الجمهورية الجزائرية الديموقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي و البحث العلمي

جامعة يحي فارس – المدية –

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية و علوم التسيير

مطبوعة بيداغوجية بعنوان:

محاضرات في الإحصاء 03

مع تمارين محلولة

موجهة لطلبة السنة الثانية علوم التسيير.

إعداد:

د/ جمال جعفري

السنة الدراسية: 2026/2025

فهرس المحتويات:

العنوان	الصفحة
فهرس المحتويات	
مقدمة عامة	**1**
الفصل الأول: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة.	**2**
مقدمة الفصل:	**3**
1- توزيع برنولي.	**3**
2- توزيع ذي الحدين (الثنائي).	**9**
3- توزيع بواسون.	**25**
4- التوزيع الهندسي.	**40**
5- التوزيع فوق الهندسي.	
الفصل لثاني: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المستمرة.	**61**
1- التوزيع الطبيعي.	**62**
2- التوزيع المنتظم.	**81**
3- التوزيع الاسي.	**91**
4- توزيع قاما (Gamma).	**98**
5- توزيع بيتا(Betta).	**105**
6- توزيع كاي مربع.	**110**
7- توزيع فيشر.	**113**
8- توزيع ستيودنت.	**118**
الفصل الثالث: تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية.	**124**
1- تقريب توزيع ثنائي الحد إلى توزيع بواسون.	**125**
2- تقريب توزيع ثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي.	**126**
3- تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي.	**127**

4- تقريب قانون فوق الهندسي إلى قانون ثنائي الحدين.	
الفصل الرابع : المتغيرات العشوائية المزدوجة.	**143**
1- التغيرات العشوائية المزدوجة المتقطعة.	
1-1- دالة التوزيع الاحتمالي المنفصل للمتجه العشوائي (X, Y).	**144**
1-2- دالة التوزيع التراكمي للمتجه العشوائي (X, Y).	**149**
1-3- القيم المميزة للمتغيرات العشوائية المتقطعة.	**150**
2- المتغيرات العشوائية المزدوجة المتصلة.	
2-1- دالة التوزيع الاحتمالي المتصل للمتجه العشوائي (X, Y).	**152**
2-2- دالة التوزيع التراكمي للمتجه العشوائي (X, Y).	**152**
2-3- القيم المميزة للمتغيرات العشوائية المتصلة.	**152**
قائمة المراجع.	**159**
الملاحق.	**161**

مقدمة عامة:

تعد التوزيعات الاحتمالية من أهم المفاهيم الأساسية في علم الاحصاء و الاحتمالات، إذ تمثل الأداة الرئيسية لوصف سلوك الظواهر العشوائية و تحليلها، فهي تمكن الباحث من فهم كيفية توزع القيم الممكنة لمتغير عشوائي، تقسم التوزيعات إلى فئتين رئيستين: (التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والتوزيعات الاحتمالية المتصلة).

تعنى التوزيعات الاحتمالية المتقطعة (المنفصلة) بالمتغيرات التي تأخذ قيما محددة و منفصلة مثل عدد الزبائن الذين يزورون متجرا في يوم معين أو النجاحات في تجربة ما، أما التوزيعات الاحتمالية المتصلة فتهتم بالمتغيرات التي تمكن أن تأخذ أي قيمة ضمن مجال مستمر، مثل قياس الطول أو الوزن أو الزمن.

غير أن دراسة التوزيعات لا تقتصر على توصيفها فحسب بل تمتد إلى تقريب التوزيعات و هو اسلوب يستخدم عندما يصعب التعامل مع توزيع معين مباشرةً إذ يمكن استعمال توزيع أبسط أو أكثر شهرة مثل تقريب التوزيع ذي الحدين بالتوزيع الطبيعي أو التوزيع البواسوني، حيث تكمن أهمية هذا التقريب في تبسيط التحليل الاحصائي و الاقتصادي.

كما ان دراسة المتغيرات العشوائية لا تقتصر على متغير واحد، إذ تظهر الحاجة أحيانا إلى تحليل العلاقة بين متغيرين عشوائيين أو أكثر، و هنا تبرز أهمية التوزيعات الثنائية المشتركة التي تسمح بدراسة الترابط بين المتغيرات و فهم كيفية تأثير الواحدة على الأخرى، تعتبر هذه التوزيعات أدوات هامة في تحليل البيانات حيث تساعد في فهم العلاقات بين المتغيرات و اتخاذ القرارات المستندة إلى الأدلة الإحصائية.

و انطلاقا من ذلك تهدف هذه المطبوعة البيداغوجية التي تقدم عرض شامل و مبسط، و بأسلوب سهل و مختصر يعتمد على امثلة و تمارين محلولة، بعيدا على البراهين و العمليات الرياضية المعقدة. وذلك بوضع العلاقة ذات الصلة و شروط استخدامها، لما يتعلق بأهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة و المتصلة، مع التطرق إلى استخدامات تقريب التوزيعات و التوزيعات الثنائية المشتركة ، وذلك في اطار يسعى الى ترسيخ الفهم النظري و توضيح التطبيقات العملية لهذه المفاهيم في مختلف المجالات العلمية، و في الأخير آمل أن أكون قد وفقت في تقديم هذا العمل، و أن يساهم في اثراء مكتباتنا الجامعية، و أن يكون مفيدا لطلبتنا الأعزاء، والله من وراء القصد وهو يهدى السبيل.

الفصل الأول :

أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المنقطعة

- ✓ توزيع برنولي
- ✓ توزيع ذي الحدين- الثنائي -
- ✓ توزيع بواسون
- ✓ التوزيع الهندسي
- ✓ التوزيع فوق الهندسي

تمهيد:

تلعب التوزيعات الاحتمالية المنفصلة دورًا محوريا في مجال الاحتمالات و الاحصاء، حيث تمثل اداة قوية لفهم و تحليل الظواهر ذات الطبيعة غير المستمرة، تكمن أهمية هذه التوزيعات في قدرتها على نمذجة العديد من الأحداث الواقعية التي تتضمن نتائج عددية محددة حيث تتيح التوزيعات الاحتمالية المتقطعة للباحثين و المحللين توصيف و تحليل سلوك المتغيرات العشوائية في سياقات غير مستمرة أو متقطعة، و تمكن استخدام هذه التوزيعات لتحديد احتمالات مختلفة و توزيعات القيم للأحداث التي تتكرر بشكل متقطع، بالإضافة الى ذلك تعتبر التوزيعات الاحتمالية المفصلة اساسا للعديد من النماذج الاحصائية المستخدمة في مجالات متعددة مثل الاقتصاد، الطب، الهندسة و المالية. إن فهم هذه التوزيعات ومميزاتها يعد خطوة اساسية لكل باحث أو مهتم بمجال الاحصاء، لما توفره من تبسيط للعمليات الحسابية و تعزيز القدرة على تفسير البيانات المتقطعة بشكل فعال و إشارة إلى النتائج المحتملة بناءًا على النمط الاحتمالي للظاهرة.

سوف نناقش في هذا الفصل أهم القوانين التوزيعية الاحتمالية المنفصلة و التي تعرف بأنها مجموعة من القوانين الرياضية التي توفر وصفا دقيقا لتوزيع الاحتمال للأحداث و القيم العشوائية غير المتصلة. من أشهر هذه القوانين نجد **تجربة برنولي** التي يمثل حجر الزاوية للقوانين الأخرى ليلها القانون **الثنائي** ثم قانون **بواسون** و التوزيع **الهندسي** و التوزيع **فوق الهندسي** لغير ذلك من القوانين الأخرى.[1]

1- توزيع برنولي "Bernoulli distribution" :

يعد توزيع برنولي أساس التوزيعات الاحتمالية في الاحصاء و الاحتمالات، و يطلق على هذا التوزيع اسم " **برنولي**" نسبة الى العالم السويسري بيرنولي الذي قام بتطوير الأسس الأولى لنظرية الاحتمالات. يتميز هذا التوزيع ببساطته وقوته في تمثيل الأحداث الثنائية (الحدث الناجح والحدث الفاشل).

اذا كان X متغير عشوائي منقطع يعبر لنا عن تجربة عشوائية تحتوي على حدثين فقط، بحيث أنهما متنافيين، في هذه الحالة نكون أمام تجربة **برنولي**، فإذا افترضنا أن الحدث الأول هو: **A** فإن الحدث

[1] - Redjal Kaci (2004), Cours de Probabilités, offices des publications universitaires, Alger pp 160 – 161.

الثاني هو: $\bar{A}$ ، كما نعتبر كذلك بأن ظهور **A** يمثل لنا **نجاح** تكون فيه قيمة المتغير العشوائي X تساوي الواحد باحتمال قدره **P** أما عند عدم ظهور A فإننا نعتبره فشلاً، فتكون فيه قيمة X تساوي الصفر باحتمال قدره q حيث أن: $\mathbf{p + q = 1 \rightarrow q = 1 - p}$

ان المتغير العشوائي X يمثل نجاح التجربة أو فشلها و هذا المتغير يسمى المتغير برنولي و سوف نرمز له بالرمز: $\mathbf{X \rightarrow Ber(1, P)}$ ، و توزيعه الاحتمالي يسمى بتوزيع برنولي

حيث :

Ber: رمز توزيع برنولي.

X: متغير عشوائي.

p: احتمال النجاح.

01: يشير إلى أن التجربة و حيدة.

يتميز توزيع برنولي بعدة خصائص تميزه و تحدد سلوكه ، نذكر منها بعض الخصائص الرئيسية : [1]

1.1. خصائص توزيع برنولي:

- ✓ **نتيجتين ممكنتين:** يصف توزيع برنولي تجربة عشوائية تنتج نتيجتين ممكنتين فقط: **نجاحا أو فشلاً.**
- ✓ **احتمالية النجاح** : يرمز لاحتمالية حدوث النجاح في تجربة برنولي بالحرف p . هذه هي الاحتمالية التي يحدث فيها النجاح في التجربة الفردية.
- ✓ **احتمالية الفشل:** نظرا لأن هناك نتيجتين ممكنتين فقط (نجاح و فشل)، فإن احتمالية حدوث الفشل تكون (1−p) ويرمز لها بالرمز q .
- ✓ **تمثيل النجاح و الفشل** : يمكن تمثيل النجاح باستخدام القيمة (1) والفشل باستخدام القيمة(0).

[1] -Rafik Aldesselam, **statistique et Probabilités** / Exercices d'application et problèmes.

2.1. دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي x : يمكن كتابة هذا المتغير العشوائي وفق الصيغة الرياضية التالية:

$$\mathbf{P(X = x) = p^x q^{1-x} \quad , x = 0, 1}$$

كما يمكن كتابة هذا المتغير العشوائي بالقانون الاحتمالي التالي[1]:

x	0	1	المجموع
$P(X = x)$	q	P	1

$$P(X = x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ q & x = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

3.1. دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X:

تكتب دالة التوزيع التراكمية وفق الشكل الرياضي التالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x < 1 \\ q & ; 0 \leq x < 1 \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$$

من بين الحالات التي يمكن اعتبارها تجربة برنولي، رمي قطعة نقود مرة واحدة، فإذا افترضنا أن ظهور الصورة يمثل لنا نجاح، فإن ظهور الرقم يمثل لنا فشل، كما ان احتمال ظهور أي حادث منهما هو $p = q = \frac{1}{2}$، و مجموع الاحتمالات يساوي 1.

4.1. المميزات العددية لتجربة برنولي:

إن المميزات العددية لتجربة بيرنولي هي كالآتي :

أ- التوقع الرياضي:

[1] جلال مصيف الصياد (2008)، **نظرية الاحتمالات**، دار حافظ للنشر والتوزيع، جدة، المملكة العربية السعودية، ص 163 164.

$$E(X) = \sum_{X=0}^{1} x \,.\, p\,(X = x) = \sum_{x=0}^{1} x \,.\, p^x q^{1-x} = 0.q + p.1 = \mathbf{p}$$

وبالتالي فإن **التوقع الرياضي** يساوي: $\mathbf{E(X) = p.}$ وهو احتمال النجاح في محاولة برنولي.

ب – التباين:

حيث لدينا :

$$E(X) = \sum_{x=0}^{1} x^2 . p\,(X = x) = \sum_{x=0}^{1} x^2 .\, p^x q^{1-x} = 0.q + P.1 = P$$

و عليه فإن :

$$\delta_x^2 = V(X) = E(X) - (E(X))^2 = P - p^2 = p(1 - P) = Pq$$

وبالتالي فان **التباين** يساوي:

$$\boldsymbol{\delta_x^2 = V(X) = Pq.}$$

ج– الانحراف المعياري:

$$\boldsymbol{\delta_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{Pq}}$$

- **تمارين مقترحة:**
- **التمرين الأول:**

نرمي قطعة نقود متوازنة مرة واحدة المطلوب:

1– حدد قيم المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات ظهور كتابة.

2– أدرج جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير X

3– أدرج تابع التوزيع.

الحل :

1– تحديد قيم المتغير العشوائي X :

لدينا نتائج تجربة رمي قطعة نقود متوازنة مرة واحدة هي إما صورة أو كتابة، أي أن فضاء التجربة هو المجموعة Ω بحيث $\Omega = \{F; P\}$ وبما أن المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات ظهور الكتابة فهذا يعني أنه يأخذ القيم التالية:

$x_i = \{ 0 ; 1 \}$

2- إدراج جدول التوزيع الاحتمالي:

نلاحظ أن:

. التجربة وحيدة (رمي قطعة النقود مرة واحدة فقط) أي أن: n=1

. التجربة تقبل **نتيجتين** فقط: ظهور الكتابة وهو يمثل النجاح **p** أو ظهور الصورة وهو يمثل الفشل **q**.

وبما فإنقطعة النقود متوازنة فإن:

$$\mathbf{p = q = \frac{1}{2}}$$

ومنه فالتجربة محل الدراسة هي تجربة **برنولية** أي أن:

$$X \to Ber\left(p = q = \frac{1}{2}\right)$$

اذن:

$$P(X = x) = p^x q^{1-x}$$

$$P(X = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^0 . \left(\frac{1}{2}\right)^{1-0} \to p(X = 0) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 . \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1} \to p(X = 1) = \frac{1}{2}$$

ومنه فجدول التوزيع الاحتمالي يأخذ الشكل التالي:

x_i	0	1	
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\Sigma p_i = 1$

3 – تابع التوزيع:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

– التمرين الثاني:

نلقي حجر نرد مرة واحدة، ويمثل لنا ظهور الرقم " 3 " النجاح، أ وجد ما يلي:

1 – دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X.

2 – أحسب التوقع الرياضي، التباين و الانحراف المعياري.

الحل :

1 – دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X :

لدينا حجر النرد له ستة أوجه، و بما أن الرقم " 3 " يمثل النجاح فإن الأرقام 2,1 ، 4، 5، 6، تمثل الفشل، كما أن احتمال النجاح يساوي $\frac{1}{6}$ و احتمال الفشل يساوي $\frac{1}{5}$ و بالتالي فإن دالة التوزيع الاحتمالي تكون بالشكل التالي :

$$\mathbf{X \rightarrow Ber(\ n = 1\ ;\ p = \frac{1}{6})}$$

$$P(X = x) = \begin{cases} P & ; x = 1 \\ q & ; x = 0 \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

2 – حساب التوقع الرياضي و التباين، و الانحراف المعياري:

$$\mathbf{E(X) = p = \frac{1}{6}}$$

$$\mathbf{V(X) = pq = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}}$$

$$\mathbf{\delta_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{pq} = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}}$$

3 – دالة التوزيع التراكمية للمتغير X:

$$F(X)=\begin{cases}0; & x<0\\ q; & 0\le x<1\\ 1; & x\ge 1\end{cases} \Rightarrow F(X)=\begin{cases}0; & x<0\\ \frac{5}{6}; & 0\le x<1\\ 1; & x\ge 1\end{cases}$$

2-التوزيع ذي الحدين (الثنائي):

التوزيع الثنائي هو توزيع احتمالي منفصل يستخدم لوصف عدد النجاحات في سلسلة من التجارب المتكررة (تجارب برنولي) المستقلة ، حيث تكون احتمالية النجاح ثابتة في كل مرة. [1]

نفرض أننا كررنا تجربة ما n من المرات المستقلة، حيث في كل مرة تكون لدينا نتيجتين اما نجاح باحتمال p أو فشل باحتمال $q = 1 - p$.

المتغير العشوائي x الذي يمثل عدد النجاحات في مجموع هذه المحاولات يتبع توزيعا ذا حدين:

$$X \to B(n,p)$$

2-1 – شروط توزيع ذي الحدين:

نقول عن متغير عشوائي X_i أنه يتبع التوزيع الثنائي إذا تحققت الشروط التالية :

- التجربة تتضمن عدد من المحاولات ، والذي تمثل ايضا حجم العينة بحيث يكون $n > 1$
- لكل محاولة نتيجتين فقط: نجاح p ، أو فشل q بحيث : $p + q = 1$

ومنه فإن احتمالية الفشل تكون $(1 - p)$.

- المحاولات مستقلة عن بعضها البعض أي أن نتيجة كل محاولة لا ترتبط و لا تؤثر و لا تتأثر بنتائج المحاولات السابقة أو اللاحقة لها. و بالتالي فاحتمال النجاح يكون ثابت و متساوي لجميع المحاولات و هذا يعني أن المحاولات تتم بالإرجاع (بالإعادة).

2-2 – قانون التوزيع الاحتمالي للتوزيع الثنائي:

[1] christophe Hurlin, valeric Mignon, **statistique et probabilite's en economie**- gestións 2 adition, DUNOD, 2022, P 197.

اذا تحققت الشروط السابقة فإن المتغير العشوائي X_i يتبع التوزيع الثنائي و نكتب:

$$\mathbf{X \rightarrow B(n,p)}$$

بحيث:

- B : رمز التوزيع الثنائي (الحرف الأول من كلمة Binomial) : [1]
- X : متغير عشوائي
- p : احتمال النجاح في المحاولة الواحدة
- n: عدد مرات تكرار المحاولة (التجربة) و يشترط بأن تكون $\mathbf{n > 1}$

و نحسب احتمال و قوع حدث معين x مرة بالضبط في n محاولة بالعلاقة التالية : [2]

$$\mathbf{P(X = x) = c_n^x p^x (1-p)^{n-x}} \quad ; \mathbf{x = 0\ ,1,2\ \ldots\ldots n}$$

و نستطيع كتابة مايلي $\mathbf{P(X = x) = c_n^x p^x q^{n-x}}$:

حيث : **x** : المتغير العشوائي.

- **p**: احتمال وقوع الحدث.
- **q** : *احتمال الفشل.*
- $\mathbf{c_n^x}$: عدد مرات تحقق x نجاح في n محاولة و تحسب بالعلاقة التالية :

$$\mathbf{c_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}}$$

2-3 – المميزات العددية للتوزيع الثنائي :

تكون المميزات العددية لهذا القانون كما *يلي* :

أ- **التوقع الرياضي:** $\mathbf{E(X) = np}$

ب-**التباين:** $\mathbf{V(X) = npq}$

و يمكن استنتاج عبارة الانحراف المعياري كالتالي :

[1] – أنيس اسماعيل كنجوة، **الاحصاء والاحتمالات**، الطبعة الأولى، مكتبة العبيكان للنشر، الرياض، 2000 ص261.

[2] كامل فليفل ، فتحي حمدان، **الإحصاء**، دار المناهج للنشر و التوزيع، عمان، الأردن، الطبعة الأولى 2013 ص 156.

$$\delta_X = \sqrt{npq}$$

- **مثال رقم 01:**

نرمي قطعة نرد متوازنة 5 مرات و نهتم بعدد مرات ظهور الرقم 4

1- حدد قيم المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد مرات ظهور الرقم x_i

2- ما هو التوزيع الاحتمالي لـ X

3- احسب احتمال ظهور الرقم 4 مرتين على الأقل.

4- احسب احتمال ظهور الرقم 4 مرتين على الأكثر.

5- أدرج جدول التوزيع الاحتمالي لـ X

6- أحسب التوقع الرياضي، التباين و الانحراف المعياري.

الحل:

لدينا : التجربة تتمثل في رمي قطعة نرد متوازنة 5 مرات .

1-إيجاد قيم المتغير العشوائي:

بما أن X_i يمثل عدد مرات ظهور الرقم 4 في تجربة رمي قطعة نرد خمس مرات فإن قيم x_iهي :

$x_i = \{0,1,2,3,4.5\}$

2-التوزيع الاحتمالي للمتغير X :

نلاحظ أن :

- ✓ $n = 5$. أي تكرار التجربة 5 مرات و هذا يعني أن: $n > 1$
- ✓ كل رمية (محاولة) تقبل نتيجتين فقط : إما نجاح (أي ظهور الرقم4) باحتمال قدره $p = \frac{1}{6}$ أو فشل (أي ظهور رقم يختلف عن 4) باحتمال قدره $q = \frac{5}{6}$.
- ✓ المحاولات مستقلة حيث أن ظهور الرقم 4 في رمية معينة لا يؤثر على فرص ظهوره فيه الرميات الأخرى و هذا معناه ثبات احتمال النجاح من محاولة إلى أخرى.

يمكن القول أن التوزيع الاحتمالي للمتغير X هو **التوزيع الثنائي** و نكتب :

$$\mathbf{X \rightarrow B(n = 5\ ;\ p = \frac{1}{6})}$$

و عليه فالقانون الاحتمالي له هو :

$$\mathbf{P(X = x) = C_5^x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{n-x}}$$

$$P(X = 2) = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} = 10 \times \frac{1}{36} \times \frac{125}{216}$$

$$\boldsymbol{P(X = 2) = 0.1607}$$

3- حساب ظهور احتمال الرقم 4 مرتين على الأقل:

$$P(X \geq 2\ ) = p\ (\ X = 2\ ) + p\ (\ X = 3\ ) + p\ (\ X = 4\ ) + P\ (X = 5\ )$$

$$P(X \geq 2\ ) = C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2} + C_5^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-3} + C_5^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-4} C_5^5 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-5}$$

$$P(X \geq 2\ ) = (\ 10 \times \frac{1}{36} \times \frac{125}{216}) + (10 \times \frac{1}{216} \times \frac{25}{36}) + \left(\ 5 \times \frac{1}{1296} \times \frac{5}{6}\ \right) + (1 \times \frac{5}{7776} \times 1\ )$$

$$P(X \geq 2\ ) = 0.1607 + 0.0321 + 0.0032 + 0.0006$$

$$\boldsymbol{P(X \geq 2\ ) = 0.1966}$$

4- حساب احتمال ظهور الرقم 4 مرتين على الأكثر:

$$P(X \leq 2\ ) = \mathrm{p}\ (\ \mathrm{x} = 0\ ) + \mathrm{P}\ (\ \mathrm{x} = 1\ ) + \mathrm{P}\ (\mathrm{x} = 2\ )$$

$$P(X \leq 2\ ) = C_5^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-0} + C_5^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-1} + C_5^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{5-2}$$

$$P(X \leq 2\ ) = 0.4019 + 0.4019 + 0.1607$$

$$\boldsymbol{P(X \leq 2\ ) = 0.9645}$$

5 – إدراج جدول التوزيع الاحتمالي :

X_i	0	1	2	3	4	5
P_i	0.4019	0.4019	0.1607	0.0321	0 .0006	0.0028

6 – التوقع الرياضي، التباين، الانحراف المعياري :

- ***التوقع الرياضي:*** $\mathbf{E(X) = np} \rightarrow E(X) = 5 \times \frac{1}{6}$

$E(X) = 5 \times \frac{1}{6} = 5/6$

- **التباين :**

$$\mathbf{V(X) = npq} \rightarrow V(X) = 5 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}$$

$$V(X) = \frac{25}{36}$$

- ***الانحراف المعياري :***

$$\boldsymbol{\delta_X = \sqrt{npq}} \rightarrow \delta x = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

- **مثال رقم 02 :**

في جناح بمستشفى عام يقيم مرضى مصابون بمرض معين ، نسبة الشفاء من هذا المرض في هذا الجناح هي 65 % فإذا سحبنا 05 أشخاص من هذا الجناح ، فما هو احتمال أن يكون :

1- الشفاء في 03 حالات .

2- الشفاء في جميع الحالات

3- عدم الشفاء في أربع حالات

4- الشفاء في حالتين على الأكثر

الحل :

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع **توزيع ذي الحدين**، و ذلك لأنها تتضمن تجارب متتالية مستقلة عن بعضها البعض، و كل تجربة تتضمن حدثين أو نتيجتين (**شفاء أو عدم شفاء**)، و المتغير العشوائي x يمثل عدد حالات الشفاء في المستشفى.

1- حساب احتمال أن يكون الشفاء في ثلاث حالات :

$$P(X = 3) = C_5^3 . (0.65)^3 (0.35)^{5-3} = 0.3364$$

2- حساب احتمال أن يكون الشفاء في جميع الحالات :

$$P(X=5)=C_5^5.(0.65)^5(0.35)^{5-5}=0{,}1160$$

3- حساب احتمال أن يكون عدم الشفاء في 4 حالات و هذا معناه شفاء حالة واحدة :

$$P(X=1)=C_5^1.(0.65)^1(0.35)^{5-1}=\ 0.0488$$

4- حساب احتمال أن يكون الشفاء في حالتين على الأكثر :

$$P(X\leq 2)=\mathrm{P}\ (\mathrm{x}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{x}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{x}=2)$$
$$P(\ X=0)=C_5^0.(0.65)^0(0.35)^{5-0}\ =0.0052$$
$$P(\ X=2)=C_5^2.(0.65)^2(0.35)^{5-2}\ =0.1811$$
$$P(X\leq 2)=P\ (\ X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\ 0.0052\ \ +\ 0.0488$$
$$+0.1811$$
$$P(X\leq 2)=0{,}2351$$

- **مثال 03 :**

نفرض أن $\mathbf{x\rightarrow b\ (10\ ;06)}$ أوجد ما يلي :

1- دالة الكتلة الاحتمالية ل X.

2- أحسب التوقع الرياضي و التباين ل X.

3- أوجد ما يلي :

$$P(X\geq 8),P(X>8),\ P\ (X\leq 2)\ ,P\ (X=5)$$

الحل :

من معطيات السؤال نجد أن معلمات التوزيع هي :

$$\mathbf{n=10}\ \ ;\ \ \mathbf{p=0,6}$$

1- دالة الكتلة الاحتمالية تكون بالصورة التالية :

$$\mathbf{P(X=x)=C_n^x\ p^x q^{n-x}}\qquad\qquad \mathbf{;\ x=0,1,2.....n}$$

$$\mathrm{P(X=x)=C_{10}^x.(0{,}6)^x(0{,}4)^{10-x}}\quad ;\ \mathrm{x=0,1,2.....10}\ ;\ \mathbf{p=0.6\ ,\ q=0.4}$$

2- حساب التوقع الرياضي و التباين :

التوقع الرياضي: $\mathbf{E(X) = np = (10)(0.6) = 6}$

التباين : $\mathbf{V(X) = npq = (10)\ (0.6)\ (0.4) = 2.4}$

3-حساب الاحتمالات التالية:

- $\boldsymbol{P(X = 5) = C_5^{10}\ (0,6)^5(0,4)^{10-5}}$

$= \frac{10!}{(10-5)!(5)!}(0,6)^5(0,4)^5 \cong 0.2$

- $\boldsymbol{P(X \leq 2) = P\ (X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)}$

$C_0^{10}.(0,6)^0(0,4)^{10-0} + C_1^{10}.(0,6)^1(0,4)^{10-1} + C_2^{10}.(0,6)^2(0,4)^{10-2}$

$= 0,001048+0,00157+0,01062 = 0,1324$

- $\boldsymbol{P(X > 8) = P(X = 9) + P(X = 10)}$

$= c_{09}^{10}(0,6)^3(0,4)^{10-9} + C_{10}^{10}(0,6)^9(0,4)^{10-10}$

$= 0,04031 + 0,06046 = 0,10077$

- $\boldsymbol{P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)}$

$= C_8^{10}(0,6)^8(0,4)^{10-8} + C_9^{10}(0,6)^9(0,4)^{10-9} = C_{09}^{10}(0,6)^3(0,4)^{10-9} + C_{10}^{10}(0,6)^{10}(0,4)^{10-10}$

$= 0,12093 + 0,04031 + 0,06046 = 0,2217$

- **تمارين مقترحة:**

- **التمرين 01:**

وفقا لمركز السيطرة على الأمراض في الولايات المتحدة، تم تشخيص إصابة طفل واحد تقريبا من بين 88 طفلا في الولايات المتحدة بمرض التوحد لنفرض أنك بصدد مقابلة مجموعة من 10 أطفال.

1- أذكر المتغير العشوائي.

2- أثبت أن هذه التجربة تتبع التوزيع الثنائي.

3- أوجد احتمال أن:

- لا أحد مصاب بالتوحد

- اثنان على الأكثر مصابان بالتوحد

الحل:

1- المتغير العشوائي x يمثل عدد الأطفال المصابين بالتوحد.

2- اثبات أن هذه التجربة **ذات حدين:**

لدينا ما يلي:

أ- هناك 10 أطفال $(n > 1)$، وكل طفل عبارة عن تجربة، لذلك هناك عدد محدد من التجارب، في هذه الحالة: $n = 10$

ب- اذا افترضنا أنه تم اختيار كل طفل في المجموعة عشوائيا، فإن اصابة الطفل بالتوحد لا تؤثر على فرصة اصابة الطفل التالي بالتوحد، و بالتالي فإن التجارب مستقلة.

ت- إما أن يكون الطفل مصابا بالتوحد أو لا يعاني من التوحد، لذلك هناك نتيجتان وفي هذه الحالة يكون **النجاح** هو اصابة الطفل بالتوحد.

ث- احتمال إصابة الطفل بالتوحد هو $\frac{1}{88}$ وهذا هو نفسه بالنسبة لكل تجربة لأن كل طفل لديه نفس الفرصة للإصابة بالتوحد.

$$P = \frac{1}{88} \quad ; \quad q = 1 - p = 1 - \frac{1}{88} = \frac{87}{88}$$

3-إيجاد الاحتمالات :

أ) ولا طفل مصاب بالتوحد :

$$P(X = 0) = C_{10}^{0}\, p^{0} q^{10-0} = \frac{10!}{0!(10-0)!} \left(\frac{1}{88}\right)^{0} \left(\frac{87}{88}\right)^{10} = 0.892$$

ب) طفلين على الأكثر مصابين بالتوحد :

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X = 0) = C_{10}^{0} \left(\frac{1}{88}\right)^{0} \left(\frac{87}{88}\right)^{10} = 0.892$$

$$P(X = 1) = C_{10}^{1} \left(\frac{1}{88}\right)^{1} \left(\frac{87}{88}\right)^{10-1} = 0{,}103$$

$$P(X=2)=C_{10}^{2}\left(\frac{1}{88}\right)^{2}\left(\frac{87}{88}\right)^{10-2}=0{,}005$$

$$\boldsymbol{P(X\leq 2)=\ 0.892+0{,}103+0{,}005\ >0{,}999}$$

- **التمرين الثاني :**

نلقي حجر نرد 4 مرات، نفرض ان النجاح هو الحصول على الرقم 3 أو 5 في أي رمية.

1- ما هو احتمال النجاح لثلاثة مرات؟

2- أوجد التوقع و التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X ؟

3- أحسب قيم دالة التوزيع المتراكمة لهذا المتغير.

الحل :

1-احتمال النجاح لثلاث مرات :

$$\mathbf{X\rightarrow B\ (n=4\ ;\ p=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3})}$$

$$\mathbf{P(X=x)=C_n^x.p^xq^{n-x}}$$

- $\mathrm{P(X=3)=C_4^3.p^3\ (1-p\quad q^{x-n})}$

$$\mathrm{P(X=3)=C_4^3.p^3\ (1-p\quad q^{4-3})\ =C_4^3.\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=4\left(\frac{1}{27}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{81}=0.0987}$$

2-أوجد التوقع و التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي x :

$$\mathbf{E(X)=np}=4\times\frac{1}{3}$$

$$\mathbf{V(X)=np(1-P)}=4\times\frac{1}{3}.\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$$

$$\boldsymbol{\delta_X}=\sqrt{\mathbf{V(X)}}=\sqrt{\mathrm{np(1-\rho)}}=\sqrt{\frac{8}{9}}$$

3-أحسب قيم دالة التوزيع المتراكمة لهذا المتغير :

$$\mathbf{X\rightarrow B\left(n=4\ \ ;p=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\right)}$$

$$\mathrm{F(X)=P(X=x)=C_n^xp^x(1-p)^{n-x}}$$

$$F(0) = P(X = 0) = C_n^x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{n-x} = C_4^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-0} = 0.1975$$

$$F(1) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0.1975 + C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} = 0.5926$$

$$F(2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.5926 + C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-0} = 0.8889$$

$$F(3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0.8889 + C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-3} = 0.9877$$

$$F(4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.9877 + C_4^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{4-4} = 1$$

- **التمرين 3 :**

قدرت شركة الخطوط الجوية الجزائرية ان احتمال وصول الطائرة المتوجهة من الجزائر نحو القاهرة في ميعادها بالضبط هو 0.8، فإذا قامت أربع طائرات لهذه الشركة متجهة من الجزائر إلى القاهرة ، فأوجد:

- التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في ميعادها .
- متوسط عدد الطائرات التي تصل في ميعادها و كذلك الانحراف المعياري.
- القانون الاحتمالي $P(X = x)$ ودالة التوزيع مع تمثيلها بيانيا.
- احتمال وصول ثلاث طائرات على الأقل في ميعادها.

الحل :

- **إيجاد التوزيع الاحتمالي لعدد الطائرات التي تصل في ميعادها:**

X : متغير عشوائي يمثل عدد الطائرات التي تصل في ميعادها، حيث أن $n = 4$ و $p = 0,8$ إذن :

$$\mathbf{X \rightarrow B(4\,;0.8)}$$

$$\mathbf{P(X = x) = C_n^x . p^x q^{n-x} = C_4^x . p^x q^{n-x}} \quad ; \quad x = 0,1,2,3,4$$

- **إيجاد متوسط عدد الطائرات التي تصل في ميعادها و كذلك الانحراف المعياري:**

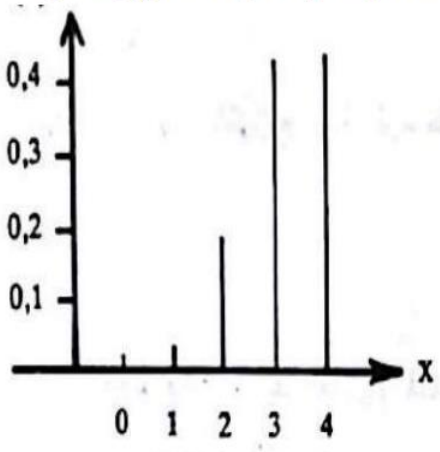
$$E(X) = np = 4 \times 0{,}8$$

$$\delta_X = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{4 \times 0{,}8 \times 0{,}2} = 0{,}8$$

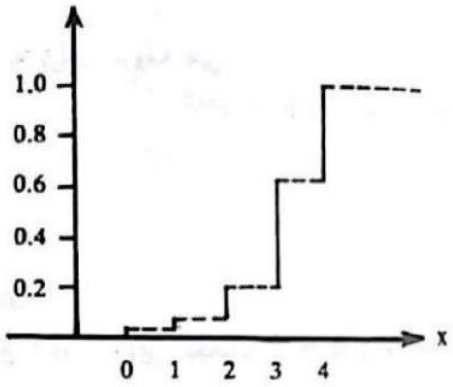
- **إيجاد القانون الاحتمالي $P(X = x)$ و دالة التوزيع مع تمثيلها بيانيا:**

X	0	1	2	3	4	المجموع
$P(X = x)$	0,0016	0.0256	0.1536	0.4096	0.4096	1
$F(X)$	0,0016	0.0276	0.1808	0.5904	1	////

التمثيل البياني للقانون الاحتمالي P(X=x)



التمثيل البياني لدالة التوزيع F(x)



- **حساب احتمال وصول ثلاث طائرات على الأقل في ميعادها:**

$$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0.4096 + 0.4096 = 0.8192$$

$$P(X \geq 3) = F(3) = 0.5904$$

- **تمرين رقم 04 :**

لوحظ خلال فترة طويلة أن صيادا يصيب الهدف باحتمال نجاح يقدر ب 85 %، فإذا أطلق 5 طلقات على هدف ما، فما هو احتمال :

- إصابة الهدف مرتين فقط ؟
- إصابة الهدف مرتين على الأكثر؟
- إصابة الهدف مرتين على الأقل و 4 مرات على الأكثر؟

الحل :

نلاحظ من شروط التمرين أن خواص التجربة الثنائية محققة $(n \geq 1)$، التجارب **مستقلة** عن بعضها البعض، لدينا **نجاح و فشل** و بالتالي إذا رمزنا إلى عدد الإصابات ب x في تجربة n=5 رميات، فإن x يخضع **للتوزيع الثنائي:**

$$P(X = x) = C_5^x\, p^x q^{5-x} = \frac{5!}{x!(5-x)!} p^x q^{5-x} \dots\dots\dots x = 0.1.2.3.4.5$$

- **احتمال إصابة الهدف مرتين فقط :**

$$P(X = 2) = C_5^2 . (0.85)^2 (0.15)^{5-2} = 0.0244$$

- **احتمال إصابة الهدف مرتين على الأكثر:**

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X = 0) = C_5^0 . (0.85)^0 (0.15)^{5-0} = 0.0001$$

$$P(X = 1) = C_5^1 . (0.85)^1 (0.15)^{5-1} = 0.0022$$

$$P(X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = 0.0244 + 0.0001 + 0.0022 = 0.0267$$

- **إصابة الهدف مرتين على الأقل و 4 مرات على الأكثر :**

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$P(X = 3) = C_5^3 . (0.85)^3 (0.15)^2 = 0.1382$$

$$P(X = 4) = C_5^4 . (0.85)^4 (0.15)^{5-4} = 0.3915$$

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) = 0.5544$$

- **التمرين رقم 05:**

تم اختيار لقاح جديد لتحديد مدى فعاليته في الوقاية من الكوفيد، حيث تم إعطاؤه لعشرة أشخاص و تمت مراقبتهم لفترة زمنية تقدر بسنة واحدة حيث تم إيجاد 8 منهم لم يصابوا بالكوفيد، إذا كان احتمال عدم الإصابة بالكوفيد خلال سنة هو بصورة طبيعية 0,5 فما هو احتمال ألا يصاب ثمانية اشخاص أو أكثر.

