République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences
Département des Sciences de la Matiére



Polycopié de cours :

Physique I

"Mécanique du point matériel"

Adressé aux étudiants de
Première année LMD
Sciences de la Matière - Sciences et Technologie

Présenté par : Dr. RADJAI Missoum

Année universitaire: 2019/2020

Préface

Ce polycopie de cours s'adresse essentiellement aux étudiants des premières années troncs communs des Sciences de la Matière (SM) et Sciences et Techniques (ST). L'objectif de ce document pédagogique est de leur permettre d'avoir une base pouvant les guider afin de comprendre certaines notions fondamentales de la mécanique du point matériel pour l'acquisition d'autres connaissances dans le cadre d'études plus approfondies. Le polycopié se divise en quatre chapitres :

1. Le premier chapitre comporte des généralités sur les principales notions de l'analyse dimensionnelle avec un rappel mathématique et quelques définitions sur les notions de base du calcul vectoriel.

2. Le deuxième chapitre présente la cinématique du point matériel.

3. Le troisième chapitre traite la dynamique du point matériel et illustre les bases fondamentales de la mécanique de Newton avec ses trois lois.

4. Le dernier chapitre traite le travail et l'énergie du point matériel.

Je tiens à remercier les collègues qui ont bien voulu juger le manuscrit et tous ceux qui me ferait part de leurs remarques et suggestions pour m'aider à l'améliorer.

Table des Matières

1 ANALYSE DIMENSIONELLE **4**

1.1 Les grandeurs physiques 4

1.2 Grandeurs fondamentales 4

1.3 Equation aux dimensions 5

1.4 Systèmes d'unités en physique 6

1.5 Grandeurs scalaires et grandeurs vectorielles 8

1.5.1 Grandeurs scalaires 8

1.5.2 Grandeurs vectorielles 8

1.6 Définition de vecteur 8

1.6.1 Propriétés 9

1.6.2 Composantes d'un vecteur 10

1.7 Opération sur les vecteurs 11

1.7.1 Addition de deux vecteurs 11

1.7.2 Soustraction de deux vecteurs 12

1.7.3 Relation de Chasles 12

1.8 Produit scalaire 13

1.8.1 Forme analytique du produit scalaire 13

1.9 Produit vectoriel 15

1.9.1 Propriétés du produit vectoriel 16

1.9.2 Forme analytique du produit vectoriel 16

1.10 Le produit mixte de trois vecteurs 17

1.11 Opérateurs différentiels 18

1.11.1 Gradient 18

1.11.2 Divergence 19

1.11.3 Rotationnel 19

2 CINEMATIQUE **20**

2.1 INTRODUCTION 20

2.2 Notion du point matériel 20

2.3 Système de référence 20

2.3.1 Repère de l'espace 21

2.4 Trajectoire 22

2.5 Les différents systèmes de coordonnées 22

2.5.1 Le système de coordonnées cartésiennes 22

2.5.2 Le système de coordonnées polaires 23

2.5.3 Le système de coordonnées cylindriques 24

2.5.4 Le système de coordonnées sphériques 26

2.6 La vitesse d'un point matériel 27

2.6.1 Vitesse moyenne 27

2.6.2 Vitesse instantanée 28

2.6.3 Vecteur vitesse avec les coordonnées cartésiennes 29

2.6.4 Vecteur vitesse avec les coordonnées polaires 30

2.6.5 Vecteur vitesse avec les coordonnées cylindriques 30

2.6.6 Vecteur vitesse avec les coordonnées sphériques 31

2.6.7 Vitesse dans la base de Frenet (coordonnées intrinsèques) 32

2.7 Accélération d'un point matériel 32

2.7.1 L'accélération moyenne 32

2.7.2 L'accélération instantanée 32

2.7.3 Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes 33

2.7.4 Vecteur accélération en coordonnées polaires 33

2.7.5 Vecteur accélération en coordonnées cylindriques 33

2.7.6 Vecteur accélération en coordonnées sphériques 34

2.7.7 L'accélération dans la base de Frenet 35

2.8 Exemples de mouvement 36

2.8.1 Mouvement rectiligne 36

2.9 Mouvement relatif 40

2.9.1 Le mouvement absolu 40

2.9.2 Le mouvement relatif 41

2.9.3 Composition des vecteurs vitesses 42

2.9.4 Composition des vecteurs accélérations 43

3 DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL **44**

3.1 Introduction 44

3.2 Notions fondamentales 44

3.2.1 Masse 44

3.2.2 Quantité de mouvement 45

3.2.3 Force 45

3.3 Lois de Newton 45

3.3.1 Première loi de Newton : principe d'inertie 45

3.3.2 Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique . . 46

3.3.3 Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques 46

3.4 Les forces 46

3.4.1 Force à distance 47

3.4.2 Force électromagnétique 48

3.4.3 Forces de contact 48

3.5 Moment cinétique d'un point matériel 55

3.5.1 Théorème du moment cinétique 56

4 TRAVAIL ET ENERGIE **59**

4.1 Introduction 59

4.2 Travail d'une force 59

4.2.1 Travail d'une force constante 59

4.2.2 Travail d'une force variable 60

4.3 Puissance d'une force 61

4.4 Théorème de l'énergie cinétique 61

4.5 Force conservative 63

4.6 Energie potentielle 66

4.7 Energie mécanique 66

Chapitre 1

ANALYSE DIMENSIONELLE

1.1 Les grandeurs physiques

L'étude des phénomènes physiques nécessite la définition de grandeurs physiques. On appelle grandeur physique toute propriété de la nature qui peut être quantifiée par la mesure ou par le calcul tel que la longueur, le temps, la température, etc. . . , et chaque grandeur physique est caractérisée par sa dimension qui s'exprime à l'aide d'un nombre accompagné d'une unité de mesure, par exemple une longueur peut s'exprimer en mètre, en pouce, en angström, etc..,. En fait les grandeurs de base utilisées en mécanique sont la masse, la longueur et le temps.

1.2 Grandeurs fondamentales

Toute grandeur physique peut s'exprimer sur la base des unités fondamentales (de base), qui sont considérées comme indépendantes du point de vue dimensionnel et qui permettent de définir toutes les autres grandeurs.

Le système international est un système cohérent et universel d'unités, basé sur 7 grandeurs, auxquelles sont associées 7 unités de base comme le résume le tableau suivant :

Grandeur	Symbole dimensionelle	Unité	Symbole de l'unité
masse	M	kilogramme	Kg
longueur	L	mètre	M
temps	T	seconde	S
intensité électrique	I	ampère	A
température	θ	kelvin	K
intensité lumineuse	J	candela	Cd
quantité de matière	N	mole	mol

Table 1.1: Unites de bases du SI.

Les autres grandeurs sont des grandeurs dérivées,toutes les dimensions des grandeurs dérivées sont écrits sous la forme de produits de puissances des dimensions des grandeurs de base, sont liées à ces grandeurs fondamentales, comme par exemple :

Une aire A étant le produit de deux longueurs, sa dimension est $[A] = L^2$, la vitesse d'un point matériel a pour dimension $[v] = L.T^{-1}$ L'accélération a pour dimension $[a] = L.T^{-2}$, La dimension de la force F est $[F] = [m.a] = [m]\,.\,[a] = M.L.T^{-2}$

1.3 Equation aux dimensions

Une équation aux dimensions est une relation mathématique qui exprime la dimension d'une grandeur physique en fonction des dimensions des grandeurs fondamentales, la dimension nous renseigne sur la nature physique de la grandeur.

Si G a la dimension d'une longueur, on dit qu'elle est homogène à une longueur. La relation $[G] = L$ correspond à l'équation aux dimensions de la grandeur G.

Dans le cas général l'équation aux dimensions de la grandeur (G), est la suivante :

$$[G] = M^a.L^b.T^c.I^d.\theta^e.N^f.J^g \tag{1.1}$$

Où:

a, b, c, d, e, f et g sont des entiers positifs ou négatifs.

M, L, T, I, θ,N et J sont respectivement les symboles de la masse, la longueur, le temps, la température, l'intensité lumineuse, et la quantité de matière.

*Les grandeurs M, L et T permettent de décrire toutes les grandeurs de la mécanique, l'équation aux dimensions de la grandeur dérivée (G) est l'expression suivante :

$$[G] = M^a.L^b.T^c \tag{1.2}$$

*L'équation aux dimensions d'une grandeur G sans dimension se réduit à $[G] = 1$.

*Un angle ainsi les fonctions exponentielles, logarithmiques, trigonométriques, les constants sont des grandeurs sans dimension $[\alpha] = 1$, $[sinx] = 1$, $[\exp] = 1$, $[Logx] = 1$, $[4] = 1$.

*Toute relation doit être homogène en dimension, c'est-à-dire que ses deux membres ont la même dimension. Ainsi l'équation $A = B + C.D$ n'a de sens que si les dimensions de A et de $(B + C.D)$ sont identiques. Pour obtenir la dimension du second membre on doit appliquer les règles suivantes :

• la dimension du produit $C.D$ est le produit des dimensions de chacune des grandeurs C et D : $[C.D] = [C]$. $[D] = [A]$;

• la dimension de la somme $B + C.D$ est la somme des dimensions de chacun des deux termes B et $C.D$: $[B + C.D] = [B] + [C.D] = [A]$.

*Les équations aux dimensions permettent de vérifier l'homogénéité des formules :

Example 1 *: un pendule simple de masse m et de longueur l est placé dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$. Il oscille sinusoïdalement avec une pulsation propre ω_0 avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$* •

Vérifier l'homogénéité de cette formule.

La pulsation propre ω_0 est reliée a la période T_0 des oscillations par la relation :

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Longrightarrow \qquad [\omega_0] = \left[\frac{2\pi}{T_0}\right] = \frac{[2\pi]}{[T_0]} = T^{-1}$

On sait que le champ de pesanteur est homogène à une accélération donc :

$\left[\sqrt{\frac{g}{l}}\right] = \sqrt{\left[\frac{g}{l}\right]} = \sqrt{\frac{[g]}{[l]}} = \sqrt{\frac{L.T^{-2}}{L}} = T^{-1}$

Les deux membres ont même dimension, l'équation est bien homogène.

1.4 Systèmes d'unités en physique

Une unité de mesure est un étalon nécessaire pour la mesure d'une grandeur physique.

Système CGS (trois grandeurs et trois unités):

* grandeurs de base : longueur, masse, temps.

* unités : centimètre, gramme, seconde.

Système MKSA ou de GIORGI (quatre grandeurs et quatre unités):

* grandeurs de base : longueur, masse, temps, intensité électrique.

* unités : mètre, kilogramme, seconde, ampère.

Système SI (sept grandeurs et sept unités):

* grandeurs de base : longueur, masse, temps, intensité électrique, température thermodynamique, quantité de matière, intensité lumineuse.

* unités : mètre, kilogramme, seconde, ampère, kelvin, mole, candela.

Application

Exercice1: *Déterminer la dimension des deux paramétre A et K qui apparaissent dans la loi:*

$f = A.m.v + K.v^2$ où m s'exprime en kg, v en m/s et f en N

Réponce:

$[f] = [A.m.v] + \left[K.v^2\right]$

$$\begin{cases} [f] = [A.m.v] \\ [f] = \left[K.v^2\right] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} [f] = [A]\,.\,[m]\,.\,[v] \\ [f] = [K]\,.\,[v^2] \end{cases}$$

$$\begin{cases} [A] = \frac{[f]}{[m].[v]} \\ [K] = \frac{[f]}{[v^2]} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} [A] = \frac{M.L.T^{-2}}{M.L.T^{-1}} = T^{-1} \\ [K] = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2.T^{-2}} = M.L^{-1} \end{cases}.$$

Exercice2: *Soit A, une grandeure physique de dimension*: $[A] = M^2.L^2.T^{-3}$

Cette grandeur physique est calculée à partir de l'équation suivante:

$A = B.v.f^{-1} + K.p^{-1}.m^{-2}.g^{-1}$

Où f est une force, v une vitesse, m une masse, p une pression et g l'accélération de la pesanteur.

Etablir la dimention de B et K pour que l'équation sit dimensionelle correct.

