alpha^n] = e_\alpha^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (1)_{k,\alpha}}{k!} k^n \tag{3.3.2}$$

Lemme 3.3.1. *Soit X_α une variable aléatoire dégénérée suit la loi de poisson dégénérée de paramètre $\lambda > 0$. On a :*

$$E[X_\alpha^n] = B_{n,\alpha}(\lambda), (n \in \mathbb{N}) \tag{3.3.3}$$

Preuve 3.3.4. *Soit $X_\alpha \rightsquigarrow \mathcal{P}_\alpha(\lambda), (\lambda > 0)$. D'une part, la fonction génératrice de $E[X_\alpha^n]$ est donnée par :*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} E[X_\alpha^n] \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} e_\alpha^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (1)_{k,\alpha}}{k!} k^n \frac{t^n}{n!} \\
&= e_\alpha^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k (1)_{k,\alpha}}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n t^n}{n!} \\
&= e_\alpha^{-\lambda} e_\alpha^{\lambda e^t} \\
&= e_\alpha^{\lambda(e^t - 1)}
\end{aligned}$$

D'autre part, la fonction génératrice exponentielle de nouveau type de Bell dégénérée est donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\alpha}(x) \frac{t^n}{n!} = e_\alpha^{x(e^t - 1)}$$

Donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\alpha}(\lambda) \frac{t^n}{n!} = e_\alpha^{\lambda(e^t - 1)}$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E[X_\alpha^n] \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,\alpha}(\lambda) \frac{t^n}{n!} = e_\alpha^{\lambda(e^t - 1)}$$

Par identification on obtient :

$$E[X_\alpha^n] = B_{n,\alpha}(\lambda)$$

Lemme 3.3.2. *Soit X_α est une variable aléatoire de poisson dégénérée avec paramètre $\lambda \geq 0$*

$$E[(X)_{n,\alpha}] = Bel_{n,\alpha}(\lambda), (n \in \mathbb{N}) \tag{3.3.4}$$

Preuve 3.3.5.

$$\begin{aligned}
E[(X)_{n,\alpha}] &= E[X(X - \alpha)(X - 2\alpha)...(X - (n-1)\alpha)] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k)_{n,\alpha} P[X = k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k)_{n,\alpha} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} (k)_{n,\alpha} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= Bel_{n,\alpha}(\lambda)
\end{aligned}$$

3.4 La loi hypergéométrique dégénérée

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, X_α est une variable aléatoire suit la loi hypergéométrique dégénérée avec les paramètres N,m,n, qui note par :$X_\alpha \sim \mathcal{H}_\alpha(N,m,n)$. La fonction de masse de probabilité de X_α est donnée par :

$$P_\alpha(k) = P(X_\alpha = k) = \frac{\left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array}\right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array}\right)_\alpha}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right)_\alpha} \tag{3.4.1}$$

où k=0,1,2,...,n.
On va montrer que $\mathcal{H}_\alpha(N,m,n)$ est une loi de probabilité :
En utilisant lemme (3, 1, 16) :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} P(X_\alpha = k) &= \sum_{k\geqslant 0} \frac{\left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array}\right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array}\right)_\alpha}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right)_\alpha} \\
&= \frac{1}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right)_\alpha} \sum_{k\geqslant 0} \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array}\right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array}\right)_\alpha \\
&= \frac{1}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right)_\alpha} \left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right)_\alpha \\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{H}_\alpha(N,m,n)$ est une loi de probabilité.

Théorème 3.4.1. *Pour $X_\alpha \sim \mathcal{H}_\alpha(N,m,n)$, le moment d'ordre 1 et le moment d'ordre 2 son données par :*

- $E(X_\alpha) = \frac{mn}{N}$
- $E(X_\alpha^2) = \frac{mn}{N}[\frac{(m-\alpha)(n-1)}{(N-\alpha)} + 1]$

Preuve 3.4.1. *Dans cette démonstration,on utilisant lemme (3, 1, 8) et lemme (3, 1, 10) ;*