الحل :

نلاحظ أن شروط التوزيع الثنائي محققة في هذا التمرين و بالتالي x يخضع للتوزيع الثنائي.

- **احتمال أن لا يصاب 8 أو أكثر:**

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P\,(X = 9) + P(X = 10)$$

$$P(X \geq 8) = C_{10}^{8}\,(0.5)^{8}(0.5)^{10-8} + C_{10}^{9}\,(0.5)^{9}(0.5)^{10-9}\; C_{10}^{10}\,(0.5)^{10}(0.5)^{10-10} = 0{,}055$$

- **التمرين 06 :**

باعت وكالة سيارات في يوم ما 6 سيارات من نفس النوع، فإذا علمت ان هذا النوع يصبح غير صالح للاستعمال بعد انقضاء سنتين من بدء التشغيل باحتمال 25 %، اذا اعتبرنا x متغير عشوائي يمثل عدد السيارات غير الصالحة للاستعمال بعد انقضاء سنتين.

- حدد نوع القانون الذي يتبعه x مع كتابة قانونه الرياضي؟
- ما هو احتمال ألا تكون كل السيارات التي بيعت غير صالحة للاستعمال بعد انقضاء سنتين من بدء التشغيل ؟
- ما هو احتمال أن تكون كل السيارات التي بيعت غير صالحة للاستعمال بعد انقضاء سنتين من بدء التشغيل ؟
- ماهوا احتمال ان تكون سيارة واحدة بيعت غير صالحة للاستعمال بعد انقضاء سنتين من بدء التشغيل؟

الحل :

نوع القانون الذي يتبعه X *هو القانون الثنائي (ثنائي الحدين)* ، حيث $\mathbf{p = 0,25\ ;\ n = 6}$

$$\mathbf{P(X = x) = C_{6}^{x}\,(0.25)^{x}(0.75)^{n-x}} \qquad x = 0,1\ldots\ldots\ldots 6$$

ـ احتمال أن تكون كل السيارات التي بيعت غير صالحة للاستعمال بعد انقضاء سنتين من بدء التشغيل :

$$P(X = 6) = C_{6}^{6}\,(0.25)^{6}(0.75)^{6-6} = 0{,}0002$$

ـ احتمال ألا تكون كل السيارات التي بيعت غير صالحة للاستعمال بعد انقضاء سنتين من بدء التشغيل :

$$P(X = 0) = C_{6}^{0}\,(0.25)^{0}(0.75)^{6-0} = 0{,}1779$$

ـ احتمال أن تكون سيارة واحدة بيعت غير صالحة للاستعمال بعد انقضاء سنتين من بدء التشغيل :

$$P(X = 1) = C_6^1 (0.25)^1 (0.75)^{6-1} = 0,3559$$

- التمرين 07 :

يضمن أحد متعاملي الهاتف النقال نجاح 80% من المكالمات الهاتفية. اذا اعتبرنا: X متغير عشوائي يمثل عدد المكالمات الناجحة من بين 9 مكالمات.

أ- ما نوع القانون الذي يتبعه x ؟

ب-أحسب احتمال فشل مكالمة واحدة ؟

ت- أحسب احتمال فشل مكالمة واحدة على الأكثر؟

ث- أحسب مميزاته العددية؟

الحل :

أ- لدينا : $n = 9$; $p = 0.80$ و $\mathbf{X \to B(9, 0.8)}$ *(X : يتبع التوزع الثنائي)*

$$\mathbf{P(X = x) = C_9^x . (0.8)^x (0.2)^{n-x}} \quad ; \mathbf{n = 0, 1, \dots \dots . 9}$$

ب-احتمال فشل مكالمة من بين 09 يعني 08 مكالمات ناتجة:

$$P(X = 8) = C_9^8 (0.8)^8 (0.2)^{9-8}$$

$$P(X = 8) = 9 (0.8)^8 (0.2)^1 = 0,3019$$

ت-احتمال فشل مكالمة واحدة على الأكثر: (يعني فشل مكالمة أو عدم فشل أي مكالمة):

$$P(X \geq 8) = p(x = 8) + P(x = 9)$$

$$P(X \geq 8) = 0,3019 + C_9^9 . (0.80)^9 (0.10)^0$$

$$P(X \geq 8) = 0,3019 + 0,1342$$

$$P(X \geq 8) = 0,4361$$

ث-حساب المميزات العددية :

$$\mathbf{E(X) = np} = 9(0.8) = 7.2 \approx 7$$

$$\mathbf{V(X) = npq} = 9(0.8)(0.2) = 1.44$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{(X)} = \sqrt{\mathbf{V(X)}} = \sqrt{1.44} = 1.2$$

- التمرين 08 :

في مصنع لصنع المصابيح، اتضح أنه من بين كل 1000 وحدة منتجة توجد 150 وحدة معيبة، فإذا أخذت عينة مكونة من 05 وحدات، فأوجد ما يلي :

أ- احتمال ان تكون كل الوحدات المختارة سليمة.

ب-احتمال ان تكون وحدة واحدة على الأكثر معيبة.

ت- احتمال أن تكون وحدتان معطوبتان على الأقل.

ث- أوجد التوقع الرياضي ، التباين و الانحراف المعياري.

الحل :

النجاح في هذه الحالة هو عدد الوحدات المعيبة في العينة العشوائية، فيكون $p = \frac{150}{1000} = 0.15$

و لدينا $n = 5$ و منه نقول أن x يتبع التوزيع الثنائي $\mathbf{X \rightarrow B(n,p)}$

أ- احتمال ان تكون الوحدات المختارة سليمة :

$$P(X = 0) = C_5^0 . (0.15)^0 (0.85)^{5-0} = 0{,}4437$$

ب - احتمال ان تكون وحدة واحدة على الأكثر معيبة :

$$P(X \leq 1) = P(x = 1) + P(x = 0)$$

$$P(X \leq 1) = C_5^1 . (0.15)^1 (0.85)^{5-1} + 0.4437 = 0.8352$$

ت - احتمال ان تكون وحدتان معطوبتان على الأقل :

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$= 1 - 0.8352 = 0.1618$$

- التمرين 09 :

نرمي قطعة نقود 6 مرات، أوجد احتمال الحصول على :

أ- الوجه F مرتين بالضبط.

ب- الحصول 4 مرات على الوجه F على الأقل.

ت- عدم الحصول على الوجه F .

ث- أحسب المميزات العددية.

الحل :

لدينا في قطعة النقود $p = q = 0,5$ ، *فإذا كانت* $n = 6$ فإن :

أ- احتمال الحصول على الوجه F مرتين بالضبط:

$$\mathbf{P(X = x) = C_n^x\, p^x q n - x}\ .$$

$$P(X = 2) = C_6^2\ (0,5)^2(0,5)^{6-2} = 0,234$$

ب- احتمال الحصول 4 مرات على الوجه *F* على الأقل:

$$P(X \geq 4) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$P(X \geq 4) = C_6^4\ (0,5)^4(0,5)^{6-4} + C_6^5\ (0,5)^5(0,5)^{6-5} + C_6^6\ (0,5)^6(0,5)^{6-6}$$

$$P(X \geq 4) = 0,343$$

ت-احتمال عدم الحصول على الوجه *F* :

$$P(X = 0) = C_6^0\ (0,5)^0(0,5)^{6-0} = 0,5^6 = 0,0156$$

ث-المميزات العددية :

$$\mathbf{E(X) = n \cdot p} = 6(0,5) = 0,3 \quad ; \quad \mathbf{V(X) = npq} = (6)(0,5)(0,5) = 1.5$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{(X)} = \sqrt{1.5}$$

3 – توزيع بواسون Poisson distribution:

يعد توزيع بواسون أحد التوزيعات المتقطعة المهمة جدا في الكثير من التطبيقات الإحصائية، و يسمى في بعض الأحيان توزيع الحوادث نادرة الوقوع .[1] كحوادث سقوط الطائرات، عدد النداءات الهاتفية المستلمة خلال فترة زمنية محددة، عدد الوحدات المعيبة في إنتاج واسع لمصنع معين و غيرها من الأمثلة التي تتصف بطابع الندرة .

إن أول من اشتق هذا التوزيع هو العالم الرياضي الفيزيائي الفرنسي Siméon Denis Poisson (1781 – 1840) الذي تمكن من اشتقاق هذا التوزيع كحالة تقاربية من توزيع ثنائي الحدين و نشر اشتقاقه هذا عام 1837 مطلقا اسمه على هذا التوزيع، و فيما يلي تعريف هذا التوزيع :

يقال أن المتغير العشوائي X هو ذو توزيع بواسون إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية لهذا المتغير تأخذ الشكل التالي :

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!} \qquad ; X= 0, 1,2,.....$$

$$= 0 \qquad \text{otherwise.}$$

حيث $(\lambda > 0)$ تمثل معلمة هذا التوزيع و بالرموز فإن $X \to P(\lambda)$

3-1- شروط تطبيق توزيع بواسون :

يتم تطبيق توزيع بواسون إذا توفرت الشروط التالية :

- عدد مرات تكرار التجربة n غير محدد، أي لا يوجد حد أعلى للمحاولات و غالبا ما يكون كبير جدا.
- التجربة تقبل نتيجتين فقط : نجاح p (يكون صغيرا جدا) أو فشل q بحيث $p + q = 1$
- استقلالية التجارب، و هذا يعني أن متوسط عدد النجاحات في وحدة قياسية معينة مستقل عن متوسط عددها في باقي الوحدات القياسية، (احتمال النجاح الثابت)

[1] أمير حنا هرمز، **الإحصاء الرياضي**، دار الكتب للطباعة و النشر، الموصل، جهوية العراق، 1990 ، ص 279.

إذا تحققت هذه الشروط نقول أن X_i يتبع التوزيع البواسوني و نكتب $\boldsymbol{X_i \rightarrow P(\lambda)}$

بحيث:

$\boldsymbol{P}$: رمز التوزيع البواسوني.

$\boldsymbol{X}$: متغير عشوائي.

$\boldsymbol{\lambda}$: معلمة التوزيع و تمثل متوسط عدد مرات النجاح في الوحدة القياسية المعتبرة .

و منه نكتب قانون التوزيع الاحتمالي كالتالي :

$$\mathbf{P(X = x) = \frac{\lambda^{x} \cdot e^{-\lambda}}{x!}} \qquad ; x = [0, 1,2,.....]$$

λ : معلمة توزيع

e : تمثل أساس اللوغاريتم ، $e \approx 2{,}71828$

$P(X = x)$: يمثل احتمال تحقيق x نجاح في وحدة قياسية واحدة.

3-2- المميزات العددية : (القيم العددية المميزة)

- **التوقع الرياضي:** $\mathbf{E(X) = \lambda.}$
- **التباين:** إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع البواسوني فإن **التباين** يحسب بالعلاقة التالية :

$$\boldsymbol{V(X) = \lambda.}$$

و يمكن استنتاج عبارة **الانحراف المعياري** كالتالي :

$$\boldsymbol{\delta_X = \sqrt{\lambda}}$$

3-3 – دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي $\boldsymbol{X}$:

دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع بواسون بثابت (λ) و نكتب :

$$X \rightarrow P(\lambda)$$

$$F(X) = \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!}$$

مثال 01:

محاسب في شركة ما يجد 6 فواتير خاطئة في الأسبوع .

- أوجد احتمال وجود أربع فواتير خاطئة في أسبوع ما.

الحل:

قبل حساب الاحتمال يجب أولا تحديد القانون الاحتمالي المناسب:

نلاحظ أن:

- عدد المحاولات غير محدد أي عدد الفواتير المسحوبة في الأسبوع الواحد غير محدد و 6 تمثل متوسط الفواتير الخاطئة المتحصل عليها من سحب n فاتورة خلال وحدة قياسية زمنية هي أسبوع واحد.
- كل محاولة (أي سحب فاتورة) تقبل نتيجتين فقط: إما النجاح الذي يمثل سحب فاتورة خاطئة أو فشل أي فاتورة غير خاطئة
- متوسط عدد النجاحات (إيجاد فاتورة خاطئة) في الأسبوع هو $\lambda = 6$ ، و هو مستقل عن باقي الأسابيع .

إذن: $\mathbf{X \rightarrow P(6)}$

و منه فالقانون الاحتمالي هو :

$$\mathbf{P(X = x) = \frac{\lambda^{x} \cdot e^{-\lambda}}{x!} = \frac{6^{x}.e^{-6}}{x!}}, \qquad x = \{0,1,2, \dots \dots \dots\}$$

- بما أن المطلوب هو حساب احتمال وجود 4 فواتير خاطئة فهذا يعني أن الاحتمال المطلوب حسابه هو : $P(X = 4)$

$$P(X = x) = \frac{6^{4} - e^{-6}}{4!}$$

$$P(X = 4) = 0{,}13385$$

مثال 02:

تشير الاحصائيات المأخوذة من مصلحة الاستعجالات أن عدد المرضى الذين يصلون إلى هذه المصلحة خلال الفترة الممتدة ما بين التاسعة و العاشرة صباحا يتبع توزيع بواسون بالمعلمة $\lambda = 6,9$

ما هو احتمال أن يكون عدد المرضى خلال هذه الفترة :

- يساوي 4 تماما؟
- لا يتعدى مريضين؟

الحل:

إن القانون الاحتمالي لهذا المتغير يكتب كما يلي :

$$\mathbf{P(X = x)} = \frac{\mathbf{6.9^x e^{-6,9}}}{\mathbf{x!}} \qquad ; \quad x = 0,1,2, \dots \dots \dots$$

- *حساب احتمال أن يكون عدد المرضى مساويا إلى 4 تماما :*

$$P(X = x) = \frac{6.9^4}{x!} e^{(-6,9)} = \frac{2266,7121}{24} (\ 0,0010) = 0,09518$$

- *حساب احتمال أن يكون عدد المرضى لا يتعدى اثنين :*

$$P(X \leq 2) = P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)$$

$$P(X = 2) = \frac{6.9^2 e^{(-6,9)}}{2!} = \frac{47,61}{2}(0,0010) = \ 0,02399$$

$$P(X = 1) = \frac{6.9^1 e^{(-6,9)}}{1!} = \frac{6,9}{1}(0,0010) = 0,00695$$

$$P(X = 0) = \frac{6.9^0 e^{(-6,9)}}{0!} = \frac{1}{1}(0,0010) = 0,00100$$

$$P(X \leq 2) = \ 0,02399 + 0,00695 + 0,00100 = 0,03194$$

مثال 03:

تستقبل محطة بيع الوقود خلال ساعة ما عدد من الزبائن بمعدل 6 أشخاص و ليكن X_i متغير عشوائي يمثل عدد الأشخاص الذين يصلون إلى المحطة خلال ساعة، المطلوب :

1- حدد القانون الاحتمالي للمتغير X ؟

2- أحسب المميزات العددية؟

3- أحسب الاحتمالات $P(X > 0)$, $P(0 \leq X \leq 2)$ ؟

الحل:

1- **تحديد القانون الاحتمالي للمتغير X_i:**

X_i : متغير عشوائي يمثل عدد الأشخاص الذين يصلون إلى المحطة خلال ساعة.

$$X \rightarrow P(\lambda = 6)$$

و منه فالقانون الاحتمالي هو :

$$\mathbf{P(X = x)} = \frac{\boldsymbol{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}}{\mathbf{x!}} = \frac{\mathbf{6^x . e^{-6}}}{\mathbf{x!}}, \qquad x = \{0,1,2, \dots \dots \dots\}$$

$$P(X = x) = \frac{6^x \cdot e^{-6}}{x!} = \frac{6^x . e^{-6}}{x!}, \qquad x = \{0,1,2, \dots \dots \dots\}$$

2- حساب المميزات العددية:

$$\mathbf{E(X)} = \lambda \rightarrow E(X) = 6$$

$$\mathbf{V(X)} = \lambda \rightarrow V(X) = 6$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{(X)} = \sqrt{\lambda} \rightarrow \sqrt{6}$$

3- حساب الاحتمالات:

$$P(X > 0) = 1 - [P(X \leq 0)$$

$$P(X = 0) = 1 - [P(X = 0)$$

$$P(X > 0) = 1 - \left[\frac{6^0 e^{-6}}{0!}\right]$$

$$P(X > 0) = 1 - 0{,}00247$$

$$P(X > 0) = 0{,}9975$$

$$P(0 \leq X \leq 2) = [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$P(0 \leq X \leq 2) = \left[\frac{6^0 e^{-6}}{0!}\right] + \left[\frac{6^1 e^{-6}}{1!}\right]$$

$P(0 \leq X \leq 2) = 7e^{-6} = 0,01734$

تمارين مقترحة:

التمرين 01:

تسجل إحدى الطرق الوطنية معدل 4 حوادث يوميا، نعتبر x متغير عشوائي يمثل عدد الحوادث التي تحدث في أحد الأيام عشوائيا.

1- حدد نوع القانون الذي يتبعه X مع حساب مميزاته العددية ؟

2- ما هو احتمال وقوع حادث واحد على الأقل خلال اليوم ؟

3- ما هو احتمال وقوع حادث واحد فقط خلال اليوم ؟

4- ما هو احتمال وقوع من 3 حوادث إلى 5 حوادث في اليوم ؟

الحل:

1- نوع القانون الذي يتبعه X :

$X \rightarrow P(\lambda)$, $\lambda = 4$

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad , x = 0,1,2, \dots \dots \dots \infty$$

$$P(X = x) = \frac{4^x e^{-4}}{x!} \quad , x = 0,1,2, \dots \dots \dots \infty$$

حساب مميزاته العددية :

- *التوقع الرياضي :* $E(X) = \lambda = 4$
- *التباين* $V(X) = \lambda = 4$
- *الانحراف المعياري* $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4}$

2- حساب احتمال وقوع حادث واحد على الأقل خلال اليوم:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - P(X = 1)$$

$$= 1 - \frac{(4)^0 e^{-4}}{0!} = 1 - 0{,}0183$$

$$P(X \geq 1) = 0{,}9817$$

3ـ احتمال وقوع حادث واحد فقط خلال اليوم :

$$P(X = 1) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{4^1 e^{-4}}{1!}$$

$$P(X = 1) = 0{,}0732$$

4 ـ احتمال وقوع من 03 حوادث إلى 5 حوادث في اليوم:

$$P(3 \leq X \leq 5)$$

$$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= \frac{4^3 e^{-4}}{3!} + \frac{4^4 e^{-4}}{4!} + \frac{4^5 e^{-5}}{5!}$$

=0,1953+0,1953+0,1562

=0,5468

التمرين 02.

يسجل مركز إحدى مراكز المكالمات الهاتفية 5 مكالمات هاتفية يوميا، نعتبر X متغير عشوائي يمثل عدد المكالمات التي تحدث في أحد الأيام عشوائيا.

1- حدد نوع القانون الذي يتبعه X، أحسب مميزاته العددية ؟

2- ما هو احتمال وصول مكالمة واحدة خلال اليوم ؟

3- ما هو احتمال وصول مكالمة واحدة على الأقل خلال اليوم ؟

4- ما هو احتمال وصول من 4 مكالمات إلى 6 مكالمات في اليوم ؟

الحل:

1- نوع القانون الذي يتبعه X هو قانون بواسون.

$$X \to P(\lambda) \quad , \quad \lambda = 5$$

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \qquad , x = 0,1,2, \dots \dots \dots \infty$$

$$P(X = x) = \frac{5^x e^{-5}}{x!} \qquad , x = 0,1,2, \dots \dots \dots \infty$$

حساب المميزات العددية:

- التوقع الرياضي: $E(X) = \lambda = 5$
- التباين: $V(X) = \lambda = 5$
- الانحراف المعياري: $\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5} = 2,2360$

2- احتمال وصول مكالمة واحدة فقط خلال اليوم:

$$P(X = 1) = \frac{5^1 e^{-5}}{1!} = 0,0336$$

3- احتمال وصول مكالمة واحدة على الأقل خلال اليوم:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{5^0 e^{-5}}{0!}$$

$$= 1 - 0,0067$$

$$= 0,9933$$

4- احتمال وصول من 4 مكالمات إلى 6 مكالمات في اليوم:

$$P(4 \leq X \leq 6) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= \frac{5^4 e^{-5}}{4!} + \frac{5^5 e^{-5}}{5!} + \frac{5^6 e^{-5}}{6!}$$

$$= 0,1754 + 0,1754 + 0,1462$$

$$= 04964$$

التمرين 03:

إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون حيث :

$P(X=1)=\frac{1}{2}\,P(X=2)$

ـ أحسب احتمال $P(X\geq 1)$

الحل:

$X \rightarrow P(\lambda)$

$P(X=x)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}$ $\quad , x=0,1,2,\ldots\ldots\ldots\infty$

لدينا:

$P(X=1)=\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!}=\lambda\, e^{-\lambda}$

$P(X=2)=\frac{\lambda^{2}e^{-\lambda}}{2!}=\frac{\lambda^{2}e^{-\lambda}}{2}$

$\lambda\, e^{-\lambda}=\frac{1}{2}\,\frac{\lambda^{2}e^{-\lambda}}{2}$

$\lambda\, e^{-\lambda}=\frac{1}{2}\,\frac{\lambda^{2}e^{-\lambda}}{4}$

بقسمة الطرفين على $\lambda\, e^{-\lambda}$ يصبح لدينا:

$\frac{\lambda\, e^{-\lambda}}{\lambda\, e^{-\lambda}}=\frac{\lambda^{2}\, e^{-\lambda}}{4\lambda\, e^{-\lambda}}$

$=\frac{\lambda}{4} \quad \rightarrow \quad \lambda=4$

ـ حساب احتمال $P(X\geq 1)$

$P(X\geq 1)=1-P(X<1)$

$=1-P(X=0)$

$=1-\frac{4^{0}e^{-4}}{0!}$

$=1-0{,}0182=0{,}9817$

التمرين رقم 04:

في تخصص معين في جامعة ما، و حسب التجربة في سنوات سابقة، فإن متوسط عدد الطلبة الذين يمكن أن ينجحوا في سنة معينة هو 7 طلبة، فما احتمال أن ينجح في السنة القادمة.

1) 5 طلبة ؟
2) 3 طلبة ؟
3) 7 طلبة ؟
4) طالبين على الأقل ؟
5) أقل من 3 طلبة ؟
6) طالبين فأقل ؟

الحل:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع توزيع بواسون، حيث المتغير العشوائي يمثل عدد النجاحات و نرمز له ب x و متوسط عدد النجاحات هو: $\lambda = 7$

1) احتمال أن ينجح 5 طلبة : $P(X = 5) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{7^5 e^{-7}}{5!} = 0{,}1277$

2) احتمال أن ينجح 8 طلبة : $P(X = 8) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{7^8 e^{-7}}{8!} = 0{,}1304$

3) احتمال أن ينجح 7 طلبة : $P(X = 7) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{7^7 e^{-7}}{7!} = 0{,}1490$

4) احتمال أن ينجح طالبين على الأقل : $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$

$=1-[P(X = 0) + P(X = 1)$

$$1-\left[\left(\frac{7^0 e^{-7}}{0!} + \frac{7^1 e^{-7}}{1!}\right)\right] = 1 - (8e^{-7}) = 1 - 0{,}00729 \approx 0{,}9927$$

5) احتمال أن ينجح أقل من 3 طلبة :

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$\frac{7^0 e^{-7}}{0!} + \frac{7^1 e^{-7}}{1!} + \frac{7^2 e^{-7}}{2!}$$

$= (1 + 7 + 49)\ e^{-7} = 57 . e^{-7} = 0{,}05198$

6) احتمال أن ينجح طالبين فأقل :

$$P(X \leq 2) = P(X < 3) = 0{,}05198$$

التمرين رقم 5.

في أحد البنوك، و حسب الخبرة و التجربة الواقعية في الماضي، فإنه يستلم في المتوسط 5 شيكات بدون رصيد في اليوم .

المطلوب: ما احتمال أن يستلم:

1) 6 شيكات بدون رصيد في اليوم الموالي ؟
2) على الأقل 4 شيكات بدون رصيد في اليوم الموالي ؟
3) 10 شيكات بدون رصيد في الأسبوع الموالي ؟
4) على الأكثر شيكين بدون رصيد في الأسبوع الموالي ؟

الحل :

1) احتمال أن يستلم 6 شيكات بدون رصيد في اليوم الموالي:

نلاحظ أن هذه التجربة الاحتمالية تتبع توزيع بواسون، حيث المتغير العشوائي يمثل عدد الشيكات بدون رصيد في اليوم و نرمز له بالرمز X و $(\lambda = 5)$ هو متوسط عدد الشيكات بدون رصيد في اليوم و بالتالي الاحتمال المطلوب هو:

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$P(X = 6) = \frac{5^6 e^{-\lambda}}{6!} = \frac{105{,}280}{720} \approx 0{,}1462$$

2) احتمال أن يستلم على الأقل 4 شيكات بدون رصيد في اليوم الموالي هو :

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P\,(X = 3)$$

$$= 1 - \left[\frac{5^0 e^{-5}}{0!} + \frac{5^1 e^{-5}}{1!} + \frac{5^2 e^{-5}}{2!} + \frac{5^3 e^{-5}}{3!}\right]$$

$= 1- (1+5+12,5+20,833)e^{-5} \approx 0,7349$

3) احتمال ان يستلم 10 شيكات بدون رصيد في الأسبوع الموالي: متوسط عدد الشيكات بدون رصيد في الأسبوع هو $\lambda_2 = \lambda.5 = 5 \times 7 = 35$ و نرمز للمتغير العشوائي الممثل لعدد الشيكات في الأسبوع ب Y و بالتالي يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(Y = g) = \frac{\lambda_2^y e^{-\lambda^2}}{y!}$$

$$P(Y = 10) = \frac{35^{10} e^{-35}}{10!} = 0,76018e^{-44}$$

4) احتمال أن يستلم على الأكثر شيكين بدون رصيد في الأسبوع الموالي هو :

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) = P(2) = \frac{35^0 e^{-35}}{0!} + \frac{35^1 e^{-35}}{1!} + \frac{35^2 e^{-35}}{2!}$$

$$= [1 + 35 + 612,5] \times e^{-35} = 0,6485 \times e^{-35}$$

التمرين رقم 06:

إذا كان X متغير عشوائي يمثل عدد المرات التي يتعطل فيها محرك كهربائي حيث يبلغ معدل التعطل 40 % في الأسبوع الواحد فما هو احتمال:

1) عدم تعطل المحرك خلال أسبوع واحد؟
2) أن يعمل الجهاز لمدة ثلاث أسابيع (عدم تعطل الجهاز خلال 03 أسابيع)؟

الحل :

$$X \rightarrow P(\lambda) \qquad \lambda = 0,4$$

1) احتمال عدم تعطل الجهاز خلال أسبوع واحد:

$$P(X = 0) = \frac{0,4^0 e^{-0,4}}{0!} = 0,67$$

2) احتمال أن يعمل الجهاز لمدة ثلاث أسابيع:

$$P(X = 0) \times P(X = 0) \times P(X = 0) = (0,67)^3 = 0,301$$

التمرين رقم 07:

تتلقى عاملة الهاتف في شركة الاتصالات المكالمات الهاتفية بمعدل مكالمتين في الدقيقة :

1- ما هو احتمال ألا تتلقى العاملة أية مكالمة خلال الدقيقة ؟

2- ما هو احتمال وصول مكالمتين خلال الدقيقة ؟

3- ما هو احتمال أن لا يتلقى أية مكالمة خلال خمسة دقائق ؟

الحل:

لدينا $\lambda = 2$ $X \to p(\lambda)$

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

1- احتمال ألا تتلقى العاملة أية مكالمة خلال الدقيقة:

$$P(X = 0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 0{,}135$$

2- احتمال وصول مكالمتين خلال الدقيقة:

$$P(X = 2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = 0{,}27$$

3- احتمال أن لا يتلقى أية مكالمة خلال خمسة دقائق:

$$[P(X = 0)]^5 = (0{,}135)^5 = 0{,}000045$$

التمرين رقم 08:

يقدر معدل حوادث المرور في منطقة معينة بحادث واحد كل يومين.

1) أحسب الاحتمالات الموافقة لـ 0,1,2,3,4,5,6 حوادث في الأسبوع في تلك المنطقة ؟

2) ما هو عدد الحوادث الأسبوعية الأكثر احتمالا ؟

3) كم يوم في الأسبوع يمر بدون حوادث مرور ؟

الحل:

$$X \to P(\lambda)$$

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

1- الاحتمالات الموافقة ل 0,1,2,3,4,5,6 حوادث المرور في الأسبوع :

- نحسب معدل حوادث المرور كل أسبوع :

$$\lambda = (0,5)(7) = 3,5$$

$$X \to P(\lambda = 3,5)$$

$$P(X = x) = \frac{3,5^x e^{-3,5}}{x!}$$

$$P(X = 0) = \frac{3,5^0 e^{-3,5}}{0!} = 0,03$$

$$P(X = 1) = \frac{3,5^1 e^{-3,5}}{1!} = 0,106$$

$$P(X = 2) = \frac{3,5^2 e^{-3,5}}{2!} = 0,185$$

$$P(X = 3) = \frac{3,5^3 e^{-3,5}}{3!} = 0,216$$

$$P(X = 4) = \frac{3,5^4 e^{-3,5}}{4!} = 0,189$$

$$P(X = 5) = \frac{3,5^5 e^{-3,5}}{5!} = 0,132$$

$$P(X = 6) = \frac{3,5^6 e^{-3,5}}{6!} = 0,077$$

2- عدد حوادث المرور أكثر احتمالا أسبوعيا هو $x = 3$

3- احتمال أن يكون يمر يوم بدون حوادث مرور :

نحسب معدل عدد الحوادث المرورية لكل يوم: $\lambda = 0,5$

$$P(X = 0) = \frac{0,5^0 e^{-0,5}}{0!} = 0,607$$

التمرين رقم 09 :

يتلقى قسم الشرطة متوسط 5 مكالمات في الساعة، ما هو احتمال تلقي مكالمتين في ساعة مختارة عشوائيا.

- احسب التوقع الرياضي، التباين، الانحراف المعياري ؟

الحل :

$$X \to P(\lambda) \qquad (\lambda = 5)$$

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

1) احتمال تلقي مكالمتين في ساعة مختارة عشوائيا:

$$P(X = 2) = \frac{5^2 e^{-5}}{2!} = 0{,}08$$

2) حساب التوقع الرياضي:

$$E(X) = \lambda = 5$$

- التباين :

$$V(X) = \lambda = 5$$

- الانحراف المعياري :

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{5}$$

التمرين رقم 10:

في مصلحة الاستعجالات الطبية بأحد المستشفيات، يقدر متوسط عدد المرضى الذين يدخلون المصلحة بمريضين في كل دقيقة.

1- ما هو القانون الاحتمالي لـ: X ؟ حدد معالمه ؟

2- أحسب احتمال أن يتم خلال دقيقة دخول:

أ- و لا مريض، ب- مريض واحد، ت- مريضين، ث- ثلاث مرضى على الأقل؟

3- أحسب التوقع الرياضي و الانحراف المعياري ؟

الحل:

1) من خلال ملاحظة توفر شروط التدفق البسيط، و بوجود معدل تحدث به الحوادث، فإن المتغير العشوائي X الذي يمثل تدفق المرضى إلى مصلحة الاستعجالات يتبع توزيع بواسون .

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad , x = 0,1, \dots\dots\infty$$

- **تحديد معالمه:**
- $P(X = x)$ هو احتمال وقوع عدد x من الحوادث
- λ هو متوسط عدد الحوادث في وحدة الزمن $(\lambda = 2)$
- e أساس اللوغاريتم الطبيعي e = 2,71828

2) حساب أن يتم خلال دقيقة دخول :

أ- و لا مريض: $P(X = 0) = \frac{2^0 e^{-2}}{0\,!} = \frac{0,1353}{1} = 0,1353$

ب-مريض واحد: $P(X = 1) = \frac{2^1 e^{-2}}{1!} = = 0,2706$

ت-مريضين: $P(X = 2) = \frac{2^2 e^{-2}}{2!} = \frac{0,1353}{1} = \frac{4 \times 0,1353}{2} = \frac{0,5412}{2} = 0,2706$

ث- احتمال أن يتم خلال دقيقة دخول 03 مرضى على الأقل :

$$P(X \geq 3) = 1 - [P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)$$

$$= 1 - (0,2706 + 0,2706 + 0,1353)$$

$$= 1 - (0,6765) = 0,3235$$

$$P(X \geq 3) = 0,3235$$

3) حساب التوقع الرياضي:

$$E(X) = \lambda = 2$$

- التباين:

$$V(X) = \lambda = 2$$

- الانحراف المعياري:

$$\delta(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2}$$

4) التوزيع الهندسي : Geometric distribition

يعد هذا التوزيع من التوزيعات المهمة في التطبيقات الإحصائية، خاصة المتعلقة بدراسة الإحصاء السكاني، حيث يستخدم في دراسة معدلات النمو و معدلات الوفيات و الولادة .... إلخ، فإذا كان هناك تجربة إحصائية تتألف من متوالية من محاولات برنولي المستقلة و كانت نتيجة كل محاولة من هذه المحاولات إما نجاح أو فشل، و ستجرى التجربة **لحين الحصول على أول نجاح** .[1]

على فرض أن احتمال النجاح ثابت في كل محاولة، و ليكن p (الحظ هنا أن عدد المرات n متغير عشوائي، بينما في حالة ذي الحدين عدد المرات ثابت).

و كان المتغير العشوائي x يمثل عدد المحاولات المطلوبة لوقوع أول حالة نجاح فإن x يتوزع وفق **التوزيع الهندسي**.

و من الأمثلة على ذلك:

- يتم إلقاء عملة نقدية معدنية تكرارا حتى ظهور أول صورة .

- إلقاء مكعب نرد حتى ظهور الرقم " 4 "، سحب عناصر من صندوق به عناصر فاسدة و أخرى صالحة بشكل متتالي و مع الإعادة حتى الحصول على عنصر فاسد ، ..... إلخ.

يمكن صياغة تعريف هذا التوزيع كالآتي :

إذا كان x متغيرا عشوائيا يمثل عدد المحاولات المطلوبة للحصول على أول حالة نجاح في متوالية من المحاولات المستقلة لتجربة ما و كان احتمال النجاح هو p و هو ثابت من محاولة لأخرى، فإن x يتوزع و فق **التوزيع الهندسي** بدالة كتلة احتمال معرفة بالصيغة التالية :

$$P(X = x) = \begin{cases} pq^{x-1} & x = 1, 2, \dots \dots \dots 0 < p < 1 \\ 0 & \text{ذلك خلاف} \end{cases}$$

باختصار فإن شروط تطبيق التوزيع الهندسي هي :

[1] علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، **الإحصاء و الاحتمالات**، النظرية و التطبيق، منشورات ELFA، 2000، فاليتا، مالطا، ص334.

- عدد مرات تكرار التجربة n غير محدد.
- التجربة تقبل نتيجتين فقط: نجاح p أو فشل q بحيث $p + q = 1$
- استقلالية التجارب.