Réponce:

$A = B.v.f^{-1} + K.p^{-1}.m^{-2}.g^{-1}$

$[A] = \left[B.v.f^{-1}\right] + \left[K.p^{-1}.m^{-2}.g^{-1}\right]$

$$\begin{cases} [A] = \left[B.v.f^{-1}\right] \\ [A] = \left[K.p^{-1}.m^{-2}.g^{-1}\right] \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} [A] = [B]\,.\,[v]\,.\,[f^{-1}] \\ [A] = [K]\,.\,[p^{-1}]\,.\,[m^{-2}]\,[g^{-1}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} [B] = \frac{[A]}{[v].[f^{-1}]} \\ [K] = \frac{[A]}{[p^{-1}].[m^{-2}][g^{-1}]} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} [v] = L.T^{-1} \\ [f^{-1}] = M^{-1}.L^{-1}.T^2 \\ [p^{-1}] = [f^{-1}].L^2 = M^{-1}.L^1.T^2 \\ [g^{-1}] = L^{-1}.T^2 \end{cases}$$

Donc: $\begin{cases} [B] = \frac{M^2.L^2.T^{-3}}{L.T^{-1}.M^{-1}.L^{-1}.T^2} \\ [K] = \frac{M^2.L^2.T^{-3}}{M^{-1}.L^1.T^2.M^{-2}L^{-1}.T^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} [B] = M^3.L^2.T^{-4} \\ [K] = M^5.L^2.T^{-7} \end{cases}.$

Exercice3: *L'équation d'état des gaz parfaits s'écrit*: $P.V = nRT$

Donner l'équation aux dimensions de la constante molaire des gaz parfaits.

Réponce:

Désignons par $[R]$ la dimension de R

Alors: $[R] = \frac{[P].[V]}{[n].[T]}$ (1)

Cherchons la dimension de chaque paramétre:

$$\begin{cases} P \text{ la pression du gaz en } (Pa \text{ soit en } N/m^2 \text{ ou encore en } Kg.s^{-2}.m^{-1} \\ [P] = MT^{-2}L^{-1} \\ [V] = L^3.mol^{-1} \\ [T] = \theta \end{cases}$$

En remplaçant dans (1),

$[R] = M.L^2.T^{-2}.mol^{-1}.\theta^{-1}$

1.5 Grandeurs scalaires et grandeurs vectorielles

Les grandeurs physiques se divisent en deux groupes :

1.5.1 Grandeurs scalaires

Les grandeurs scalaires sont des grandeurs sans direction, complètement définies par des nombres réels, exemple la masse d'un corps, la longueur, le temps, la charge d'un électron, l'aire d'une sphère et son diamètre, le volume, ...,

1.5.2 Grandeurs vectorielles

Les grandeurs vectorielles sont caractérisées par leurs intensités, leurs directions et leurs sens, comme : vitesse, force, champs électrique...etc, sont donc représentées par des vecteurs.

1.6 Définition de vecteur

Un vecteur est un segment de droit orienté et caractérisé par:

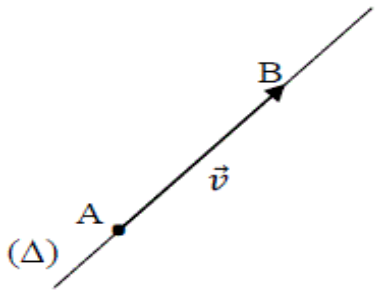


Fig.1.1: Définition de vecteur.

- le point d'application est le point qui sert d'origine à la représentation du vecteur, dans le schéma, c'est le point A.

- Sa direction qui est définie par celle de la droite (Δ) qui porte le segment.

- Son sens qui désigne l'orientation du vecteur de A vers B, représentée par une flèche.

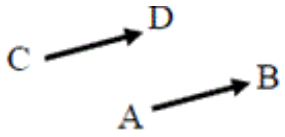
- Son module (norme ou intensité) qui est égal à la longueur du segment [AB]. Il représente la quantité vectorielle.

-On peut désigner un vecteur par une seule lettre,

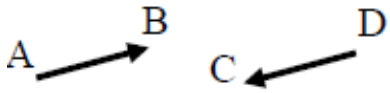
par exemple : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$

1.6.1 Propriétés

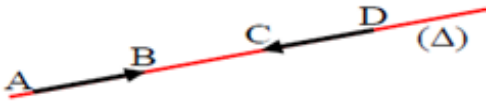
*Les vecteurs qu'ils ont même direction, même sens et même module sont des vecteurs égaux.



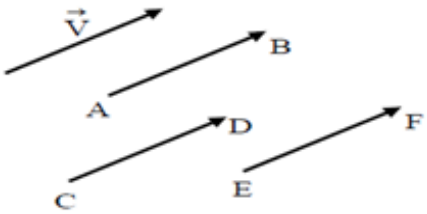
*Les vecteurs qu'ils ont même direction, même module mais des sens opposés sont des vecteurs opposés



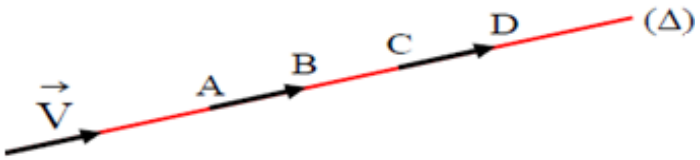
*Directement opposés" s'ils ont même support (Δ)



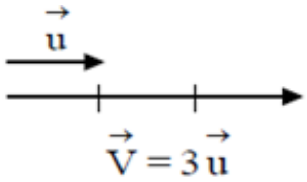
*Le vecteur qui défini par sa direction, son sens et sa longueur sans fixer son point d'application (son origine) est appelé le vecteur libre.



*Le vecteur qui a un module fixe, un sen fixe et que l'on impose sa droite support (Δ) sans fixer son point d'application est appelé le vecteur glissant.



*A chaque vecteur on peut associer un vecteur unitaire qui a la même direction et de norme égale à 1 (unité). On peut exprimer un vecteur unitaire sous la forme : $\overrightarrow{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$



*On note par $\overrightarrow{0}$, le vecteur de longueur nulle, lorsque l'extrémité d'un vecteur coïncide avec son origine. Par convention ce vecteur ne possède aucune direction.

1.6.2 Composantes d'un vecteur

Dans le plan (Système cartésien orthonormé bidimensionnel)

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ donner par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_x + \overrightarrow{OM}_y$

Avec: $\begin{cases} \overrightarrow{OM}_x = x\ \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{OM}_y = y\ \overrightarrow{j} \end{cases}$ Alors $\overrightarrow{OM} = x\ \overrightarrow{i} + y\ \overrightarrow{j}$

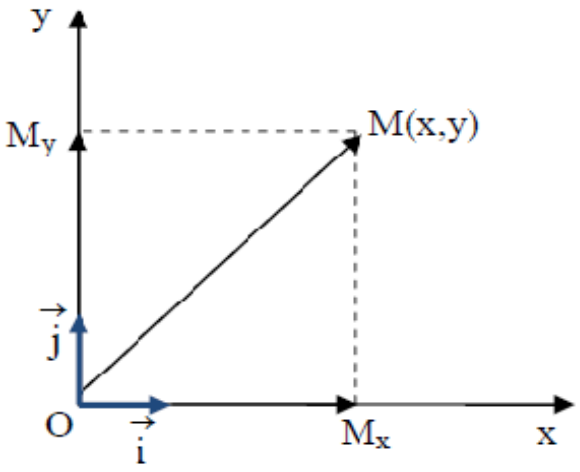


Fig.1.2: Composantes d'un vecteur dans le plan.

La norme du vecteur est donnée par la relation suivante :

$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Dans l'espace (Système cartésien orthonormé tridimensionnel)

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ donner par $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_x + \overrightarrow{OM}_y + \overrightarrow{OM}_z$

Avec: $\begin{cases} \overrightarrow{OM}_x = x\ \vec{i} \\ \overrightarrow{OM}_y = y\ \vec{j} \\ \overrightarrow{OM}_z = z\ \vec{k} \end{cases}$ Alors $\overrightarrow{OM} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} + z\ \vec{k}$

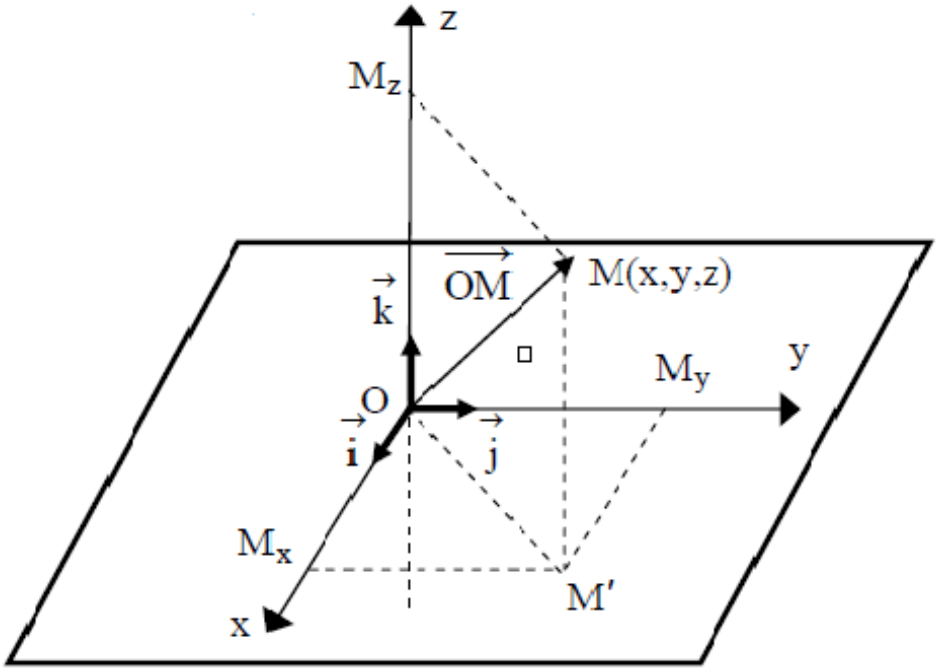


Fig.1.3: Composantes d'un vecteur dans en 3D.

La norme du vecteur est donnée par la relation suivante :

$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

1.7 Opération sur les vecteurs

1.7.1 Addition de deux vecteurs

Afin de trouver la somme de deux vecteurs, il existe deux méthodes sont:

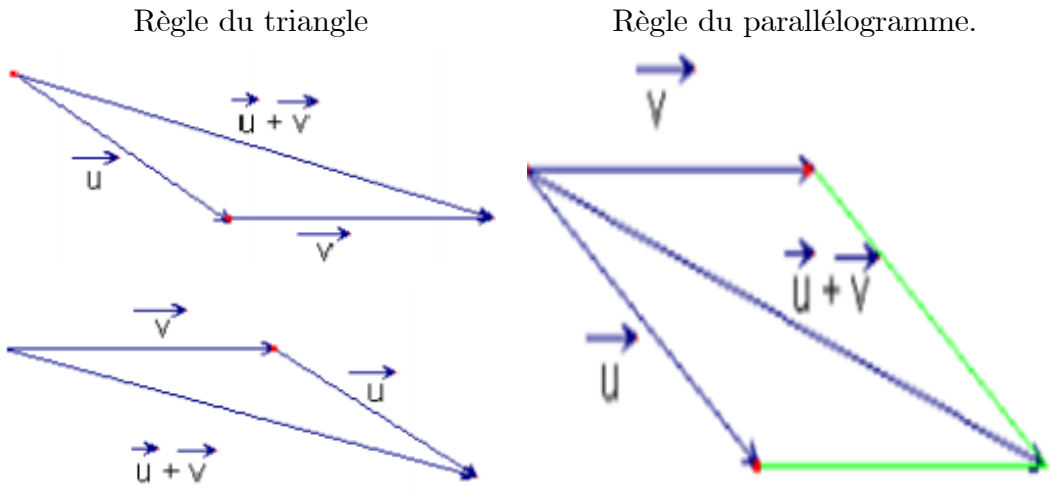


Fig.1.4: L'addition de deux vecteurs.

Remarque : L'addition des vecteurs est commutative et distributive.

* Commutativité : $\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{U}$

* Distributivité :$(\overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}).\overrightarrow{C} = \overrightarrow{U}.\overrightarrow{C} + \overrightarrow{V}.\overrightarrow{C}$

1.7.2 Soustraction de deux vecteurs

La soustraction de deux vecteurs se fera de la façon suivante : Pour $\overrightarrow{U} - \overrightarrow{V}$, on va prendre l'opposé du vecteur $\overrightarrow{V}$

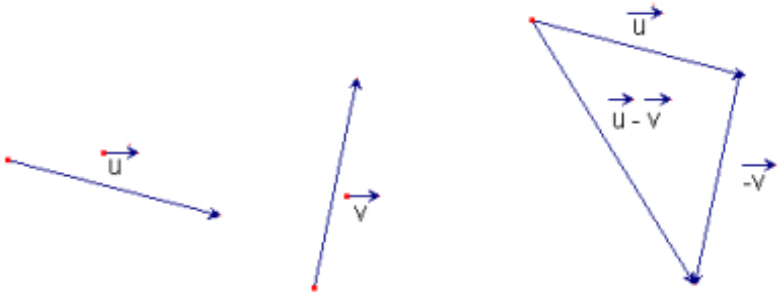


Fig.1.5: La Soustraction de deux vecteurs.