- *On calcule le moment d'ordre 1 (l'éspérance) :*

$$\begin{aligned}
E(X_\alpha) &= \sum_{k\geqslant 0} k \frac{\left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array}\right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array}\right)_\alpha}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array}\right)_\alpha} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} k \frac{\frac{m}{k}\left(\begin{array}{c} m-\alpha \\ k-1 \end{array}\right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array}\right)_\alpha}{\frac{N}{n}\left(\begin{array}{c} N-\alpha \\ n-1 \end{array}\right)_\alpha}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{mn}{N} \sum_{k\geqslant 1} \frac{\left(\begin{array}{c} m-\alpha \\ k-1 \end{array} \right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array} \right)_\alpha}{\left(\begin{array}{c} N-\alpha \\ n-1 \end{array} \right)_\alpha} \\
&= \frac{mn}{N} \frac{1}{\left(\begin{array}{c} N-\alpha \\ n-1 \end{array} \right)_\alpha} \sum_{k\geqslant 1} \left(\begin{array}{c} m-\alpha \\ k-1 \end{array} \right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array} \right)_\alpha \\
&= \frac{mn}{N} \frac{\left(\begin{array}{c} N-\alpha \\ n-1 \end{array} \right)_\alpha}{\left(\begin{array}{c} N-\alpha \\ n-1 \end{array} \right)_\alpha} \\
&= \frac{mn}{N}
\end{aligned}
$$

- *On calcule le moment d'ordre 2 :*
D'aprés lemme (3, 1, 8), lemme (3, 1, 9) et lemme (3, 1, 10)

$$
\begin{aligned}
E(X_\alpha^2) &= \sum_{k\geqslant 0} k^2 P(X_\alpha = k) \\
&= \sum_{k\geqslant 0} k(k-1+1) P(X_\alpha = k) \\
&= \sum_{k\geqslant 0} k(k-1) P(X_\alpha = k) + \sum_{k\geqslant 0} k P(X_\alpha = k) \\
&= \sum_{k\geqslant 0} k(k-1) \frac{\left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array} \right)_\alpha}{\left(\begin{array}{c} N \\ n \end{array} \right)_\alpha} + E(X_\alpha) \\
&= \sum_{k\geqslant 0} k(k-1) \frac{\frac{m}{k} \left(\begin{array}{c} m-\alpha \\ k-1 \end{array} \right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array} \right)_\alpha}{\frac{N}{n} \left(\begin{array}{c} N-\alpha \\ n-1 \end{array} \right)_\alpha} + E(X_\alpha) \\
&= \frac{mn}{N} \sum_{k\geqslant 1} (k-1) \frac{\left(\begin{array}{c} m-\alpha \\ k-1 \end{array} \right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array} \right)_\alpha}{\left(\begin{array}{c} N-\alpha \\ n-1 \end{array} \right)_\alpha} + E(X_\alpha) \\
&= \frac{mn}{N} \sum_{k\geqslant 1} (k-1) \frac{\frac{m-\alpha}{k-1} \left(\begin{array}{c} m-2\alpha \\ k-2 \end{array} \right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array} \right)_\alpha}{\frac{N-\alpha}{n-2} \left(\begin{array}{c} N-2\alpha \\ n-2 \end{array} \right)_\alpha} + E(X_\alpha) \\
&= \frac{mn}{N} \frac{(m-\alpha)(n-1)}{N-\alpha} \sum_{k\geqslant 2} \frac{\left(\begin{array}{c} m-2\alpha \\ k-2 \end{array} \right)_\alpha \left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array} \right)_\alpha}{\left(\begin{array}{c} N-2\alpha \\ n-2 \end{array} \right)_\alpha} + E(X_\alpha)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{mn}{N}\frac{(m-\alpha)(n-1)}{N-\alpha}\frac{1}{\left(\begin{array}{c} N-2\alpha \\ n-2 \end{array}\right)_\alpha}\sum_{k\geqslant 2}\left(\begin{array}{c} m-2\alpha \\ k-2 \end{array}\right)_\alpha\left(\begin{array}{c} N-m \\ n-k \end{array}\right)_\alpha + \frac{mn}{N} \\
&= \frac{mn}{N}\frac{(m-\alpha)(n-1)}{N-\alpha} + \frac{mn}{N} \\
&= \frac{mn}{N}[\frac{(m-\alpha)(n-1)}{N-\alpha} + 1]
\end{aligned}
$$