إذا تحققت هذه الشروط نقول أن X يخضع (يتبع) التوزيع الهندسي و نكتب[1]

$$X \to g(p)\ , P\ (X = x) = P(1 - p)^{x-1} \qquad ; x = 1, 2, \dots \dots \dots$$

بحيث :

g : رمز التوزيع الهندسي (الحرف الأول من كلمة geometric)

X : متغير عشوائي.

p: معلمة التوزيع و تمثل احتمال النجاح في المحاولة الواحدة .

مثال رقم 01 :

نرمي قطعة نرد متوازنة إلى غاية الحصول على الرقم 6 لأول مرة.

المطلوب :

أحسب احتمال ظهور الرقم 6 بعد سبع محاولات.

الحل :

قبل حساب الاحتمال يجب أولا تحديد القانون الاحتمالي المناسب، نلاحظ أن :

- عدد المحاولات غير محدد، بل تكرار المحاولة لغاية الحصول على النجاح الأول .
- كل محاولة (أي كل رمية لقطعة النرد) تقبل فقط نتيجتين: إما النجاح الذي يمثل ظهور الرقم 6 باحتمال قدره $p = \frac{1}{6}$ أو فشل أي ظهور رقم يختلف عن 6 (أي الوجه 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5) و هذا باحتمال قدره $q = \frac{5}{6}$
- كل محاولة مستقلة عن المحاولات الأخرى.

إذن :

[1] Sheldon Ross (2008); **A First Cour in Probability**; Pearson edicaionic United states of amirica 8 Th ed, PP 155-157.

$$X \to g(p)$$

$$X \to g\left(\frac{1}{6}\right)$$

و منه فالقانون الاحتمالي هو :

$$\mathbf{P(X = x) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \quad , x = \{1, 2, 3 \dots \dots .\}}$$

بما أن المطلوب هو حساب احتمال النجاح أي ظهور الرقم (6) بعد 7 محاولات فهذا معناه أن النجاح سيحدث في المحاولة رقم 8 أي أن الاحتمال المطلوب حسابه $P(X = 8)$

$$\mathrm{P(X = 8) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{8-1}}$$

$$\mathrm{P(X = 8) = 0{,}046}$$

مثال رقم 02:

إذا علمت ان احتمال أن يكون أحد الأجهزة من إنتاج شركة ما معطوبا هو 0,05، أحسب احتمال أن يكون الجهاز السادس معطوبا ضمن مجموعة من الأجهزة المسحوبة من إنتاج هذه الشركة.

الحل:

بما أن عدد الأجهزة الذي سيتم سحبه غير محدد، و كل عملية سحب ستؤدي إلى سحب جهاز معطوب (نجاح باحتمال 0,05) أو جهاز غير معطوب (فشل باحتمال قدره 0,95) كما أن عمليات السحب مستقلة فهذا يعني أن: $\boldsymbol{X \to g(0,05)}$

و منه فالقانون الاحتمالي هو :

$$\mathrm{P(X = 6) = (0{,}05)(0{,}95)^{6-1}}$$

$$P(X = 6) = 0{,}039$$

القيم العددية المميزة:

أ- **التوقع الرياضي:** إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع الهندسي فإن التوقع الرياضي يحسب بالعلاقة التالية [1] :

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{1}{p}}$$

ب-التباين:

إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع الهندسي فإن التباين يحسب بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{\delta^2 = V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}}$$

و يمكن استنتاج عبارة الانحراف المعياري كالتالي : $\boldsymbol{\delta x = \sqrt{\frac{q}{p^1}}}$

- **تمارين مقترحة:**

التمرين الأول:

بفرض أنه ألقى مكعب (زهرة) نرد حتى ظهور الرقم " 01 "، فإذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد المحاولات المطلوبة حتى ظهور الرقم " 1 " لأول مرة، فأوجد:

أ- دالة كتلة الاحتمال للمتغير العشوائي X.

ب-احتمال الحصول على الرقم " 1 " في المحاولة الثالثة.

ت- القيمة المتوقعة و التباين للمتغير العشوائي X.

الحل:

دالة الاحتمال المتغير العشوائي X تكون على الصيغة الآتية :

[1] محمد صبحي أبو صالح، **الطرق الإحصائية**، دار اليازوري العلمية للنسر و التوزيع، الأردن، عمان الطبعة العربية ، 2009 ص 201.

$$\mathbf{P(X=x)=}\begin{cases}\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\left(\frac{1}{6}\right) & \mathbf{x=1,2,3}\\ \mathbf{0} & \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

ت–احتمال الحصول على الرقم 1 في المحاولة الثالثة هو :

$$P(X=3)=\left(\frac{5}{6}\right)^{3-1}\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{25}{216}$$

ث–القيمة المتوقعة و التباين على الترتيب هما :

$$E(X)=\frac{1}{p}=6$$
$$V(X)=\frac{q}{p^2}=\frac{(5/6)}{(1/6)^2}=30$$

التمرين الثاني:

وجدت الشركة العامة للإلكترونيات أن 30 % من المتقدمين للعمل بها يحملون شهادة البكالوريوس في الحاسوب، و أن المتقدمين يتم اختيارهم بطريقة عشوائية و بشكل متتالي:

أ– ما احتمال أن أول شخص تتم مقابلته و يحمل شهادة البكالوريوس في الحاسوب هو الشخص الخامس؟

ب–إذا كانت كل مقابلة تكلف 15 دينار، أوجد القيمة المتوقعة و التباين الإجمالي لتكاليف المقابلة حتى يتم الحصول على العدد المطلوب من الأشخاص للوظائف الشاغرة.

الحل:

بفرض أن المتغير العشوائي X يرمز لعدد المحاولات المطلوب للحصول على أول شخص تتم مقابلته و يحمل شهادة البكالوريوس في الحاسوب.

و عليه فإن المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع الهندسي بدالة كتلة احتمال لها الصيغة التالية :

$$P(X=x)=\begin{cases}(0{,}3)\ (0{,}7)^{x-1} & x=1,2,3\ldots\ldots\ldots\ldots.\\ 0 & \text{خلاف ذلك}\end{cases}$$

$$P(X=5)=(0{,}3)\ (0{,}4)^{5-1}=0{,}072$$

ب – بفرض أن c ترمز لإجمالي التكلفة و عليه فإن:

C= 15 x

و منها نجد أن :

$$E(c) = 15E(X) = 15\left(\frac{1}{p}\right) = 15\left(\frac{1}{0,3}\right) = 50$$

و أن :

$$V(c) = (15)^2V(X) = (15)^2\left(\frac{q}{p^2}\right) = (15)^2\left(\frac{0,7}{(0,3)^2}\right) = 1750$$

التمرين الثالث:

نقوم برمي زهرة نرد منتظمة حتى يظهر العدد *3* إلى أعلى، ما احتمال أنك *تحتاج* إلى *03* رميات على محاولات؟

الحل:

X *: عدد المحاولات حتى نحصل على الرقم 3، احتمال النجاح* p=1/6، *ومنه احتمال الفشل :* q=5/6

وبالتالي : $P(X = 3) = (6/1)(6/5)^{1-3}$ = 0.1157

التمرين الرابع:

رميت قطعة نقود متزنة حتى حصلت على صورة H، فماهو احتمال أنك احتجت إلى 4 رميات على الأقل؟

الحل :

احتمال الحصول على الصورة H في الرمية الواحدة يساوي $\frac{1}{2}$ أي أن: $p = \frac{1}{2}$ ، $q = \frac{1}{2}$.

بفرض أن X يمثل عدد المحاولات التي تحتاجها للحصول على الصورة فيكون المطلوب $P(X \geq 4)$

لاحظ أن X متغير عشوائي هندسي باستعمال قانون المتممة نجد :

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 4)$$

$$P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{1-1}.\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{2-1}.\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}.\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P(X \geq 4) = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

التمرين الخامس.

يضمن أحد متعاملي الهاتف النقال نجاح 80 % من المكالمات الهاتفية، إذا اعتبرنا X متغير عشوائي يمثل عدد المكالمات الناجحة من بين 09 مكالمات.

أ- ما نوع القانون الذي يتبعه X، مع حساب مميزاته العددية ؟

ب-أحسب احتمال فشل مكالمة واحدة ؟

إذا اعتبرنا Y متغير عشوائي يمثل عدد المحاولات اللازمة لنجاح مكالمة .

أ- ما نوع القانون الذي يتبعه y، مع حساب مميزاته العددية؟

ب-أحسب احتمال نجاح مكالمة في محاولتين على الأكثر؟

الحل:

1 – لدينا : n=9 ، p = 0,8 ،

و منه القانون الذي يتبعه x هو قانون **التوزيع الثنائي**: $\boldsymbol{X \rightarrow B(9.0,8)}$

$$P(X = x) = c_n^x p^x q^{n-x} \qquad ,x = 0,1, \ldots\ldots$$

$$P(X = x) = c_9^x (0.8)^x (0,2)^{9-x}$$

المميزات العددية:

$$E(X) = np = (9)(0,8) = 7,2$$

$$V(X) = npq = (9)(0,8)(0,2) = 1,44$$

$$\delta(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{(9)(0,8)(0,2)} = \sqrt{1,44}$$

ب – احتمال فشل مكالمة واحدة من بين 9 مكالمات ، هذا يعني نجاح 8 مكالمات :

$$P(X = 8) = c_9^8 (0.8)^8 (0,2)^{9-8} = 9(0.8)^8 (0,2)^1$$

$P(X = 8) = 0{,}3019$

إذا اعتبرنا y متغير عشوائي يمثل عدد المحاولات اللازمة لنجاح مكالمة :

أ) نوع القانون الذي يتبعه Y هو **التوزيع الهندسي:**

$$\mathbf{p = 0,8} \qquad \mathbf{,Y \to G(p)}$$
$$P(Y = y) = P(1 - p)^{y-1}$$
$$P(Y = y) = (0{,}8)(0{,}2)^{y-1}$$

المميزات العددية :

$$E(Y) = \frac{1}{P} = \frac{1}{0{,}8} = 1{,}25$$

$$V(Y) = \frac{q}{p^2} = \frac{0{,}2}{(0{,}8)^2} = 0{,}3125$$

$$\delta(Y) = \sqrt{0{,}3125} = 0{,}5590$$

ب) احتمال نجاح مكالمة في محاولتين على الأكثر:

$$P(Y \leq 2) = ?$$
$$P(Y \leq 2) = p(y = 2) + p(y = 1)$$
$$P(Y \leq 2) = 0{,}8(0{,}2)^{2-2} + 0{,}8(0{,}2)^{1-1}$$
$$P(Y \leq 2) = 0.16 + 0{,}8$$
$$P(Y \leq 2) = 0{,}96$$

التمرين السادس:

مصنع إنتاجي يحتوي على عدد من الخطوط الإنتاجية التي تنتج إلى غاية توقف أحد الخطوط الإنتاجية، حيث احتمال توقف احد هذه الخطوط عن العمل لمدة يوم واحد يساوي $0{,}1$، المطلوب:

أ- احتمال أن يتوقف الخط الإنتاجي عن العمل ثلاث أيام .

ب-احتمال أن يتوقف الخط الإنتاجي عن العمل ثلاث أيام على الأكثر.

ت- أوجد التوقع الرياضي و التباين.

الحل:

$$\mathbf{X \rightarrow G(p = 0,1)}$$

$$\mathbf{P(X = x) = (1 - p)^{x-1} \cdot p}$$

1- احتمال أن يتوقف الخط الإنتاجي عن العمل ثلاث أيام :

$$P(X = 3) = (1 - 0{,}1)^{3-1}(0{,}1) = 0{,}081$$

2- احتمال أن يتوقف الخط الإنتاجي عن العمل ثلاث أيام على الأكثر:

$$\mathrm{P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = (1 - 0{,}1)^{1-1}(0{,}1)(1 - 0{,}1)^{2-1}(0{,}1)(1 - 0{,}1)^{3-1}(0{,}1)}$$

$$\mathrm{P(X \leq 3) = 0{,}1 + 0{,}09 + 0{,}081}$$

3- التوقع الرياضي و التباين:

$$\mathrm{E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}1} = 10}$$

$$\mathrm{V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0{,}1}{(0{,}1)^2} = 90}$$

التمرين السابع :

يحتوي وعاء على 5 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء ، نسحب كرة بالإرجاع إلى غاية الحصول على كرة سوداء، المطلوب :

1- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X .

2- ما هو احتمال القيام بالسحب 4 مرات للحصول على كرة سوداء.

3- ما هو احتمال القيام بالسحب على الأقل مرتين للحصول على كرة سوداء

4- ما هو احتمال القيام بالسحب على الأقل ثلاثة مرات للحصول على كرة سوداء

5- أحسب التوقع و التباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X

6-دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X

الحل :

1- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X:

المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع الهندسي حيث $p = \frac{C_3^1}{C_8^1} - \frac{3}{8}$

$$\mathbf{X \rightarrow G\left(p = \frac{3}{8}\right)}$$

$$\mathbf{P(X = x)} = \begin{cases} \mathbf{(1-p)^{x-1}p} & \mathbf{x = 1, 2, 3 \dots\dots\dots\dots. +\infty} \\ \mathbf{0} & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \left(\frac{5}{8}\right)^{x-1}\left(\frac{3}{8}\right) & x = 1,2,3 \dots\dots\dots\dots. +\infty \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

2- احتمال القيام بالسحب 4 مرات للحصول على كرة سوداء:

$$P(X = 4) = (1-p)^{x-1}p = \left(\frac{5}{8}\right)^{4-1}\left(\frac{3}{8}\right) = 0{,}0915$$

3- هو احتمال القيام بالسحب على الأقل مرتين للحصول على كرة سوداء

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - p(1) = \left(\frac{5}{8}\right)^{1-1}\left(\frac{3}{8}\right) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

4- احتمال القيام بالسحب على الأقل ثلاث مرات للحصول على كرة سوداء

$$P(x \geq 3) = 1 - p(x < 3) = 1 - [p(1) + p(2) = 1 - \left[\left(\frac{5}{8}\right)^{1-1}\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{5}{8}\right)^{2-1}\left(\frac{3}{8}\right)\right] =$$

$$1 - \left[\frac{3}{8} + \frac{15}{64}\right] = 0{,}391$$

5- احتمال توقع و تباين و الانحراف المعياري للمتغير العشوائي x :

- **التوقع:**

$$\mathbf{E[x] = \frac{1}{p} = \frac{1}{3/8} = \frac{8}{3}}$$

- **التباين :**

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-3/8}{(3/8)^1} = \frac{5/8}{9/64} = 4{,}444$$

- **الانحراف المعياري :**

$$\delta_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1-p}{p^2}} = \sqrt{4{,}444} = 2{,}108$$

دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X:

تكون دالة التوزيع التراكمية بالصيغة التالية :

$$F(X)=\begin{cases}0 & ;x<1\\ 1-(1-p)^{x} & ;x=1,2\dots\dots n\\ 1 & ;x=+\infty\end{cases}\Rightarrow \quad F(X)=\begin{cases}0 & ;x<1\\ 1-\left(1-\frac{5}{8}\right)^{x} & ;x=1,2\dots\dots n\\ 1 & ;x=+\infty\end{cases}$$

التمرين الثامن:

صندوق به 20 علبة من منتج معين، 05 منها منتهية الصلاحية، ليكن المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات تكرار عملية السحب بالإرجاع للعلب من الصندوق حتى التمكن من سحب علبة منتهية الصلاحية.

1) حدد القانون الاحتمالي للمتغير X.
2) أحسب احتمال الحصول على علبة منتهية الصلاحية عند السحب الأول.
3) أحسب احتمال الحصول على علبة منتهية الصلاحية عند السحب الرابع.
4) أحسب المميزات العددية.

الحل:

1- تحديد القانون الاحتمالي للمتغير:

- بما أن:
- عدد مرات تكرار السحب غير محدد.
- كل عملية سحب تقبل نتيجتين فقط: إما سحب علبة منتهية الصلاحية (معناه نجاح) باحتمال قدره $p=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$

أو سحب علبة غير منتهية الصلاحية (معناه فشل) باحتمال قدره $p=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$

- السحب بالإرجاع و هذا معناه أن كل عملية سحب مستقلة عن عمليات السحب الأخرى فإن :

$$X\rightarrow g\left(\frac{1}{4}\right)$$

و منه فالقانون الاحتمالي هو :

$$P(X = x) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \quad ; x = \{1,2,3, \dots \dots \dots\}$$

2- احسب احتمال الحول على علبة منتهية الصلاحية عند السحب الأول :

$$P(X = 1) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{1-1}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

3- أحسب احتمال الحصول على علبة منتهية الصلاحية عند السحب الرابع :

$$P(X = 4) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{4-1}$$

$$P(X = 4) = \frac{27}{256}$$

4- حساب المميزات العددية :

$$E(X) = \frac{1}{p} \rightarrow E(X) = \frac{1}{1/4}$$

$$E(X) = 4$$

$$V(X) = \frac{q}{p^2} \rightarrow V(X) = \frac{3/4}{(1/4)^2}$$

$$V(X) = 12$$

5-التوزيع فوق الهندسي : Hypergeomitric distribution :

يسمى أيضا بالتوزيع الهندسي الزائد و الفرق الأساسي بين التوزيع الثنائي و التوزيع فوق الهندسي هو أن التوزيع فوق الهندسي يكون السحب فيه **بدون إعادة** عكس التوزيع الثنائي الذي يكون بالإعادة.

- **شروط تطبيق التوزيع فوق الهندسي:**

نقول عن متغير عشوائي X أنه يتبع التوزيع **فوق الهندسي** إذا تحققت الشروط التالية :

- التجربة تتألف من **عدد المحاولات غير المستقلة n** و الذي يمثل أيضا حجم العينة بحيث يكون $n > 1$.
- لكل محاولة **نتيجتين فقط** : نجاح p أو فشل q بحيث $p + q = 1$

- المحاولات **تتم بدون إعادة** و بالتالي فهي غير مستقلة عن بعضها البعض أي أن نتيجة كل محاولة تأثر و تتأثر بنتائج المحاولات السابقة أو اللاحقة بها، و بالتالي **فاحتمال النجاح يكون غير ثابت من محاولة إلى أخرى.**

- **قانون التوزيع الاحتمالي للتوزيع فوق الهندسي:**

ليكن لدينا مجتمع يحتوي على N وحدة منها M وحدة تحقق خاصية معينة (مثلا: معيبة، صالحة، مريضة ...) و بالتالي فعدد الوحدات التي لا تحقق هذه الخاصية سيكون (N – M)، نسحب عشوائيا و بدون إرجاع n وحدة بحيث $N < M$.

نرمز x_i لعدد الوحدات المسحوبة (ضمن العينة n) التي تحقق الخاصية المرغوبة، وعليه فإن قيم المتغير X هي: $x_i = \{1,2 \dots \dots k\}$ بحيث k يمثل أقصى عدد الوحدات التي تحقق الخاصية المرغوبة ضمن العينة المسحوبة و بالتالي فقيمة k القيمة الأصغر بين N و M.

لنحسب الآن احتمال أن نحصل على x و حدة تحقق الخاصية ضمن العينة المسحوبة n.

نعلم أن :

$$\mathbf{P(X = x)} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لظهور } \mathbf{x} \text{ وحدة تحقق الخاصية}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

- عدد الحالات الملائمة لظهور x وحدة تحقق الخاصية المرغوبة هو : $C_M^x C_{N-M}^{n-x}$
- عدد الحالات الكلية هو : C_N^n

و منه: احتمال أن نحصل على x وحدة تحقق الخاصية ضمن العينة المسحوبة n يحسب كما يلي :

$$\mathbf{P(X = x)} = \frac{\mathbf{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}}{\mathbf{C_N^n}} \qquad ; \mathbf{x = \{0, 1, 2, \dots \dots \dots k\}}$$

و نقول أن المتغير يتبع التوزيع **فوق الهندسي** و نكتب : [1]

$$\mathbf{x \rightarrow (N, M, n)}$$

[1] جلال مصطفى الصياد، **نظرية الاحتمالات**، دار حافظ للنشر و التوزيع، جدة، المملكة العربية السعودية ص 195.192

بحيث :

- H : رمز التوزيع فوق الهندسي (الحرف الأول من كلمة hypergeometric)
- X : متغير عشوائي.
- N : عدد عناصر المجتمع.
- M : عدد عناصر المجتمع التي تحقق الخاصية المرغوبة.
- n : حجم العينة، أي عدد العناصر المسحوبة و تعبر أيضا عن عدد مرات تكرار المحاولة (السحب) ، و يشترط بأن يكون $\boldsymbol{n > 1}$

إن **المميزات العددية** لهذا القانون هي : [1]

أ- **التوقع الرياضي:** إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع **فوق الهندسي** فإن التوقع الرياضي:

يحسب كما يلي: $\boldsymbol{E(X) = n\frac{M}{N} = nP}$

ب- **التباين:** إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع **فوق الهندسي** فإن التباين يحسب بالعلاقة التالية:

$$\boldsymbol{\delta_X^2 = n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-n}\right)}$$

$$\boldsymbol{\delta_X^2 = V(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

حيث أن المقدار: $\boldsymbol{\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$: **يسمى معامل التصحيح.**

و يمكن استنتاج عبارة الانحراف المعياري كالتالي:

$$\delta_X = \sqrt{npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

مثال: صندوق به 10 كريات منها 6 بيضاء و 4 سوداء، نقوم بسحب 5 كرات دفعة واحدة. لنعتبر X متغير عشوائي يمثل عدد الكريات البيضاء المسحوبة:

- أوجد القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟
- ما هو احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء ؟

[1] محمد بداوي **الإحصاء الاستدلالي**، دار هومة للطباعة و النشر و التوزيع، الجزائر،2017.

- لنفرض أننا سحبنا 8 كرات دفعة واحدة، أوجد القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X ؟

الحل :

- **إيجاد القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X:**

لدينا :

$X \to H(N, M, n)$ ، حيث N=10 ، M=6 ، n=5 ، أي أن :

$$\mathbf{X \to H(10, 6, 5)}$$

$$\mathbf{P(X = x) = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} = \frac{C_6^x C_4^{5-x}}{C_{10}^5} \quad ; x = 0, 1, 2, 3, 4, 5}$$

- **حساب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء :**

$$P(X = 3) = \frac{C_6^3 C_4^{5-3}}{C_{10}^5} = \frac{C_6^3 C_4^2}{C_{10}^5} = \frac{20 \times 6}{252} = 0{,}4761$$

لو نلاحظ البسط نجد أننا سحبنا 3 كرات بيضاء من بين 6 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء من بين 4 كرات سواء لأننا نسحب 5 كرات.

- إيجاد القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

عند سحبنا 8 كرات و نحن لدينا 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء فهذا يعني أن أقل عدد الكرات البيضاء الممكنة هو 4 لماذا؟ لو قلنا أننا نسحب 8 كرات من بينها 0 كرة بيضاء نجد أن هذا الحادث مستحيل لأننا عدد الكريات السوداء هو 4 و السحب لا بد أن يحتوي على 8 كرات، لو قلنا نسحب 8 كرات من بينها 1 بيضاء كذلك نجد أن هذا الحادث مستحيل لأنه لابد أن يكون لدينا 7 كرات سوداء ... و هكذا نجد أن أقل قيمة لعدد الكرات البيضاء المسحوبة هو 4 (ترافقها 4 كرات سوداء)، و لا يمكن أن تتجاوز عدد الكرات البيضاء المسحوبة 6 كرات لأنه يمثل أكبر عدد ممكن لها.

إذن : $\mathbf{X \to H(10, 6, 5)}$

أي أن :

$$\mathbf{P(X = x) = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} = \frac{C_6^x C_4^{8-x}}{C_{10}^8} \quad ; x = 4, 5, 6}$$

لذلك نجد في بعض المراجع عند كتابة القانون **فوق الهندسي** يأخذون هذه الحالة بعين الاعتبار مثلما هو موضح في العلاقة التالية :

$$\mathbf{P(X=x)=\frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}=x\in\{max(0,n-N+M);\dots\dots min(n,m)\}}$$

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

طلبية مؤلفة من 11 جهاز من بينها 4 أجهزة معطوبة، اختار الزبون عشوائيا و بدون إرجاع 04 أجهزة لفحصها المطلوب :

1-أكتب قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأجهزة المعطوبة ضمن الأجهزة المختارة؟

2- احسب احتمال ان يكون ضمن الأجهزة التي اختارها الزبون جهازين معطوبين ؟

3-احسب توقع و انحراف عدد الأجهزة المعطوبة ضمن العينية المسحوبة ؟

الحل:

1-التوزيع الاحتمالي للمتغير X :

بما أن X يمثل عدد الأجهزة المعطوبة ضمن الأجهزة الأربعة المختارة فإن قيم X هي:

$x_i=\{0,1,2,3,4\}$

نلاحظ أ ن :

n=4 أي تكرار عملية السحب اربعة مرات أي $1<$.

كل عملية سحب (محاولة) تقبل نتيجتين فقط: اما نجاح (أي ظهور جهاز معطوب) أو فشل (أي ظهور جهاز غير معطوب).

- المحاولات غير مستقلة لأن السحب تم بدون اعادة.

ومنه: يمكن القول أن التوزيع الاحتمالي للمتغير X هو التوزيع **فوق الهندسي**، و نكتب :

$$\mathbf{X \rightarrow H(N = 11, M = 4, n = 4)}$$

و عليه فالقانون الاحتمالي له هو :

$$P(X = 2) = \frac{C_4^X C_{11-4}^{4-X}}{C_{11}^4} = \frac{C_4^X C_7^{4-X}}{C_{11}^4} \quad ; x = \{0,1,2,3,4\}$$

2- حساب احتمال أن يكون ضمن الأجهزة التي اختارها الزبون جهازين معطوبين:

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_{11-4}^{4-2}}{C_{11}^4} = \frac{C_4^2 C_7^2}{C_{11}^4} = \frac{6 \times 21}{330}$$

$$P(X = 2) = 0,3818$$

3- حساب توقع و انحراف عدد الأجهزة المعطوبة ضمن العينة المسحوبة :

$$\mathbf{E(X) = np} = 4 \times \frac{4}{11} = 1.45$$

$$\boldsymbol{\delta_X} = \sqrt{\mathbf{npq}\left(\frac{\mathbf{N-n}}{\mathbf{N-1}}\right)} \rightarrow \delta(x) = \sqrt{4\left(\frac{4}{11}\right)\left(\frac{7}{11}\right)\left(\frac{11-4}{11_1}\right)}$$

$$\delta_X = 0,80$$

التمرين الثاني:

يتوفر في أحد معارض بيع الأجهزة الكهرو منزلية 15 ثلاجة من الحجم الكبي، من بينها 3 فيها عطل، قام أحد الزبائن بشراء 6 ثلا جات دون فحصها.

1- اكتب القانون الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الاجهزة المعيبة.

2- ما هو احتمال ان يكون من ضمن ما اشتراه الزبون ثلاجتين معطلتين ؟

الحل:

1- القانون الاحتمالي: X متغير عشوائي يتبع التوزيع **فوق الهندسي**.

N : مجتمع يحتوى على 15 ثلاجة.

M : العناصر الى تمثل النجاح هي 3 ثلاجات معطلة.

N-M : العناصر التي تمثل الفشل هي 12 ثلاثة صالحة.

n : العينة المسحوبة هي 6 ثلاجات.

$\boldsymbol{X \to H(N = 15, M = 3, n = 6)}$

$$P(X = x) = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} = \frac{C_3^x C_{12}^{6-x}}{C_{15}^6} \ , x = 0,1,2,3,$$

2- احتمال أن يكون من ضمن ما اشتراه الزبون ثلاجتين معطلتين :

$$P(X = 2) = \frac{C_3^2 C_{15-3}^{6-2}}{C_{15}^6} = 0,297$$

التمرين الثالث:

في عملية مراقبة الجودة لمنتج معين، تم انتاج 50 وحدة في ساعة واحدة، تم احصاء 5 وحدات معيبة، سحبت 3 وحدات لاختبار الجودة (بدون إعادة)، المطلوب :

1- أكتب القانون الاحتمالي لـ X(عدد الوحدات المعيبة).

2- احسب $P(X = 2) \ , P(X = 1), \ P(X = 0)$

الحل:

إن مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي : $x_i = \{0,1,2,3\}$

$X \to H(N = 50, M = 5, n = 3)$ $\qquad$ $N = 50, M = 5, n = 3$

$$P(X = x) = \frac{C_5^x C_{45}^{3-x}}{C_{50}^3} \qquad , x_i = 0,1,2,3,$$

بعد الحساب نجد :

$P(X = x) = 0,726$

$P(X = 1) = 0,2505$

$P(X = 2) = 0,023$

التمرين الرابع:

يتكون تخصص ادارة الأعمال من 6 طالبات (اناث) و 9 طلبة (ذكو)، اختير من هذا التخصص 7 طلاب دون إرجاع.

1) اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الطالبات المختارات؟

2) 2 ما هو احتمال أن يكون من بين الطلاب المختارين 3 طالبات؟

3) أوجد المتوسط الحسابي والانحراف المعياري؟

الحل:

1- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X يتبع التوزيع فوق الهندسي .

N : مجتمع يحتوى على 15 طالب.

M : العناصر الى تمثل النجاح هي 6 طالبات.

N – M : العناصر التي تمثل الفشل هي 9 طلاب.

n : العينة المسحوبة هي 7 طلاب.

$$X \to H(N = 15, M = 6, n = 07)$$

$$P(X = x) = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} = \frac{C_6^x C_9^{7-x}}{C_{15}^7} \ , x = 0,1,2,3,4,5,6$$

2- احتمال أن يكون من بين الطلاب المختارين 3 طالبات:

$$P(X = 3) = \frac{C_6^3 C_9^{7-3}}{C_{15}^7} = 0,392$$

3- إيجاد التوقع الرياضي و الانحراف المعياري:

أ) التوقع الرياضي:

- **التوقع الرياضي:**

$$\mathbf{E(X) = n\frac{M}{N} = 7 \times \frac{6}{15} = 2,8}$$

- **التباين:**

$$\mathbf{\delta_X^2 = \ n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-n}\right)}$$

$$\mathbf{V(X) = npq\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

$$V(X) = 7 \times \frac{6}{15}\left(1 - \frac{6}{15}\right)\left(\frac{15-7}{15-1}\right) = 0{,}958$$

- **الانحراف المعياري:**

$$\delta_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}958} = 0{,}979$$

التمرين الخامس:

تتلقى احدى الشركات شحنات على دفعات من 12 منتجات، من بين هذه المنتجات الإثني عشر يوجد منتوجين غير صالحيين، نسحب عشوائيا 6 منتجات دفعة واحدة، في حالة وجود منتوج واحد غير صالح يتم رفض التسليم اذا اعتبرنا x متغير عشوائي يمثل عدد المنتجات غير الصالحة.

1- حدد نوع القانون الذي يتبعه X مع كتابة قانونه الرياضي ؟

2- ما هو احتمال قبول التسليم من طرف الشركة ؟

الحل:

القانون الذي يتبعه X هو التوزيع فوق الهندسي:

$$\mathbf{X \rightarrow H(N, M, n)}$$

$$N = 15, \quad M = 6, \quad n = 07$$

$$P(X = x) = \frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}$$

$$P(X = x) = \frac{C_2^x C_{10}^{6-x}}{C_{12}^6} \quad , x = 0,1,2$$

3- احتمال قبول التسليم من طرف الشركة:

$$P(X = 0) = \frac{C_2^0 C_{10}^6}{C_{12}^6} = \frac{210}{924} = 0{,}2272 \ .$$

المحور الثاني: أهم قوانين التوزيعات الاحتمالية المتصلة.

- ✓ التوزيع الطبيعي.
- ✓ التوزيع المنتظم.
- ✓ التوزيع الاسي.
- ✓ توزيع قاما (Gamma).
- ✓ توزيع بيتا (Betta).
- ✓ توزيع كاي مربع.
- ✓ توزيع ستيودنت.
- ✓ توزيع فيشر .

تمهيد:

التوزيعات الاحتمالية المستمرة يمسح فيها المتغير العشوائي المستمر جميع نقاط محور موجه، وبالتالي فإنه بالإضافة لكون عدد قيم هذا المتغير لا نهائيا، فإن هذا العدد غير قابل للعد كنقاط المجال (a,b) مثلاً. وكبعض الأمثلة على المتغيرات المستمرة نذكر على سبيل المثال عمر مصباح كهربائي، أخطاء القياسات في تجربة مخبرية، طول إنسان .... إلخ، للحصول على نموذج احتمالي لمتغير مستمر نبدأ باختبار منحنى مستمر يمثل ما يسمى بدالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ و لا بد لهذه الدالة أن تحقق الشرطين التاليين [1]:

أ) $f(x) \geq 0$ من أجل جميع قيم x.

ب) المساحة بين المنحنى $f(x)$ و المحور السيني تساوي الواحد .

و عندئذ سيكون احتمال أي حادث ممثلا المساحة تحت منحنى الكثافة، و نتيجة ذلك فإن احتمال فرض أن المتغير X مساويا للقيمة a مثلا $P(X = a)$ هي المساحة تحتى المنحنى فوق المساحة a من المحور السيني و هذه المساحة صفر، و هكذا نجد ان احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي المستمر (قيمة بحد ذاتها) معدوم. و هذا تعبير واقعي عن استحالة توصل الانسان إلى أجهزة دقيقة بصورة مطلقة لذلك تبقى هذه النتيجة مقبولة طالما بقي الانسان غير قادر على الادعاء بأن قياساته لعمر مصباح كهربائي مثلا، هي قياسات لا تخضع لأي خطأ على الاطلاق، إذ مهما أوتي جهاز القياس من الدقة و مهما بلغت مهارة الانسان الذي يستخدم هذا الجهاز فلا بد من ارتكاب خطأ مهما كان صغيرا.

1-التوزيع الطبيعي. The Normal distribution :

يعتبر التوزيع الطبيعي من أكثر التوزيعات الاحتمالية أهمية و فائدة، و هذا التوزيع يصف العديد من الظواهر التي تحدث في الصناعة، البحوث العملية و منها على سبيل المثال لا الحصر :

- القياسات الفيزيائية في مجالات عديدة كقياسات الأجزاء الصناعية حيث يكون لتوزيعها الاحتمالي تقريب جيد مع التوزيع الطبيعي .

[1] محمد غالب المدني، **الاحتمالات و الإحصاء**، مركز النشر العلمي، جامعة الملك عبد العزيز ط 8، المملكة العربية السعودية، 2004، ص 201.

- الأخطاء في القياسات المعملية يمكن تقريبها بشكل جيد من التوزيع الطبيعي.
- كذلك وجد أن الكثير من الظواهر الطبيعية تتوزع احتماليا وفق لهذا التوزيع أيضا.

و لهذا السبب أطلق على هذا التوزيع اسم **التوزيع الطبيعي**، و يعرف هذا التوزيع باسم **التوزيع الغاوسي** "Gaussian Distribution " أيضا و ذلك نسبة إلى الرياضياتي الألماني:

"**Gouse johann carl friedrich (1777 – 1855)** "

و كثافة احتمال هذا التوزيع هي [1] :

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-u)^2}{2\delta^2}} \quad ; \quad x \in R$$

حيث أن : μ ، δ : تمثلان الوسط و الانحراف المعياري على الترتيب و دالة التوزيع له هي :

$$\mathbf{F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(x-u)^2}{2\delta^2}} dx}$$

فإذا كانت x لها دالة التوزيع السابقة فنقول أن x موزعة توزيعا طبيعيا Normally Distributed بالتوقع μ و التباين δ^2 .

و كخلاصة لما سبق: ليكن لدينا متغير عشوائي X خاضع (يتبع) التوزيع الطبيعي فإننا نعبر عنه رياضيا بالكتابة التالية :

$$\mathbf{X \rightarrow N(\mu_x; \delta_x)}$$

حيث دالة الكثافة الاحتمالية تأخذ العلاقة التالية:

$$f(x, \mu_x, \delta_x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-u}{\delta}\right)^2}$$

بحيث :

N : رمز التوزيع الطبيعي.

X : متغير عشوائي معرف على المجال $]-\infty, +\infty[$.

[1] موراي شبيجل و آخرون، **الاحتمالات و الإحصاء**، ملخصات شوم، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر ط 1، 2004 ص 54.

μ_x : متوسط المجتمع.

δ_x : الانحراف المعياري.