1.7.3 Relation de Chasles

pour décrire une relation entre vecteurs dans un espace affine, la relation de Chasles s'écrit de la manière suivante :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \tag{1.3}$$

1.8 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ non nuls et prend la forme suivante:

$$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \left\|\overrightarrow{V_1}\right\| . \left\|\overrightarrow{V_2}\right\| \cos\theta. \tag{1.4}$$

Avec θ l'angle compris entre les deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}$et $\overrightarrow{V_2}$,

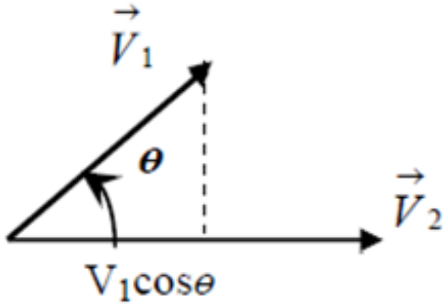


Fig.1.6: Le produit scalaire de deux vecteurs.

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au produit du module de l'un par la mesure algébrique de la projection de l'autre sur sa droite support.

Le produit scalaire est ;

* **commutatif** :

$\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_2}.\overrightarrow{V_1}$ (puisque $\cos\theta = \cos(-\theta)$)

***Distributivité par rapport à l'addition** :

$\left(\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2}\right).\overrightarrow{V3} = \overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_2}.\overrightarrow{V_3}$

*si $\overrightarrow{V_1} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{V_2} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{0}$ on dit $\overrightarrow{V_1} \perp \overrightarrow{V_2}$

Alors Le produit scalaire nous permet donc de déduire la perpendicularité géométrique lorsqu'il est de valeur nulle.

1.8.1 Forme analytique du produit scalaire

En posant U_x, U_y, U_z et V_x, V_y, V_z les composantes de $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$, le produit scalaire de ces deux vecteurs est le scalaire défini par la relation :

$\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V} = \left(U_x.\overrightarrow{i} + U_y\ \overrightarrow{j} + U_z\ \overrightarrow{k}\right).\left(V_x\ \overrightarrow{i} + V_y\ \overrightarrow{j} + V_z\ \overrightarrow{k}\right)$

Sachant que $\begin{cases} \overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}.\overrightarrow{k} = 1 \\ \overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}.\overrightarrow{k} = 0 \end{cases}$

Il en résulte :

$$\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V} = U_x.V_x + U_y.V_y + U_z.V_z \tag{1.5}$$

*On peut en déduire l'expression du cosinus:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{U}.\overrightarrow{V}}{\left\|\overrightarrow{U}\right\|.\left\|\overrightarrow{V}\right\|} = \frac{U_x.V_x + U_y.V_y + U_z.V_z}{\sqrt{U_x^2+U_y^2+U_z^2}.\sqrt{V_x^2+V_y^2+V_z^2}} \tag{1.6}$$

*Relation métrique dans un triangle quelconque (**Fig.1.7**):

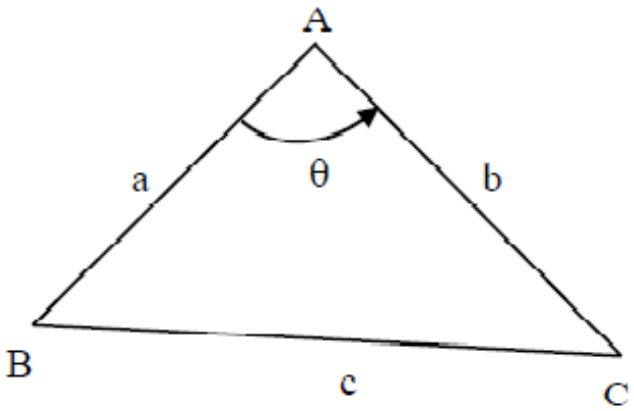


Fig.1.7: Relation métrique dans un triangle.

Nous avons : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

d'ou

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{BC}\right)^2 = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right)^2 \\ \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} \\ \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + 2\left\|\overrightarrow{BA}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|.\cos\theta \\ c^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\theta \end{cases}$$

Remarque : dans le cas d'un triangle rectangle en A, on retrouve le théorème de Pythagore :

$$c^2 = a^2 + b^2$$

1.9 Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ faisant entre eux un angle θ est un vecteur $\overrightarrow{W}$ noté: $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} \Lambda \overrightarrow{V}$

tel que

$$\left\|\overrightarrow{W}\right\| = \left\|\overrightarrow{U}\right\| . \left\|\overrightarrow{V}\right\| . \sin\theta \tag{1.7}$$

avec $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

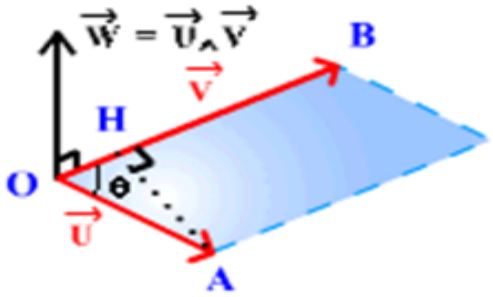


Fig.1.8: Le produit vectoriel de deux vecteurs.

Les caractéristiques du vecteur $\overrightarrow{W}$ sont les suivantes:

*La direction est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ telle que: $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{W} \perp \overrightarrow{V}$

*Le sens de $\overrightarrow{W}$ donne au triplet $\left(\overrightarrow{U}, \overrightarrow{V}, \overrightarrow{U} \Lambda \overrightarrow{V}\right)$ une orientation directe : cette orientation est donnée par la règle des trois doigts de la main droite (pouce, index, majeur), illustrée ci-dessous ;

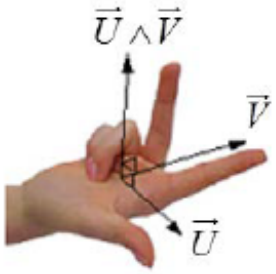


Fig.1.9: La règle des trois doigts de la main droite.

*Le module du produit vectoriel de deux vecteur représente l'aire orientée du parallélogramme

formé par ces deux vecteurs (dimension L^2), En effet, $AH = OA\sin\theta = \left\|\overrightarrow{U}\right\|\sin\left(\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}\right)$ et l'aire du parallélogramme devient:

$$OB.AH = \left\|\overrightarrow{U}\right\|.\left\|\overrightarrow{V}\right\|.\sin\left(\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}\right) \tag{1.8}$$

Alors le module du produit vectoriel d´efinie par l'´equation:

$$\left\|\overrightarrow{W}\right\| = \left\|\overrightarrow{U}\right\|.\left\|\overrightarrow{V}\right\|.\sin\left(\overrightarrow{U},\overrightarrow{V}\right) \tag{1.9}$$

1.9.1 Propriétés du produit vectoriel

Anticommutatif :

Le produit vectoriel est anticommutatif :

$\overrightarrow{U}\Lambda\overrightarrow{V} = -\overrightarrow{V}\Lambda\overrightarrow{U}$, puisque $sin\,(\theta) = -\sin(-\theta)$

Distributivité par rapport à l'addition :

Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition :

$\overrightarrow{U}\Lambda\left(\overrightarrow{V}+\overrightarrow{G}\right) = \overrightarrow{U}\Lambda\overrightarrow{V} + \overrightarrow{U}\Lambda\overrightarrow{G}$

Non associatif :

$\overrightarrow{U}\Lambda\left(\overrightarrow{V}\Lambda\overrightarrow{G}\right) \neq \left(\overrightarrow{U}\Lambda\overrightarrow{V}\right)\Lambda\overrightarrow{G}$

Conséquence :

Si $\overrightarrow{U} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{V} \neq \overrightarrow{0}$ alors $\overrightarrow{U}\Lambda\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{U} \parallel \overrightarrow{V}$

1.9.2 Forme analytique du produit vectoriel

En posant U_x, U_y, U_z et V_x, V_y, V_z les composantes de $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\right)$, le produit vectoriel de ces deux vecteurs est le vecteur défini

par la relation:

$\overrightarrow{U}\Lambda\overrightarrow{V} = \left(U_x.\overrightarrow{i} + U_y\ \overrightarrow{j} + U_z\ \overrightarrow{k}\right)\Lambda\left(V_x\ \overrightarrow{i} + V_y\ \overrightarrow{j} + V_z\ \overrightarrow{k}\right)$

Sachant que $\begin{cases} \overrightarrow{i}\Lambda\overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}\Lambda\overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}\Lambda\overrightarrow{k} = 0 \\ \overrightarrow{i}\Lambda\overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{j}\Lambda\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{k}\Lambda\overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \end{cases}$

Il en résulte :

$$\overrightarrow{W}=\overrightarrow{U}\Lambda\overrightarrow{V}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ U_x & U_y & U_z\\ V_x & V_y & V_z\end{vmatrix}=\underbrace{(U_y.V_z-U_z.V_y)}_{\overrightarrow{W}_x}\overrightarrow{i}-\underbrace{(U_x.V_z-U_z.V_x)}_{\overrightarrow{W}_y}\overrightarrow{j}+\underbrace{(U_x.V_y-U_y.V_x)}_{\overrightarrow{W}_z}\overrightarrow{k} \tag{1.10}$$

Application :

Calculer le vecteur $\overrightarrow{W}$, produit des deux vecteurs, $\overrightarrow{U}\,(3,2,-2)$ et $\overrightarrow{V}\,(2,0,-3)$ en déduire l'angle θ compris entre eux.

Réponce :

$$\overrightarrow{W}=\overrightarrow{U}\Lambda\overrightarrow{V}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ 3 & 2 & -2\\ 2 & 0 & -3\end{vmatrix}=[2.(-3)-0]\overrightarrow{i}-[3(-3)-2(-2)]\overrightarrow{j}+[0-2(2)]\overrightarrow{k}$$

$\overrightarrow{W}=\overrightarrow{U}\Lambda\overrightarrow{V}=-6\overrightarrow{i}+5\overrightarrow{j}-4\overrightarrow{k}$.

$\left\|\overrightarrow{W}\right\|=\sqrt{(-6)^2+(5)^2+(-4)^2}=\sqrt{77}=8.77$

$\left\|\overrightarrow{W}\right\|=\left\|\overrightarrow{U}\right\|.\left\|\overrightarrow{V}\right\|.\sin\theta \implies \sin\theta=\frac{\|\overrightarrow{W}\|}{\|\overrightarrow{U}\|.\|\overrightarrow{V}\|}=\frac{\sqrt{77}}{\sqrt{221}}=0.34 \implies \theta=20,3^0$

1.10 Le produit mixte de trois vecteurs

Soient A_x, A_y, A_z et B_x, B_y, B_z et C_x, C_y, C_z les composantes de $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{C}$ dans la base orthonormée $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$

les composantes de $\overrightarrow{A}\Lambda\overrightarrow{B}$ dans la même base étant: $\overrightarrow{A}\Lambda\overrightarrow{V}=(A_y.B_z-A_z.B_y)\overrightarrow{i}-(A_x.B_z-A_z.B_x)\overrightarrow{j}+(A_x.B_y-A_y.B_x)\overrightarrow{k}$

le produit mixte $\left(\overrightarrow{A}\Lambda\overrightarrow{B}\right).\overrightarrow{C}$ est défini par:

$\left(\overrightarrow{A}\Lambda\overrightarrow{B}\right).\overrightarrow{C}=\left[(A_y.B_z-A_z.B_y)\overrightarrow{i}-(A_x.B_z-A_z.B_x)\overrightarrow{j}+(A_x.B_y-A_y.B_x)\overrightarrow{k}\right].\left[C_x.\overrightarrow{i}+C_y\overrightarrow{j}\right.$

$\left(\overrightarrow{A}\Lambda\overrightarrow{B}\right).\overrightarrow{C}=(A_y.B_z-A_z.B_y)C_x-(A_x.B_z-A_z.B_x)C_y+(A_x.B_y-A_y.B_x)C_z=scalaire$

Donc le produit mixte de ces trois vecteurs $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{C}$ est le scalaire D défini par la relation:

$$\begin{cases} D=\left(\overrightarrow{A}\Lambda\overrightarrow{B}\right).\overrightarrow{C}\\ D=(A_y.B_z-A_z.B_y)C_x-(A_x.B_z-A_z.B_x)C_y+(A_x.B_y-A_y.B_x)C_z\end{cases} \tag{1.11}$$

Remarque:

*Dans une base orthonormée directe $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}\right)$, nous avons :

$$\begin{cases} \underbrace{\left(\overrightarrow{i}\,\Lambda\,\overrightarrow{j}\right)}_{\overrightarrow{k}}.\overrightarrow{k} = \underbrace{\left(\overrightarrow{j}\,\Lambda\,\overrightarrow{k}\right)}_{\overrightarrow{i}}.\overrightarrow{i} = \underbrace{\left(\overrightarrow{k}\,\Lambda\,\overrightarrow{i}\right)}_{\overrightarrow{j}}.\overrightarrow{j} = 1 \\ \left(\overrightarrow{j}\,\Lambda\,\overrightarrow{i}\right).\overrightarrow{k} = \left(\overrightarrow{k}\,\Lambda\,\overrightarrow{j}\right).\overrightarrow{i} = \left(\overrightarrow{i}\,\Lambda\,\overrightarrow{k}\right).\overrightarrow{j} = -1 \end{cases}$$

*Interprétation géométrique de la valeur absolue du produit mixte de trois vecteurs mesure le volume du parallélépipède.