Corollaire 3.4.1. *Pour $X_\alpha \sim \mathcal{H}_\alpha(N,m,n)$, avec N,m et n sont tout positives ou nulle, la variance de X_α est donnée par :*

$$Var(X_\alpha) = \frac{mn}{N}[\frac{(m-\alpha)(n-1)}{N-\alpha} + 1 + \frac{mn}{N}]$$

Preuve 3.4.2.

$$
\begin{aligned}
Var(X_\alpha) &= E(X_\alpha^2) - [E(X_\alpha)]^2 \\
&= \frac{mn}{N}[\frac{(m-\alpha)(n-1)}{N-\alpha} + 1] + [\frac{mn}{N}]^2 \\
&= \frac{mn}{N}[\frac{(m-\alpha)(n-1)}{N-\alpha} + 1 + \frac{mn}{N}]
\end{aligned}
$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bardsley, W.E. Note on the hypergeometric distribution as an invalidation test for binary forecasts,Stoch. Environ. Res. Risk Assess. 2016, 30, 1059–1061.

[2] B.-N. Guo and F. Qi. An explicit formula for Bell numbers in terms of Stirling numbers and hypergeometric functions. Glob. J. Math. Anal, 2(4) :243–248, 2014. B.-N. Guo and F. Qi. An explicit formula for Bell numbers in terms of Stirling numbers and hypergeometric functions. Glob. J. Math. Anal, 2(4) :243–248, 2014.

[3] Calcul des probabilités, cours, exercices et problèmes corrigés ; Dominique Foata et Aimé Fuchs, seconde édition : édition Dunod, 1998.

[4] Carlitz, L. Degenerate Stirling, Bernoulli and Eulerian numbers, Utilitas Math. 1979, 15, 51-88.

[5] Carlitz, L. Some remarks on the Bell numbers, Fibonacci Quart. 18 (1980), no. 1, 66–73.

[6] C.A.Charalambides, Enumerative Combinatorics, Chapman et Hall/CRC, 2002.

[7] Dolgy, D.V. : Jang, G-W : Kim, T. A note on degenerate central factorial polynomials of the second kind, Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang) 2019, 29 (1), 7–13.

[8] He, Y. ; Pan, J. Some recursion formulae for the number of derangements and Bell numbers, J. Math. Res. Appl. 2016, 36(1), 15-22.

[9] Kim, T. ; Kim, D. S. ; Jang, L.-C. ; Kim, H. Y. A note on discrete degenerate random variables, Proc. Jangjeon Math.Soc. 23 (2020), no. 1, 125–135.

[10] Kim, T. ; Kim, D.S. ; Dolgy, D.V. On partially degenerate Bell numbers and polynomials, Proc. Jangjeon Math. Soc. 2017,20, 337-345.

[11] Kim, T. ; Kim, D. S. Degenerate polyexponential functions and degenerate Bell polynomials, J. Math. Anal. Appl.487 (2020), no. 2, 124017, 15 pp.

[12] Kim, T. : Yao, Y. : Kim, D.S. : Kwon, H.-I. Some identities involving special numbers and moments of random variables, Rocky Mountain J. Math. 2019, 49 (2), 521–538.

[13] Mahmoudi, E. ; Sepahdar, A. Exponentiated Weibull-Poisson distribution : Model, properties and applications, Math. Comp. Simu. 2013, 92, 76-97.

[14] Mathématiques : statistiques et probabilités ; Daniel Fredon, Myriam Maumy-Bertrand et Fréderié Bertrand, édition Dunod, 2009.

[15] Précis de mathématiques, probabilités et statistiques 1ere et 2eme années, Cours-Méthodes-Exercices résolus, C. Dédrave, D. Dégrave, édition Bréal.

[16] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, Concrete Mathematics, A Foundation for ComputerScience, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, (1994).

[17] Skala, M. Hypergeometric tail inequalities : ending the insanity, arXiv :1311.5939, 2011.