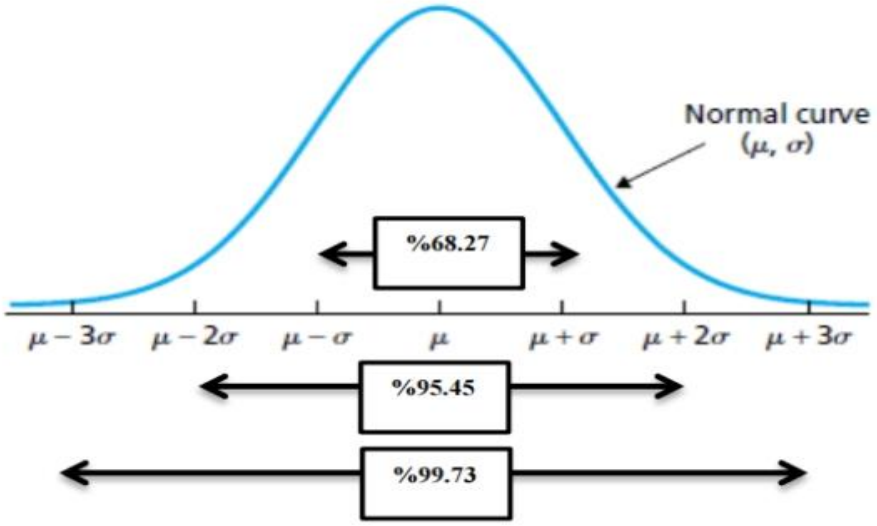
π : مقدار ثابت ($\pi = 3,14$)

e : أساس اللوغاريتم النيبيري $e = 2,781$.

- **التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي و خصائصه :**

يأخذ التمثيل البياني لدالة كثافة احتمال التوزيع الطبيعي شكل جرس متناظر بالنسبة للوسط μ_x ، كما يوضحه الشكل التالي :

التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي.



إن المساحة التي هي تحت هذا المنحنى تساوي الواحد لأنها دالة كثافة احتمالية، كما نلاحظ أن نقاط الانعطاف الأولى لهذه الدالة تساوي $\mu \pm \delta$ و تبلغ المساحة الممتدة بين هاتين النقطتين 68,27 % أما النقطتين $\mu \pm 2\delta$ فإن المساحة بينهما تساوي 95,45 % في حين تساوي المساحة $\mu \pm 3\delta$ مقدار 99,73 %.

من خلال **الشكل رقم: (01)** نستنتج مجموعة من الخصائص يتميز بها التوزيع الطبيعي:

1- منحنى التوزيع الطبيعي دائما موجب.

2- مدى المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي يمتد من $-\infty$ إلى $+\infty$.

3- كل جزء من المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تمثل احتمالا معين، و بما أن مجموع الاحتمالات لأي توزيع احتمالي يساوي الواحد، فإن المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي الواحد (أي 100%)، أي أن تكامل دالة الكثافة على مجال التعريف يساوي الواحد:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

4- منحنى التوزيع الطبيعي متناظر (متماثل) بالنسبة للوسط μ.

- **التوزيع الطبيعي المعياري و حساب الاحتمال:**

إذا اعتبرنا Z متغيرا عشوائيا يمثل العلاقة التالية:

$$Z = \frac{x-u}{\delta}$$

فإنها تسمى بالمتغير القياسي التابع للمتغير العشوائي X، و القيمة المتوقعة للمتغير Z هي الصفر بانحراف معياري الوحدة، و في هذه الحالة تكون دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z عندما يكون $\mu = 0$ ، $\delta^2 = 1$ كالتالي:

$$f(z) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z}{2}^2}$$

و تمثل دالة كثافة الاحتمال المعيارية، و دالة التوزيع التي تتبعها هي:

$$F(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{2} e^{\frac{-u^2}{2}} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{2} e^{\frac{-u^2}{2}} du.$$

و تسمى أحيانا القيمة Z للمتغير المعياري Z بالدرجة المعيارية: **Standard Score** .

إن حساب احتمال أن يقع المتغير العشوائي X ضمن مجال معين $[a, b]$ يكون من خلال حساب نتيجة تكامل دالة كثافة التوزيع الطبيعي ضمن هذا المجال أي:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} \frac{1}{\delta_x\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(\frac{x-2}{\delta})^2}$$

و نظرا لصعوبة حساب هذا التكامل تتم الاستعانة بتوزيع آخر كما ذكرنا سابقا و هو **التوزيع الطبيعي المعياري**، حيث يكون فيه $\mu_x = 0$ ، $\delta_x = 1$ و عليه فإن حساب الاحتمال يكون من خلال الخطوتين التاليتين:

1- تعويض المتغير X الذي يتبع التوزيع الطبيعي $x \to N(u_x, \delta x)$ بمتغير آخر Z_i بحيث :

$$\boldsymbol{Z_i = \frac{x-u_x}{\delta_x} \to N(0\,,1)}$$

فمثلا إذا كان المطلوب حساب $P(X \leq x)$ فإن :

$$P(X \leq x) = \frac{x-u_x}{\delta_x} \leq \frac{x-u_x}{\delta_x}$$

$$P(z_i \leq a)$$

$$= \phi(a)$$

2- نستعين بجدول التوزيع الطبيعي(أنظر الملحق 01) لاستخراج قيمة الاحتمال $\phi(a)$، أي القيمة الموافقة للقيمة $Z = a$ المتوصل إليها في الخطوة الأولى.

و للتوضيح أكثر نستعين بالمثال التالي:

مثال: ليكن X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي حيث $X \to N(\,10\,,25)$ أحسب الاحتمال التالي

$P(X \leq 16{,}15)$.

الحل:

لحساب الاحتمال سنقوم بتحويل المتغير العشوائي x من **التوزيع الطبيعي** إلى **التوزيع الطبيعي المعياري** و ذلك بوضع:

$$\boldsymbol{Z = \frac{x-u}{\delta} = \frac{x-10}{15}}$$

حيث : $u = 10$ ، $\delta = \sqrt{25}$

$$P(X \leq 16{,}15) = P\left(\frac{x-10}{5} \leq \frac{16{,}15-10}{5}\right) = P(z \leq 1{,}23) = \Phi(1{,}2{,}3)$$

بعد هذه المرحلة ننتقل إلى استخدام الجدول الطبيعي المعياري من خلال البحث عن القيمة 1,23 و تكون طريقة البحث كالتالي :

- نكتب القيمة 1,23 كالتالي 0,03+1,2=1,23 لأن جدول التوزيع الطبيعي المعياري يتكون من أسطر و أعمدة، العمود الأول يحتوي على رقم واحد بعد الفاصلة، و السطر يحتوي على رقمين بعد الفاصلة.
- في حالة هذا المثال سنبحث في العمود الأول على القمة 1,2 و في السطر نبحث عن القيمة 0,03.
- بعد تحديد القيمتين نبحث عن نقطة التقاطع بينهما، و التي ستعطي لنا الاحتمال المساوي للقيمة 0,8970 مثلما هو موضح في جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

	Second decimal place in z									
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

ملاحظات هامة جدا:

- لا يمكن حساب الاحتمال لمتغير خاضع للتوزيع الطبيعي من اجل قيمة معينة مثلا $P(X = a)$ لأن هذا الاحتمال يساوي الصفر $P(X = a) = 0$.
- يمكن استخدام أشكال مختلفة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري لتسهيل استخراج القيم الاحتمالية وقيم Z

حيث يمكن فقط حساب الاحتمال من أجل قيم تراكمية أي أن يكون **المتغير من مجال معين** و بالتالي فكل الاحتمالات الخاصة بالتوزيع الطبيعي تكتب في شكل متراجحات مثلا:

$P(a \leq X \leq b)$, $P(X \geq a)$,$P(X \leq a)$

- بما أن $P(X \leq a) = 0$ فإن $P(X \leq a)$ =$P(X < a)$ أي أن إشارة (تساوي) لا تؤثر على نتيجة الاحتمال.

- $P(Z \geq a) = 1 - (Z \leq a) = 1 - \phi(a)$
- $P(Z \leq -a) = 1 - (Z \leq a) = 1 - \phi(a)$
- $P(Z \geq -a) = P(Z \leq a) = \phi(a)$
- $P(a \leq Z \leq a) = 2 \,.\, \phi(a) - 1$

مثال:

ليكن X متغير عشوائي خاضع للتوزيع الطبيعي بحيث $X \to N(u_x = 45 \,, \delta_x = 10)$

أحسب الاحتمالات التالية: $P(X \leq 50{,}8)$, $P(X < 23)$, $P(30 \leq X \leq 55)$

الحل:

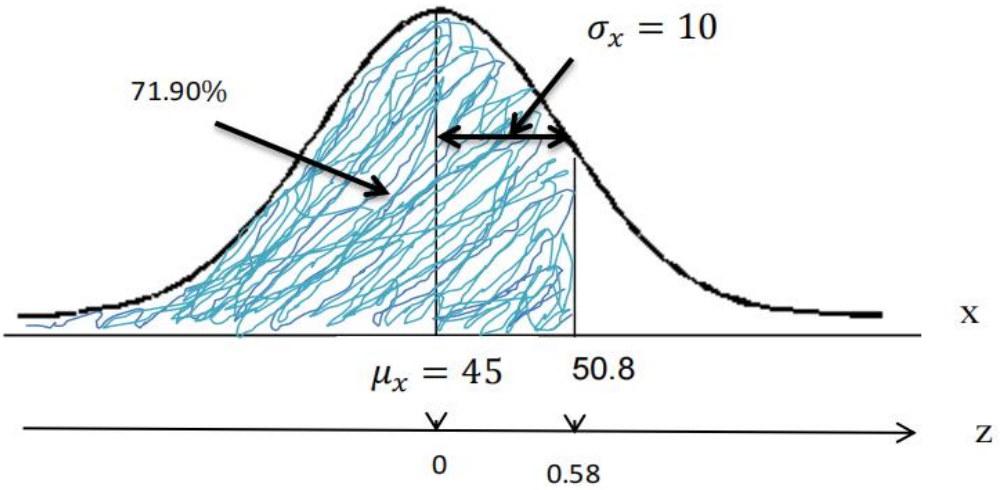
$$\boldsymbol{P(X \leq 50{,}8)} = \mathrm{P}\left(\frac{x-u}{\delta} \leq \frac{50{,}8-45}{10}\right) .$$

$$= P(z \leq 0{,}85)$$

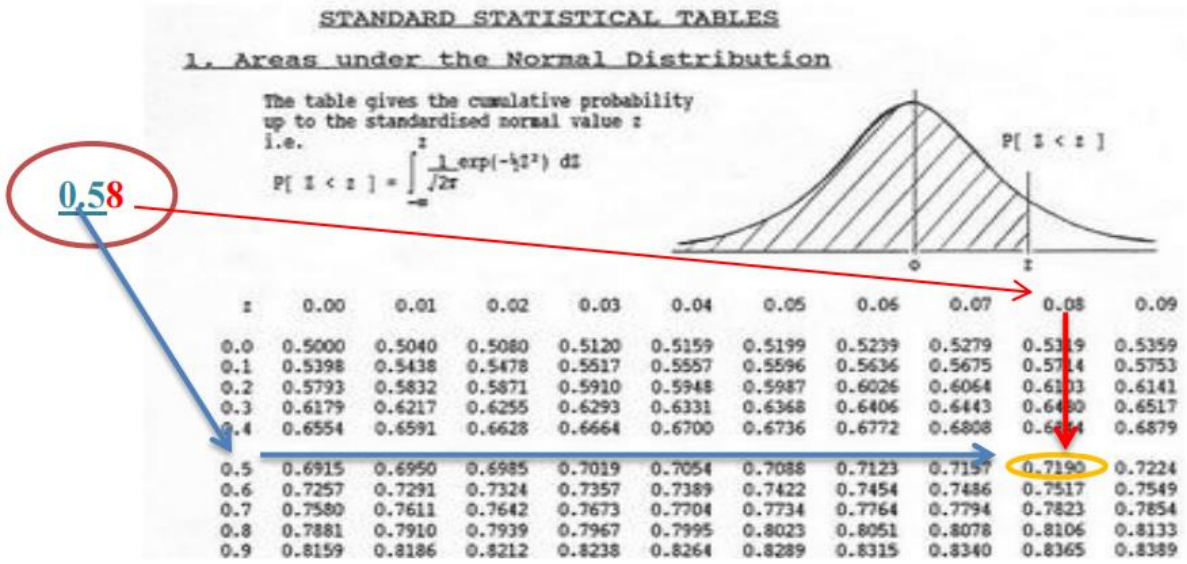
$$= \phi(0{,}58) = 0{,}7190$$

$$P(X \leq 50{,}8) = 71{,}90\%$$

يمكن كتابة $z_{0{,}7190} = 0{,}58$ و تقرأ : قيمة z الموافقة للاحتمال $0{,}7190$ تساوي $0{,}58$



و قد تم الحصول على الاحتمال $0{,}7190$ من جدول التوزيع الطبيعي كما يلي:



STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z i.e. $P[\Sigma < z] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}\Sigma^2)\, d\Sigma$

0.58

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389

. $\boldsymbol{P(X > 23) = 1 - \ P(X \leq 23)}$

$= 1 - P(\frac{x-u}{\delta} \leq \frac{23-45}{10})$

$= \ 1 - P(z_i \leq -2{,}2)$

$= 1 - \phi(-2{,}2)$

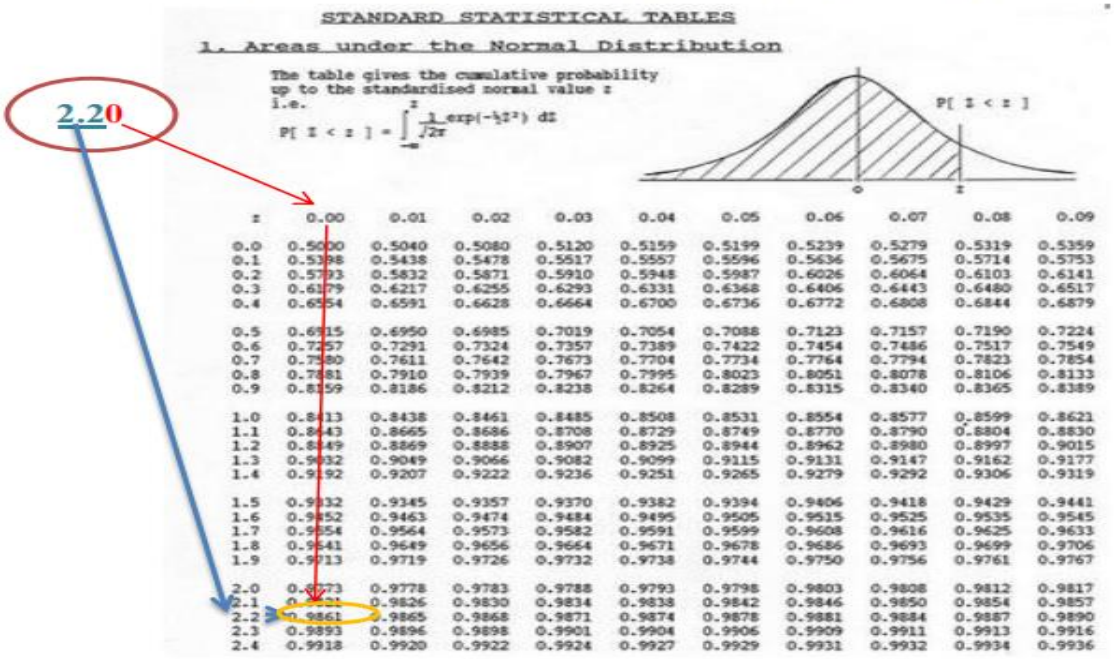
$= 1 - [1 - \phi(-2{,}2)]$

$= 1 - [1 - 0{,}9861]$

$= 0{,}9861$

$= 98{,}61.$

نستخرج الاحتمال الموافقة لقيمة $(z = 2.20)$ من الجدول كما يلي:



STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

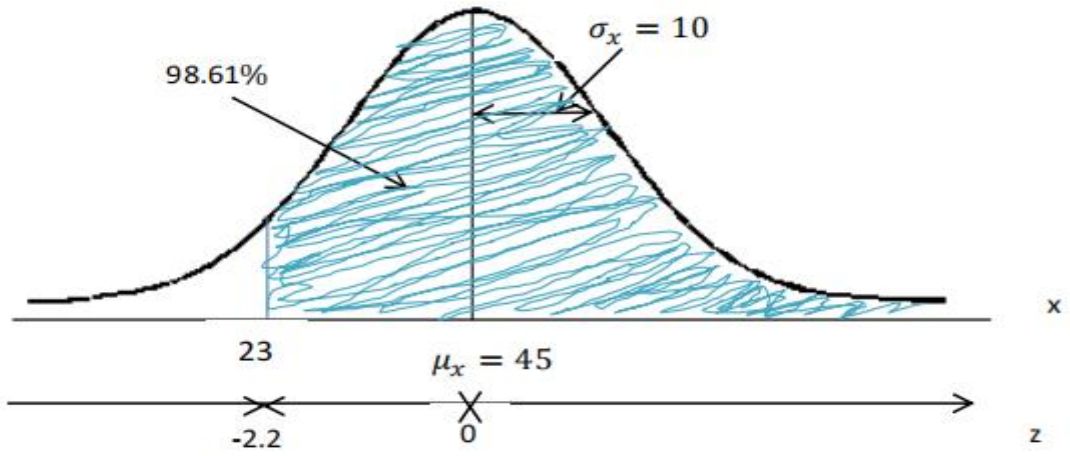
The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z i.e. $P[\Sigma < z] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}\Sigma^2)\, d\Sigma$

2.20

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936

.

ويكون التمثيل البياني لهذا الاحتمال كالتالي:



$$\boldsymbol{.P(30 \le X \le 55) = P(\frac{30-45}{10} \le \frac{X-u}{\delta} \le \frac{55-45}{10})}$$

$$= P(-1{,}5 \le z_i \le 1).$$

$$= \phi(1) - \phi(-1{,}5)$$

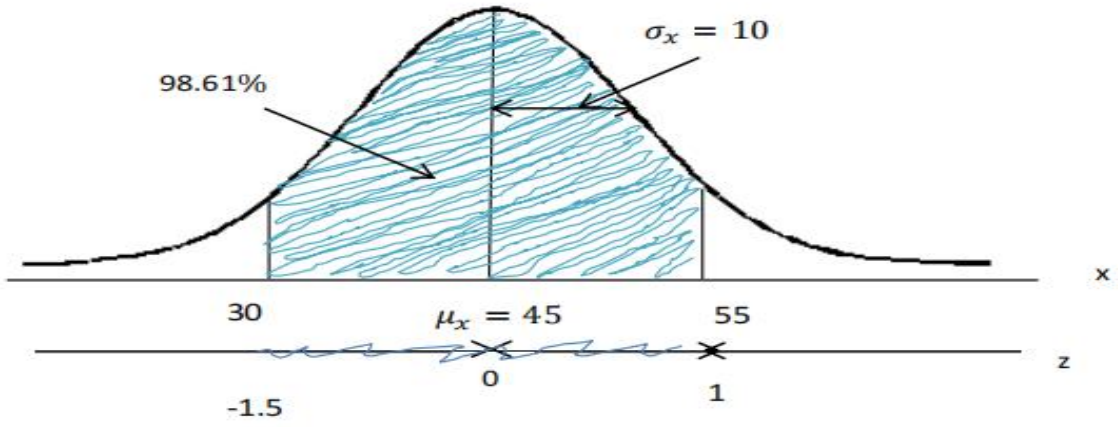
$$= \phi(1) - [\phi(1{,}5)]$$

$$= 0{,}8413 - [1 - 0{,}9332]$$

$$= 0{,}7745$$

$$\boldsymbol{P(30 \le X \le 55) = 77{,}45\%}$$

و يكون التمثيل البياني كالتالي:



تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

إذا كانت درجة الحرارة تخضع للتوزيع الطبيعي بتوقع 20 دم و انحراف معياري 3,33 د م، أوجد احتمال أن تتراوح درجة الحرارة بين 2,11 د م و 26,66 د م.

الحل :

في هذه الحالة يجب تحويل وحدات **التوزيع الطبيعي**(20 , 3,33) N إلى وحدات **التوزيع الطبيعي القياسي** N (0 , 1) وفق العلاقة:

$$\mathbf{Z = \frac{x-u}{\delta}}$$

أي أن :

$$\mathbf{.P(21,11 \leq X \leq 26,66) = P\left(\frac{21,11-20}{3,33} \leq \frac{x-u}{\delta} \leq \frac{26,33-20}{3,33}\right)}$$

$$P(0,33 \leq z \leq 2) = P(0 \leq z \leq 2) - P(0 \leq z \leq 0,33)$$

$$= 0,4772 - 0,1293 = 0,3479$$

التمرين الثاني:

لنعتبر $X \rightarrow N(151;225)$ أوجد الاحتمالات التالية:

$$P(X \geq 30);\ P(X \leq 120);\ P(X \leq 155);\ P(136 \leq X \leq 170)$$

الحل:

لدينا : $\boldsymbol{\mu = 151}$, $\boldsymbol{\delta = \sqrt{225}}$

نضع:

$$\boldsymbol{Z = \frac{x-u}{\delta} = \frac{x-151}{15}}$$

$$\mathbf{.\ P(X \leq 155) = P\left(\frac{x-151}{15} \leq \frac{155-151}{15}\right) = P(Z \leq 0,26)}$$

$$P(X \leq 155) = \phi(0,26)$$

نبحث عن هذه القيمة في جدول التوزيع **الطبيعي المعياري** من خلال نقطة التقاطع بين بين 0,2 و 0,06 لنجد أن الاحتمال يساوي:

$$\boldsymbol{P(X \leq 155) = \phi(0,26) = 0,6026}$$

$$\boldsymbol{.P(X \leq 120)} = P\left(Z \leq \frac{120-151}{15}\right) = \phi(-2,26) = 1 - \phi(2,26)$$

$$P(X \leq 120) = 1 - 0,9803 = 0,0197$$

$$\boldsymbol{.P(X \geq 30)} = P\left(Z \geq \frac{130-151}{15}\right) = P(Z \geq -1,4)$$

$$P(X \geq 30) = P(Z \leq 1,4) = \phi(1,4) = 0,9192$$

$$\boldsymbol{.P(136 \leq X \leq 170)} = P\left(\frac{136-151}{15} \leq z \leq \frac{170-151}{15}\right)$$

$$P(136 \leq X \leq 170) = P(-1 \leq z \leq 1)$$

$$P(136 \leq X \leq 170) = 2.\phi(1) - 1 = 2(0,8413) - 1 = 0,6828$$

التمرين الثالث:

إذا كان المتغير العشوائي X الذي يمثل الطول في أحد المجتمعات البشرية يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 165 سم وانحراف معياري 5 سم.

المطلوب:

1. أوجد القيمة المعيارية للقيمة $x = 172$.
2. أوجد القيمة x إذا كانت القيمة المعيارية هي $Z = -0,52$.
3. احسب الاحتمالات التالية:

- $P(180 \leq X \leq 200)$.
- $P(X \geq 170)$.

الحل:

X : يتبع التوزيع الطبيعي ثوابته $\boldsymbol{\delta_{x=}\ 5}$, $\boldsymbol{\mu_{x=}\ 165}$.

1. القيمة المعيارية للقيمة $X = 172$:

$$Z = \frac{x-u}{\delta} = \frac{172-165}{5} = 1{,}4$$

2. القيمة إذا كانت القيمة المعيارية هي: $Z = -0{,}52$

$$Z = \frac{x-u}{\delta} \rightarrow x - u_x = z.\delta_x \rightarrow x = 5 - (0{,}52) + 165$$

$$X = 162{,}5$$

3. حساب الاحتمالات التالية:

$$.\boldsymbol{P(175 \leq X \leq 180)} = P\left(\frac{175-u_x}{\delta_x} \leq \frac{x-u_x}{\delta_x} \leq \frac{180-u_x}{\delta_x}\right) = P\left(\frac{175-165}{5} \leq Z \leq \frac{180-165}{5}\right)$$

$$P(2 \leq z \leq 3) = P(z \leq 3) - p(z \leq 2) = \phi(3) - = \phi(2) = 0{,}9987 - 0{,}9977$$

$$\boldsymbol{P(175 \leq X \leq 180) = 0{,}0215}.$$

$$.\boldsymbol{P(X \geq 170)} = P\left(\frac{x-u}{\delta_x} \geq \frac{170-165}{\delta_x}\right) = P(z \geq 1) = 1 - P(z \leq 1)$$

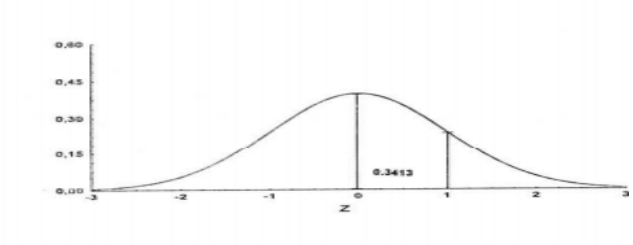
$$=1 - \phi(1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$$

التمرين الرابع: من خلال الاستعانة بجدول التوزيع الطبيعي المعياري أوجد ما يلي :

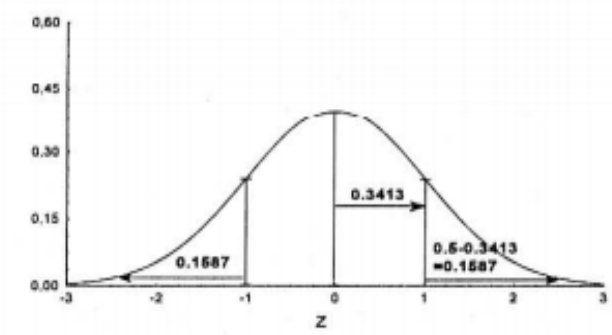
- $P(0 < Z < 1)$.
- $P(Z \geq 1)$
- $P(-1 \leq Z \leq 1)$
- $P(-2 \leq Z \leq 1)$
- $P(Z \leq -1)$
- $P(0{,}65 \leq Z \leq 1{,}26)$
- $P(-0{,}65 \leq Z \leq 0)$

الحل:

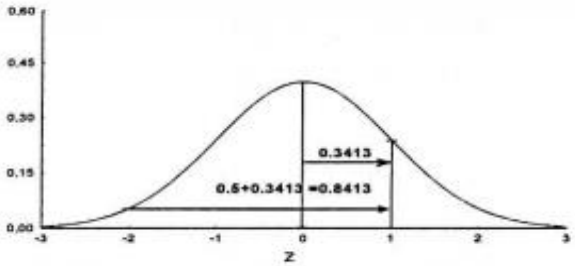
$$\boldsymbol{P(0 < Z < 1)} = \phi(1) - \phi(0) = 0{,}3413$$



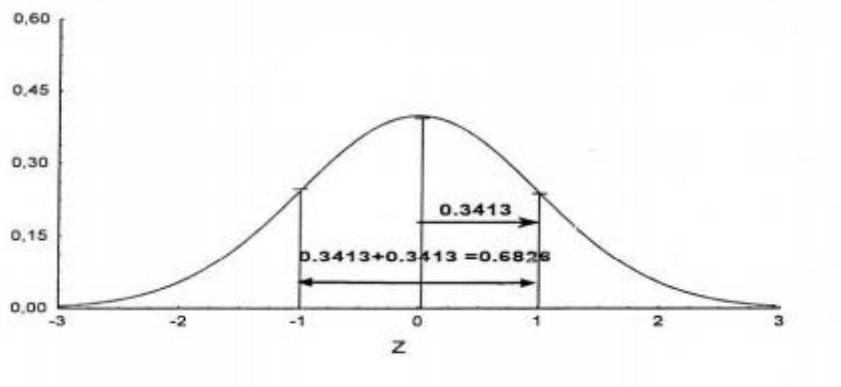
$$\boldsymbol{P(Z \geq 1)} = 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 1) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587.$$



$$\boldsymbol{P(Z \leq 1)} = 0{,}5 + P(0 \leq Z \leq 1) = 0{,}5 + 0{,}3413 = 0{,}8413.$$

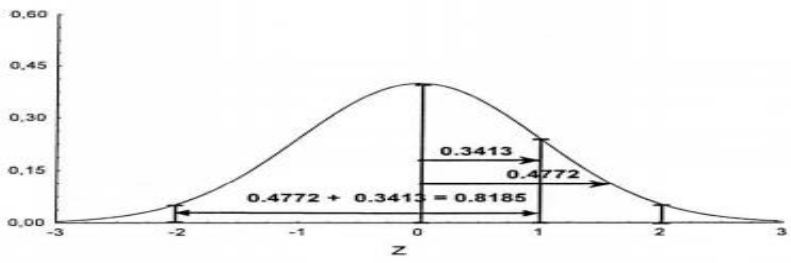


$$\boldsymbol{P(-1 \leq Z \leq 1)} = 2P(0 \leq Z \leq 1) = 2(0{,}3413) = 0{,}6862$$

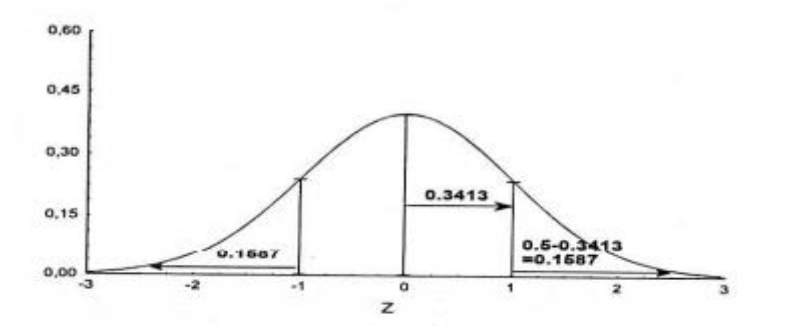


$$\boldsymbol{P(-2 \leq Z \leq 1)} = P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

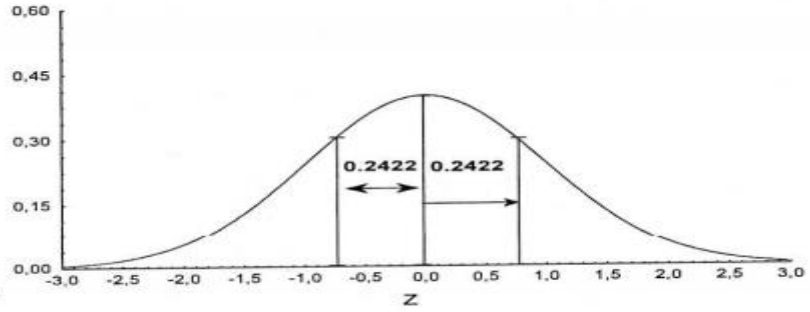
$$= 0{,}4772 - 0{,}4251 = 0{,}0521$$



$$\boldsymbol{P(Z \leq -1)} = P(Z \geq 1) = 0{,}5 - P(0 \leq Z \leq 1) = 0{,}5 - 0{,}3413 = 0{,}1587$$



$\boldsymbol{P(-0,65 \leq Z \leq 0)} = P(0 \leq Z \leq 0{,}65) = 0{,}2422.$



التمرين الخامس:

إذا كان من المعروف أن توزيع عمر المصابيح الكهربائية يتبع التوزيع الطبيعي حيث: $\mu = 100\ h$ و$\delta = 8h$، ما احتمال أن مصباحا اختير عشوائيا له عمر بين 110 و 120 ساعات احتراق؟

الحل:

المطلوب إيجاد $\boldsymbol{P(110 < X < 120)}$ حيث تشير X إلى زمن الإضاءة مقيسا بالساعات بمعلومية

$\mu = 100\ h$ و $\delta = 8h$

نضع:

$$Z = \frac{110-100}{8} = 1{,}25 \quad ; \quad Z = \frac{120-100}{8} = 2{,}50$$

$\boldsymbol{P(1,25 \leq X \leq 2,50)} = \phi(2{,}50) - \phi(1{,}25)$

$= 0{,}4938 - 0{,}3944$

$\boldsymbol{P(110 \leq X \leq 120) = 0,994}$

التمرين السادس:

افترض أن دخول الأسر تتبع التوزيع الطبيعي $\mu = 160000$ و $\delta = 2000D$

ما احتمال أن يكون دخل أسرة اختيرت عشوائيا:

أ) بين 15000 دينار و 18000 دينار؟

ب) أقل من 15000 دينار؟

ت) أعلى من 18000 دينار؟

ث) أعلى من 20000 دينار؟

الحل:

أ) أحسب احتمال $P(15000 \leq X \leq 18000)$

$$\boldsymbol{P(15000 \leq X \leq 18000)} = P\left(\frac{15000-16000}{2000} \leq \frac{\mu - x}{\delta} \leq \frac{18000-16000}{2000}\right)$$

$$= \phi(1) - \phi(-0{,}5)$$

$$= \phi(1) - [1 - \phi(0{,}5)]$$

$$= 0{,}5328$$

ب) حساب احتمال $P(X \leq 15000)$

$$\boldsymbol{P(X \leq 15000)} = p\left(Z \leq \frac{15000-16000}{2000}\right)$$

$$= P(Z \leq -0{,}5) = 0{,}3085$$

ج) حساب احتمال $p(X \geq 18000)$

$$\boldsymbol{P(X \geq 18000)} = P\left(Z \geq \frac{18000-16000}{2000}\right)$$

$$= P(Z \geq 1) = 1 - \phi(1) = 0{,}1587$$

$$P(X > 20000) = p\left(Z \geq \frac{20000-16000}{2000}\right)$$

$$= p\left(Z > \frac{4000}{2000}\right)$$

$$\boldsymbol{P(Z > 2)} = 1 - p(z \leq 2)$$

$= 1 - \phi(2) = 0{,}0228$

التمرين السابع:

خلال سنة 2024 قدرت النفقات الشهرية المتوسطة لطالب جامعي بـ 635 وحدة نقدية بانحراف معياري يقدر بـ 55 وحدة نقدية (النفقات الشهرية تتبع التوزيع الطبيعي).

أ- ما هو احتمال أن تكون النفقات الشهرية أقل من 580 وحدة نقدية؟

ب-ما هو احتمال أن تكون النفقات الشهرية أكبر من 720 وحدة نقدية؟

ت-ما هو احتمال أن تكون النفقات الشهرية محصورة بين 580 و 700 وحدة نقدية؟

❖ بناءً على المعطيات السابقة قررت وزارة التعليم العالي رفع منحة الطالب خلال السنة الجامعية المقبلة إلى 596,50 وحدة نقدية.

أ- ما هو احتمال أن تغطي المنحة الجامعية النفقات الشهرية للطالب؟

ب- ما هو مبلغ المنحة الجامعية التي تسمح بتغطية النفقات الشهرية باحتمال يساوي 95% ؟

الحل:

لدينا:

X : متغير عشوائي يمثل النفقات الشهرية.

$X \to N(635\,,(55)^2)$

نضع : $\boldsymbol{Z = \frac{x-\mu}{\delta}}$

أ- احتمال أن تكون النفقات الشهرية أقل من 525 وحدة نقدية:

$\boldsymbol{P(X < 580)} = p\left(Z < \frac{580-635}{55}\right)$

$= P(Z < -1)$

$= P(Z > 1) = 1 - p(z < 1)$

$= 1 - \phi(1)$

$= 1 - 0{,}8413$

$P(X < 580) = 0{,}1587$

ب–احتمال أن تكون النفقات الشهرية أكبر من 700 وحدة نقدية :

$$\boldsymbol{P(X > 700)} = P\left(\frac{x-u}{\delta} > \frac{700-u}{\delta}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{700-635}{55}\right)$$

$$= P(Z > 1{,}8) = 1 - p(z < 1{,}8)$$

$$= 1 - \phi(1{,}8)$$

$$= 1 - 0{,}8810$$

$$P(X > 700) = 0{,}119$$

ت–احتمال أن تكون النفقات الشهرية محصورة بين 580 وحدة نقدية و 700 وحدة نقدية:

$$\boldsymbol{P(580 \leq X \leq 700)} = P\left(\frac{580-635}{55} \leq Z \leq \frac{700-635}{55}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1{,}8)$$

$$= P(Z \leq 1{,}8) - P(Z \leq +1)$$

$$= \phi(1{,}8) - \phi(1)$$

$$= 0{,}8810 - 0{,}1587$$

$$P(580 \leq X \leq 700) = 0{,}7223$$

ث–احتمال أن تغطي المنحة الجامعية النفقات الشهرية للطالب:

$$\boldsymbol{P(X \leq 596{,}60)} = P\left(Z \leq \frac{596{,}50-635}{55}\right)$$

$$= p(Z \leq -0{,}7)$$

$$= p(Z > 0{,}7)$$

$$= 1 - p(Z \leq 0{,}7)$$

$$= 1 - \phi(0{,}7)$$

$$1 - 0{,}7580$$

$$P(X \leq 596{,}60) = 0{,}242$$

❖ مبلغ المنحة الجامعية الت تسمح بتغطية النفقات الشهرية باحتمال 95%

$$\boldsymbol{P(X \leq a) = 0{,}95}$$

$$p\left(Z \leq \frac{a-635}{55}\right) = 0{,}95$$

$$\phi\left(\frac{a-635}{55}\right) = 0{,}95$$

نبحث عن أقرب قيمة لها داخل جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجدها عند:

$\frac{1,64+1,65}{2} = 1,645$

و عليه:

$$\frac{a-635}{55} = 1,645$$

$$\rightarrow a = 55(1,465) + 635$$

$$\rightarrow a = 725,47$$

و منه: مبلغ المنحة الجامعية التي تسمح بتغطية النفقات الشهرية هو 725,47 وحدة نقدية و ذلك باحتمال قدره: 95%.