*le produit mixte des trois vecteurs obéit la propriété de permutation circulaire:
$\left(\overrightarrow{A}\Lambda\overrightarrow{B}\right).\overrightarrow{C} = \left(\overrightarrow{C}\Lambda\overrightarrow{A}\right).\overrightarrow{B} = \left(\overrightarrow{B}\Lambda\overrightarrow{C}\right).\overrightarrow{A}$

Application:

Clculer le volume du parallélépipéde construit sur les vecteurs:
$\overrightarrow{A}\,(2,1,4),\ \overrightarrow{B}\,(3,-2,5)\,,\overrightarrow{C}\,(8,1,3)$

Réponce

Le produit mixte donne

$$\overrightarrow{A}.\left(\overrightarrow{B}\Lambda\overrightarrow{C}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$\overrightarrow{A}.\left(\overrightarrow{B}\Lambda\overrightarrow{C}\right) = [2.(-11)] - [1.(-31)] + [4.(+19)] = 85$

On a donc $\overrightarrow{A}.\left(\overrightarrow{B}\Lambda\overrightarrow{C}\right) = 85$

le volume du parallélépipéde est de 85 unités de volume.

1.11 Opérateurs différentiels

1.11.1 Gradient

On appelle l'opérateur différentiel $\overrightarrow{\nabla}$ « nabla » la grandeur suivante : $\overrightarrow{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}$

Le gradient d'un champ scalaire $f\,(x,y,z)$ est un vecteur défini par :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}} f\,(x,y,z) = \overrightarrow{\nabla} f\,(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}\right) f\,(x,y,z) \\ \overrightarrow{\text{grad}} f\,(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\overrightarrow{k} \end{cases} \tag{1.12}$$

Physiquement, grad $f\,(x,y,z)$ est le taux de variation d'une grandeur scalaire dans l'espace. Pratiquement, le gradient indique la direction de la plus grande variation du champ scalaire.

Application :

Dans un domaine de l'espace où la température est fonction des coordonnées telle que $T\,(x,y,z)$=$(3x^2y - y^3z^2)\,^\circ C$,

Réponce :

Le gradient de T vaut :

$\overrightarrow{\text{grad}T}(x,y,z) = \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z}\overrightarrow{k}$

$\overrightarrow{\text{grad}T}(x,y,z) = 6xy\overrightarrow{i} + (3x^2 - 3y^2z^2)\overrightarrow{j} - 2y^3z\overrightarrow{k}$

Au point $P(1,2,1)$ $\qquad \overrightarrow{\text{grad}T}(x,y,z) = 12\overrightarrow{i} - 9\overrightarrow{j} - 16\overrightarrow{k}$

1.11.2 Divergence

La divergence d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ est un scalaire défini par :

$$\begin{cases} div\ \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}\right).\left(\overrightarrow{V_x}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{V_y}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{V_z}\overrightarrow{k}\right) \\ div\ \overrightarrow{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x}\underbrace{\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i}}_{1} + \frac{\partial V_y}{\partial y}\underbrace{\overrightarrow{j}.\overrightarrow{j}}_{1} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\underbrace{\overrightarrow{k}.\overrightarrow{k}}_{1} \\ div.\overrightarrow{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{cases} \tag{1.13}$$

La divergence d'un champ de vecteurs exprime sa tendance à fluer localement hors d'un petit volume entourant le point M.

1.11.3 Rotationnel

Le rotationnel d'un champ vectoriel $\overrightarrow{V}$ est un vecteur défini par:

$$\begin{cases} \overrightarrow{Rot}\ \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla}\Lambda\overrightarrow{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}\right)\Lambda\left(\overrightarrow{V_x}\overrightarrow{i} + \overrightarrow{V_y}\overrightarrow{j} + \overrightarrow{V_z}\overrightarrow{k}\right) \\ \overrightarrow{Rot}\ \overrightarrow{V} = \overrightarrow{\nabla}\Lambda\overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{i} - \left(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z}\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{k} \end{cases} \tag{1.14}$$

Chapitre 2

CINEMATIQUE

2.1 INTRODUCTION

La cinématique fait partie de la mécanique qui étudie les mouvements en fonction du temps, sans se préoccuper de leurs causes (comme les forces par exemple...). C'est-à dire la modification apparente de sa position avec le temps.

2.2 Notion du point matériel

Pour décrire les mouvements d'un corps solide, on l'assimile souvent à un point matériel, c'est un corps matériel dont les dimensions sont théoriquement nulles et pratiquement ses dimensions caractéristiques sont négligeables par rapport aux distances qu'il parcourt. Exemple : une bille en chute libre est considérée comme un point matériel, non pas parce qu'elle est petite mais parce que ses dimensions sont négligeables devant la distance parcourue.

2.3 Système de référence

La description du mouvement d'un objet (un point matériel), en mécanique est nécessairement liée à un référentiel (ou un repère) par rapport auquel le mouvement, (la position et la trajectoire) est analysé.

Le référentiel est le milieu au sein du quel on étudie le mouvement. Si l'on considère l'exemple du voyageur assis dans un train en marche :

*Par rapport à un observateur sur le quai (le référentiel est la Terre), le voyageur est en mouvement ;

*Par rapport à un observateur dans le train (le référentiel est le train), le voyageur est immobile.

Ainsi en mécanique, pour qu'il n'y ait pas de doute possible, il est impératif d'indiquer le référentiel choisi c'est-à-dire préciser par rapport à quoi l'étude du mouvement sera effectuée.

2.3.1 Repère de l'espace

Pour déterminer la position d'un mobile dans l'espace, nous devons choisir avant tout un corps solide, que nous appelons référentiel, auquel nous associons des axes de coordonnées.

Un référentiel peut être caractérisé par un point O (origine) et trois directions fixes dans ce référentiel c'est-à-dire par un repère (O, x, y, z) dans lequel est repérée la position $M(x, y, z)$ d'un cops. Le corps est au repos par rapport à ce repère si ses coordonnées sont constantes au cours du temps. Cependant, si au moins l'une d'elles varie, le corps est en mouvement par rapport à R, peut aussi être caractérisé par son nom, dans les exemples précédents on peut parler du référentiel « train », «la Terre »..... .

Les repères galiléens sont constitués d'un système libre (c'est-à-dire au repos ou en mouvement rectiligne uniforme). Exemples de référentiel à connaître les repères d'inertie ou Galiléens, sont le référentiel de Copernic, le référentiel géocentrique et le référentiel terrestre (**Fig.2.1**).

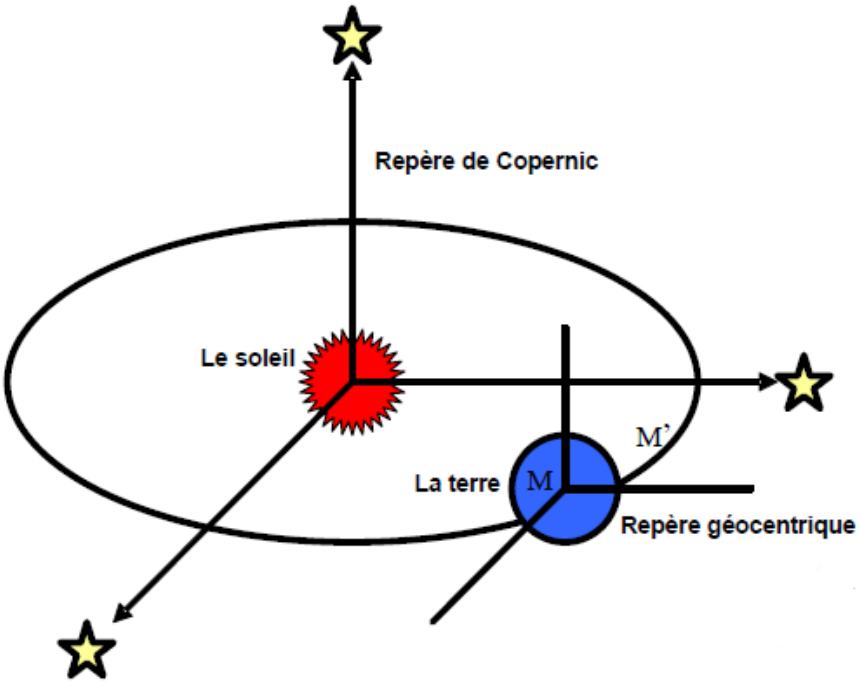


Fig.2.1: Les différents repères.

2.4 Trajectoire

On appelle trajectoire d'un mobile l'ensemble des positions successives occupées par le point matériel pendant des instants successifs et par rapport au système de référence choisi. Nous citons quelques trajectoires communes : trajectoires rectiligne, trajectoire circulaire, trajectoire curviligne... etc.

2.5 Les différents systèmes de coordonnées

Pour décrire le mouvement d'un mobile M, nécessite de déterminer à tout un instant, la position de ce point par rapport à un repère dans l'espace, alors nous avons besoin un système de coordonnées pour définie cette position.

2.5.1 Le système de coordonnées cartésiennes

Soit R un repère cartésien est formé par un système de trois axes orthonormé direct d'origine O de base cartésienne $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ où $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont les vecteurs unitaires des axes OX, OY et OZ respectivement. Ces trois axes sont perpendiculaires deux à deux.

Le vecteur position :

On note la position du point M par $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ qui s'appelle le vecteur position

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \tag{2.1}$$

Où x (*abscisse*), y (*ordonnée*), z (*altitude*) sont les coordonnées cartésiennes et qui sont des grandeurs algébriques .

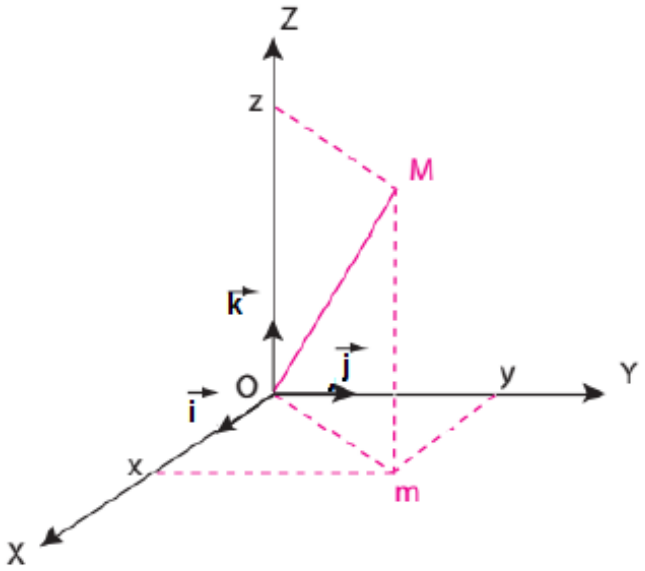


Fig.2.2: Cordonnées cartisiennes.

2.5.2 Le système de coordonnées polaires

Si le mobile effectue une rotation dans un plan (O, x, y) on peut repérer la position du mobile M par les coordonnées polaires. La position de Mest alors définie par deux coordonnées de nature différente notées habituellement ρ (*lacoordonnée radiale*) et θ (*angle polaire*).