التمرين الثامن:

إذا كانت درجات الاختبار النهائي لطلاب مقرر الإحصاء تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = 40$ و انحراف معياري $\delta = 3$، اختير طالب من الذين تقدموا للاختبار بشكل عشوائي، فما هو احتمال:

أ- أن تكون درجته أقل من 38 درجة؟

ب-أن تكون درجته أكبر من 45 درجة؟

ت-أن تكون درجته ما بين 38 و 45 درجة؟

الحل:

من أجل ذلك سنأخذ متغيراً X عشوائيا راصدا لدرجة الطالب، فعندئذ سيكون لهذا المتغير العشوائي توزيعاً طبيعي $N(40,3)$ وبالتالي فمن أجل الطلب:

أ- **يكون الاحتمال المطلوب هو $P(X < 38)$ ، حيث لدينا:**

$$P(X < 38) = P\left(\frac{x-40}{30} < \frac{38-40}{3}\right) = P(Z < -0,67) = 0,2514$$

ب-يكون الاحتمال المطلوب هو $P(X > 45)$ وحيث لدينا :

$$P(X > 45) = 1 - P(X \leq 45) = 1 - P(\frac{x-40}{3} \leq \frac{45-40}{3})$$

$$= 1 - P(Z \leq 1,67) = 1 - P(Z < 1,67) = 1 - \phi(1,67)$$

$= 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$

التمرين التاسع:

إذا كانت درجات الحرارة (مقدرة بالدرجات المئوية) لعدة أصناف من المياه المعدنية لها توزيع طبيعي بمتوسط $\mu = 0$ وانحراف معياري $\delta = 2$ درجة مئوية، و اختير أحد هذه الأصناف عشوائياً، فما هو احتمال:

أ- أن تكون درجة تجمده أعلى من الصفر؟

ب- أن تكون درجة تجمده أدنى من درجة مئوية؟

ت- أن تكون درجة تجمده ما بين 1 و -1 درجة مئوية؟

الحل:

من أجل ذلك سنأخذ X متغيراً عشوائياً راصدا لدرجة تجمّد الماء الذي تم اختياره، فعندئذ سيكون لهذا المتغير العشوائي توزيع طبيعي $X \to N(0,2)$ وبالتالي من أجل المطلوب:

أ- يكون الاحتمال المطلوب هو $P(X > 0)$ حيث لدينا:

$$P(X > 0) = 1 - P\left(\frac{x-0}{2} > \frac{0-0}{2}\right)$$

$$= 1 - P(Z < 0) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

علما أننا وضعنا $\boldsymbol{Z = \frac{x-u}{\delta}}$

ب- يكون الاحتمال المطلوب هو $P(X < -2)$ حيث لدينا:

$$P(X < -2) = P\left(\frac{x-u}{\delta} > \frac{-2-0}{2}\right)$$

$$P(Z < -1) = 0{,}1587$$

ت- يكون الاحتمال المطلب هو $P(-1 \le X \le 1)$ حيث لدينا:

$$P(-1 \le X \le 1) = P(X < 1) - P(X \le -1) = P\left(\frac{X}{2} \le \frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{X}{2} \le \frac{-1}{2}\right)$$

$$= P(Z < 0{,}5) - P(Z \le -0{,}5)$$

$$= 0{,}6915 - 0{,}3085 = 0{,}3830$$

التمرين العاشر:

ليكن X متغيرا عشوائيا طبيعيا بمتوسط $\mu = -1$ و انحراف معياري $\delta = 0,5$ فإذا كان من أجل قيمة X من R لدينا $P(X < x) = 0,9901$ فما هي قيمة x ؟

الحل:

من أجل ذلك نقوم باستعيار المتغير العشوائي المعطى و من ثم استخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري لتعيين قيمة X المطلوبة، حيث لدينا:

$$P(X < x) = P\left(\frac{x-(-1)}{0,5} < \frac{x-(-1)}{0,5}\right) = p(Z < z) = 0,9901$$

و من جدول التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن:

$$\left(\frac{X-(-1)}{0,5}\right) = 2,33$$

$$\Rightarrow (X+1) = (0,5)(2,33)$$

$$\Rightarrow X + 1 = 1,165$$

$$\Rightarrow X = 1,165 - 1$$

$$\Rightarrow X = 0,165$$

2- التوزيع المنتظم Uniform distribution:

يعد التوزيع المنتظم أحد أنواع التوزيعات الاحتمالية الهامة في علم الإحصاء والاحتمال، يتميز هذا التوزيع بتوزيع الاحتمالات بشكل متساوٍ على مدى محدد من القيم. ببساطة يعكس التوزيع المنتظم فرصا متساوية لحدوث أي قيمة داخل النطاق المحدد، حيث يكون الانحراف بين القيم صفرا .

يستخدم التوزيع المنتظم المستمر إذا كان المتغير العشوائي معرفا على مجال محدد $[a, b]$ و دالة كثافته ثابتة على هذا المجال (أي أن الاحتمالات متساوية).

2-1- استخدام التوزيع المنتظم المستمر:

يستخدم التوزيع المنتظم بشكل فعال في دراسة العديد من السيناريوهات اللوجستية و التشغيلية، مثل وصول الشاحنات إلى محطات التفريغ، وصول البواخر إلى الموانئ ...الخ.

- **جدول تفريغ الحمولة:** يتم استخدام التوزيع المنتظم لفهم فرص وقت تفريغ حمولة البواخر في الموانئ، من خلال تحليل توزيع المنتظم للأوقات، يمكن أن يساعد القرار في تحديد جداول زمنية فعالة لتفريغ الحمولة.
- **تقدير أوقات المغادرة:** يمكن أيضا استخدام التوزيع المنتظم لتقدير فرص أوقات مغادرة البواخر أو الشاحنات من الموانئ أو محطات التفريغ .[1]
- **وقت وصول الشاحنات إلى محطات التفريغ:** بالمثل ، يستخدم التوزيع المنتظم لتحليل وقت وصول الشاحنات إلى محطات التفريغ، على أن يكون هذا ذا أهمية كبيرة في تخطيط عمليات اللوجستيات وضمان استمرارية التدفقات العملية.

2-2- دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المنتظم المستمر (القانون الاحتمالي):

ليكن لدينا متغيرا عشوائيا x_i خاضعا (يتبع) التوزيع المنتظم المستمر فإننا نعبر عن ذلك رياضيا بالكتابة التالية:

$$\boldsymbol{X \rightarrow \cup\,(a,b)}$$

أما **دالة الكثافة الاحتمالية** له، فهي تأخذ شكل العلاقة الرياضية التالية:

$$\boldsymbol{f(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & s_i: a \leq x \leq b \\ 0, & s_i: non \end{cases}}$$

بحيث:

X : متغير عشوائي معرف على المجال $[a, b]$.

a : الحد الأدنى للمجال

b : الحد الأعلى للمجال

[1] حسين ياسين طعمة، ألمان حسين حنوش، **الإحصاء الاستدلالي** الطبعة الثانية، دار صفاء للنشر و التوزيع، عمان 2015 ص 150.

حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة لا بد من تحقق شرطين:

- **الشرط الأول:** لا بد أن تكون $\boldsymbol{f(x) \geq 0}$ و هذا الشرط محقق كون $a < b$ و بالتالي فإن الفرق بينهما دوما موجب.
- **الشرط الثاني:** و هو أن يكون $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1}$ ، و هو ما يقابل في المتغير العشوائي المنقطع بمجموع الاحتمالات لا بد أن يساوي الواحد.
- يمكن التحقق من هذا الشرط كما يلي:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{+\infty} f(x)dx$$

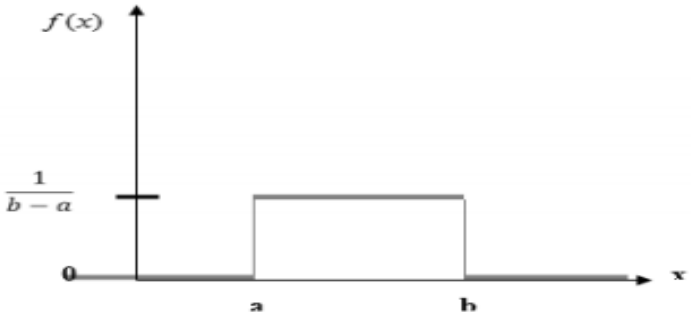
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0 + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dx + 0 = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} dx$$

$$= \frac{1}{b-a} = [x]_a^b$$

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{b-a}(b-a) = 1}$$

و منه : $\boldsymbol{f(x)}$ **هي دالة كثافة احتمالية.**

إن التمثيل البياني لدالة الكثافة يكون وفق الشكل التالي:



تأخذ **دالة التوزيع** الشكل التالي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & s_i:\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & s_i:\ a \leq x \leq b \\ 1 & s_i:\ x \geq b \end{cases}$$

2-3 – حساب الاحتمالات:

إذا كان المتغير العشوائي يتبع التوزيع المنتظم المستمر فإن حساب الاحتمالات يكون كالتالي:

$$P(X < x) = F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$$

$$= 1 - F(x)$$

$$P(X > x) = 1 - \left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = f(x_2) - f(x_1)$$

$$= \left(\frac{x_2-a}{b-a}\right) - \left(\frac{x_1-a}{b-a}\right)$$

$$= \frac{x_2-a-x_1+a}{b-a}$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \frac{x_2-x_1}{b-a}$$

ملاحظة: بالنسبة للاحتمال $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ يجب أن يكون المجال $[x_1, x_2]$ ينتمي إلى المجال $[a, b]$

2-4-القيم العددية المميزة: [1]

أ- التوقع الرياضي:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx = 0 + \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x.dx$$

$$E(X) = \frac{1}{b-a} = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^2-a^2}{2}\right] = \frac{1}{b-a}\left[\frac{(b-a)(b+a)}{2}\right]$$

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

ب- التباين:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2.dx$$

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b^3-a^3}{3}\right]$$

x

$$E(X^2) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{(b-a)(b^2)}{2}\right] = \frac{b^2+a+a^2}{3}$$

$$V(X) = \frac{b^2+ba+a^2}{3} - \frac{b^2+2ba+a^2}{4}$$

$$V(X) = \frac{4b^2+4a+4a^2-3a^2-6ba-3b^2}{12} = \frac{a^2-2ba+b^2}{12}$$

$$\boldsymbol{V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}}$$

ت- الانحراف المعياري:

$$\boldsymbol{\delta(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}}$$

مثال:

ليكن سعر أحد المنتجات ينتمي إلى المجال [210,250] وحدة نقدية:

أ- أحسب احتمال أن يكون السعر أقل من 240.

ب- أحسب احتمال أن يكون السعر أكبر من 230.

ت- أحسب احتمال ان يكون السعر محصور بين 230 و 240.

ث- أحسب السعر المتوقع و التباين و الانحراف المعياري له.

الحل:

X : متغير عشوائي يمثل سعر منتج ما $X\epsilon[210,250]$

$$\boldsymbol{X \rightarrow \cup\,(210,250)}$$

❖ حساب احتمال أن يكون السعر اقل من 240:

$$P(X < 240) = F(240) = \frac{240-210}{250-210}$$

$$P(X < 240) = 0{,}75$$

❖ حساب احتمال أن يكون السعر أكبر من 230:

$$P(X > 230) = 1 - P(X \leq 230)$$

$$= 1 - F(230)$$

$= 1 - \left(\frac{230-210}{250-210}\right) = 0.25$

❖ حساب احتمال أن يكون السعر محصور بين 230 و 240:

$$P(230 \leq X \leq 240) = f(240) - f(230)$$

$$= \frac{240-230}{250-210}$$

$$P(230 \leq X \leq 240) = 0{,}25$$

❖ حساب التوقع ، التباين و الانحراف المعياري للسعر:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \Rightarrow E(X) = \frac{210+250}{2} = 230$$

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(250-210)^2}{12} = 133{,}33$$

$$\delta_X = \sqrt{133{,}33} = 11{,}547$$

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

استورد أحد المراكز التجارية 1500 طن بطاطس، ووضعها في مخزن، وقام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة، إذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم، فأوجد الآتي:

أ) دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الفترة الزمنية للبيع؟

ب) بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع، ما هي الكمية الموجودة بالمخزن؟

الحل:

أ) دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن:

نفرض أن المتغير X يعبر عن الفترة الزمنية للبيع مقاسة بالشهر، أي أن $0 < X < 12$، و من ثم تأخذ دالة كثافة الاحتمال المعبرة عن الزمن الصورة الآتية :

$$\boldsymbol{f(X) = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{12}\ ; 0 < X < 12}$$

ب) حساب الكمية الموجودة بالمخزن بعد سبعة أشهر من بداية البيع:

نفرض أن Q هي كمية البطاطس المستوردة ، تكون الكمية المتبقية بالمخزن بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع هي:

$$Q \times P(X > 7) = Q \times (1 - F(7) = 1500\left(1 - \frac{7-0}{12-0}\right) = 625 \text{ Ton}$$

التمرين الثاني:

تنطلق عبارة لنقل المسافرين بين ضفتي نهر البوسفور من الموقف أ، كل 50 دقيقة بشكل منتظم كل أيام الأسبوع، و ذلك ابتداءً من الساعة السادسة صباحاً إلى الساعة الثامنة مساءً.

أ) أوجد دالة الكثافة الاحتمالية التي تعبر عن زمن بقاء العبارة في موقفها؟ واكتب دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي.

ب) ما هو احتمال أن تنطلق العبارة خلال 10 دقائق الأخيرة على الأقل؟

ت) ما هو احتمال أن تنطلق العبارة خلال 15 دقيقة الأخيرة ؟

ث) احسب القيمة المتوقعة والتباين لانطلاق العبارة من الموقف أ؟

الحل :

نعرف زمن بقاء العبارة في موقفها بالمتغير العشوائي X و منه يصبح لدينا:

أ- دالة الكثافة الاحتمالية التي تعبر عن زمن بقاء العبارة في موقفها هي:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{B-a}, & a \leq X \leq B \\ 0 & , \ 0/w \end{cases}$$

و بما أن زمن بقاء العبارة في موقفها هو 50 دقيقة، فإن أي $0 < X < 50$ فإن دالة الكثافة تكون:

$$f(X) = \frac{1}{50-0} \qquad 0 \leq X \leq 50$$

دالة التوزيع التراكمي:

$$F(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{50} & 0 \leq x \leq 50 \\ 1 & x \geq 50 \end{cases}$$

ب-احتمال أن تنطلق العبارة خلال ال10 دقائق الأخيرة على الأقل:

$$P(X > 50 - 10) = P(x > 40)$$

$$P(X > 40) = 1 - P(x \leq 40)$$

$$P(X > 40) = 1 - F(40)$$

$$P(X > 40) = 1 - \left(\frac{40}{50}\right)$$

$$P(X > 40) = 0{,}2$$

احتمال أن تنطلق العبارة خلال 15 دقيقة الأخيرة:

$$P(35 \leq X \leq 50) = F(50) - F(35)$$

$$P(35 \leq X \leq 50) = \left(\frac{50}{50}\right) - \left(\frac{35}{50}\right)$$

$$P(35 \leq X \leq 50) = 0{,}3$$

د- القيمة المتوقعة و التباين لانطلاق العبارة من الموقف أ :

- التوقع الرياضي:

$$\mu_X = \frac{a+b}{2} = \frac{0+50}{2} = 25\ min$$

- التباين:

$$\delta_X = \frac{(B-a)^2}{12} = \frac{(50-0)^2}{12} = \frac{2500}{12} = 208{,}33$$

- الانحراف المعياري:

$$\delta_X = \frac{B-a}{\sqrt{12}} = 14{,}43$$

التمرين الثالث:

تنطلق حافلة النقل الجامعي من الموقف الرئيسي كل 45 دقيقة بشكل منتظم خلال أيام الدراسة .

المطلوب: **أوجد ما يلي:**

- دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X ؟
- دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X ؟
- ما هو احتمال أن تنطلق الحافلة خلال 10 دقائق الأخيرة على الأقل ؟

- ما هو احتمال أن تنطلق حافلة خلال 15 دقيقة الأخيرة ؟
- أحسب القيمة المتوقعة و الانحراف المعياري لانطلاق الحافلة من الموقف الرئيسي باتجاه الجامعة.

الحل:

X متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم على المجال $[a,b] = [0\ ,\ 45]$

- دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي:

$$X \to U(a = 0\ , b = 45)$$

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & ,\ a \le x \le b \\ 0, & 0/w \end{cases} \Rightarrow f(X) = \begin{cases} \frac{1}{45}, & x < 0 \\ 0, & 0/w \end{cases}$$

دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x-b}{b-a} & a \le x \le b \\ 1\ , & x \ge b \end{cases} \Rightarrow F(x) \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{45} & 0 \le x \le 45 \\ 1 & ;\ x \ge 45 \end{cases}$$

ما هو احتمال أن تنطلق الحافلة خلال 10 دقائق الأخيرة على الأقل:

$$P\big(X \ge (45-10)\big) = P(X \ge 35) = 1 - P(X \le 35) = 1 - F(35) = 1 - \frac{x-a}{b-a}$$

$$= 1 - \frac{35-0}{45-0} = 1 - \frac{35}{45} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9} = 0{,}22$$

ما هو احتمال أن تنطلق حافلة خلال 15 دقائق الأخيرة:

$$P(30 \le X \le 45) = P(X \le 45) - P(X \le 30) = f(45) - f(30) = \frac{45-0}{45-0} - \frac{30-0}{45-0}$$

$$= \frac{45}{45} - \frac{30}{45} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} = 0{,}33$$

- حساب القيمة المتوقعة و الانحراف المعياري:

- التوقع:

$$E(X) = \frac{(b+a)}{2} = \frac{45+0}{2} = \frac{45}{2} = 22{,}5$$

- التباين:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(45-0)^2}{12} = \frac{2025}{12} = 168{,}75$$

- الانحراف المعياري:

$$\delta_X = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \sqrt{168{,}75} = 12{,}99$$

التمرين الرابع:

ليكن لدينا مجال زمنيا بين 05 و 10 دقائق لوصول الشاحنات إلى محطة التفريغ و نريد استخدام التوزيع المنتظم لتحديد احتمال وصول الشاحنة في أي لحظة معينة داخل هذا النطاق المطلوب:

أ- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير x.

ب-دالة التوزيع التراكمي للمتغير x.

ت-التوقع، التباين، الانحراف المعياري .

ث-أحسب احتمال وصول الشاحنة على الأقل في الدقيقة السابعة.

الحل:

أ- x : متغير عشوائي يتبع التوزيع المنتظم على المجال $[a,b] = [5\,,10]$

أ- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X

$$X \to U(a=5\,,b=10)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & , \ a \le x \le b \\ 0, & otherwise \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 5 \le x \le 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

ب-دالة التوزيع التراكمي:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x-b}{b-a} & a \le x \le b \\ 1\,, & x \ge b \end{cases} \Rightarrow F(x) \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{45} & 0 \le x \le 45 \\ 1 & ; \ x \ge 45 \end{cases}$$

ج- التوقع، التباين، و الانحراف المعياري:

- التوقع:

$$E(X) = \frac{(b+a)}{2} = \frac{10+15}{2} = \frac{15}{2}$$

- التباين:

$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(10-5)^2}{12} = \frac{25}{12}$$

- الانحراف المعياري:

$$\delta_x = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \sqrt{\frac{25}{12}} = \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

د- حساب احتمال وصول الشاحنة على الأقل في الدقيقة السابعة:

$$P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - F(7) = 1 - \frac{x-a}{b-a} = 1 - \frac{7-5}{10-5} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$$

3- التوزيع الأسي:Exponentiel distribution :

يُستخدم التوزيع الأسي في المسائل المتعلقة بالزمن كمدة تفريغ باخرة شحن، مدة انتظار زبون قبل الحصول على خدمة، مدة خدمة شباك البريد، للإشارة فإن التوزيع الأسي له علاقة بالتوزيع البواسوني، فإذا كان التوزيع البواسوني هو التوزيع الذي يتبعه المتغير الذي يمثل عدد تكرار الحدث خلال فترة زمنية معينة ، فإن المتغير الذي يمثل الفترة الزمنية بين الأحداث (أو مدة كل حدث) هو يتبع التوزيع الأسي.

3-1- دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الأسي:

نقول بأن للمتغير العشوائي المستمر X توزيعاً أسياً بالوسيط θ إذا كانت دالة كثافته من الشكل التالي:

$$\boldsymbol{f(X) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x} \qquad ; x \geq 0}$$

حيث:

x: متغير عشوائي معرف على المجال $[0, +\infty]$

θ عبارة عن عدد ثابت ويمثل معلمة التوزيع، وهو $(\theta > 0)$ أكبر من الصفر.

e: أساس الدالة الأسية (e = 2.71828).

3-2- حساب الاحتمالات:

إذا كان المتغير العشوائي يتبع **التوزيع الأسي** فإن حساب الاحتمالات يكون من خلال حساب التكاملات كالتالي:

$$P(X \leq K) = \int_0^K f(x)dx$$

$$= \int_0^K \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x} dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_0^k e^{-\frac{1}{\theta}x} dx$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[-\theta e^{-\frac{1}{\theta}x}\right]_0^k$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[\left(-\theta e^{-\frac{1}{\theta}k}\right) - \left(-\theta e^{-\frac{1}{\theta}0}\right)\right]$$

$$= -e^{-\frac{1}{\theta}} + 1$$

$$\boldsymbol{P(X \leq K) = 1 - e^{-\frac{1}{\theta}}}$$

$$P(X \geq K) = \int_K^{+\infty} f(x)dx = \int_K^{+\infty} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x} dx$$

$$= \frac{1}{\theta} \int_K^{+\infty} e^{-\frac{1}{\theta}x} dx$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[-\theta e^{-\frac{1}{\theta}x}\right]$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[\left(-\theta e^{-\frac{1}{\theta}+\infty}\right) - \left(-\theta e^{-\frac{1}{\theta}K}\right)\right]$$

$$P(X \geq K) = e^{-\frac{K}{\theta}}$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1)$$

3-3 القيم العددية المميزة:

إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي $\boldsymbol{X \rightarrow Exp(\theta)}$ فإن:

$$\boldsymbol{E(X) = \theta}$$

$$\boldsymbol{V(X) = \theta^2 \Rightarrow \sigma(x) = \theta}$$

3-4 دالة التوزيع التراكمية:

يمكن كتابة دالة التوزيع التراكمية كالتالي:

إذا كان $X < 0$ فإن $F(X) = 0$

اذا كان $x \geq 0$ فإن:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{\theta}\int_0^k e^{-\frac{x}{\theta}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[-\theta e^{-\frac{x}{\theta}}\right]_0^x = \left[-e^{-\frac{x}{\theta}}\right]_0^x = -e^{-\frac{x}{\theta}} + 1$$

$$= 1 - e^{-\frac{x}{\theta}}$$

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

إذا كانت مدة حياة نوع من المركبات الإلكترونية تأخذ شكل التوزيع الأسي بمتوسط مقداره 6 سنوات.

احسب:

أ) احتمال أن يعمل هذا المركب الإلكتروني لمدة أربع سنوات على الأقل.

ب) احتمال أن يعمل هذا المركب الإلكتروني تسع سنوات على الأكثر.

ج) احتمال أن يعمل هذا المركب الإلكتروني 12 سنة على الأقل علماً أنه عمل ثلاث سنوات على الأقل.

الحل :

X_i متغير عشوائي يمثل مدة حياة مركب إلكتروني معين.

لدينا من المعطيات: $\boldsymbol{X \rightarrow Exp(\theta)}$ ومن المعطيات أيضاً: $E(X) = 6$ و نعلم أن: $E(X) = \theta$

ومنه: $\theta = 6$

إذن: $\boldsymbol{X \rightarrow Exp(6)}$.

أ) احتمال أن يعمل هذا المركب الإلكتروني لمدة أربع سنوات على الأقل:

$$P(X \geq k) = e^{-\frac{k}{\theta}}$$

$$P(X \geq 4) = e^{\left(-\frac{4}{6}\right)} = 0.5134$$

ب) احتمال أن يعمل هذا المركب الإلكتروني تسع سنوات على الأكثر:

$$P(X \leq k) = 1 - e^{-\frac{k}{\theta}}$$

$$P(X \leq 9) = 1 - e^{-\frac{9}{6}} = 0{,}7769$$

ج) احتمال أن يعمل هذا المركب الإلكتروني 12 ساعة على الأقل علماً أنه عمل ثلاث ساعات على الأقل:

$$P(X \geq 12/X \geq 3) = \frac{P(X \geq 12 \cap X \geq 3)}{P(X \geq 3)}$$

$$= \frac{P(X \geq 12)}{P(X \geq 3)}$$

$$= \frac{e^{-\frac{12}{6}}}{e^{\frac{-3}{6}}}$$

التمرين الثاني:

إذا كانت مدة خدمة زبون لاتصالات الجزائر تتبع التوزيع الأسي بمتوسط 5 دقائق، أوجد ما يلي:

أ) دالة الكثافة الاحتمالية التي تعبر عن مدة خدمة الزبون.

ب) احتمال إنهاء خدمة الزبون في مدة أقصاها 4 دقائق.

ج) احتمال إنهاء خدمة الزبون في مدة تتراوح بين 2 دقائق و4 دقائق.

د) احسب معالم النموذج.

الحل:

نُعرف المتغير العشوائي X الذي يمثل مدة خدمة زبون اتصالات الجزائر، وذلك في مدى قيم موجبة: $X \geq 0$

أ) دالة الكثافة الاحتمالية التي تعبر عن مدة خدمة الزبون: من معطيات الدراسة لدينا متوسط مدة خدمة الزبون هو 5 دقائق، أي:

$$f(X) = \frac{1}{5}e^{-\frac{1}{5}x} \qquad ,x \geq 0$$

$$f(X) = 0{,}2e^{-0{,}2x} \qquad ,x \geq 0$$

كما يعبر عن دالة التوزيع التراكمية كما يلي:

$$F(X) = P(X \leq x) = \left[1 - e^{-\frac{1}{\theta}x}\right] \Rightarrow f(x) = 1 - e^{-0.2x}$$

ب) حساب احتمال انهاء خدمة الزبون في مدة اقصاها 4 دقائق

$$P(X \leq 4) = 1 - e^{-0.2(4)} = 0.551$$

ج)حساب احتمال انتهاء خدمة الزبون بين 2 دقيقة و 4 دقائق.

$$P(2 < X \leq 4) = F(4) - F(2) = \left[1 - e^{-(0.2)(4)}\right] - \left[1 - e^{-(0.2)(2)}\right]$$

$$P(2 \leq X \leq 4) = 0.678 - 0.449 = 0.221$$

حساب معلمات هدا التوزيع:

$$\mu_X = \boldsymbol{\theta} = 5 \text{ د}$$

$$\boldsymbol{\delta_X^2 = \sigma^2 = 25} \text{ د}$$

$$\boldsymbol{\delta_X = \theta =} \quad \boldsymbol{5} \text{ دقائق}$$

التمرين الثالث:

في مدة انتظار حافلة للنقل الجامعي في صف الانتظار تشكل متغيرا عشوائيا له دالة كثافة احتمالية كالتالي:

$$f(X) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}x} \qquad ; x \geq 0$$

أ) أحسب احتمال ان تنتظر الحافلة على الأقل ست دقائق.

ب)احسب احتمال ان تنتظر الحافلة ما بين 10 و 20 دقيقة.

ج) احسب متوسط وقت الانتظار.

الحل:

X_i متغيّر عشوائي يمثل مدة انتظار الحافلة:

$$f(X) = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4x}} \qquad \Rightarrow x_i \rightarrow Exp(4)$$

أ) حساب احتمال أن تنتظر الحافلة على الأقل ستة دقائق:

$$P(X \geq k) = e^{-\frac{k}{\theta}}$$
$$P(X \geq 6) = e^{(-6/4)} = 0{,}2231$$

ب) حساب احتمال أن تنتظر الحافلة ما بين 10 و 20 دقيقة:

$$P(10 \leq X \leq 20) = F(20) - F(10)$$

$$P(X \leq 20) - P(X \leq 10)$$

$$= \left(1 - e^{\left(\frac{-20}{2}\right)}\right) - \left(1 - e^{\left(\frac{-10}{4}\right)}\right)$$

$= e^{\left(-\frac{10}{4}\right)} - e^{\left(-\frac{20}{4}\right)}$

=0,0821−0,0067

$P(10 \leq X \leq 20) = 0{,}0754$

ج) حساب توقع وقت الانتظار:

$E(X) = \theta \Rightarrow E(X) = 4$

التمرين الرابع

إذا كان لدينا المتغيّر العشوائي المتصل X يمثل مدة البقاء (بالساعة) لجزء إلكتروني يستخدم في أجهزة التلفاز، له دالة كثافة احتمالية تأخذ الشكل التالي:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{500} e^{\left(\frac{-x}{500}\right)} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \ otherwise \end{cases}$$

المطلوب:

أ) أوجد دالة التوزيع التراكمي؟

ب) ما هو احتمال أن يعمر هذا الجزء مدة 600 ساعة على الأكثر؟

ت) ما هو احتمال أن يعمر هذا الجزء مدة بين 400 و 600 ساعة؟

ث) احسب متوسط عمر هذا الجزء والتباين؟

الحل:

لدينا: $X \rightarrow \text{Exp}(500)$

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \ 0/w \end{cases} \Rightarrow f(X) = \begin{cases} \frac{1}{500} e^{-\frac{x}{500}} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \ o/\text{w} \end{cases}$$

أ) دالة التوزيع التراكمي:

$$F(X) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\frac{x}{500}}$$

ب) احتمال أن يعمر هذا الجزء مدة 600 ساعة على الأكثر

$$P(X \leq 600) = f(600) = 1 - e^{-\frac{x}{\theta}} = 1 - e^{-\frac{600}{500}} = 1 - e^{-1.2} = 0.699$$

ج) احتمال أن يعمر هذا الجزء مدة بين 400 و 600 ساعة:

$$P(400 \leq X \leq 600) = P(X \leq 600) - P(X \leq 400) = F(600) - F(400)$$
$$= \left[1 - e^{-\frac{600}{500}}\right] - \left[1 - e^{-\frac{400}{500}}\right]$$
$$= e^{-\frac{400}{500}} - e^{-\frac{600}{500}} = = e^{-0.8} - e^{-1.2} = 0.449 - 0.301 = 0.148$$

د) حساب متوسط عمر هذا الجزء و تباينه:

- التوقع :

$$\boldsymbol{E(X) = \theta = 500}$$

- التباين:

$$\boldsymbol{V(X) = \theta^2 = (500)^2 = 250000}$$

4- توزيع غاما: Gamma Distribution

4-1- تعريف دالة غاما: تمثل إحدى التوزيعات الاحتمالية المتصلة، حيث تُمثل دالة معرفة فى مجال الأعداد الحقيقية الموجبة، تأخذ هذه الدالة الصيغة الرياضية التالية:

$$\boldsymbol{\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx}$$

حيث:

$$\boldsymbol{a > 0 \text{ ، } x \geq 0}$$

إن حساب التكامل لهذه الدالة يكون عن طريق التجزئة، والذي سيؤدي إلى الحصول على ما يلي :[1]

$$\boldsymbol{\Gamma(n) = (n-1)!}$$

[1] صلاح علي مبخوت، **مبادئ الإحصاء و الاحتمالات و الإحصاء الرياضي**، دار الكتب صنعاء، ط 1، 2001، ص 156.

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \cdots = n!$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

إن استخدام توزيع **Gamma** يستعمل في التنبؤ بمدة الانتظار لكنه يختلف عن التوزيع الأسّي، إذ يستطيع التنبؤ إلى غاية وقوع الحدث k، على عكس التوزيع الأسّي الذي يساعد في التنبؤ بمدة الانتظار للحدث الأول فقط.

نقول عن المتغير العشوائي المتصل X أنه يخضع لتوزيع غاما إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية كما يلي:

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{x^{n-1}e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^n\Gamma(n)} & ; x > 0 \quad ,\theta > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

ونكتب : $X \to \Gamma(n;\theta)$

ملاحظة: عندما تكون n=1 فإن توزيع غاما يتحول إلى التوزيع الأسّي.

2-4 المميزات العددية لتوزيع غاما:

إن المميزات العددية لهذا التوزيع هي كالآتي:

أ) التوقع الرياضي:

$$E(X) = n\theta$$

ب) التباين:

$$V(X) = n\theta^2$$

مثال:

إذا كان X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية معرفة كما يلي:

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{X^4 e^{-\frac{X}{2}}}{2^5\Gamma(5)} & ; x > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

- ما نوع القانون الذي يتبعه X؟
- استنتج التوقع الرياضي والتباين؟

الحل:

بالمطابقة مع دالة كثافة توزيع غاما نستنتج أن:

$$n-1 = 4 \Rightarrow n = 5 \quad ;\theta = 2$$

و عليه: $\boldsymbol{X \rightarrow \Gamma(n;\theta)}$

$$E(X) = n\theta = 5(2) = 10$$

$$V(X) = n\theta^2 = 5(2)^2$$

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

إذا علمت أن عدد الساعات التي يقضيها الحرفي في صناعة السكين التقليدي يتبع توزيع غاما ذو المعلمتين $X \rightarrow G(2,2)$.

فالمطلوب:

1. احسب قيم غاما للحالات التالية: $\Gamma_{\frac{1}{2}}, \Gamma_2, \Gamma_2, \Gamma_n$ ؟
2. أوجد دالة التوزيع الاحتمالي، وبين أنها دالة كثافة احتمالية، ثم أوجد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع؟
3. ما احتمال أن يقضي الحرفي 5 ساعات على الأكثر لصناعة سكين تقليدي؟
4. ما احتمال أن يكون عدد الساعات التي يقضيها الحرفي بين 3 و 5 ساعات؟
5. احسب عدد الساعات المتوقع أن يقضيها الحرفي في صنع السكين، وكذا الانحراف المعياري المقابل لها.

الحل:

نعرف المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الساعات التي يقضيها الحرفي في صناعة السكين التقليدي، والذي يتبع توزيع غاما كما يلي: .

1- حساب قيم غاما للحالات التالية:

$$\Gamma_{\frac{1}{2}} = \pi = 3{,}143$$
$$\Gamma_2 = 1$$
$$\Gamma_3 = (3-1)! = 2$$
$$\Gamma_n = (n-1)! = (n-1)(n-2)(n-3)\dots\dots(2)(1)$$

2- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي، وتبيان أنها دالة كثافة احتمالية:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}e^{-\frac{x}{\theta}}}{\theta^n \Gamma(n)} & ; x > 0, \theta > 0 \\ 0 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

وبما أن $(n = 2, \theta = 2)$:

$$f(X) = \frac{1}{2^2\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x}{4} e^{-\frac{x}{2}}$$

إثبات أنها دالة كثافة:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{4} e^{-\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} x\, e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(-2e^{-\frac{x}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[0 + 2\int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx\right]_0^{+\infty}$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\left[-2e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^{+\infty}$$

$$= -[0-1]$$

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 1$$

ومنه دالة التوزيع الاحتمالي هي دالة كثافة احتمالية.