Pour recouvrir tout le plan : $\begin{cases} 0 \leq \rho \langle +\infty \\ 0 \leq \theta \langle 2\pi \end{cases}$

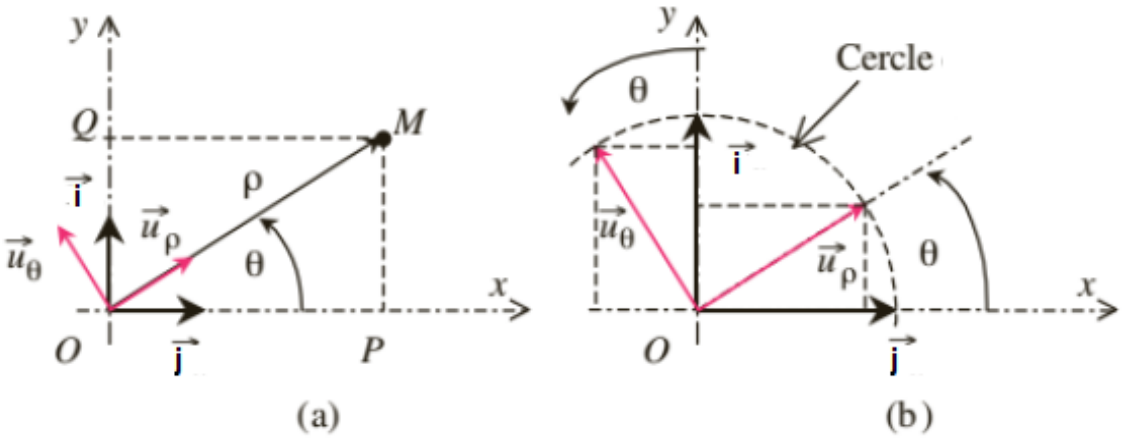


Fig.2.3: Les coordonnées polaires (ρ, θ) et la base associée $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta})$.

Le vecteur position

Le vecteur position dans ce repère s'écrit donc :

$$\overrightarrow{OM} = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \overrightarrow{u_\rho} = \rho \ \overrightarrow{u_\rho} \tag{2.2}$$

Correspondance avec les coordonnées cartésiennes (à 2D)

Les relations qui lient les deux coordonnées cartisiennes aux coordonnées polaires sont :

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ \tan\theta = \frac{x}{y} \end{cases} \tag{2.3}$$

En appliquant le théorème de Pythagore on trouve:

$$\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.4}$$

On trouve :

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \tag{2.5}$$

Aprtir de la figure 2.3 (b) et par la projection sur les axes (Ox) et (Oy) on trouve les composantes des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_\rho}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ dans la base cartésienne :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\rho} = \cos\theta \ \overrightarrow{i} + \sin\theta \ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta \ \overrightarrow{i} + \cos\theta \ \overrightarrow{j} \end{cases} \tag{2.6}$$

De la même façon que nous avons obtenu la relation précédente, nous pouvons écrire dans ce cas :

$$\begin{cases} \overrightarrow{i} = \cos\theta \ \overrightarrow{u_\rho} + \sin\theta \ \overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{j} = \sin\theta \ \overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta \ \overrightarrow{u_\theta} \end{cases} \tag{2.7}$$

2.5.3 Le système de coordonnées cylindriques

Si la trajectoire est spatiale, Il suffit de compléter le système de coordonnées polaires par un troisième axe Oz ; où ρ et Oz ($Fig2.4$) jouent un rôle particulier dans la

détermination de la position du mobile, il est possible d'utiliser les coordonnées cylindriques (ρ, θ, z), où ρ rayon polaire, θ angle polaire et z altitude.

Pour recouvrir tout le plan : $\begin{cases} 0 \leq \rho \langle +\infty \\ 0 \leq \theta \langle 2\pi \\ -\infty \langle z \langle +\infty \end{cases}$

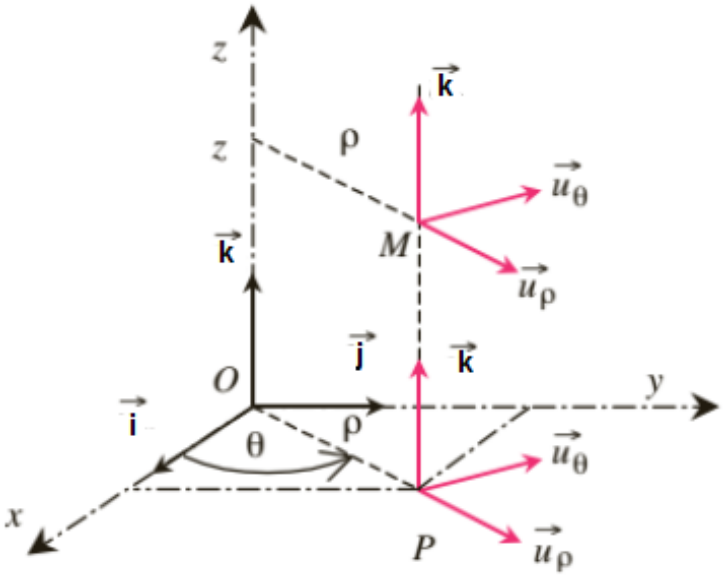


Fig.2.4: Le système de coordonnées cylindriques.

Le vecteur position

Obtient en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} \\ \overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{u}_\rho + z \overrightarrow{u}_z \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} \left\| \overrightarrow{OM} \right\| = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \left\| \overrightarrow{OM} \right\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{cases} \tag{2.9}$$

Correspondance avec les coordonnées cartésiennes

Les relations qui lient les deux coordonnées cartisiennes aux coordonnées cylindriques sont :

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases} \tag{2.10}$$

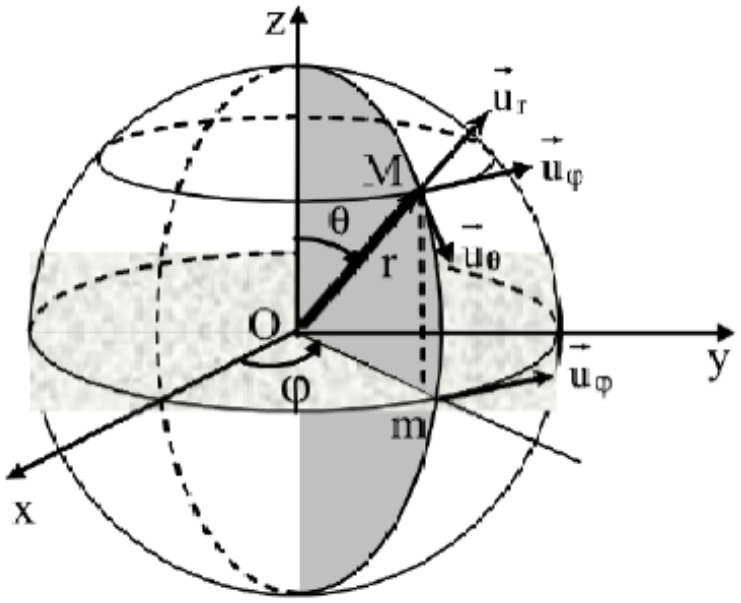
Aprtir de la figure 2.4 et par la projection sur les axes (Ox), (Oy),et (Oz) on trouve les composantes des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_\rho}$ $\overrightarrow{u_\theta}$et $\overrightarrow{u_z}$ dans la base cartésienne :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\rho} = \cos\theta \ \overrightarrow{i} + \sin\theta \ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -\sin\theta \ \overrightarrow{i} + \cos\theta \ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{k} \end{cases} \tag{2.11}$$

$(\overrightarrow{u_\rho} \ \overrightarrow{u_\theta} \ \overrightarrow{u_z})$ est la base locale associée aux coordonnées cylindriques, c'est une base orthonormée directe.

2.5.4 Le système de coordonnées sphériques

Dans le système de coordonnées sphériques la position du point M est définie dans un repère $(O \ \overrightarrow{u_r} \ \overrightarrow{u_\theta} \ \overrightarrow{u_\varphi})$. La base $(\overrightarrow{u_r} \ \overrightarrow{u_\theta} \ \overrightarrow{u_\varphi})$orthonormée directe, associée aux coordonnées sphériques $(r \ \theta \ \varphi)$ (**Fig.2.5**).



(2.12)

Fig.2.5: Représentation du système de coordonnées sphériques.

Pour recouvrir tout l'espace : $\begin{cases} 0 \leq r \ \langle +\infty \\ 0 \leq \theta \ \langle \pi \\ 0 \leq \varphi \ \langle 2\pi \end{cases}$

Le vecteur position

Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit comme suit dans la base sphérique :

$$\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{u_r} \tag{2.13}$$

Correspondance avec les coordonnées cartésiennes

Les relations qui lient les deux coordonnées cartisiennes aux coordonnées sphériques sont :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \tag{2.14}$$

Aprtir de la figure 2.5 et par la projection sur les axes (Ox), (Oy),et (Oz) on trouve les composantes des vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_\rho}$ $\overrightarrow{u_\theta}$et $\overrightarrow{u_z}$ dans la base cartésienne :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_r} = \sin\theta\cos\varphi\ \overrightarrow{i} + \sin\theta\sin\varphi\ \overrightarrow{j} + \cos\theta\ \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\cos\varphi\ \overrightarrow{i} + \cos\theta\sin\varphi\ \overrightarrow{j} - \sin\theta\ \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{u_\varphi} = -\sin\varphi\ \overrightarrow{i} + \cos\varphi\ \overrightarrow{j} \end{cases} \tag{2.15}$$

2.6 La vitesse d'un point matériel

On considère que la vitesse est une grandeur vectorielle mesure l'évolution de la position par rapport au temps.

2.6.1 Vitesse moyenne

Le rapport de la distance parcourue par un mobile M pendant le temps de parcours est appelé vitesse moyenne.

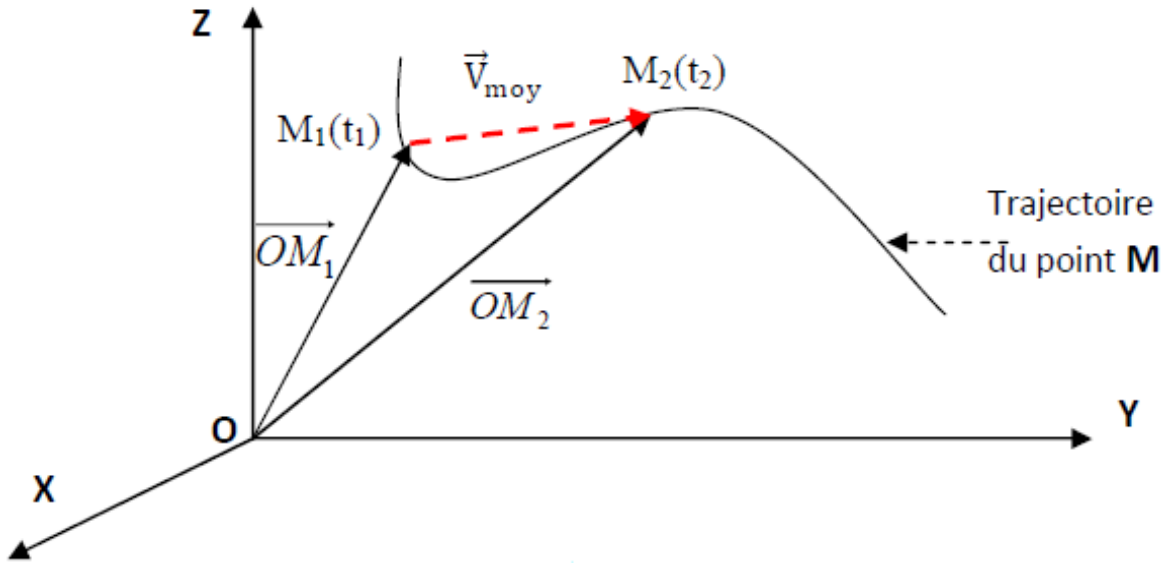


Fig.2.6: Définition de la vitesse moyenne.