ودالة التوزيع التراكمي للدالة $f(x)$ هو على الشكل:

$$F(X) = P(X \leq x) = \frac{1}{\theta^n \Gamma(n)} \int_0^x x^{n-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-2xe^{-\frac{x}{2}}\right]_0^x - \left[e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^x$$

$$= \left[e^{-\frac{x}{2}}\left[\left(-\frac{x}{2}\right) - 1\right]\right]_0^x$$

$$F(X) = P(X \leq x) = \left[-e^{-\frac{x}{2}}\left[\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right]\right]_0^x$$

3- حساب احتمال أن يقضي الحرفي 5 ساعات على الأكثر لصناعة سكين تقليدي:

$$P(X \leq 5) = \left[-e^{-\frac{x}{2}}\left[\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right]\right]_0^5$$

$$= \left[-e^{-\frac{5}{2}}\left[\left(\frac{5}{2}\right) + 1\right]\right]_0^5$$

$$= \left[-e^{-\frac{5}{2}}\left[\left(\frac{5}{2}\right) + 1\right]\right] - \left[-e^{-\frac{0}{2}}\left[\left(\frac{0}{2}\right) + 1\right]\right]$$

$$P(X \leq 5) = -0.2873 - (-1)$$

$$P(X \leq 5) = 0.7127$$

4- حساب احتمال أن يكون عدد الساعات التي يقضيها الحرفي بين 3 و 5 ساعات:

$$P(3 \leq X \leq 5) = F(5) - F(3)$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = -0.2873 - (-0.5578)$$

$$P(3 \leq X \leq 5) = 0.2705$$

5- حساب عدد الساعات المتوقع أن يقضيها الحرفي في صنع السكين، والانحراف المعياري المقابل لها:

التوقع الرياضي:

$$\mu_x = n\theta = 2(2) = 4$$

التباين:

$$\delta_X^2 = n\theta^2 = 2(2)^2 = 8$$

الانحراف المعياري:

$$\delta_x = \sqrt{8}$$

التمرين الثاني:

ليكن لدينا المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد السنوات التي يقضيها الطالب بالجامعة للحصول على شهادة الليسانس، فإذا علمت أن قيمة المعلمتين n, θ يتبع توزيع غاما بمقدار يعادل 3، أي أن:

$$n = \theta$$

احسب قيم غاما للحالات التالية: $\Gamma 2\ ;\ \Gamma 3$

أوجد دالة التوزيع الاحتمالي، وبين أنها دالة كثافة احتمالية؟

أوجد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع؟

ما هو احتمال أن يبقى الطالب 3 سنوات على الأكثر في الجامعة للحصول على شهادة الليسانس؟

الحل:

1- حساب قيم غاما للحالات التالية: $\Gamma 2\ ;\ \Gamma 3$

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

$$\Gamma_2 = \int_0^{+\infty} x^{2-1}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x\,e^{-x}dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^{+\infty} = (0-0) - (0-1) = 1$$

$$\Gamma_3 = \int_0^{+\infty} x^{3-1}e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x\,e^{-x}dx = [-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}]_0^{+\infty}$$

$$= (0-0-0) - (0-0-2) = 2$$

2- أوجد دالة التوزيع الاحتمالي، وبين أنها دالة كثافة احتمالية:

- دالة التوزيع الاحتمالي:

$$X \to (\ n = 3\ ,\theta = 3\ )$$

إثبات أنها دالة كثافة احتمالية:

$$f(X) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n \Gamma(n)} X^{n-1} e^{-\frac{x}{\theta}} & ;\ x < 0 \\ \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(X) = \begin{cases} \frac{1}{54} X^2 e^{-\frac{x}{3}} & ;x \geq 0 \\ \\ 0 & o/w \end{cases}$$

- إثبات أنها دالة كثافة احتمالية:

$$\begin{cases} .f(X) \geq 0 \\ .\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dx = 1 \end{cases}$$

$$1/\ f(x) \geq 0 \quad [\forall x, x \geq 0]$$

$$2/\ \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{54} x^2 e^{-\frac{x}{3}} dx = \frac{1}{54} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x}{3}} dx$$

$$= \frac{1}{54} \left[-3x^2 e^{-\frac{x}{3}} - 18x e^{-\frac{x}{3}} - 54 e^{-\frac{x}{3}} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{54}(0 - 0 - 0) - \frac{1}{54}(0 - 0 - 54) = 1$$

3 - أوجد دالة التوزيع التراكمي لهذا التوزيع:

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{\theta^n \Gamma(n)} \int_0^x x^{n-1} e^{-\frac{x}{\theta}} dx$$

$$= \frac{1}{54} \int_0^x x^2 e^{-\frac{x}{3}} dx$$

$$= \left[\frac{-3}{54} x^2 e^{-\frac{x}{3}} - \frac{18}{54} x e^{-\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}} \right]_0^x$$

$$= \left[-\frac{1}{18} x^2 e^{-\frac{x}{3}} - \frac{1}{3} x e^{-\frac{x}{3}} - e^{-\frac{x}{3}} \right]_0^x$$

$$= \left[e^{-\frac{x}{3}} \left(-\frac{1}{18} x^2 - \frac{1}{3} x - 1 \right) \right]_0^x$$

2- احتمال أن يبقى الطالب 3 سنوات على الأكثر في الجامعة للحصول على شهادة الليسانس باستعمال دالة التوزيع التراكمية:

$$P(X \leq 3) = \int_0^3 f(x)dx = \left[e^{-\frac{x}{3}}\left(-\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{3}x - 1\right)\right]_0^3$$
$$= \left[e^{-1}\left(-\frac{1}{2} - 1 - 1\right)\right] - [-0 - 0 - 1]$$
$$= -\frac{5}{2}e^{-1} + 1$$

5- توزيع بيتا "Beta Distribution"

في كثير من الحالات الواقعية يمكننا تصور سيناريوهات عندما لا يكون لدينا القيمة الفعلية للاحتمال، ولكن لدينا تخمينات مسبقة حول قيمة الاحتمال. في هذه الحالة يمكن استخدام توزيع **بيتا** لتمثيل جميع القيم التي يمكن أن يأخذها الاحتمال، وبالتالي فإن استعماله يكون في نمذجة الظواهر العشوائية التي تأخذ مجالاً يتراوح بين 0 و 1، حيث يعد الأفضل لتمثيل الاحتمالات التي نعرفها مسبقاً.

يعتمد توزيع بيتا على معالم اثنين هما α و β ، كما نستطيع أن نكون عدة أشكال للتوزيع اعتماداً على قيم α و β.

- تكتب الدالة الرياضية **لبيتا** كما يلي:

$$\boldsymbol{B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha}(1-t)^{\beta-1}dt\,;\forall \alpha > 0, \forall \beta > 0; 0 \leq t \leq 1}$$

نقول عن المتغير العشوائي X أنه يتبع توزيع بيتا إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية مكتوبة كما يلي

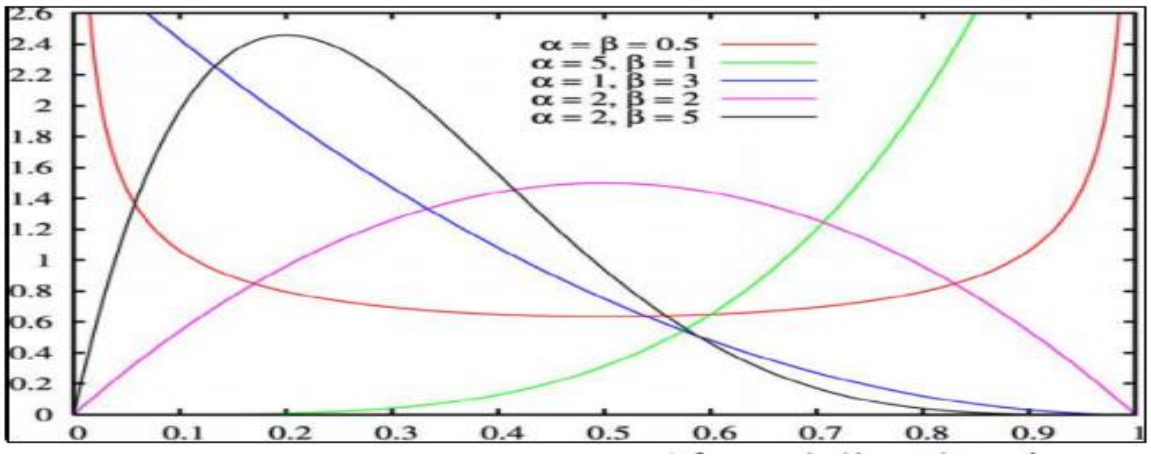
$$f(X) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,; \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$f(X) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}; \qquad 0 \leq x \leq 1$$

و نكتب : $\boldsymbol{X \rightarrow B(\alpha\,;\,B)}$

و للعلم فإن α و β معالم موجبة.

إن التمثيل البياني لدالة الكثافة في حال تغير قيم α و β يكون كما يلي:



5-1- المميزات العددية لتوزيع بيتا:

لحساب المتوسط والتباين لتوزيع بيتا فإن: [1]

$$\boldsymbol{E(X)} = \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} = \boldsymbol{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

وبنفس الأسلوب يمكن إيجاد التباين وذلك خلال حساب:

$$\boldsymbol{E(X^2)} = \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^2 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+B+1)(\alpha+B)}$$

و بذلك نحصل على:

$$Var(X) = \delta^2 = E(x^2) - \big(E(x)\big)^2 = \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2$$

$$= \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

[1] جبار عبد مضحى، **مقدمة في نظرية الاحتمالات**، مرجع سبق ذكره ص 180.

$$\boldsymbol{E(X) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$

$$\boldsymbol{V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}}$$

ملاحظة: توجد علاقة بين توزيع غاما و بيتا يمكن اختصارها في العلاقة التالية:

$$\boldsymbol{B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}$$

فمثلا لو نأخذ قيمة $\alpha = 4$,$\beta = 5$, فإنه:

$$B(4,5) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(5)}{\Gamma(4+5)}$$

$$\Gamma(4) = 3! = 2 \quad ; \quad \Gamma(5) = 4! = 24 \quad ; \quad \Gamma(9) = 8! = 40320$$

$$B(4,5) = \frac{48}{40320} = 0.00119$$

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

إذا كانت نسبة الضياع في إنتاج الطاقة الكهربائية في الجزائر عبارة عن متغير عشوائي يتبع توزيع بيتا ذو المعلمتين $\boldsymbol{X \to B(3,2)}$

1- أوجد دالة التوزيع الاحتمالي، وأثبت أنها دالة كثافة احتمالية، ثم أوجد دالة التوزيع التراكمية له؟

2- ما هو احتمال ألا تتجاوز نسبة الضياع 25% من إجمالي الإنتاج؟

3- ما هو احتمال أن تكون هذه النسبة 10% على الأقل؟

4- احسب متوسط نسبة الضياع في الطاقة الكهربائية والانحراف المعياري المقابل له؟

الحل:

نفرض المتغير العشوائي X الذي يعبر عن نسبة الضياع في إنتاج الطاقة الكهربائية في الجزائر، والذي يعبر عنه كما يلي $X \to B(3,6)$

1- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي، وإثبات أنها دالة كثافة احتمالية، ثم إيجاد دالة التوزيع التراكمية له:

$$f(X)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & ; \quad 0\le x\le 1\\ 0 & ; \quad o/\mathrm{w}\end{cases}$$

- وبتعويض قيمة معلمتي هذا التوزيع نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(X)=\frac{\Gamma(3+2)}{\Gamma(3)\Gamma(2)}x^{3-1}(1-x)^{2-1}=12x^2(1-x)$$

- لإثبات أنها **دالة كثافة احتمالية** يجب أن يكون:

$$\boldsymbol{a)\ f(x)\ge 0 \quad ;\forall x\ \ge\ 0}$$

$$\boldsymbol{b)\ \int_0^1 f(x)\ dx=\int_0^1[12x^2(1-x)]dx}$$

$$=12\int_0^1(x^2-x^3)dx$$

$$=12\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$

$$=12\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1$$

إيجاد دالة التوزيع التراكمية له:

$$f(X)=P(X\le x)=\int_0^x f(x)dx=12\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^x$$

2- حساب احتمال ألا تتجاوز نسبة الضياع 25% في إجمالي الإنتاج:

$$P(X\le 0.25)=\int_0^{0.25} f(x)dx=12\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{0.25}$$

$$P(X\le 0.25)=0.051$$

3- حساب احتمال أن تكون هذه النسبة 10% على الأقل:

$$P(X>0.1)=1-P(X\le 0.1)=1-12\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{0.1}=0.9963$$

4- حساب توقع نسبة الضياع في الطاقة الكهربائية والانحراف المعياري المقابل له:

التوقع الرياضي:

$$\mu_x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{3}{3+2} = 0.6$$

التباين:

$$\delta_x^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{3\cdot 2}{(3+2)^2(3+2+1)}$$

$$\delta_x^2 = 0.04$$

الانحراف المعياري:

$$\delta_x = \sqrt{\delta_x^2} = \sqrt{0{,}004}$$

التمرين الثاني:

إذا كان X متغير عشوائي دالة كثافته الاحتمالية مكتوبة كما يلي:

$$f(X) = 12x^2(1-x) \quad ; \quad 0 \le X \le 1$$

ما هو القانون الذي يتبعه هذا المتغير؟

استنتج التوقع الرياضي والتباين؟

الحل:

بالمطابقة مع دالة كثافة بيتا يمكن استنتاج أن:

$$\beta - 1 = 1 \Rightarrow \beta = 2 \quad , \alpha - 1 = 2 \Rightarrow \alpha = 3$$

و بالعودة إلى كثافة بيتا:

وبالعودة إلى دالة كثافة بيتا:

$$\boldsymbol{f(X) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}$$

يمكننا التحقق من أن:

$$\frac{1}{B(\alpha,\beta)} = 12$$

حيث ان : $\beta = 2$ و $\alpha = 3$:عند الحساب نجد ان:

$$B(3,2) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(2)}{\Gamma(3+2)} = \frac{2!\cdot 1!}{4!} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

إذن:

$$\frac{1}{B(3,2)} = \frac{1}{\frac{1}{12}} = 12$$

$$f(X) = \frac{1}{B(3,2)} x^{3-1}(1-x)^{2-1} = 12x^2(1-x).$$

ومنه: $x \to B(3,6)$

- استنتاج التوقع الرياضي والتباين:

$$\boldsymbol{E(X)} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\alpha+\beta}} = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$$

$$\boldsymbol{V(X)} = \frac{\boldsymbol{\alpha\beta}}{\boldsymbol{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}} = \frac{3\times 2}{(3+2)^2(3+2+1)} = \frac{6}{25\times 6}$$

$$\boldsymbol{V(X)} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{25}}$$

6- توزيع كاي مربع "Chi-Square Distribution"

يتم استخدام توزيع كاي مربع على نطاق واسع في عدة مجالات كالإحصاء وعلم الأحياء وعلوم الاجتماع وغيرها، إذا فهو أيضاً من التوزيعات الاحتمالية المتصلة المهمة، حيث له استخدامات واسعة في مجالات الاستدلال الإحصائي المتعلقة بالتباين، ويرمز له بالرمز $\boldsymbol{\chi^2_{\alpha,v}}$

6-1- دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاي مربع:

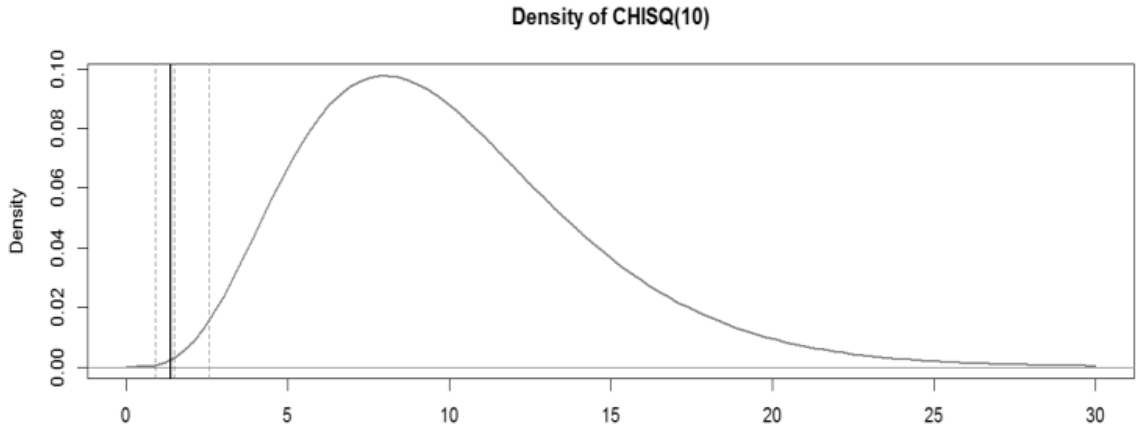
تعطى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاي مربع بالعلاقة التالية:

$$f(\chi^2) = c(\chi^2)^{\frac{\nu-2}{2}} e^{-\frac{\chi^2}{2}}$$

حيث :ν تمثل درجة الحرية، علماً أن $\nu = n - 1$ حيث n يرمز لحجم العينة.

C: عبارة عن ثابت.

6-2- التمثيل البياني لتوزيع كاي مربع وخصائصه:



من خلال الشكل نلاحظ أن توزيع كاي مربع يتميز بما يلي:

- مدى المتغير الذي يتبع توزيع كاي مربع يبدأ من الصفر إلى اللانهاية، وبالتالي فالتمثيل البياني يقع في الربع الأول من المستوى.
- التمثيل البياني لكاي مربع غير متناظر ملتوي جهة اليمين لأن مداه محدود بالصفر من جهة اليسار وغير محدود من جهة اليمين.
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد، وبالتالي إذا كانت لدينا نقطة α فإن

$$P(\chi^2 \leq \alpha) + p(\chi^2 > \alpha) = 1$$

6-3 حساب الاحتمال و استخدام جدول كاي مربع:

يتشابه جدول توزيع كاي مربع من حيث تركيبته و طريقة استخدامه مع جدول توزيع ستيودنت، حيث يتكون من:

-محور عمودي يضم درجات الحرية.

-محور أفقي يضم الاحتمالات.

ما بين المحورين أي داخل الجدول يضم قيم χ^2 الموافقة لدرجات حرية معينة ويستخدم جدول كاي مربع مباشرة لحساب احتمال معين، فمثلا لحساب الاحتمال $P(\chi^2 \leq a)$ نتبع الخطوات التالية:

1-نبحث عن درجة الحرية عل العمود الخاص بدرجات الحرية.

2-نبحث عن قيمة χ^2 أو أقرب قيمة لها على السطر المقابل للدرجة الحرية المحددة في الخطوة الأولى.

3-نقوم بالإسقاط على المحور الأفقي الخاص بالاحتمالات فنتحصل على الاحتمال المطلوب.

مثال:

1-من أجل درجة الحرية $v = 10$ احسب الاحتمالات التالية: $P(\chi^2 \leq 20{,}5)$ $P(\chi^2 > 20{,}5)$

2-من أجل درجة الحرية $v = 15$ أوجد a بحيث $P(\chi^2 > a) = 0{,}10$ ، $P(\chi^2 > a) = 0{,}25$

الحل:

باستخدام الجداول الإحصائية الخاصة بـ χ^2 والذي هو خاص بالاحتمالات من الشكل $P(\chi^2 \leq 20{,}5)$ مباشرة نجد:

$$P(\chi^2 > 20{,}5) = 0{,}975$$

$$P(\chi^2 > 20{,}5) = 1 - P(\chi^2 > 20{,}5)$$

تذكر أن: $\boldsymbol{P(\chi^2 \leq a) + P(\chi^2 > a) = 1}$

$$= 1 - 0{,}975$$

$$P(\chi^2 > 20{,}5) = 0{,}025$$

2- أوجد قيم a علما أنّ $v = 15$

$P(\chi^2 > a) = 0{,}10 \Rightarrow 1 - p(\chi^2 \leq a) = 10$

$\Rightarrow P(\chi^2 \leq a) = 0{,}90$

$\Rightarrow a = 22{,}31$

إذن نبحث داخل جدول كاي تربيع عن قيمة a التي تقبل نقطة تقاطع العمود الموافق للاحتمال0.90 ، و السطر الموافق لدرجة الحرية $v = 15$ كما يلي:

n / p	0,005	0,010	0,025	0,050	0,100	0,250	0,500	0,750	0,900	0,95	0,975	0,990	0,995
n													
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,02	0,10	0,45	1,32	2,71	3,84	5,02	6,64	7,88
2	0,01	0,02	0,05	0,10	0,21	0,58	1,39	2,77	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,07	0,11	0,22	0,35	0,58	1,21	2,37	4,11	6,25	7,82	9,35	11,35	12,84
4	0,21	0,30	0,48	0,71	1,06	1,92	3,36	5,39	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,41	0,55	0,83	1,15	1,61	2,67	4,35	6,63	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,68	0,87	1,24	1,64	2,20	3,45	5,35	7,84	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,99	1,24	1,69	2,17	2,83	4,25	6,35	9,04	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	5,07	7,34	10,22	13,36	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,74	2,09	2,70	3,33	4,17	5,90	8,34	11,39	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	6,74	9,34	12,55	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,58	5,58	7,58	10,34	13,70	17,28	19,68	21,92	24,72	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	8,44	11,34	14,85	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	9,30	12,34	15,98	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,08	4,66	5,63	6,57	7,79	10,17	13,34	17,12	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	11,04	14,34	18,25	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	11,91	15,34	19,37	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27

$\boldsymbol{P(\chi^2 > a) = 0{,}25 \Rightarrow 1 - P(\chi^2 \leq a) = 0{,}25}$

$\Rightarrow \boldsymbol{P(\chi^2 \leq a)} = 0{,}75$

$\Rightarrow a = 18{,}25$

- **توزيع فيشر Fisher distribution:**

يعتبر توزيع F من التوزيعات الاحتمالية الهامة التي تستخدم في مجال الإحصاء التطبيقي، نظريا يمكن تعريف توزيع F كنسبة لتوزيعيين مستقلين يتبعان توزيع $\boldsymbol{\chi^2}$ و كل منهما له درجات حرية خاصة به، فإذا كانت f قيمة للمتغير العشوائي F، فإن: و كل منهما له درجات حرية خاصة به، فإذا كانتf قيمة المتغير العشوائيF فإن[1]:

[1] –ثروت محمد عبد المنعم، **مدخل حديث للإحصاء و الاحتمالات**، بدون سنة نشر، ص20.

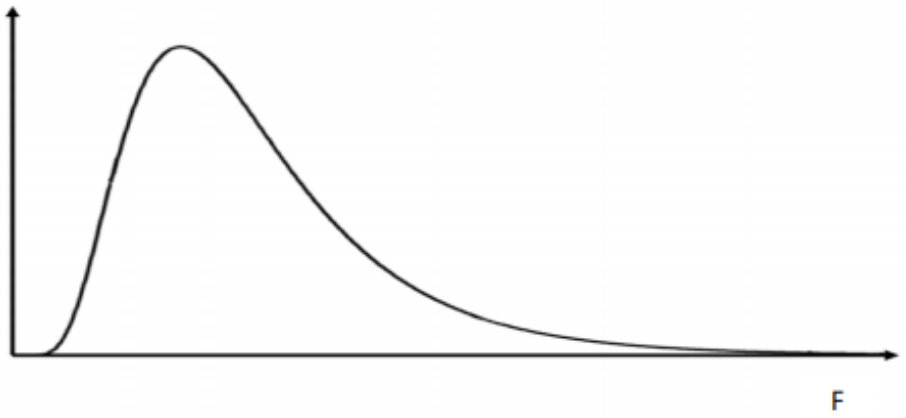
$$f = \frac{X_1^2/V_1}{X_2/V_2} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2}$$

حيث : x_1^2 هي قيمة لتوزيع χ^2 بدرجات حرية $V_1 = n_1 - 1$ ، و x_2^2 هي قيمة لتوزيع χ^2 بدرجات حرية $V_2 = n_2 - 1$

لحساب قيمة F نختار عينة عشوائية من الحجم n_1 من مجتمع طبيعي به تباين σ_1^2 و نحسب S_1^2 / σ_1^2 أيضا نختار عينة عشوائية مستقلة من الحجم n_2 من مجتمع طبيعي آخر له تباين δ_2^2 و نحسب $\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}$ ، النسبة للقيمتين $\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}$ و $\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}$ تنتج قيمة f، توزيع كل القيم الممكنة من f حيث تمثل $\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}$ البسط و $\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}$ تمثل المقام و يسمى توزيع f بدرجات حرية v_1 و v_2.

7-1 التمثيل البياني لتوزيع فيشر وخصائصه:

يأخذ التمثيل البياني لدالة كثافة توزيع فيشر شكل مشابه لتوزيع لكاي مربع كما هو موضح أدناه.



يتميز توزيع بالخصائص التالية:

- هو توزيع غير متناظر، حيث أنه ملتوي جهة اليمين.
- توزيع فيشر دائما موجب.
- يعتمد شكل التوزيع على درجات الحرية، حيث كلما ازدادت درجات الحرية اقترب شكل توزيع فيشر من شكل التوزيع الطبيعي.

7-2-حساب الاحتمال وطريقة استخدام الجدول الإحصائي لفيشر:

هناك عدة جداول لتوزيع فيشر، يرتبط كل جدول باحتمال معين α ويتطلب استخدام الاحتمال من الجدول توفر درجة حرية البسط ν_1 ودرجة حرية المقام ν_2 إلى جانب قيم احصاءه فيشر F ، حيث يتكون الجدول من:

- محور أفقي يضم درجة حرية البسط ν_1.

- محور عمودي يضم درجة حرية المقام ν_2.

ما بين المحورين تضم قيمة f حيث كل قيمة ترتبط بدرجة حرية معينة للبسط و أخر للمقام و احتمال معين أي :$f(\alpha, \nu_1, \nu_2)$ ، و يتم استخدام الجدول كالتالي:

- إذا كان المطلوب هو استخراج قيمة احصاءه فيشر الموافقة لدرجات حرية واحتمال معين، فإننا نختار الجدول الخاص بالاحتمال المطلوب، و فيه نبحث عن قيمة f التي تمثل نقطة تقاطع العمود الموافق لدرجة حرية البسط ν_1 و السطر الموافق لدرجة حرية المقام ν_2.

-إذا كان المطلوب هو البحث عن الاحتمال الموافق لإحصائه فيشر بدرجات حرية معينة فإننا نبحث في الجداول (كل جدول على حدى) عن قيمة (ν_1, ν_2) التي تمثل نقطة التقاطع أو أقرب قيمة لها.

ملاحظة هامة: في بعض الأحيان لا نستطيع استخراج بعض القيم لعدم وجود جداول بالاحتمالات الخاصة بها، هنا نستعين بالعلاقة التالية:

$$F(\alpha, \nu_1, \nu_2) = \frac{1}{f(1-\alpha, V_1, V_2)}$$

مثال: 01

أ-أوجد قيمة الإحصاء F الحالات التالية:

$F(0.95, 10, 15)$, $F(0.05, 5, 10)$

ب-أوجد الاحتمالات α بحيث: $F(\alpha, 9, 7) = 3{,}68$

الحل:

أ-إيجاد قيم F:

$F\ (0.95, 10, 15) = ?$

نختار جدول فيشر الموافق للاحتمال $\alpha = 0{,}95$ ثم نبحث عن نقطة التقاطع بين العمود الموافق لدرجة الحرية $\nu_1 = 10$ والسطر الموافق لدرجة الحرية $\nu_2 = 15$ فنجد أن :

$F(0{,}95\ ,10\ ,15\ ) = 2{,}54$

كما هو موضح في الجدول أدناه:

p= 0.95

dl1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	50	100	inf
dl2															
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	248	250	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.9	8.8	8.8	8.8	8.7	8.6	8.6	8.5	8.5
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.80	5.75	5.70	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.56	4.50	4.44	4.41	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	3.87	3.81	3.75	3.71	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.45	3.38	3.32	3.28	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.15	3.08	3.02	2.98	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	2.94	2.86	2.80	2.76	2.71
10	4.97	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.77	2.70	2.64	2.59	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.10	3.01	2.95	2.90	2.85	2.65	2.57	2.51	2.46	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.54	2.47	2.40	2.35	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.46	2.38	2.31	2.26	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.39	2.31	2.24	2.19	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.33	2.25	2.18	2.12	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.28	2.19	2.12	2.07	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.97	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.23	2.15	2.08	2.02	1.96

$\boldsymbol{F(0.05, 5, 10) = ?}$

المفروض أن نتبع نفس الطريقة، لكن نلاحظ أن الاحتمال المعطي هنا هو: $\alpha = 0.05$

و لا يوجد ضمن الجداول المعطاة، هنا نستعمل القاعدة:

$$F(\alpha, V_1\ , V_2\ ) = \frac{1}{f(1-\alpha, V_1\ , V_2\ )}$$

حيث:

$1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

إذن:

$$F(0.05,5,10) = \frac{1}{F(0.05\ ,10\ ,5)}$$

نستخرج القيمة $F(0{,}95\ ,\ 10\ ,\ 15\ )$ بنفس الطريقة من الجدول بالاحتمال 0.95 حيث نجد:

$$F(0{,}95\ ,\ 10\ ,\ 15\ ) = 4{,}74$$

ومنه:

$$F(0.05\ ,\ 5\ ,\ 10\ ) = \frac{1}{4.74}$$

$$F(0.05\ ,\ 5\ ,\ 10\ ) = 0.21$$

2-إيجاد الاحتمالات:

$$F(\alpha\ ,\ 9\ ,\ 7\ ) = 3{,}68$$

نبحث عن القيمة F=3,68 الناتجة عن تقاطع العمودv_1=9 مع السطر v_2=7 في كل جداول فيشر المعطاة (أو أقرب قيمة لها)، و الاحتمال المسجل على الجدول الذي يضم F=3,68 أو أقرب قيمة لها هو الاحتمال المطلوب. بالبحث نجد أن الاحتمال المطلوب هو 0,95 حيث F(95, 9, 7) = 3.68

مثال2:

أوجد ما يلي:

$$F(0.01, 6, 10)$$

$$F(0.05, 8, 12)$$

$$F(0{,}99\ ,\ 6\ ,\ 8\ )$$

$$F(0{,}99\ ,\ 10\ ,\ 6)$$

الحل:

$$F(0.01, 6, 10) \ = \ 5.3858$$

$$F(0.05, 8, 12) \ = \ 2.8486$$

$$F(0.99, 6, 8) = \frac{1}{F(1-0{,}99,8,6)} = \frac{1}{F(0.01,8,6)} = \frac{1}{8{,}1017} = 0{,}1234$$

$$F(0.99\ ,10\ ,6\ ) = \frac{1}{F(1-0{,}99{,}6{,}10)} = \frac{1}{F(0.01{,}10{,}6)} = \frac{1}{3{,}2172} = 0{,}3108$$

8-توزيع ستيودنت Student distribution

توزيع ستيودنت هو أحد التوزيعات الإحصائية الهامة التي تستخدم في تحليل البيانات الصغيرة و في اجراء الاختبارات الإحصائية، ثم اقتراح هذا التوزيع لأول مرة بواسطة العالم الإيرلندي W.S.GOSSET ويليام سيموس غوسيت في عام 1908 حيث يتميز توزيع ستيودنت بشكل أساسي باعتماده على مفهوم درجات الحرية، حيث يؤثر تعيين درجات الحرية على شكل التوزيع. اذ كلما كانت درجات الحرية أقل زادت الاحتمالات المرتبطة بالاحتمالات عند حساب المتغيرات الإحصائية.

8-1: دالة التوزيع الاحتمالية لتوزيع ستيودنت:

نشتق توزيع ستيودنت t من متغيرين مستقلين، أولهما ممثل المتغير العشوائي z الذي يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط حسابي $u_x = 0$ و تباين قيمته $\delta_1^2 = 1$

أما المتغير العشوائي الثاني يمثل الجذر التربيعي للمتغير x^2 الذي يخضع إلى توزيع مربع كاي بدرجة حرية k.

$$\boldsymbol{z = \frac{x-u_x}{\sigma_x}}$$

$$x^2 \rightarrow x^2_{(k)}$$

يعد المتغيرين العشوائيين z و x^2 مستقلين، و بالتالي يكون المتغير العشوائي t يعرف بالصيغة التالية:[1]

$$\boldsymbol{t = \frac{z}{\sqrt{x^2_{(k)}/k}}}$$

[1] -عايد كريم عبد عون الكتاني، **مقدمة في الإحصاء و تطبيقات spss**، دار اليازوري العلمية، الأردن ،2014، ص197.

يستخدم توزيع t في حالة العينات الصغيرة و على وجه التحديد عندما يكون حجم العينة أقل من (30) مشاهدة أي $n < 30$.[1]

في ضوء ما تقدم فإن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي x الذي يخضع لتوزيع ستيودنت t بدرجة حرية k تكتب كما يلي:

$$f(x,k) = \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma(\frac{k}{2})}\left[1+\frac{x^2}{k}\right]^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)} \qquad -\infty \le x \le +\infty$$

و يمكن تبسيطها كما يلي:

$$f(x,k) = \frac{(\frac{k+1}{2})!}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma(\frac{k}{2})!}\left[1+\frac{x^2}{k}\right]^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)} \qquad -\infty \le x \le +\infty$$

k: هو عدد درجات الحرية لتوزيع ستيودنت.

Γ: دالة قاما

توزيع ستيودنت يعتمد على مفهوم درجات الحرية، و كلما زادت قيمة k (درجة الحرية) كان الشكل النهائي للتوزيع يقترب أكثر من التوزيع الطبيعي القياسي.

من خلال ما سبق نقول إذا كان لدينا متغير عشوائي t يتبع توزيع ستيودنت فإن دالة كثافته تعطي بالعلاقة التالية:

$$f(t) = c(1+\frac{t^2}{V})^{-\frac{(V+1)}{2}}$$

V: درجة الحرية $V = n-1$ علما ان n ترمز لحجم العينة.

C : عبارة عن ثابت

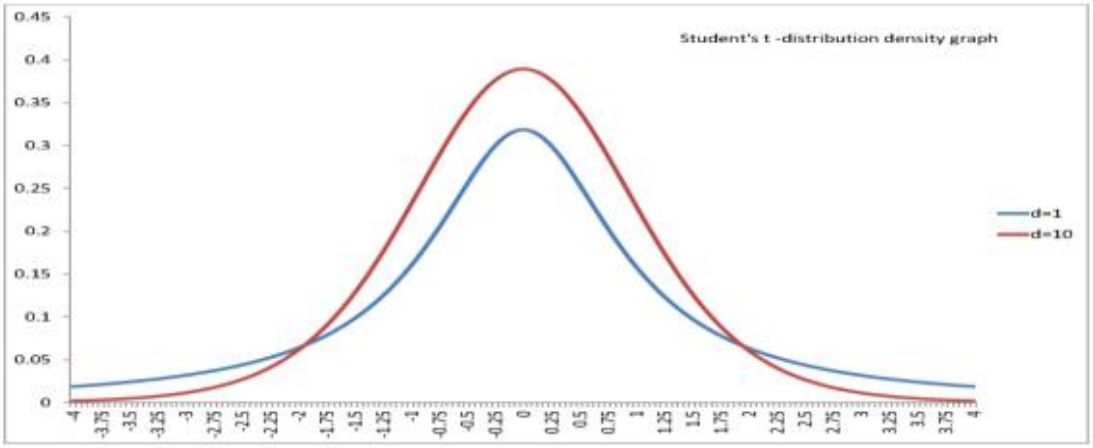
[1] سليمان أبو بدر ، ترجمة باسم سرحان، **استخدام الأساليب الإحصائية في بحوث العلوم الاجتماعية (دليل كامل) لبرنامج الحزمة الإحصائية spss)**، الطبعة الثانية المركز العربي للأبحاث و دراسة السياسيات للنشر، قطر 2019 ص 332

و نكتب $T_{\alpha,V}$ حيث:

T: ترمز لتوزيع ستيودنت ، و α تمثل قيمة الاحتمال.

8-3-التمثيل البياني لتوزيع ستيودنت وخصائصه:

يأخذ المثيل البياني لدالة كثافة توزيع ستيودنت نفس شكل التوزيع الطبيعي إلا أنه أقل ارتفاعا منه، و يعتمد منحنى توزيع ستيودنت على درجة الحرية $V = n - 1$ حيث كلما ازدادت درجة الحرية أصبح شكل توزيع ستيودنت يقترب أكثر من شكل التوزيع الطبيعي و هو ما يمكن توضيحه في الشكل التالي:



من خلال الشكل نلاحظ أن توزيع ستيودنت يشبه التوزيع الطبيعي، و يتشارك معه في الكثير من الخصائص منها:

1- مدى المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع ستيودنت يمتد من $-\infty$ إلى $+\infty$

2- يأخذ التمثيل البياني لتوزيع ستيودنت شكل جرسي لكنه أقل ارتفاعا من منحنى التوزيع الطبيعي و يزداد الارتفاع كلما زادت درجة الحرية أي كلما زادت n.

3- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد، و هذا يعني أنه إذا كانت لدينا قيمة معينة (a) فإن:

$$\boldsymbol{P(t \leq a) + P(t > a) = 1}$$

4-توزيع ستيودنت متناظر حول الوسط الحسابي (0).

5-انطلاقا من الخاصيتين (3) و (4) فإن القيمتين المتناظرتين (t) و(-t) ، لهما احتمالان متكاملان (أي أن مجموعهما يساوي الواحد).

8-4-حساب الاحتمال واستخدام الجدول الاحصائي لستيودنت:

يعتمد حساب احتمال المتغير خاضع لتوزيع ستيودنت على حساب المساحات (التكاملات) وهذه الاحتمالات محسوبة مسبقا (كما هو الحال بالنسبة للتوزيع الطبيعي في جدول خاص هو جدول توزيع ستيودنت، و يختلف هذا الجدول في تركيبته عن الجدول التوزيع الطبيعي، حيث يتكون من:

- محور عمودي خاص بدرجات الحرية.
- محور أفقي خاص بالاحتمالات.
- ما بين المحورين عبارة عن أعداد تمثل قيم t المقابلة لدرجة حرية معينة و احتمال معين و لاستخراج قيمة الاحتمال الموافقة لقيمة معينة لـ t نتبع الخطوات التالية:

1- نبحث عن المحور العمودي (الخاص بدرجات الحرية) عن درجة الحرية $V = n - 1$

2- على السطر الموافق لدرجة الحرية المبحوث عنها في الخطوة السابقة نبحث عن قيمة t أو (أقرب قيمة لها) و هنا نؤكد على أن البحث عن قيمة t يكون فقط على السطر المقابل بدرجة الحرية حتى لو كانت هناك قيم أقرب في باقي الجداول.