$M(t_1) = M_1$: la position du point mobile M à l'instant t_1

$M(t_2) = M_2$: la position du point mobile M à l'instant t_2

le vecteur vitesse moyenne se définit par :

$$\overrightarrow{v}_{moy} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1}{\Delta t} \tag{2.16}$$

2.6.2 Vitesse instantanée

La vitesse instantanée v_{inst} est définie par la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{v}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1}{\Delta t} \\ \overrightarrow{v}_{inst} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \end{cases} \tag{2.17}$$

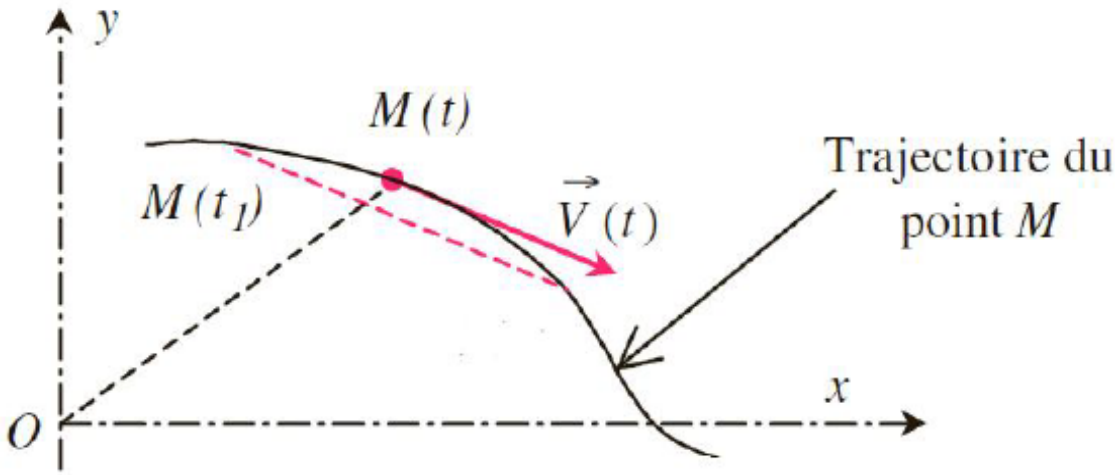


Fig.2.7: Définition de la vitesse instantanée.

Il en résulte que le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire du point M et dirigé dans le sens du mouvement du point M sur le trajet.

2.6.3 Vecteur vitesse avec les coordonnées cartésiennes

Considérons un repère cartésien orthonormé directe $R\left(O,\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\right)$,avec: $\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ fixe. Le vecteur position du point mobile M dans le repère cartésien R s'écrit :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{r}(t) = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \tag{2.18}$$

Où $x(t),\ y(t),\ z(t)$ sont les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ ou encore les coordonnées du points M.

La vitesse instantanée v_{inst} est définie par la dérivée du vecteur position par rapport au temps :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ \overrightarrow{v} = \frac{d}{dt}\left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}\right) \\ \overrightarrow{v} = \frac{dx}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{i} + \dot{y}\overrightarrow{j} + \dot{z}\overrightarrow{k} \end{cases} \tag{2.19}$$

La norme du vecteur vitesse est:

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \tag{2.20}$$

2.6.4 Vecteur vitesse avec les coordonnées polaires

Le vecteur position dans le repère polaires s'écrit donc :

$$\overrightarrow{OM} = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| \overrightarrow{u_\rho} = \rho \ \overrightarrow{u_\rho} \tag{2.21}$$

$\overrightarrow{u_\rho}$ et u_θ sont des vecteurs mobiles et donc variables dans le temps, contrairement aux vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ qui eux sont fixes.

On déduit l'expression de la vitesse :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ \overrightarrow{v} = \frac{d}{dt}\left(\rho \ \overrightarrow{u_\rho}\right) \\ \overrightarrow{v} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} \end{cases} \tag{2.22}$$

On sait que:

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\cos\theta \ \overrightarrow{i} + \sin\theta \ \overrightarrow{j}\right) = \frac{d\theta}{dt}\left(-\sin\theta\right) \ \overrightarrow{i} + \frac{d\theta}{dt}\left(\cos\theta\right) \ \overrightarrow{j} \\ \frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\left(\underbrace{-\sin\theta \ \overrightarrow{i} + \cos\theta \ \overrightarrow{j}}_{\overrightarrow{u}_\theta}\right) = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u}_\theta = \dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta \end{cases} \tag{2.23}$$

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\sin\theta \ \overrightarrow{i} + \cos\theta \ \overrightarrow{j}\right) = \frac{d\theta}{dt}\left(-\cos\theta\right) \ \overrightarrow{i} + \frac{d\theta}{dt}\left(-\sin\theta\right) \ \overrightarrow{j} \\ \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\left(\underbrace{\cos\theta \ \overrightarrow{i} + \sin\theta \ \overrightarrow{j}}_{\overrightarrow{u}_\rho}\right) = -\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u}_\rho = -\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\rho \end{cases} \tag{2.24}$$

on peut écrire l'expression de la vitesse en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} \\ \overrightarrow{v} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \rho \ \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u}_\theta \\ \overrightarrow{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho \ \dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta \end{cases} \tag{2.25}$$

La norme du vecteur vitesse est:

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \left(\rho \ \dot{\theta}\right)^2} \tag{2.26}$$

2.6.5 Vecteur vitesse avec les coordonnées cylindriques

Le vecteur position dans le repère cylindriques s'écrit donc :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{u}_\rho + z\,\overrightarrow{u}_z \tag{2.27}$$

Nous avons $\frac{d\overrightarrow{u_z}}{dt} = 0$ puisque $\overrightarrow{u_z}$ est fixe

On déduit l'expression de la vitesse :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ \overrightarrow{v} = \frac{d}{dt}\left(\rho\,\overrightarrow{u}_\rho + z\,\overrightarrow{u}_z\right) \\ \overrightarrow{v} = \frac{d\rho}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{u_z} \end{cases} \tag{2.28}$$

La norme du vecteur vitesse est:

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \left(\rho\,\dot{\theta}\right)^2 + \dot{z}^2} \tag{2.29}$$

2.6.6 Vecteur vitesse avec les coordonnées sphériques

Le vecteur position dans le repère cylindriques s'écrit donc :

$$\overrightarrow{OM} = r\ \overrightarrow{u_r} \tag{2.30}$$

On déduit l'expression de la vitesse :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ \overrightarrow{v} = \frac{d}{dt}\left(r\ \overrightarrow{u_r}\right) \\ \overrightarrow{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} \end{cases} \tag{2.31}$$

Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_\varphi}$ se déplacent avec le point M, donc ils dépendent du temps, et donc les dérivées de ces vecteurs par rapport au temps ne sont pas nulles.

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \sin\theta\cos\varphi\ \overrightarrow{i} + \sin\theta\sin\varphi\ \overrightarrow{j} + \cos\theta\ \overrightarrow{k} \\ \frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\cos\varphi\ \overrightarrow{i} + \sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\left(-\sin\theta\right)\overrightarrow{i} + \frac{d\theta}{dt}\cos\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{j} + \sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\cos\varphi\ \overrightarrow{j} + \frac{d\theta}{dt}\left(-\sin\theta\right)\overrightarrow{k} \\ \frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\left(\underbrace{\cos\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi - \sin\theta}_{\overrightarrow{u_\theta}}\right) + \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\left(\underbrace{-\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\varphi\ \overrightarrow{j}}_{\overrightarrow{u_\varphi}}\right) \\ \frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\ \overrightarrow{u_\varphi} \\ \frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\ \overrightarrow{u_\varphi} \end{cases} \tag{2.32}$$

En remplaçant $\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt}$ dans l'expression de $\overrightarrow{v}$ on obtient

$$\begin{cases} \overrightarrow{v} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{u_r} + r\left(\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{\varphi}\sin\theta\ \overrightarrow{u_\varphi}\right) \\ \overrightarrow{v} = \underbrace{\dot{r}}_{v_r}\overrightarrow{u_r} + \underbrace{r\dot{\theta}}_{v_\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \underbrace{r\dot{\varphi}\sin\theta}_{v_\varphi}\overrightarrow{u_\varphi} \end{cases} \tag{2.33}$$

La norme du vecteur vitesse est:

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + \left(r\dot{\theta}\right)^2 + \left(r\dot{\varphi}\sin\theta\right)^2} \tag{2.34}$$

2.6.7 Vitesse dans la base de Frenet (coordonnées intrinsèques)

Le système de coordonnée de Frenet ou intrinsèque est definie par : La base $(\overrightarrow{u}_t, \overrightarrow{u}_n)$.

$*\overrightarrow{u}_n$ est vecteur unitaire normal et orienté vers le centre du courbure.

$*\overrightarrow{u}_t$ est un vecteur unitaire tangent et orienté dans le sens du mouvement.

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire et du même sens que le mouvement, il porte le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_t$ il s'écrit :

$$\overrightarrow{v}(t) = \|\overrightarrow{v}\|\ \overrightarrow{u}_t = \frac{ds(t)}{dt}\ \overrightarrow{u}_t \tag{2.35}$$

2.7 Accélération d'un point matériel

l'accélération est la variation de la vitesse par unité de temps. Cette variation peut concerner la direction de la vitesse, son module ou les deux ;

L'unité de l'accélération dans le système international est le m/s^2.

2.7.1 L'accélération moyenne

L'accélération moyenne d'un mobile entre deux instants t_1 et t_2 est donnée par :

$$\overrightarrow{a}_m = \frac{\Delta\overrightarrow{v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v}_2(t_2) - \overrightarrow{v}_1(t_1)}{t_2 - t_1} \tag{2.36}$$

2.7.2 L'accélération instantanée

Le vecteur accélération instantanée d'un mouvement est définie par la dérivée du vecteur vitesse instantanée par rapport au temps, donc à la dérivée seconde du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ par rapport au temps.

$$\overrightarrow{a}_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{v}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \tag{2.37}$$

2.7.3 Vecteur accélération en coordonnées cartésiennes

De même que le vecteur vitesse, on écrit pour le vecteur accélération :

:

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \\ \overrightarrow{a} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}\,\overrightarrow{i} + \dot{y}\,\overrightarrow{j} + \dot{z}\,\overrightarrow{k}\right) \\ \overrightarrow{a} = \frac{d\dot{x}}{dt}\overrightarrow{i} + \frac{d\dot{y}}{dt}\overrightarrow{j} + \frac{d\dot{z}}{dt}\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{a} = \ddot{x}\,\overrightarrow{i} + \ddot{y}\,\overrightarrow{j} + \ddot{z}\,\overrightarrow{k} \end{cases} \tag{2.38}$$

La norme du vecteur accélération est:

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \tag{2.39}$$

2.7.4 Vecteur accélération en coordonnées polaires

On dérive l'expression obtenue pour la vitesse :

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \\ \overrightarrow{a} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\,\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta\right) \\ \overrightarrow{a} = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \dot{\rho}\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u}_\theta + \rho\frac{d\dot{\theta}}{dt}\overrightarrow{u}_\theta + \rho\,\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{dt} \\ \overrightarrow{a} = \ddot{\rho}\,\overrightarrow{u_\rho} + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{\rho}\,\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \rho\,\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u}_\theta + \rho\,\dot{\theta}\,\left(-\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\rho}\right) \\ \overrightarrow{a} = \underbrace{\left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2\right)}_{a_\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \underbrace{\left(2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\right)}_{a_\theta}\overrightarrow{u}_\theta \end{cases} \tag{2.40}$$

La norme du vecteur accélération est:

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2} = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\dot{\rho}\,\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta}\right)^2} \tag{2.41}$$

2.7.5 Vecteur accélération en coordonnées cylindriques

l'expression du vecteur accélération en coordonnées cylindriques:

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \\ \overrightarrow{a} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\ \dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\overrightarrow{u_z}\right) \\ \overrightarrow{a} = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\overrightarrow{u_\rho} + \dot{\rho}\frac{d\overrightarrow{u_\rho}}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\ \dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \rho\frac{d\dot{\theta}}{dt}\overrightarrow{u}_\theta + \rho\ \dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u}_\theta}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{a} = \ddot{\rho}\ \overrightarrow{u_\rho} + \dot{\rho}\ \dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \dot{\rho}\ \dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \rho\ \ddot{\theta}\ \overrightarrow{u}_\theta + \rho\ \dot{\theta}\ \left(-\dot{\theta}\ \overrightarrow{u_\rho}\right) + \ddot{z}\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{a} = \underbrace{\left(\ddot{\rho} - \rho\ \dot{\theta}^2\right)}_{a_\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \underbrace{\left(2\dot{\rho}\ \dot{\theta} + \rho\ \ddot{\theta}\right)}_{a_\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \underbrace{\ddot{z}}_{a_z}\overrightarrow{u_z} \end{cases} \tag{2.42}$$

La norme du vecteur accélération est:

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \rho\ \dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2\dot{\rho}\ \dot{\theta} + \rho\ \ddot{\theta}\right)^2 + \ddot{z}^2} \tag{2.43}$$

2.7.6 Vecteur accélération en coordonnées sphériques

l'expression du vecteur accélération en coordonnées cylindriques:

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \\ \overrightarrow{a} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\ \overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\ \overrightarrow{u_\varphi}\right) \\ \overrightarrow{a} = \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \dot{r}\ \dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + r\ \ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\ \overrightarrow{u_\varphi} + r\ \ddot{\varphi}\sin\theta\ \overrightarrow{u_\varphi} + \\ \dot{\theta}r\dot{\varphi}\cos\theta\overrightarrow{u_\varphi} + r\dot{\varphi}\sin\theta\frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{dt} \end{cases} \tag{2.44}$$