3- بعد إيجاد قيمة t نقوم بالإسقاط على المحور الأفقي و القيمة المتوصل إليها تمثل الاحتمال المطلوب

ملاحظة : إذا لم يتم استخدام الجدول الذي يضم الاحتمالات من الشكل $P(t \leq a)$ نستخدم الخاصية:

$$P(t \leq a) + P(t > a) = 1$$

مثال01:

1-من أجل درجة الحرية $(V = 4)$ أوجد $P(t > 3{,}747); P(t < 1{,}532)$

2-من أجل درجة الحرية$(V = 20)$ أوجد قيمة a بحيث $P(> a) = 0{,}1$

الحل:

1) حساب الاحتمالات لدينا $(V = 4)$ $P(t < 1{,}532) = ?$

باستخدام جدول توزيع ستيودنت (أنظر الملحق رقم02)

$P(t < 1{,}532) = 90\%$

تم التوصل لهذه النتيجة بالبحث في عمود الجدول عن درجة الحرية V=4 ثم نبحث على السطر المقابل لها عن t=1,533 ، القيمة غير موجودة نأخذ أقرب قيمة لها t= 1.533 ثم نقوم بالإسقاط على هذا المحور فنجد الاحتمال المطلوب هو 90% أي 0.9.

$\boldsymbol{P(t > 3,747)} =?$

$P(t > 3{,}747) = 1 - P(t \leq 3{,}747)$

$= 1 - 0{,}99$

$P(t > 3{,}747) = 0{,}01$

2-إيجاد قيمة a بحيث $P(t > a) = 0{,}1$

المطلوب هنا هو إيجاد قيمة tالتي تقابل درجة الحرية $V = 20$ و الاحتمال $0{,}1$ أي:

$t(0.1\,,20) =?$، أي عكس المطلوب في السؤال الأول و بالتالي فالبحث في الجدول يكون بطريقة عكسية.

$P(t > a) = 0{,}1 \Rightarrow 1 - P(t \leq a) = 0{,}1$

$\Rightarrow P(t \leq a) = 0{,}9$

$\Rightarrow a = 1{,}325$

مثال02:

يفرض أن المتغير العشوائيt يخضع لتوزيع ستيودنت t بدرجة حرية 19 المطلوب أوجد:

- $P(\mathrm{t} \leq 1.729)$
- $.P(1.328 \leq \mathrm{t} \leq 2.861)$
- $P(-1{,}729 \leq \mathrm{t} \leq 2{,}539)$

الحل:

- $P(\mathrm{t} \leq 1.729) = 0.95$
- $P(1.328 \leq \mathrm{t} \leq 2.861) = P(\mathrm{t} \leq 2.861) - P(\mathrm{t} \leq 1.328)$

$= 0{,}995 - 0{,}9 = 0{,}095$

- $P(-1.729 \leq t \leq 2.539) = P(t \leq 2.539) - P(t \leq -1.729) - [1 - P(t \leq 1{,}725) = 0{,}99 - 1 + 0{,}95 = 0{,}94]$

الفصل الثالث: تقريب التوزيعات الاحتمالية.

- ✓ تقريب توزيع ثنائي الحد إلى توزيع بواسون.
- ✓ تقريب توزيع ثنائي الحد إلى التوزيع الطبيعي.
- ✓ تقريب توزيع بواسون إلى التوزيع الطبيعي.
- ✓ تقريب قانون فوق الهندسي إلى قانون ثنائي الحدين.

يمثل التقارب أحد المحاور الرئيسية التي اهتم الاحصائيون عند ارتفاع حجم العينة إلى مستوى معين، بحيث يهدف هذا النوع من التقريب إلى تبسيط النماذج الإحصائية للأحداث العشوائية.

نقصد بالتقارب بين التوزيعات الاحتمالية، إيجاد أو إعطاء نتائج متقاربة بخصوص احتمال معين، و مما يعني إمكانية استخدام توزيعين احتماليين لحساب الاحتمالات و دراسة التوزيعات.

1-تقريب توزيع ثنائي الحد إلى توزيع بواسون[1]:

The Poisson Approximation to the Binomial Distribution:

يمكن اشتقاق توزيع بواسون من توزيع ذي الحدين، و ذلك كحالة تقريبية تحت شروط معينة، فتوزيع بواسون يعتبر حالة خاصة من توزيع ذي حدين و ذلك عندما يكون احتمال النجاح صغير جدا $(p \to 0)$ و عدد المحاولات (n) كبيرا $n \to \infty$ بحيث تبقى $\boldsymbol{\lambda = np}$ ثابتة، فإذا كان المتغير العشوائي x يتوزع وفق التوزيع الثنائي(ذي الحدين) و تتوفر فيه الشروط التالية:

1- عدد الاحتمالات (n) كبيرا غالبا $\mathbf{n \geq 50}$.

2- احتمال النجاح (p) صغير جدا في الغالب . $\mathbf{p \leq 0.10}$

3- حاصل ضرب np أقل من5 أي أن $\mathbf{np \leq 5}$.

فإن هذا المتغير يتوزع توزيعا **قريبا من توزيع بواسون**، أي أن

$$\mathbf{P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-1} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}} \quad \mathbf{, \lambda = np}$$

ان لهذه الخاصية أهمية خاصة من الناحية التطبيقية، حث إنها تسمح باستخدام توزيع **بواسون** بديلا **لتوزيع ذي الحدين** عند احتساب احتمال حدوث حدث معيين، و ذلك بمجرد التأكد من أن n كبيرة $\mathbf{n \geq 50}$ و احتمال النجاح صغير جدا $\mathbf{p \leq 0.10}$.

[1] -على عبد السلام العماري، على حسين العجيلي، **الإحصاء و الاحتمالات**، النظرية و التطبيق، دار الحكمة، طرابلس، ص345.

مثال01:

تلتزم الشركة العامة للإلكترونيات بإصلاح الأجهزة خلال مدة ستة أشهر من تاريخ بيعها، فإذا علمت ان احتمال حدوث عطل بأي جهاز خلال هذه المدة هو 0,02، فما احتمال أن من بين 300جهاز تم بيعها سوف تلتزم الشركة بإصلاح على الأقل أربعة منها؟

الحل:

حيث أن **n=300** كبيرة و **p=0.02** صغيرة، و عليه نرى من الأفضل استخدام **توزيع بواسون** في حساب هذا الاحتمال، لأن استخدام **توزيع ذي الحدين** يكون معقدا، فإذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الأجهزة التي حدث فيها العطل فإن:

$\lambda = n\,p = 300\,(0.02) = 6.$

و بذلك يكون الاحتمال المطلوب هو:

$$P(X \geq 4) = \sum_{x=4}^{\infty} \frac{e^{-6} \cdot 6^x}{x!} = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3)$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{3} \frac{e^{-6} \cdot 6^x}{x!}$$

$$= 1 - [0.0025 + 0.0149 + 0.0446 + 0.0894]$$

$$= 1 - 0.1502 = 0.8498$$

2- تقريب التوزيع فوق الهندسي إلى التوزيع الثنائي:

Approximation Hypergéométrique by Binomial:

يمكن للتوزيع فوق الهندسي ان يعطي نتائج متقاربة مع التوزيع الثنائي في ظل توفر شروط معينة.

2-1-شروط تقريب التوزيع فوق الهندسي إلى الثنائي:

نعلم أنه اذا كان لدينا مجتمع يتكون من N عنصر به M عنصر يحقق خاصية معينة مراد دراستها و نقوم بسحب عينة حجمها n فإن المتغير العشوائي x الذي يمثل عدد العناصر التي تحقق الخاصية المراد دراستها ضمن العينة المسحوبة يتبع التوزيع فوق الهندسي، و نعبر عن ذلك رياضيا بالكتابة التالية:

$X \to g(N, M, n)$ متغير عشوائي.

و يكون متوسط التوزيع فوق الهندسي:

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{np}$$

$$\mathbf{V(X) = npq}\left(\frac{\mathbf{N-n}}{\mathbf{N-1}}\right)$$

لاحظ أنه **إذا كانت N كبيرة جدا مقارنة مع n** فإن المقدار $\left(\frac{N-n}{N-1}\right) \to 1$ **سيؤول إلى الواحد و بالتالي** يصبح التباين $V(X) = npq$ وهو نفسه قانون التباين **للتوزيع الثنائي**. و منه نستنتج أنه: يمكن تقريب التوزيع **فوق الهندسي** إلى **التوزيع الثنائي** اذ كان المقدار $\frac{N-n}{N-1}$ يؤول إلى واحد و عموما يضع الاحصائيون العلاقة بين n و N هي العبارة التالية: $\frac{n}{N} \leq 0,05$

كشرط لتقريب التوزيع فوق الهندسي إلى التوزيع الثنائي و نكتب:

$$\mathbf{g(N, M, n)} \approx \mathcal{B}\left(\mathbf{n, p} = \frac{\mathbf{M}}{\mathbf{N}}\right)$$

مثال:

توضب إحدى المؤسسات المختصة في انتاج جوارب الأطفال منتجاتها في صناديق يحتوي الصندوق الواحد على 100 زوج من الجوارب، 60 منها الذكور و 40 للإناث، سحب مراقب الجودة عشوائيا و بدون ارجاع ثلاث أزواج من الجوارب لفحصها.

1-احسب احتمال الحصول على زوجين من الجوارب الذكور.

الحل:

x_i: متغير عشوائي يمثل عدد ازواج جوارب الذكور المسحوبة ضمن العينة.

$$x_i = \{0\,, 1\,, 2\,, 3\}$$

واضح من المعطيات أن:

$$X \sim g(N = 100, M = 60, n = 3)$$

(لأن التجربة مكررة أكثر من مرة، كل تجربة تعطي نتيجتين و السحب بدون ارجاع) و بالتالي فالقانون الاحتمالي هو:

$$P(X=x)=\frac{C_M^x \cdot C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n}=\frac{C_{60}^x \cdot C_{40}^{3-x}}{C_{100}^3}$$

و الاحتمال المطلوب حسابه هو :

$$P(X=2)=\frac{C_{60}^2 \cdot C_{40}^1}{C_{100}^3}$$

نلاحظ وجود مشقة في حساب هذا الاحتمال باستخدام **القانون فوق الهندسي** و نلاحظ أيضا أن شرط التقريب إلى التوزيع الثنائي محقق حيث:

$$\frac{n}{N}=\frac{3}{100}=0{,}03 \leq 0{,}05$$

ومنه:

$$\Rightarrow g(N,M,n) \approx \mathcal{B}\left(n\ ,\ p=\frac{M}{N}\right)$$

$$\Rightarrow g(100{,}60{,}3) \approx \mathcal{B}\left(3, p=\frac{60}{100}=0{,}6\right)$$

و منه يمكن حساب الاحتمال المطلوب باستخدام قانون التوزيع الثنائي كالتالي:

$$P(X=x)=C_n^x \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

$$P(X=2)=C_3^2 \cdot (0{,}6)^2 \cdot (0{,}4)^1$$

$$P(X=2)=0{,}432$$

كما يمكن تقريب بعض توزيعات الاحتمالية المتقطعة إلى توزيعات احتمالية مستمرة، فمثلا يمكن تقريب كل من **التوزيع الثنائي و التوزيع البواسوني إلى التوزيع الطبيعي** إذا توفرت **شروط معينة**، لكن مع ملاحظة أساسية هي ان حساب الاحتمالات بعد تقريب التوزيعات المتقطعة إلى توزيعات مستمرة يتطلب القيام بخطوة مهمة تتمثل في **تصحيح استمرارية المتغير**، أي تحويله من متغير متقطع إلى مستمر.

-تصحيح الاستمرارية للمتغير:

اذا كان المتغير العشوائي المدروس يتبع في الأصل توزيعا متقطعا و توفرت فيه شروط التقريب إلى توزيع مستمر، و أردنا حساب احتمال معين لهذا المتغير بالاعتماد على توزيع المستمر المقرب إليه

فإنه يجب القيام بتصحيح قيم المتغير العشوائي المتقطع لتتماشى مع التوزيع المستمر و هو ما يعرف **بتصحيح الاستمرارية و ذلك بإضافة أو طرح المقدار (0,5)** حسب ما يوضحه الجدول التالي:

الجدول رقم(1): تصحيح الاستمرارية:

الاحتمال المطلوب في التوزيع المتقطع.	يتحول إلى	**الاحتمال المطلوب في توزيع المستمر.**
$P(X = x)$		$P(x - 0{,}5 \leq X \leq x + 0{,}5)$
$P(X < x)$		$P(X < x - 0{,}5)$
$P(X \leq x)$		$P(X \leq x + 0{,}5)$
$P(X > x)$		$P(X > x + 0{,}5)$
$P(X \geq x)$		$P(X \geq x - 0{,}5)$
$P(x_1 \leq X \leq x_2)$		$P(x_1 - 0{,}5 \leq X \leq x_2 + 0{,}5)$
$P(x_1 < X < x_2)$		$P(x_1 + 0{,}5 < X < x_2 - 0{,}5)$

3- تقريب التوزيع الثنائي إلى التوزيع الطبيعي:

3-1-شروط تقريب التوزيع الثنائي إلى التوزيع الطبيعي:

لنفترض لدينا المتغير العشوائي X خاضع للتوزيع الثنائي أي $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ إذا كانت **n كبيرة** بشكل كافي و **p و q متقاربتان و قريبتان من 0,5** أو بعيدتان عن 0 و 1 فإنه من الممكن تقريب **التوزيع الثنائي إلى توزيع الطبيعي** و عموما يمكن التقريب إذا تحققت الشروط بالصيغة العددية التالية:

$$\left.\begin{matrix} \boldsymbol{n \geq 30} \\ \boldsymbol{p \cong q \cong 0,5} \\ \boldsymbol{np \geq 15} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{B}(n,p) \approx N\left(\mu_x = np\,, \sigma_x = \sqrt{npq}\right)}$$

أي أن معالم التوزيع الطبيعي سيتم حسابها انطلاقا من معالم التوزيع الثنائي حيث:

$$\boldsymbol{\mu_x = np}$$

$$\sigma_x = \sqrt{npq}$$

3-2-مثال:

في تجربة نقوم برمي قطعة نقود متوازنة 200 مرة، المطلوب:

1- احسب احتمال الحصول على ما بين 80 و 120 صورة.

2- احسب احتمال الحصول على أُقل من 90 صورة.

3- احسب احتمال الحصول على أقل من 85 أو أكثر من 115 صورة.

4- احسب احتمال الحصول على 100 صورة تماما.

الحل:

x_i: متغير عشوائي يمثل عدد الصور الظاهرة في رمي قطعة نقود متوازنة 200 مرة.

$$x_i = \{0, 1, 2, \dots, 200\}$$

قبل حساب الاحتمالات المطلوبة لابد من إيجاد القانون الاحتمالي المناسب من المعطيات لدينا: $X \sim \mathcal{B}(n = 200, p = 0{,}5)$

(لأن التجربة مكررة 200 مرة كل رمية تعطي نتيجتين، نجاح يمثل ظهور الصورة و ذلك باحتمال قدره p=0,5 وفشل يمثل ظهور الكتابة باحتمال قدرهq=0.5 و استقلالية الرميات، و بالتالي يمكن حساب الاحتمالات المطلوبة بالقانون الاحتمالي للتوزيع الثنائي كالتالي:

$$P(X = x) = C_{200}^{x}(0{,}5)^{x}(0{,}5)^{200-x}$$

يمكن حساب الاحتمالات المطلوبة:

$$P(80 \le X \le 120) = P(X = 80) + P(X = 81) + \cdots + P(X = 120)$$

$$= C_{200}^{80}(0{,}5)^{80}(0{,}5)^{120} + \cdots + C_{200}^{120}(0{,}5)^{120}(0{,}5)^{80}$$

نلاحظ وجود مشقة في حساب هذا الاحتمال باستخدام التوزيع الثنائي و نلاحظ أيضا شروط التقريب إلى التوزيع الطبيعي محققة حيث:

$$\left.\begin{array}{c} n = 200 \\ p \cong q \cong 0{,}5 \\ np = 100 \ge 15 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{B}(200\,, 0{,}5) \approx N(\mu_x = 100\,, \sigma_x = 7{,}07)$$

علما أن:

$$\begin{cases} \mu_x = n \cdot p = 200 \cdot 0{,}5 = 100 \\ \sigma_x = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \times 0{,}5 \times 0{,}5} = 7{,}07 \end{cases}$$

أ) حساب الاحتمال الحصول على ما بين 80 و120 صورة:

$$P(80 \leq X \leq 120) = P(79{,}5 \leq X \leq 120{,}5)$$

$$= P\left(\frac{79{,}5-100}{7{,}07} \leq \frac{x-u_x}{\sigma_x} \leq \frac{120{,}5-100}{7{,}07}\right)$$

$$= P(-2{,}89 \leq z \leq 2{,}89)$$

$$= \phi(2{,}89) - \phi(-2{,}89)$$

$$= \phi(2{,}89) - [1 - \phi(2{,}89)]$$

$$= 0{,}9981 - [1 + 0{,}9981]$$

$$= 0{,}9981 - 1 + 0{,}9981$$

$$P(80 \leq X \leq 120) = 0{,}9962$$

ب) حساب احتمال الحصول على أقل من 90 صورة:

$$P(X < 90) = P(X \leq 89{,}5)$$

$$= P\left(\frac{X-u_x}{\sigma_x} < \frac{89{,}5-100}{7{,}07}\right)$$

$$= P(Z < -1{,}48)$$

$$= \phi(-1{,}48)$$

$$= 1 - \phi(1{,}48)$$

$$= 1 - 0{,}9306$$

$$P(X < 90) = 0{,}0694$$

ج) حساب احتمال الحصول على أقل من 85 أو أكثر من 115 صورة:

$$P(X < 85) + P(X > 115) = P(X < 84{,}5) + P(X > 115{,}5)$$

$$= P(X < 84{,}5) + 1 - P(\mathrm{X} \leq 115{,}5)$$

$$= P\left(\frac{X-u_x}{\sigma_x} < \frac{84,5-100}{7,07}\right) + 1 - P\left(\frac{X-u_x}{\sigma_x} \leq \frac{115,5-100}{7,07}\right)$$

$$= P(z < -2,19) + 1 - P(z \leq 2,19)$$

$$= \Phi(-2,19) + 1 - \Phi(2,19)$$

$$= 1 - \Phi(2,19) + 1 - \Phi(2,19)$$

$$= 2 - 2\Phi(2,19)$$

$$= 2 - 2(0,9857)$$

$$P(X < 85) + P(X > 115) = 0,0286$$

د) حساب احتمال الحصول على 100 صورة تماما:

$$P(X = 100) = P(99,5 \leq X \leq 100,5)$$

$$= P\left(\frac{99,5-100}{7,07} \leq \frac{X-u_x}{\sigma_x} \leq \frac{100,5-100}{7,07}\right)$$

$$P(-0.07 \leq z \leq 0.07)$$

$$= \Phi(0.07) - \Phi(-0.07)$$

$$= \Phi(0.07) - [1 - \Phi(0.07)]$$

$$= 0.5279 - 1 + 0.5279$$

$$P(X = 100) = 0.0558$$

4-تقريب التوزيع البواسوني إلى التوزيع الطبيعي:

4-1:شروط تقريب التوزيع البواسوني إلى التوزيع الطبيعي:

لنفترض أنه لدينا المتغير العشوائي x_i الخاضع للتوزيع البواسوني أي $\boldsymbol{X \rightarrow P(\lambda)}$ و كانت قيمة λ كبيرة بحيث $\boldsymbol{\lambda \geq 10}$ فإنه يمكن **تقريب التوزيع البواسوني إلى التوزيع الطبيعي** و عموما يمكن التقريب إذا تحققت الشروط بالصيغة التالية :

$$\left.\begin{matrix}\boldsymbol{\lambda > 10} \\ \boldsymbol{\lambda > 15} \text{ و من الأفضل}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\mathcal{P}(\lambda) \approx \mathcal{N}\left(\mu_x = \lambda, \sigma_x = \sqrt{\lambda}\right)}$$

ملاحظة: بما أن **التوزيع البواسوني متقطع و التوزيع الطبيعي مستمر** فإنه لا بد من القيام بتصحيح الاستمرارية عند حساب الاحتمالات بعد التقريب.

مثال: إذا علمت أن 03% من انتاج إحدى الشركات من المصابيح به عيوب. احسب احتمال أن يكون هناك 50 مصباحا به عيوب في حصة من الإنتاج حجمها 1000مصباح.

الحل:

x_i: متغير عشوائي يمثل عدد المصابيح التي بها عيب في حصة الإنتاج المكونة من 1000مصباح

يمثل عدد المصابيح X حيث $x_i = \{0,1,2, \dots ,1000\}$

قبل حساب الاحتمال المطلوب $P(X = x)$ لابد من إيجاد القانون الاحتمالي المناسب.

واضح من المعطيات أن:

$$\boldsymbol{X \rightarrow B(n = 1000\ , p = 0,03)}$$

كل مصباح مسحوب يعطي نتيجتين: **نجاح** يمثل سحب مصباح به عيب و ذلك باحتمال قدره

$p = 0,03$ **و فشل** يمثل سحب مصباح غير معيب باحتمال قدره $q = 0,97$ و استقلالية المصابيح.

و بالتالي يمكن حساب الاحتمال المطلوب بالقانون الاحتمالي للتوزيع الثنائي كالتالي:

$$P(X = 50) = C_{1000}^{50}(0,03)^{50}(0,97)^{1000-50}$$

نلاحظ أنه هناك مشقة في حساب هذا الاحتمال ومن جهة أخرى نلاحظ أن $\boldsymbol{n}$ **كبيرة جدا** $(\boldsymbol{n = 1000 \geq 50})$

و p صغير جدا $(p = 0,03 < 0,1)$ و هذا يعني أنه **يمكن تقريب التوزيع الثنائي إلى التوزيع البواسوني** كالتالي:

$$B(n = 1000, p = 0,03) \approx P(\lambda = n.p = 1000 \times 0,03 = 30)$$

و منه :

$$P(X = 50) = \frac{e^{-30} \cdot (30)^{50}}{50!}$$

نلاحظ أيضا أن: $\lambda = 30 > 15$ وبالتالي **يفضل التقريب إل التوزيع الطبيعي** كالتالي:

$$P(\lambda = 30) \approx \mathcal{N}\left(u_x = 30, \sigma_x = \sqrt{30} = 5{,}48\right)$$

$$P(X = 50) = p(49{,}5 \leq X \leq 50{,}5)$$

$$= P\left(\frac{49{,}5-30}{5{,}48} \leq Z \leq \frac{50{,}5-30}{5{,}48}\right)$$

$$= P(3{,}56 \leq Z \leq 3{,}74)$$

$$= \Phi(3{,}74) - \Phi(3{,}56)$$

$$= 0{,}9999 - 0{,}9998$$

$$P(X = 50) = 0{,}0001$$

تمارين مقترحة:

التمرين 01:

يحتوي قسم علم التسيير على 100 طالب، 47 منهم ذكور، و 53 منهم اناث، بحيث يتم اختيار طالبين منهم تشير الطلبة في الاجتماعات البيداغوجية.

ليكن المتغير x يمثل عدد الطلبة ذكور الذين تم اختيارهم، المطلوب:

- ما هو القانون الاحتمالي الأصلي لـ X.
- ما هو القانون الاحتمالي الذي يمكن أن نقرب إليه.
- أوجد دالة التوزيع الاحتمالي ل X.
- أوجد التوزيع الاحتمالي لـ X.
- أكتب التوقع الرياضي و الانحراف المعياري.

الحل:

X: متغير عشوائي يمثل عدد الطلبة الذكور الذين تم اختيارهم.

N : مجتمع يحتوي على 100 طالب.

N_1 : العناصر التي تمثل النجاح هو 47 طالب (ذكور)

$N-N_1$: العناصر التي تمثل الفشل هي 53 طالبة.

n : قيم العينة المسحوبة هي 2 طالبين.

- القانون الأصلي لـ X هو القانون فوق الهندسي لأنه من الضروري اختيار الأعضاء دون ارجاع (عضوين مختلفين)

$$\boldsymbol{X \rightarrow H(N_1, N - N_1)}$$

- نلاحظ أن حجم العينة n=2، يبدو صغيرا مقارنة بحجم المجتمع N=100 كما لدينا

$$\frac{n}{N} = \frac{2}{100} = 0{,}02 \leq 0{,}05$$

و عليه نقرب إلى **قانون ثنائي الحد** $\boldsymbol{X \rightarrow B(n,p)}$ لأن شروط التقريب متوفرة.

- دالة التوزيع الاحتمالي لـ x (التوزيع ثنائي الحد).

$$X \rightarrow B(n,p) \quad , \quad x = 0,1,2,\dots,n$$

$$f(X) \rightarrow P(X = x) = C_n^x p^x q^{n-x}$$

بتعريض n و p نجد:

$$\mathrm{X} \rightarrow \mathrm{B}\left(\mathrm{n} = 2 \ , \mathrm{p} = \frac{47}{100} = 0{,}47\right) \quad , \quad \mathrm{x} = 0,1,2$$

$$f(x) \rightarrow P(X = x) = C_2^x (0{,}47)^x (0{,}53)^{2-x} \quad , \quad x = \{0,1,2\}$$

التوزيع الاحتمالي ل x، حيث x = {0, 1, 2}

$$P(X = x) = C_2^x (0{,}47)^x (0{,}53)^{2-x}$$

$$P(X = 0) = C_2^0 (0{,}47)^0 (0{,}53)^2 = 1 \cdot 1 \cdot (0{,}53)^2 = 0{,}2809$$

$$P(X = 1) = C_2^1 (0{,}47)^1 (0{,}53)^1 = 2 \cdot (0{,}47) \cdot (0{,}53) = 0{,}4982$$

$$P(X = 2) = C_2^2 (0{,}47)^2 (0{,}53)^0 = 1 \cdot (0{,}47)^2 \cdot 1 = 0{,}2209$$

ويمكن تلخيص ذلك كالتالي:

X	0	1	2	$\sum P(x)$
$P(X = x)$	0,2809	0,4982	0,2209	1

- **حساب التوقع و الانحراف المعياري :**

- **التوقع الرياضي:**

$$\mu_x = E(X) = n \cdot p = 2 \cdot (0{,}47) = 0{,}94$$

- **التباين :**

$$V(X) = n \cdot p \cdot q = 2 \cdot (0{,}47) \cdot (0{,}53) = 0{,}4982$$

- **الانحراف المعياري:**

$$\sigma_X = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0{,}4982} = 0{,}7058$$

التمرين 2:

لنفرض أنه لدينا 300 سؤال لكل سؤال 4 أجوبة واحدة فقط صحيحة.

- أوجد احتمال أن يحصل الطالب على 78 إجابة صحيحة.

- أوجد احتمال أن يحصل الطالب على 72 و 100 إجابة صحيحة.

الحل:

لدينا x عدد الإجابات الصحيحة ، $n = 300$, $\mathrm{p} = \frac{1}{4}$

$$\mathrm{u} = n \cdot p = 75$$

$$\sigma = 7{,}5$$

لنحسب هذا الاحتمال باستعمال ذو الحدين، فنحصل على:

$$b\left(78; 300; \frac{1}{4}\right) = C_{300}^{78} \left(\frac{1}{4}\right)^{78} \left(\frac{3}{4}\right)^{222} = \ldots\ldots$$

إن حساب هذا الاحتمال يتطلب الكثير من الحسابات، و حيث أن n كبيرة فإنه يمكن تقريب ذو الحدين بالتوزيع الطبيعي.

أ-احتمال أن يحصل الطالب على 78 إجابة صحيحة:

$$P(X=78)=P\left(\frac{77,5-75}{7,5}\leq Z\leq\frac{78,5-75}{7,5}\right)$$

$$=P(0,333\leq Z\leq 0,467)=0,051$$

ب-احتمال أن يحصل الطالب على 72 و 100 إجابة صحيحة:

$$P(72\leq X\leq 100)=P\left(\frac{71,5-75}{7,5}\leq Z\leq\frac{100,5-75}{7,5}\right)=0,680$$

التمرين 03:

في صناعة الأواني الزجاجية، قد تتكون فقاعات داخل الزجاج مما يقلل من جودته إلى مستوى الدرجة الثانية، إذا كان متوسط القطع المنتجة التي تحتوي على فقاعة قطعة واحدة من كل 1000 قطعة منتجة.

-احسب احتمال أن تكون ستة قطع بالضبط من بين 300 قطعة من الدرجة الثانية؟

الحل:

نفترض أن X عدد الزجاجات التي تحتوي عل الفقاعات:

$$X\rightarrow B(3000,0,001)$$

لدينا:

$$P=0,001<0,005\quad,\quad n=3000>100$$

و من ثم يمكننا **تقريب التوزيع الثنائي إلى توزيع بواسون** اين:

$$\boldsymbol{\lambda=np=3000\times 0.001=3}$$

ومنه احتمال أ يكون ستة قطع بالضبط من بين 3000 قطعة من الدرجة الثانية يساوي ما يلي:

$$P(X=6)=\frac{e^{-3}.3^6}{6!}\approx 0,0498\approx 0,05$$

التمرين04:

يقوم مصنع بإنتاج مصابيح كهربائية تعبأ في صناديق تحتوي على 100 مصباح، إذا أشارت دراسات مراقبة الجودة إلى أن 0,5% من المصابيح المنتجة معيبة، فما هي النسبة المئوية للصناديق التي ستحتوي على:

أ- لا تحتوي على أي مصابيح معيبة؟

ب- تحتوي على مصباحين معيبين أو أكثر؟

الحل:

لدينا $n = 100$: كبيرة، $p = 0,005$: صغيرة، ومنه يمكننا تقريب التوزيع الثنائي إلى توزيع بواسون حيث:

X : عدد المصابيح المعيبة في الصندوق.

$$X \to P(\lambda) \quad , \quad \lambda = n.p = 100 \times 0,005 = 0,5$$

احتمال أن لا تحتوي الصناديق على أي مصابيح معيبة:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-0,5} \cdot (0,5)^0}{0!} = \frac{e^{-0,5} \cdot 1}{1}$$

$$= e^{-0,5} = 0,6065 \approx 61\%$$

ب-احتمال أن تحتوي الصناديق على مصباحين أو أكثر معيبين:

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + \ldots\ldots$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$P(X = 1) = \frac{e^{-0,5} \cdot (0,5)^1}{1!} = \frac{e^{-0,5} \cdot 0,5}{1} = 0,3033$$

$$P(X \geq 2) = 1 - [0,6065 + 0,3033] = 0,0902 \approx 9\%$$

التمرين الخامس:

تشير النتائج السابقة إلى أن واحدا من كل 1000 محرك كهربائي يكون معيبا في المتوسط

أ) أوجد احتمال وجود 4 محركات كهربائية معيبة في دفعة من 2000 محرك؟

ب) ما هو أكبر عدد N من المحركات الكهربائية التي يمكن وضعها في صندوق بحيث يكون احتمال عدم وجود أي محرك كهربائي معيب يساوي 1/2 على الأقل؟

الحل:

ليكن x عدد المركبات المعيبة:

$$X \to B\left(2000, \frac{1}{1000}\right)$$

n: كبيرة جدا ، p: صغيرة جدا و منه يمكن تقريب التوزيع الثنائي إلى توزيع بواسون حيث :

$$\lambda = \mathrm{n} \cdot \mathrm{p} = 2000 \cdot \frac{1}{1000} = 2$$

أ- احتمال وجود 4 محركات كهربائية معينة في دفعة من 200 محرك :

لدينا :

$$P(X = 4) = \frac{\lambda^4 \cdot e^{-\lambda}}{4!} = \frac{2^4 \cdot e^{-2}}{4!} = \frac{16 \cdot e^{-2}}{24} = 0{,}09022$$

ب - أكبر عدد N من المحركات الكهربائية التي يمكن وضعها في صندوق بحيث يكون احتمال عدم وجود أي محرك معيب فيها هو يساوي $\frac{1}{2}$ على الأقل:

$$\lambda = Np = \frac{N}{1000}$$

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0 \cdot e^{-\lambda}}{0!} = e^{-\lambda} = e^{-\frac{N}{1000}}$$

$$e^{-\frac{N}{1000}} = 0{,}5 \quad , \quad -\frac{N}{1000} = \ln(0{,}5)$$

$$N = 693{,}14 \approx N = 693$$

التمرين السادس:

مستشفى يستقبل في المتوسط 12,5 مكالمة هاتفية كل 5 دقائق، المطلوب:

أ) ما هو احتمال ان يستقبل 10 مكالمات هاتفية على الأكثر في التوقيت بين11:10 و 11:15 صباحا.

ب) ما هو احتمال أن تستقبل 11 مكالمات هاتفية في التوقيت بين 14 و 14:15 صباحا.

ت) ما هو احتمال ا تستقبل بين 5 و 15 مكالمات هاتفية في التوقيت بين 00 و 00:05 ليلا.

الحل:

نلاحظ أن هذه التجربة تتبع توزيع بواسون حيث λ =12.5 و نظرا لصعوبة حل المسألة باستخدام توزيع بواسون، كذلك لأن λ =12.5≥10 لذلك يتم استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع بواسون لأن شروط التقريب متوفرة و بالتالي:

$$\sigma^2 = \mu = \lambda = 12.$$

أ) احتمال أن يستقبل 10 مكالمات هاتفية على الأكثر في التوقيت بين 11:10و 11:15 صباحا هو:

$$P(X \leq 10) = P(X \leq 10 + 0{,}5) = P\left(Z \leq \frac{10+0{,}5-12{,}5}{\sqrt{12{,}5}}\right)$$

$$P\left(z \leq \frac{-2}{3{,}54}\right) = P(z \leq -0{,}56)$$

$$= 1 - P(z \leq 0{,}56) = 1 - 0{,}9406 = 0{,}0594$$

ب) احتمال أن تستقبل 11 مكالمات هاتفية في التوقيت بين 14 و 14:15 مساءا هو :

$$P(X = 11) = P(11 - 0{,}5 \leq z \leq 11 + 0{,}5) = P\left(\frac{11-0{,}5-12{,}5}{\sqrt{12{,}5}} \leq z \leq \frac{11+0{,}5-12{,}5}{\sqrt{12{,}5}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-2}{3{,}54} \leq z \leq \frac{-1}{3{,}54}\right) = P(-0{,}56 \leq z \leq -0{,}28) = P(z \leq -0{,}28) - P(z \leq 0{,}50)$$

$$= [1 - P(z \leq 0{,}28)] - [1 - P(z \leq 0{,}56] = (1 - 0{,}6103) - (1 - 0{,}7123) = 0{,}102$$

ت) احتمال ا تستقبل بين 5 و 15 مكالمات هاتفية في التوقيت بين 00 و 00:05 ليلا.

$$P(5 \leq X \leq 15) = P(5-0,5 \leq X \leq 15+0,5) = P\left(\frac{5-0,5-12,5}{\sqrt{12,5}} \leq Z \leq \frac{15+0,5-12,5}{\sqrt{12,5}}\right)$$

$$= P\left(\frac{-8}{3,54} \leq z \leq \frac{3}{3,54}\right) = P(-2,26 \leq z \leq 0,85) = P(z \leq 0,85) - P(z \leq -2,26)$$

$$P(z \leq 0,85) - [1 - P(z \leq 2,26)] = 0,8023 - [1 - 0,9881] = 0,7904$$

التمرين السابع:

اخترنا لقاحا ضد الزكام، و قد أعطى اللقاح لمئتي شخص، و تمت مراقبتهم بالنسبة بإصابتهم بالزكام لمدة عام و قد نجا منهم 120 شخصا من الإصابة، فإذا فرضنا ان احتمال عدم الإصابة بالزكام بصورة طبيعية دون استخدام أي لقاح هو 0,5 فما هي النتيجة التي يمكن استخلاصها من هذه التجربة حول فعالية اللقاح.

الحل:

لنرمز $n = 200$ و $p = 0,5$ باستخدام التقريب الطبيعي للتوزيع الحداني لنرمز بـ X لعدد الناجين من الإصابة بالزكام، و لنحسب احتمال أن يكون x أكبر من أو يساوي 120.

نلاحظ أن:

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(200)(0,5)(0,5)} = 7,07$$

$$\mu = np = 200(0,5) = 100$$

$$P(X \geq 120) = P\left[\frac{x-u}{\sigma} \geq \frac{120-100}{7,07}\right] = P[z \geq 2,828] = 1 - P(Z < 2,828)$$

$$= 1 - 0,9977 = 0,0023$$

نلاحظ أن هذا الاحتمال قريب من الصفر، بحيث تمكن اهماله و هذا يدعونا إلى الاعتقاد بأن اللقاح مفيد بالفعل في منع الإصابة بالزكام.