Calculons $\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$ et $\frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{dt}$:

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\cos\theta\cos\varphi\ \overrightarrow{i} + \cos\theta\sin\varphi\ \overrightarrow{j} - \sin\theta\ \overrightarrow{k}\right) \\ \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\cos\varphi\ \overrightarrow{i} - \dot{\varphi}\cos\theta\sin\varphi\ \overrightarrow{i} + -\dot{\theta}\sin\theta\sin\varphi\ \overrightarrow{j} + \dot{\varphi}\cos\theta\cos\varphi\ \overrightarrow{j} - \dot{\theta}\cos\theta\overrightarrow{k} \\ \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\underbrace{\left(\sin\theta\cos\varphi\ \overrightarrow{i} + \sin\theta\sin\varphi\ \overrightarrow{j} + \cos\theta\overrightarrow{k}\right)}_{u_r} + \dot{\varphi}\cos\theta\underbrace{\left(-\sin\varphi\ \overrightarrow{i} + \cos\theta\cos\varphi\ \overrightarrow{j}\right)}_{u_\varphi} \\ \frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\ u_r + \dot{\varphi}\cos\theta\ u_\varphi \end{cases} \tag{2.45}$$

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\sin\varphi\ \overrightarrow{i} + \cos\varphi\ \overrightarrow{j}\right) \\ \frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi}\cos\varphi\ \overrightarrow{i} - \dot{\varphi}\sin\varphi\ \overrightarrow{j} \\ \frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi}\left(\cos\varphi\ \overrightarrow{i} + \sin\varphi\ \overrightarrow{j}\right) \\ \frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{dt} = -\dot{\varphi}\left(\sin\theta\ \overrightarrow{u_r} + \cos\theta\ \overrightarrow{u_\theta}\right) \end{cases} \tag{2.46}$$

En remplaçant les expressions obtenues pour $\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$ et $\frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{dt}$ dans l'expression précédente de l'accélération $\overrightarrow{a}$, on trouve:

$$\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{a} = \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \dot{r}\ \dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + r\ \ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\ \overrightarrow{u_\varphi} \\ +r\ \ddot{\varphi}\sin\theta\ \overrightarrow{u_\varphi} + \dot{\theta}r\dot{\varphi}\cos\theta\overrightarrow{u_\varphi} + r\dot{\varphi}\sin\theta\frac{d\overrightarrow{u_\varphi}}{dt} \\ \overrightarrow{a} = \underbrace{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)}_{a_r}\overrightarrow{u_r} + \underbrace{\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)}_{a_\theta}\overrightarrow{u}_\theta + \\ \underbrace{\left(r\sin\theta\ \ddot{\varphi} + 2r\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)}_{a_\varphi}\overrightarrow{u_\varphi} \end{array}\right. \tag{2.47}$$

La norme du vecteur accélération est:

$$\|\overrightarrow{a}\| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_\varphi^2} \tag{2.48}$$

2.7.7 L'accélération dans la base de Frenet

L'accélération du point M dans la base de Frenet par rapport au référentiel (R) s'écrit:

$$\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{a} = \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds(t)}{dt}\ \overrightarrow{u}_t\right) \\ \overrightarrow{a} = \frac{d^2s(t)}{dt^2}\ \overrightarrow{u}_t + \frac{ds(t)}{dt}.\frac{d\overrightarrow{u}_t}{dt} \\ \overrightarrow{a} = \frac{d\dot{s}(t)}{dt}\ \overrightarrow{u}_t + \dot{s}.\frac{d\overrightarrow{u}_t}{dt} \end{array}\right. \tag{2.49}$$

Calculons $\frac{d\overrightarrow{u}_t}{dt}$:

$$\frac{d\overrightarrow{u}_t}{dt} = \overrightarrow{\omega}(t)\,\Lambda\,\overrightarrow{u}_t = \omega(t)\,\overrightarrow{u}_z\Lambda\,\overrightarrow{u}_t = \omega(t)\,\overrightarrow{u}_n = \frac{\dot{s}}{r}\overrightarrow{u}_n \tag{2.50}$$

Avec r le rayon de courbure de la trajectoire et $\overrightarrow{u}_t$ est toujours perpendiculaire a $\overrightarrow{u}_n$ ($\overrightarrow{u}_t \perp \overrightarrow{u}_n$).

En remplaçant les expressions obtenues pour $\frac{d\overrightarrow{u}_t}{dt}$ dans l'expression précédente de l'accélération $\overrightarrow{a}$, on trouve:

$$\left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{a} = \frac{d\dot{s}(t)}{dt}\ \overrightarrow{u}_t + \dot{s}.\frac{\dot{s}}{r}\overrightarrow{u}_n \\ \overrightarrow{a} = \underbrace{\ddot{s}}_{a_t}\ \overrightarrow{u}_t + \underbrace{\frac{\dot{s}^2}{r}}_{a_n}\ \overrightarrow{u}_n \end{array}\right. \tag{2.51}$$

L'accélération présente deux composantes :

*Une composante tangentielle notée a_t tangente à la courbe, elle indique si la valeur de

la vitesse change.

$$a_t = \ddot{s} = \frac{dv}{dt} \tag{2.52}$$

*Une composante normale notée a_n orienté vers le centre de courbure, elle indique si la direction de la vitesse change.

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{r} = \frac{v^2}{r} \tag{2.53}$$

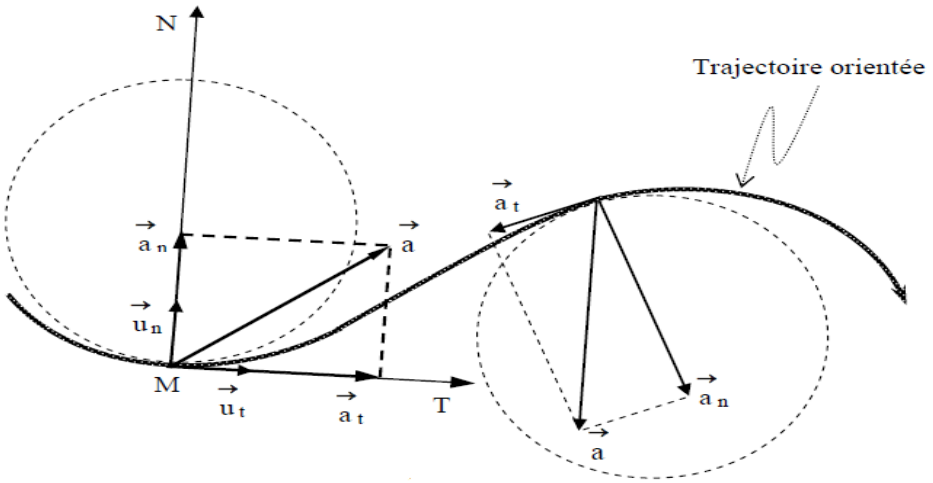


Fig.2.8: Composantes de l'accélération dans la base de Frenet.

Le rayon de courbure r peut être déterminé comme suit :

$$\begin{cases} \vec{a} = \ddot{s}\ \vec{u}_t + \frac{\dot{s}^2}{r}\ \vec{u}_n = a_t\ \vec{u}_t + a_n\ \vec{u}_n \\ \|\vec{a}\|^2 = \|\vec{a_t}\|^2 + \|\vec{a}_n\|^2 \\ \|\vec{a}_n\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{a}_t\|^2 \\ \|\vec{a}_n\| = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{a}_t\|^2} \\ \frac{v^2}{r} = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{a}_t\|^2} \\ r = \frac{v^2}{\sqrt{\|\vec{a}\|^2 - \|\vec{a}_t\|^2}} \end{cases} \tag{2.54}$$

2.8 Exemples de mouvement

2.8.1 Mouvement rectiligne

L'étude du mouvement rectiligne se réduit à une dimension, puisque le mobile se déplace suivant une droite.

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\ \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{v}(t) = \dot{x}\ \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{a} = \ddot{x}\ \overrightarrow{i} \end{cases} \tag{2.55}$$

Le mouvement rectiligne uniforme (MRU)

On parle de mouvement rectiligne uniforme lorsque la vitesse est constante au cours du temps.

$$\begin{cases} v(t) = cste = v_0 \\ a = \frac{dv}{dt} = 0 \\ v(t) = v_0 = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow dx = v_0.dt \\ x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_0 dt \Longrightarrow x(t) = x(t_0) + v_0(t - t_0) \end{cases} \tag{2.56}$$

Le mouvement rectiligne uniformément varié

Un mouvement est rectiligne uniformément varié si la trajectoire est rectiligne et le vecteur accélération est constant.

$$\begin{cases} a(t) = cste = v_0 \\ a = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow dv = a\ dt \Longrightarrow \int_{v(0)}^{v} dv = a\int_0^t dt \Longrightarrow v(t) - v(0) = at \\ v(t) = at + v(0) \end{cases} \tag{2.57}$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{cases} v(t) = \frac{dx}{dt} \Longrightarrow dx = v(t)\,dt \Longrightarrow \int_{x(0)}^{x} dx = \int_0^t (at + v_0)\,dt \\ x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \end{cases} \tag{2.58}$$

L'étude du signe du produit de la vitesse par l'accélération nous permettra de préciser si le mouvement est accéléré $(av\rangle 0)$ ou retardé (décéléré) $(av\langle 0)$.

on déduit la variation de la vitesse et du déplacement pour le mouvement rectiligne uniformément accéléré :

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \tag{2.59}$$

Mouvement circulaire

La trajectoire du point est un cercle fixe de centre O et de rayon R, et notons θ l'angle formé par l'axe (Ox) et le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Mouvement circulaire uniforme le mouvement du point M est circulaire uniforme si la norme du vecteur vitesse V est constante, mais sa direction change. La vitesse angulaire de rotation ω est constante.

$$\begin{cases} \omega = \frac{d\theta}{dt} = cste \\ d\theta = \omega dt \Longrightarrow \\ \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \omega \int_0^t dt \Longrightarrow \theta(t) = \omega t + \theta_0 \end{cases} \tag{2.60}$$

Lorsque le vecteur position tourne de 2p (un tour) ceci correspond à une période ($t = T$)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi f \tag{2.61}$$

où T et f sont la période et la fréquence du mouvement du point M. La vitesse de M vaut

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R \tag{2.62}$$

L'accélération est:

$$a = a_n = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} \text{ puisque } a_t = 0 \tag{2.63}$$

La direction du vecteur accélération varie au cours du temps mais sa norme reste constante.

Mouvement circulaire non uniforme $\theta(t)$ varie de façon quelconque, l'abscisse curviligne s'écrit:

$$s(t) = R\,\theta(t) \tag{2.64}$$

la vitesse :

$$\overrightarrow{v} = \frac{ds(t)}{dt}\overrightarrow{u}_t = R\omega(t)\,\overrightarrow{u}_t = R\,\dot{\theta}(t)\,\overrightarrow{u}_t \tag{2.65}$$

Le vecteur accélération s'écrit grâce à la formule de Frenet:

$$\overrightarrow{a} = R\frac{d\omega}{dt}\,\overrightarrow{u}_t + R\omega\,\overrightarrow{u}_n \tag{2.66}$$

Application:

Un point P se déplace dans un plan Oxy, ses coordonnées à l'instant t sont données par : $x = 20\alpha(t-\tau)$ $\quad y = 10\beta(t-\tau)^2$ $\quad$ avec: $\alpha = 1m/s$, $\beta = 1m/s^2$ et $\tau = 1s$

a) Trouver l'équation cartésienne de la trajectoire, de représenter la courbe correspondante entre 0 et $4s$;

b) Calculer les composantes cartésiennes de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ ainsi que leurs modules ;

c) Calculer les composantes intrinsèques de $\overrightarrow{a}$ ($\overrightarrow{a_t}$ et $\overrightarrow{a_n}$).

d) Représenter les vecteurs vitesses et accélérations à $t = 3s$.