التمرين الثامن:

تحتوي مجموعة بضاعة مصنعة على خمسة بالمائة 5% من القطع المعابة، فإذا اخترنا و بصورة عشوائية مائة قطعة من هذه المجموعة، فما هو احتمال أن تحوي هذه المجموعة الصغيرة أكبر من 6 عناصر معابة.

الحل:

لنرمز بـ y لعدد العناصر المعابة و الموجودة في العينة المستخرجة في البضاعة نلاحظ أن المتغير y توزيعا حدانيا (ثنائي) بالمتغيرين $n = 100$; $p = 0,05$ ما أن حجم العينة n كبيرا، فإننا نستخدم التقريب الطبيعي الحداني بحيث تأخذ:

$$\mu = np = 100(0,05) = 5$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(100)(0,05)(0,95)} = 2,179$$

$$P(y > 6) = P\left(\frac{y-u}{\sigma} > \frac{6-5}{2,179}\right) = P(z > 0,458)$$

$$= 1 - P(z < 0,485)$$

$$= 1 - 0,6772 = 0,3228$$

الفصل الرابع: المتغيرات العشوائية الثنائية.

1- التغيرات العشوائية المزدوجة المتقطعة

- ✓ دالة التوزيع الاحتمالي المتقطع للمتجه العشوائي (X , Y)
- ✓ دالة التوزيع التراكمي للمتجه العشوائي (X , Y)
- ✓ القيم المميزة للمتغيرات العشوائية المتقطعة .

2- المتغيرات العشوائية المزدوجة المتصلة

- ✓ دالة التوزيع الاحتمالي المتصل للمتجه العشوائي (X , Y)
- ✓ دالة التوزيع التراكمي للمتجه العشوائي (X , Y)
- ✓ القيم المميزة للمتغيرات العشوائية المتصلة

تناولنا سابقا متغيرا عشوائيا واحدا، لكن في الكثير من الحالات قد توجد ظواهر عشوائية تحدث مع بعضها البعض فمثلا في الأسواق المالية نجد أسعار الأسهم في ارتباط مع بعضها فعند ارتفاع السهم X قد يصاحبه ارتفاع في سعر السهمy و العكس صحيح، التغيرات العشوائية المزدوجة تشكل جانبا هاما في الإحصاء و علم الاحتمال تعرف هذه المتغيرات بأنها زوج من المتغيرات العشوائية التي يتم دراستها معا لفهم العلاقة بينهما و كيفية تأثير كل متغير على الآخر، في هذا السياق تم التحليل الارتباط و التفاعل بين هذين المتغيرين العشوائيين

1- **المتغيرات العشوائية ذات بعدين:** (تنقسم المتغيرات العشوائية إلى نوعين من المتغيرات متقطعة و متصلة)

2- التوزيعات الاحتمالية الثنائية للمتغيرات المتقطعة:

نفرض أن X و y متغيران عشوائيان معرفان على نفس فضاء العينة S حيث:

$S_y = \{y_1 ; y_2; \dots\dots\dots y_n\}$ و $S_x = \{x_1; x_2 \dots\dots\dots x_n\}$

إذا كان (x , y) متغيرا عشوائي ثنائيا فإن $h(x,y)$ يكون اقترانا احتماليا (توزيعا مشتركا) إذا تحقق ما لي : [1]

$$\begin{cases} h(x,y) \geq 0 \\ \Sigma_{x=1}^{n}\Sigma_{y=1}^{m} h(x,y) = 1 \end{cases}$$

X / y	y_1	y_2	.....	y_m	المجموع
x_1	$h(x_2,x_1)$	$h(x_1,x_2)$		$h(x_1,x_m)$	$f(x)$
x_2	$h(x_2,x_1)$	$h(x_1,x_2)$		$h(x_1,x_m)$	$f(x_2)$
$\vdots$					
x_n	$h(x_n,y_1)$	$h(x_1,x_m)$		$h(x_n,x_m)$	$f(x_n)$
المجموع	$g(y_1)$	$g(y_2)$		$g(y_m)$	

يمثل هذا الجدول قانون التوزيع المشترك للزوج (x,y)

[1] Nitis Mukhopadhyay, **Probability and Statistical Inference**, Marcel Dekker, INC, new york, 2000 p 125.

- نسمى القيمة:

$f_X(x) = \sum_y h(x,y)$ بالكثافة الهامشية للمتغير x.

أما $g_y(x) = \Sigma_x h(x,y)$ فهو اقتران الكثافة الهامشية للمتغير y.

أما الكثافة الشرطية للمتغير x إذا علم y فهي :

$$h\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{h(x,y)}{f_y(y)}$$

و العكس الكثافة الشرطية للمتغير y إذا علم x فهي:

$$h\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{h(x,y)}{f_x(x)}$$

مثال01:

ليكن لدينا المتغيرين العشوائيين X و Y معرفين كما يلي:

ليكن المتغير العشوائي X معرف كما يلي:

الشخص يدخن:$X = 1$

الشخص لا يدخن: $X = 0$

و ليكن Y المتغير العشوائي المعرف كما يلي:

الشخص مصاب بالسرطان : $Y = 1$

الشخص غير المصاب: $Y = 0$

نلخص الاقتران الاحتمالي $h(X,Y)$ (جدول قانون التوزيع الاحتمالي المشترك كما يلي:

x \ y	0	1
0	0,40	0,02
1	0,03	0,55

من خلال الجدول نجد أن احتمال أن يكون الشخص لا يدخن و غير مصاب هو 0.40 أي:

$$P(X = 0\ ,Y = 0)\ =\ h(0\ ,0)\ =\ 0.40$$

$$P(X = 0\ ,Y = 1)\ =\ h(0\ ,1)\ =\ 0.02$$

مثال02:

من خلال التوزيع الاحتمالي المشترك التالي يمكن إيجاد الكثافة الهامشية للمتغير x و y كما يلي:

x y	0	1	الكثافة الهامشة x $h\ (x.y)$ $=\ \Sigma y\ h(x,y)$
0	0,1	0,0	0,1
1	0,3	0,4	0,7
2	0,1	0,1	0,2
الكثافة الهامشة y $g_Y(x) = \sum_x h(x,y)$	0,5	0,5	1

1-2- قانون التوزيع الشرطي:

- **قانون التوزيع الشرطي للمتغير X** : أي حساب قيمة$P(x/y)$ و يعرف بأنه جدول القيم pij/pj

حيث:

pij: هو عبارة عن قيم : $P(X\ =\ x_i\ ,Y\ =\ y_i)$

pj: هو عبارة عن قيم : $P(Y\ =,y_i)$

و بالتالي فإن قانون التوزيع الشرطي يساوي إلى المصفوفة التالية:

$$P(X/\mathrm{Y}) = {P_{ij}}/{P_j} = \frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}$$

- **قانون التوزيع الشرطي للمتغير y:** أي قيمة $p(Y\ /\ X)$ ويعرف بأنه جدول القيم pij/pi

حيث:

$$P(Y/\mathrm{X}) = {p_{ij}}/{p_i} = \frac{p(X=x_i,Y=y_j)}{p(X=x_i)}$$

مثال 03: من خلال المثال السابق نجد جدول الاحتمال الشرطي للمتغير X:

$$h(x/\mathrm{y}) = \frac{h(x,y)}{f_Y(y)}$$

اي: $h(x/\mathrm{y}) = \frac{h(x,y)}{f_Y(y)}$ فتكون على الشكل التالي:

x \ y	0	1
0	0,2	0
1	0,6	0,8
2	0,2	0,2

$$h\left({}^{x}/_{y}\right) = h(x,y)/f_y(y) = f(x/y) = \frac{h(0,1)}{0,5} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

$$h\left({}^{x}/_{y}\right) = h(x,y)/f_y(y) = f(x/y) = \frac{h(1,1)}{0,5} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$$

$$h\left({}^{x}/_{y}\right) = h(x,y)/f_y(y) = f(x/y) = \frac{h(1,2)}{0,5} = \frac{0,1}{0,5} = 0,2$$

ملاحظة: يكون المتغيرين x و y مستقلين إذا كان:

$$h(x,y) = f(x).g(y)$$

في المثال السابق نجد:

$$h(x,y) \neq f(x).g(y)$$

$$h(0,1) \neq f(0).g(1)$$

$$0.1 \neq 0.1 \times 0.5$$

$$0.1 \neq 0.05$$

الاستنتاج: أي أن المتغيرين مرتبطان (غير مستقلين).

مثال 04: حدد نوع التوزيع المشترك للزوج (X,Y) من المتغيرات العشوائية المستقلة والمعرفة بالفضاء الاحتمالي (S, Ω) علماً أن قانون الاحتمال للمتغيرين العشوائيين على الشكل التالي:

الكثافة الهامشية للمتغير X:

X	1	2	3	4
$P(X)$	0.1	0.2	0.3	0.4

الكثافة الهامشية للمتغير Y:

y	-1	0	0.25
$P(y) = g_Y(y)$	0.25	0.5	0.25

لإيجاد التوزيع المشترك للزوج (X, Y) لدينا:

$$h(x,y) = f_X(x) \cdot g_Y(y) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_i)$$

x y	−1	0	1	$f_X(x)$
1	0.025	0.05	0.025	0.1
2	0.05	0.1	0.05	0.2
3	0.075	0.15	0.075	0.3
4	0.1	0.2	0.1	0.4
$g_Y(y)$	0.25	0.5	0.25	1

ملاحظة:

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = \sum P_i = 1$

$P_i = \sum_{j=1}^{m} P_{ij} \quad , \quad i = 1,2, \dots, n$

$P_j = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} \quad , \quad j = 1,2, \dots, m1.$

2- دالة التوزيع التراكمي للمتجه العشوائي:(X, Y)

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين وكانت $f(x,y)$دالة الكثافة المشتركة لهذين المتغيرين عندئذٍ نُعرّف دالة التوزيع التراكمي للمتجه العشوائي (X, Y) والتي يرمز لها بالرمز $f(x,y)$

حيث تكتب بالعلاقة التالية:

$f(x,y) = P(X \le x, Y \le y)$

حيث x و y تمثل أعداداً حقيقية من قيم المتغيرين X و Y على الترتيب، فإذا كان (X, Y) متجهاً عشوائياً متقطعاً فإن:

$f(x_0,y_0) = P[X \le x_0, Y \le y_0] = \sum_{x \le x_0}\sum_{y \le y_0} f(x,y)$

$= \sum_{x \le x_0}\sum_{y \le y_0} p(X = x_i, Y = y_j)$

2-1- القيم المميزة للمتغيرات العشوائية المتقطعة

سنتطرق في هذه الفقرة إلى ثلاثة معاملات إحصائية وهي: التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري، ومعامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين أو أكثر.

2-2-1. التوقع الرياضي:

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين منفصلين لهما توزيع مشترك، وكانت دالة الكثافة الاحتمالية لكل منهما:

$$f(x) = P(X = x) \quad . \quad g(y) = P(Y = y)$$

فإن التوقع الرياضي لهذا التوزيع المشترك يكون من الشكل التالي:

$$E(x,y) = \sum_x \sum_y (x_i \cdot y_j) f(x_i, y_j)$$

2-2-2التباين المزدوج (المغاير):

يُعرف التباين المزدوج لمتغيرين عشوائيين X و Y (أو المغاير المشترك) بالعلاقة التالية:

$$Cov(X,Y) = \sum_i \sum_j (x_i \cdot y_j) f(x_i, y_j) - \sum_x x_i f(x_i) \sum_y y_j g(y_j)$$

$$Cov(X,Y) = E(X,Y) - E(X)E(Y)$$

حيث

E(X) و E(Y) هما المتوسطان الحسابيان للمتغيرين X و Y على الترتيب.

وبطريقة مكافئة:

$$Cov(X,Y) = \sum_i \sum_j [x_i - E(X)][y_j - E(Y)] f(x_i, y_j)$$

$$= E\left[\left(x_i - E(X)\right)\left(y_j - E(Y)\right)\right]$$

معامل الارتباط (Corrélations Coefficient)

2-2-3- معامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين :

إن معامل الارتباط يقيس شدة العلاقة بين المتغيرين X و Y ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

حيث

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

باختصار:

- **التوقع الرياضي:**

$$E(X) = u_x = \sum_x \sum_y x \cdot P(x,y)$$
$$E(Y) = \mu_y = \sum_x \sum_y y \cdot P(x,y)$$

- **التباين:**

$$\sigma_x^2 = \sum_x \sum_y \big(x - E(X)\big)^2 \cdot P(x,y)$$
$$\sigma_y^2 = \sum_x \sum_y \big(y - E(Y)\big)^2 \cdot P(x,y)$$

- **التباين المشترك:**

$$Cov(X,Y) = E(X,Y) - E(X)E(Y)$$

حيث أن :

$$E(X,Y) = \sum_x \sum_y x_i \cdot y_j \cdot P_{ij}$$

3 – المتغيرات العشوائية المتصلة:

يسمى المتجه العشوائي (X, Y) متجهاً مستمراً إذا كانت كل من مركباته عبارة عن متغير عشوائي مستمر، أي أن المتجه (X, Y) متصل إذا كانت قيمه تشكل مجموعة غير منتهية وغير قابلة للعد من الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية.

3-1- دالة التوزيع الاحتمالي المتصل للمتجه العشوائي :(X, Y)

ليكن (X, Y) متجهاً عشوائياً مستمراً، عندئذٍ تكون الدالة f(x, y) المعرفة على مجموعة قيم هذا المتجه والتي تأخذ قيمها من مجموعة الأعداد الحقيقية R دالة كثافة احتمالية للمتجه العشوائي المستمر إذا حققت الشرطين التاليين:

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(x,y) \geq 0} \\ \boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dx\, dy = 1} \end{cases}$$

من التعريف السابق نجد ان

$$P[x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2] = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x,y)\ dx\, dy$$

وذلك لجميع الأعداد الحقيقية x_1, x_2, y_1, y_2 حيث $y_1 \leq y_2$. و $x_1 \leq x_2$

كما يمكننا الحصول على دالة الكثافة لكل من المتغيرين العشوائيين المستمرين X و Y كما يلي:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dy$$

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ dx$$

حيث تسمى الدالتين f(x) و g(y) بالدالتين الكثافة الهامشية للمتغيرين العشوائيين X و Y على الترتيب:

دوال المتغيرات العشوائية المزدوجة.

3-2- دالة التوزيع التراكمية للمتجه العشوائي(X, Y) :

إذا كان (X, Y) متجهاً عشوائياً مستمراً فإن:

$$f(x_0/y_0) = p\,[x \leq x_0\,, y \leq y_0] = p[x < x_0\,, y < x_0\,, y] = \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{x_0} f(x,y)dxdy$$

3-3- القيم المميزة للمتغيرات العشوائية المستمرة :

3-3-1 التوقع الرياضي :

إذا كان X و Y متغيران عشوائيان متصلان ومعرفين بالتوزيع الاحتمالي المشترك f(x, y) فإن:

$$E(X) = \mu_x = \int\int x \cdot f(x,y)\, dx\, dy$$

$$E(Y) = \mu_y = \int\int y \cdot f(x,y)\, dx\, dy$$

3-3-2-التباين :

يكون التباين بالعلاقة التالية:

$$\sigma_x^2 = \int\int \big(x - E(X)\big)^2 \cdot f(x,y)\, dx\, dy$$

$$\sigma_y^2 = \int\int \big(y - E(Y)\big)^2 \cdot f(x,y)\, dx\, dy$$

3-3-3- التباين المشترك:

$$Cov(X,Y) = \int R \int (x - \mu_x)\big(y - \mu_y\big) \cdot f(x,y)\, dx\, dy$$

3-3-4- معامل الارتباط:

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

حيث σ_y و σ_x هما الانحراف المعياري لـ X و Y على الترتيب.

ملاحظة

ادا كان $Cov(X,Y) = 0$ فإن معامل الارتباط $\rho = 0$، أي أن المتغيرين X و Y مستقلين.

تمارين مقترحة:

التمرين 01:

صندوق يحتوي على 3 كرات بيضاء، 4 كرات خضراء، 5 كرات زرقاء. نسحب 3 كرات دفعة واحدة ونفرض أن X متغير عشوائي يمثل عدد الكرات البيضاء المسحوبة، و Y عدد الكرات الخضراء المسحوبة.

المطلوب: أوجد جدول التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين X و Y.

الحل :

لنسمِّ القانون الاحتمالي المزدوج (X, Y) بـ Z، الذي هو عبارة عن احتمال وقوع المتغير العشوائي X و Y في آن واحد، حيث أن:

$$P_ij = P(X = xi \cap Y = yj)$$

$$0 \leq P_ij \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{ij} = 1$$

ومنه:

عند سحب 3 كرات دفعة واحدة فإنه من الممكن الحصول على 0 بيضاء إلى غاية 3 بيضاء، وكذلك الأمر بالنسبة للكرات الخضراء من 0 إلى 3 خضراء، وعليه القانون الاحتمالي المزدوج يكتب كما يلي:

Y / X	0	1	2	3	المجموع
0	$C_3^0 \cdot C_4^0 \cdot C_5^3 / C_{12}^3 = 10/220$	$C_3^0 \cdot C_4^1 \cdot C_5^2 / C_{12}^3 = 40/220$	$(C_3^0 \times C_4^2 \times C_5^1) / C_{12}^3 = 30/220$	$(C_3^0 \times C_4^3 \times C_5^0) / C_{12}^3 = 4/220$	220/84
1	$(C_3^1 \times C_4^0 \times C_5^2) / C_{12}^3 = 30/220$	$(C_3^1 \times C_4^1 \times C_5^1) / C_{12}^3 = 60/220$	$(C_3^1 \times C_4^2 \times C_5^0) / C_{12}^3 = 18/220$	0	220/108
2	$(C_3^2 \times C_4^0 \times C_5^1) / C_{12}^3 = 15/220$	$(C_3^2 \times C_4^1 \times C_5^0) / C_{12}^3 = 12/220$	0	0	
3	$C_3^3 \cdot C_4^0 \cdot C_5^0 / C_{12}^3 = 1/220$	0	0	0	1/220
المجموع	56/220	112/220	*48/220*	*4/220*	220/220 *=1*

التمرين 2

نلقي حجري نرد ونعرف X بأنه متغير عشوائي الذي يخصص لكل ثنائية الرقم الأكبر فيهما، و Y بأنه متغير عشوائي يخصص مجموع الرقمين في كل ثنائية.

المطلوب:

1- اوجد التوزيع المشترك ل xوy

2- أوجد توزيع الدوال الهامشية f(x) و g(y).

3- أوجد التوقع والتباين المشترك

الحل:

1. التوزيع المشترك (X, Y):

X/y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
1	1/36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1/36
2	0	2/36	1/36	0	0	0	0	0	0	0	0	3/36
3	0	0	2/36	1/36	0	0	0	0	0	0	0	5/36
4	0	0	0	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	0	0	7/36
5	0	0	0	0	2/36	2/36	2/36	1/36	1/36	0	0	9/36
6	0	0	0	0	0	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	11/36
$\sum$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1

2. أوجد توزيع الدوال الهامشية $f(x)$ و $g(y)$

- الدالة الهامشية $f(x)$

x	1	2	3	4	5	6	$\sum$
f(x)	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36	1
[x − E(x)]	−3.5	−2.5	−1.5	−0.5	0.5	1.5	−6

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum[x - E(x)]^2}{n}} = \sqrt{\frac{(-6)^2}{6}} = \sqrt{6} = 2.4$$

- الدالة الهامشية g(y):

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
g(y)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1
y −] [E(y)	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	0

$$E(Y) = \sum y_j \cdot g(y_j)$$

$$E(Y) = 2(1/36) + 3(2/36) + 4(3/36) + \cdots + 12(1/36) = 07$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum[y_j - E(y)]^2}{n}} = \sqrt{\frac{(0)^2}{11}} = 0$$

3. أوجد التوقع والتباين المشترك بين المتغيرين X و Y:

- التوقع المشترك $E(x, y)$

$$E(x,y) = \sum\sum (x_i \cdot y_j) \cdot f(x_i, y_j)$$

$= 1 \cdot 2 \cdot (1/36) + 2 \cdot 3 \cdot (2/36) + 2 \cdot 4 \cdot (1/36) + 3 \cdot 4 \cdot (2/36) + 3 \cdot 5 \cdot (2/36) + 3 \cdot 6 \cdot (1/36) + 4 \cdot 5 \cdot (2/36) + 4 \cdot 6 \cdot (2/36) + 4 \cdot 7 \cdot (2/36) + 4 \cdot 8 \cdot (1/36) + 5 \cdot 6 \cdot (2/36) + 5 \cdot 7 \cdot (2/36) + 5 \cdot 8 \cdot (2/36) + 5 \cdot 9 \cdot (2/36) + 5 \cdot 10 \cdot (1/36) + 6 \cdot 7 \cdot (2/36) + 6 \cdot 8 \cdot (2/36) + 6 \cdot 9 \cdot (2/36) + 6 \cdot 10 \cdot (2/36) + 6 \cdot 11 \cdot (2/36) + 6 \cdot 12 \cdot (1/36)$

$= \frac{2}{36} + \frac{12}{36} + \frac{8}{36} + \frac{24}{36} + \frac{30}{36} + \frac{18}{36} + \frac{40}{36} + \frac{48}{36} + \frac{56}{36} + \frac{32}{36} + \frac{60}{36} + \frac{70}{36} + \frac{80}{36} + \frac{90}{36} + \frac{50}{36} + \frac{84}{36} + \frac{96}{36} + \frac{108}{36} + \frac{120}{36} + \frac{132}{36} + \frac{72}{36} = \frac{1232}{36}$

$= 34.22$

- **التباين المشترك**

$$Cov(x,y) = \sum\sum (x_i \cdot y_j) \cdot f(x_i, y_j) - \sum x_i \cdot f(x_i) \cdot \sum y_j \cdot g(y_j)$$

$$Cov(x,y) = E(x,y) - E(X) \cdot E(Y)$$

$= \frac{1232}{36} - \left(\frac{161}{36} \cdot \frac{252}{36}\right)$

$= \frac{1232}{36} - \frac{40572}{1296}$

$= 34.22 - 31.30 = 2.92$

التمرين الثالث :

نفرض التوزيع المشترك الاحتمالي التالي:

x \ Y	−3	2	4	المجموع
1	0.1	0.2	0.2	0.5
2	0.3	0.1	0.1	0.5
$\sum$.	0.4	0.3	0.3	1

المطلوب

A. أحسب التباين المشترك لهذا التوزيع.

B. أحسب معامل الارتباط، وهل X و Y مستقلان؟

الحل:

$$Cov(x,y) = \sigma_{xy} = \sum_i \sum_j x_i y_j \cdot h(x,y) - u_x \cdot u_y$$

$$u_x = \sum x_i \cdot f(x) = 1 \times 0{,}5 + 3 \times 0{,}5 = 2$$

$$u_y = \sum y_j \cdot f(y) = -3 \times 0{,}4 + 2 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}3 = 0{,}6$$

$$E(x,y) = \sum_i \sum_j x_i y_j \cdot h(x,y) = 1(-3) \times 0{,}1 + 1 \times 2 \times 0{,}2 + 1 \times 4 \times 0{,}2$$

$$\ldots\ldots\ldots + 2 \times 4 \times 0{,}1 = 0$$

ومنه:

$$Cov(X,Y) = 0 - 2.0{,}6 = -1{,}2$$

$$\sigma_x^2 = \sum x_i^2 \times f(x) - u_x^2 = (1 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}5) - 4 = 1$$

من جهة اخرى لدينا

$$\sigma_y^2 = \sum y_j^2 \times f(y) - \mu_y^2 = (9 \times 0{,}4 + 4 \times 0{,}3 + 16 \times 0{,}3) - 0{,}36 = 9{,}24$$

لنصل الى

$$\rho(x,y) = \frac{Cov(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{-1{,}2}{1 \cdot \sqrt{9{,}24}} = -0{,}4$$

- من المؤكد أن X و Y غير مستقلين لأن معامل الارتباط غير معدوم.

قائمة المراجع:

1- أمير حنا هرمز – الإحصاء الرياضي ، دار الكتب للطباعة و النشر ، الموصل ، جهوية العراق ، 1990 ، ص 279

2- أنيس اسماعيل كنجوة الاحصاء والاحتمالات ، الطبعة الأولى، مكتبة العبيكان للنشر، الرياض

3- ثروت محمد عبد المنعم ، مدخل حديث للإحصاء و الاحتمالات ، بدون سنة نشر

4- جبار عيد مضحي ، مقدمة في نظرية الاحتمالات ، دار المسيرة ، للنشر و التوزيع و الطباعة ، عمان الأردن ، 2011

5- جلال مصطفى الصياد ، نظرية الاحتمالات ، دار حافظ للنشر و التوزيع ، جدة ، المملكة العربية السعودية

6- سليمان أبو بدر ، ترجمة باسم سرحان ، استخدام الأساليب الإحصائية في بحوث العلوم الاجتماعية (دليل كامل) لبرنامج الحزمة الإحصائية spss)الطبعة الثانية المركز العربي للأبحاث و دراسة السياسيات للنشر ، قطر 2019

7- صلاح علي مبخوت ، مبادئ الإحصاء و الاحتمالات و الإحصاء الرياضي دار الكتب صنعاء ، ط 1 ، 2001

8- عايد كريم عبد عون الكتاني : مقدمة في الإحصاء و تطبيقات spss ، دار اليازوري العلمية ، الأردن ،2014

9- على عبد السلام العماري، على حسين العجيلي، الإحصاء و الاحتمالات ، النظرية و التطبيق، دار الحكمة ، طرابلس

10- علي عبد السلام العماري ، علي حسين العجيلي ، الإحصاء و الاحتمالات ، النظرية و التطبيق ، منشورات ELFA ، 2000 ، فاليتا ، مالطا

11- كامل فليفل ، فتحي حمدان ، الإحصاء ، دار المناهج للنشر و التوزيع ، عمان ، الأردن ، الطبعة الأولى 2013

12- محمد بداوي الإحصاء الاستدلالي ، دار هومة للطباعة و النشر و التوزيع ، الجزائر ، 2017

13- محمد صبحي أبو صالح ، الطرق الإحصائية ، دار اليازوري العلمية للنسر و التوزيع ، الأردن ، عمان الطبعة العربية ، 2009

14- محمد غالب المدني – الاحتمالات و الإحصاء ، مركز النشر العلمي ، جامعة الملك عبد العزيز ط 8 ، المملكة العربية السعودية – 2004

15- موراي شبيجل و آخرون ، الاحتمالات و الإحصاء ، ملخصات شوم ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، مصر ط 1 ، 2004

16- Sheldon Ross (2008) ; A First Cour in Probabilité ; Pearson edicaionic United states of amirica 8 Th ed

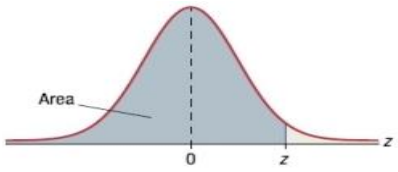
17- christophe Hurlin, valeric Mignon, statistique et probabilite's en economie- gestións 2 adition, DUNOD, 2022

18- Redjal Kaci (2004), Cours de Probabilités, offices des publications universitaires, Alger

قائمة الملاحق

Standard Normal distribution

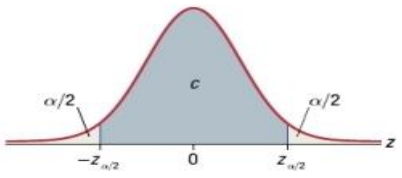
Numerical entries represent the probability that a standard normal random variable is between $-\infty$ and z where $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Critical Values of z

Level of Confidence, c	$\alpha = 1 - c$	$z_{\alpha/2}$
0.80	0.20	1.28
0.85	0.15	1.44
0.90	0.10	1.645
0.95	0.05	1.96
0.98	0.02	2.33
0.99	0.01	2.575

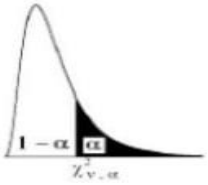


t Table

cum. prob	$t_{.50}$	$t_{.75}$	$t_{.80}$	$t_{.85}$	$t_{.90}$	$t_{.95}$	$t_{.975}$	$t_{.99}$	$t_{.995}$	$t_{.999}$	$t_{.9995}$
one-tail	0.50	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
two-tails	1.00	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.002	0.001
df											
1	0.000	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	0.000	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	0.000	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.000	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.000	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.000	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.000	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.000	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.000	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.000	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.000	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.000	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.000	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.000	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.000	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.000	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.000	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.000	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.000	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.000	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.000	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.000	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.000	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.000	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.000	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.000	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.000	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.000	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.000	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.000	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.000	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	0.000	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
80	0.000	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
100	0.000	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
1000	0.000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300
z	0.000	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291
	0%	50%	60%	70%	80%	90%	95%	98%	99%	99.8%	99.9%
	Confidence Level										

Percentage Points of the χ^2 Distribution; $\chi^2_{\nu,\alpha}$

$$P(\chi^2 > \chi^2_{\nu,\alpha}) = \alpha$$



	α														
ν	**0.001**	**0.005**	**0.010**	**0.025**	**0.050**	**0.100**	**0.250**	**0.500**	**0.750**	**0.900**	**0.950**	**0.975**	**0.990**	**0.995**	**0.999**
1	10.83	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	0.45	0.10	0.02					
2	13.82	10.60	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	0.58	0.21	0.10	0.05	0.02	0.01	
3	16.27	12.84	11.34	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	0.58	0.35	0.22	0.11	0.07	0.02
4	18.47	14.86	13.28	11.14	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	0.71	0.48	0.30	0.21	0.09
5	20.52	16.75	15.09	12.83	11.07	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	0.83	0.55	0.41	0.21
6	22.46	18.55	16.81	14.45	12.59	10.64	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	0.87	0.68	0.38
7	24.32	20.28	18.48	16.01	14.07	12.02	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	0.99	0.60
8	26.12	21.95	20.09	17.53	15.51	13.36	10.22	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34	0.86
9	27.88	23.59	21.67	19.02	16.92	14.68	11.39	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73	1.15
10	29.59	25.19	23.21	20.48	18.31	15.99	12.55	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16	1.48
11	31.26	26.76	24.72	21.92	19.68	17.28	13.70	10.34	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60	1.83
12	32.91	28.30	26.22	23.34	21.03	18.55	14.85	11.34	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07	2.21
13	34.53	29.82	27.69	24.74	22.36	19.81	15.98	12.34	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57	2.62
14	36.12	31.32	29.14	26.12	23.68	21.06	17.12	13.34	10.17	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07	3.04
15	37.70	32.80	30.58	27.49	25.00	22.31	18.25	14.34	11.04	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60	3.48
16	39.25	34.27	32.00	28.85	26.30	23.54	19.37	15.34	11.91	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14	3.94
17	40.79	35.72	33.41	30.19	27.59	24.77	20.49	16.34	12.79	10.09	8.67	7.56	6.41	5.70	4.42
18	42.31	37.16	34.81	31.53	28.87	25.99	21.60	17.34	13.68	10.86	9.39	8.23	7.01	6.26	4.90
19	43.82	38.58	36.19	32.85	30.14	27.20	22.72	18.34	14.56	11.65	10.12	8.91	7.63	6.84	5.41
20	45.31	40.00	37.57	34.17	31.41	28.41	23.83	19.34	15.45	12.44	10.85	9.59	8.26	7.43	5.92
21	46.80	41.40	38.93	35.48	32.67	29.62	24.93	20.34	16.34	13.24	11.59	10.28	8.90	8.03	6.45
22	48.27	42.80	40.29	36.78	33.92	30.81	26.04	21.34	17.24	14.04	12.34	10.98	9.54	8.64	6.98
23	49.73	44.18	41.64	38.08	35.17	32.01	27.14	22.34	18.14	14.85	13.09	11.69	10.20	9.26	7.53
24	51.18	45.56	42.98	39.36	36.42	33.20	28.24	23.34	19.04	15.66	13.85	12.40	10.86	9.89	8.08
25	52.62	46.93	44.31	40.65	37.65	34.38	29.34	24.34	19.94	16.47	14.61	13.12	11.52	10.52	8.65
30	59.70	53.67	50.89	46.98	43.77	40.26	34.80	29.34	24.48	20.60	18.49	16.79	14.95	13.79	11.59
40	73.40	66.77	63.69	59.34	55.76	51.81	45.62	39.34	33.66	29.05	26.51	24.43	22.16	20.71	17.92
50	86.66	79.49	76.15	71.42	67.50	63.17	56.33	49.33	42.94	37.69	34.76	32.36	29.71	27.99	24.67
60	99.61	91.95	88.38	83.30	79.08	74.40	66.98	59.33	52.29	46.46	43.19	40.48	37.48	35.53	31.74
70	112.32	104.21	100.43	95.02	90.53	85.53	77.58	69.33	61.70	55.33	51.74	48.76	45.44	43.28	39.04
80	124.84	116.32	112.33	106.63	101.88	96.58	88.13	79.33	71.14	64.28	60.39	57.15	53.54	51.17	46.52
90	137.21	128.30	124.12	118.14	113.15	107.57	98.65	89.33	80.62	73.29	69.13	65.65	61.75	59.20	54.16
100	149.45	140.17	135.81	129.56	124.34	118.50	109.14	99.33	90.13	82.36	77.93	74.22	70.06	67.33	61.92

Critical values of F (Area = 0.050)

Denominator Degrees of Freedom	Numerator Degrees of Freedom								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161.4476	199.5000	215.7073	224.5832	230.1619	233.9860	236.7684	238.8827	240.5433
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821
26	4.2252	3.3690	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401
120	3.9201	3.0718	2.6802	2.4472	2.2899	2.1750	2.0868	2.0164	1.9588
∞	3.8415	2.9957	2.6049	2.3719	2.2141	2.0986	2.0096	1.9384	1.8799

Critical values of F (Area = 0.010)

Denominator Degrees of Freedom	Numerator Degrees of Freedom								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052.1807	4999.5000	5403.3520	5624.5833	5763.6496	5858.9861	5928.3557	5981.0703	6022.4732
2	98.5025	99.0000	99.1662	99.2494	99.2993	99.3326	99.3564	99.3742	99.3881
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424
11	9.6460	7.2057	6.2167	5.6683	5.3160	5.0692	4.8861	4.7445	4.6315
12	9.3302	6.9266	5.9525	5.4120	5.0643	4.8206	4.6395	4.4994	4.3875
13	9.0738	6.7010	5.7394	5.2053	4.8616	4.6204	4.4410	4.3021	4.1911
14	8.8616	6.5149	5.5639	5.0354	4.6950	4.4558	4.2779	4.1399	4.0297
15	8.6831	6.3589	5.4170	4.8932	4.5556	4.3183	4.1415	4.0045	3.8948
16	8.5310	6.2262	5.2922	4.7726	4.4374	4.2016	4.0259	3.8896	3.7804
17	8.3997	6.1121	5.1850	4.6690	4.3359	4.1015	3.9267	3.7910	3.6822
18	8.2854	6.0129	5.0919	4.5790	4.2479	4.0146	3.8406	3.7054	3.5971
19	8.1849	5.9259	5.0103	4.5003	4.1708	3.9386	3.7653	3.6305	3.5225
20	8.0960	5.8489	4.9382	4.4307	4.1027	3.8714	3.6987	3.5644	3.4567
21	8.0166	5.7804	4.8740	4.3688	4.0421	3.8117	3.6396	3.5056	3.3981
22	7.9454	5.7190	4.8166	4.3134	3.9880	3.7583	3.5867	3.4530	3.3458
23	7.8811	5.6637	4.7649	4.2636	3.9392	3.7102	3.5390	3.4057	3.2986
24	7.8229	5.6136	4.7181	4.2184	3.8951	3.6667	3.4959	3.3629	3.2560
25	7.7698	5.5680	4.6755	4.1774	3.8550	3.6272	3.4568	3.3239	3.2172
26	7.7213	5.5263	4.6366	4.1400	3.8183	3.5911	3.4210	3.2884	3.1818
27	7.6767	5.4881	4.6009	4.1056	3.7848	3.5580	3.3882	3.2558	3.1494
28	7.6356	5.4529	4.5681	4.0740	3.7539	3.5276	3.3581	3.2259	3.1195
29	7.5977	5.4204	4.5378	4.0449	3.7254	3.4995	3.3303	3.1982	3.0920
30	7.5625	5.3903	4.5097	4.0179	3.6990	3.4735	3.3045	3.1726	3.0665
40	7.3141	5.1785	4.3126	3.8283	3.5138	3.2910	3.1238	2.9930	2.8876
60	7.0771	4.9774	4.1259	3.6490	3.3389	3.1187	2.9530	2.8233	2.7185
120	6.8509	4.7865	3.9491	3.4795	3.1735	2.9559	2.7918	2.6629	2.5586
∞	6.6349	4.6052	3.7816	3.3192	3.0173	2.8020	2.6393	2.5113	2.4074