Echelles : $1cm \longrightarrow 10m/s$ $\qquad$ $1cm \longrightarrow 4m/s^2$

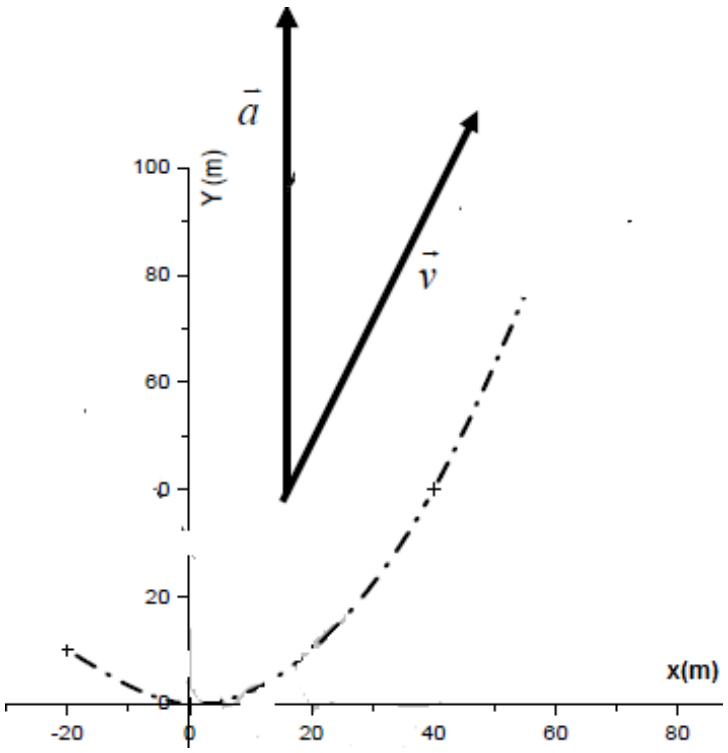
e) Calculer le rayon de courbure lorsque $t = 3s$.

Réponce :

a) Equation de la trajectoire :

$$\begin{cases} x = 20\,(t-1) \\ y = 10\,(t-1)^2 \end{cases} \Longrightarrow y = \tfrac{1}{40}x^2$$

- graphe de la trajectoire $y = f(x)$



b) les composantes cartésiennes de l'accélération:

*Vitesse:

$$\begin{cases} v_x = 20 \\ v_y = 20\,(t-1) \end{cases} \Longrightarrow v = 20\sqrt{1+(t-1)^2}$$

*Accélération:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 20 \end{cases} \Longrightarrow a = 20m/s^2$$

c- composantes intrinsèques de l'accélération :

$$\begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{20(t-1)}{\sqrt{1+(t-1)^2}} \\ a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{20}{\sqrt{1+(t-1)^2}} \end{cases}$$

d- accélération et vitesse à $t = 3s$:

$$\begin{cases} v_x(3s) = 20m/s \\ v_y(3s) = 40m/s \end{cases} \Longrightarrow v(3s) = 44.72m/s \qquad \begin{cases} a_t(3s) = 17.88m/s^2 \\ a_n(3s) = 8.94m/s^2 \end{cases} \Longrightarrow a = 20m/s^2$$

e- Rayon de courbure:

$$r = \frac{v^2}{a_n} = 223.6m$$

2.9 Mouvement relatif

Nous avons jusqu'ici considéré le référentiel relatif R_r un repère mobile (ou **repère relatif**) par rapport au référentiel absolu R_a considéré comme un repère fixe (ou **repère absolu**). Le référentiel R_a est caractérisé par son repère cartésien de base $\left(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de coordonnées cartésiennes (x, y, z). Le référentiel R_r (le référentiel mobile) est caractérisé par son repère cartésien de base $\left(0', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right)$ de coordonnées cartésiennes $(x\prime, y\prime, z\prime)$.

2.9.1 Le mouvement absolu

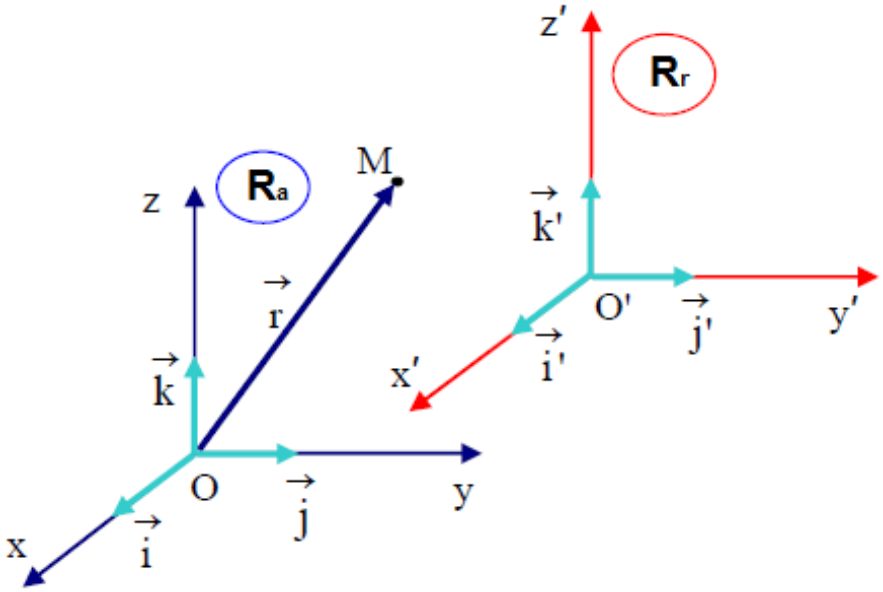


Fig.2.9: Le mouvement de M considéré par rapport au repère absolu R_a.

Le mouvement de M considéré par rapport au repère absolu $R_a\left(0,\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k}\right)$ est caractérisé par les grandeurs vecteur position, la vitesse absolue et l'accélération absolue:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{r} = x\ \overrightarrow{i} + y\ \overrightarrow{j} + z\ \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{v}_a(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\ \overrightarrow{i} + \dot{y}\ \overrightarrow{j} + \dot{z}\ \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{a}_a(t) = \frac{d\overrightarrow{v}_a}{dt} = \ddot{x}\ \overrightarrow{i} + \ddot{y}\ \overrightarrow{j} + \ddot{z}\ \overrightarrow{k} \end{cases} \tag{2.67}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ de la base associée à (R_a) sont considérés comme fixes avec le temps.

2.9.2 Le mouvement relatif

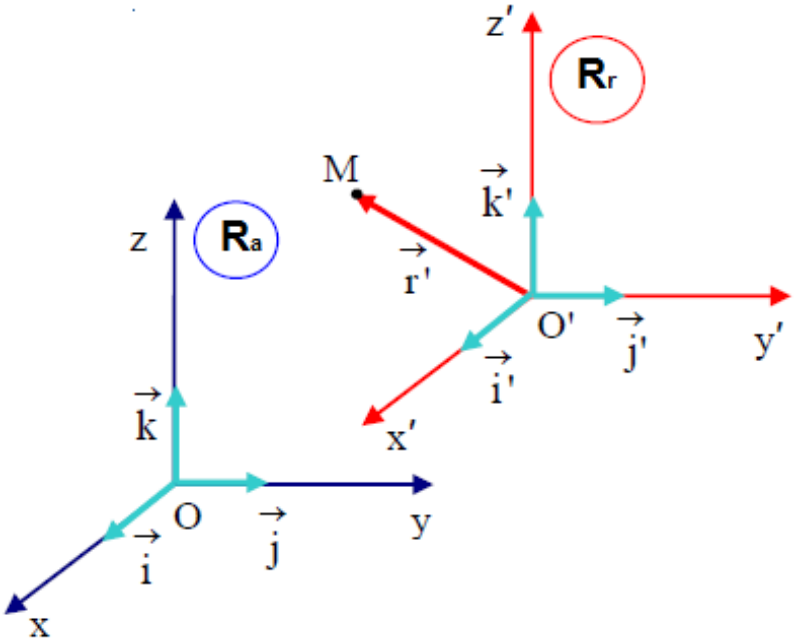


Fig.2.10: Le mouvement de M considéré par rapport au repère relatif R_r.

Le même mouvement, considéré par rapport au repère relatif $R_r\left(0',\ \overrightarrow{i'},\ \overrightarrow{j'},\ \overrightarrow{k'}\right)$ est caractérisé par les grandeurs vecteur position, la vitesse absolue et l'accélération absolue:

$$\begin{cases} \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{r} = x'\ \overrightarrow{i'} + y'\ \overrightarrow{j'} + z'\ \overrightarrow{k'} \\ \overrightarrow{v}_r(t) = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \dot{x}'\ \overrightarrow{i'} + \dot{y}'\ \overrightarrow{j'} + \dot{z}'\ \overrightarrow{k'} \\ \overrightarrow{a}_r(t) = \frac{d\overrightarrow{v}_a}{dt} = \ddot{x}'\ \overrightarrow{i'} + \ddot{y}'\ \overrightarrow{j'} + \ddot{z}'\ \overrightarrow{k'} \end{cases} \tag{2.68}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{i'}$, $\overrightarrow{j'}$, $\overrightarrow{k'}$ de la base associée à (R_r) sont aussi considérés comme fixes avec le temps.

2.9.3 Composition des vecteurs vitesses

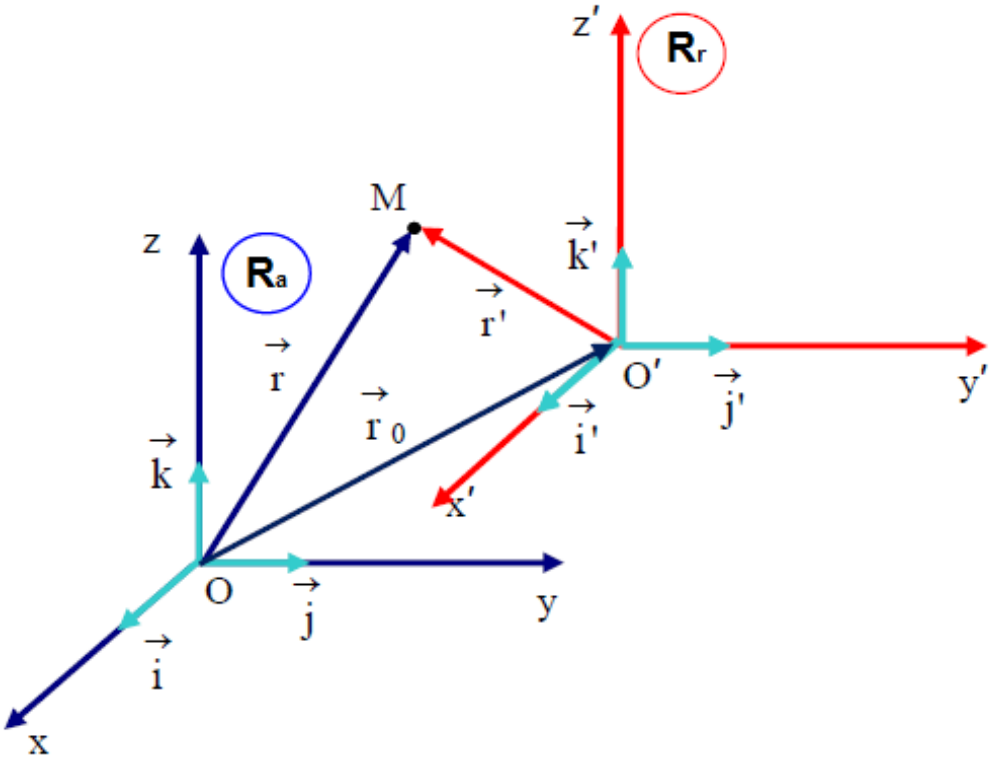


Fig.2.11: Le mouvement de M considéré par rapport au référentiel absolue (fixe) (R_a) et référentiel relatif (mobile) (R_r).

Pour trouver la relation entre les vitesses absolue et relative, il faut partir de la relation.

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \\ \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{r'} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{r'} = \overrightarrow{O'M} = x' \ \overrightarrow{i'} + y' \ \overrightarrow{j'} + z' \ \overrightarrow{k'} \end{cases} \tag{2.69}$$

Si on dérive par rapport au temps, en tenant compte du fait que la base $\left(\overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'}, \overrightarrow{k'}\right)$ peut varier dans (R_a).

Par définition, la vitesse absolue du point M est :

$$\begin{cases} \overrightarrow{v}_a(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r}_0}{dt} + \frac{dx'}{dt} \ \overrightarrow{i'} + x' \frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt} \overrightarrow{j'} + y' \frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt} \overrightarrow{k'} + z' \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} \\ \overrightarrow{v}_a(t) = \underbrace{\left(\frac{d\overrightarrow{r}_0}{dt} + x' \frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} + y' \frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} + z' \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} \right)}_{\overrightarrow{v}_e} + \underbrace{\left(\frac{dx'}{dt} \ \overrightarrow{i'} + \frac{dy'}{dt} \overrightarrow{j'} + \frac{dz'}{dt} \overrightarrow{k'} \right)}_{\overrightarrow{v}_r} \\ \overrightarrow{v}_a(t) = \overrightarrow{v}_e + \overrightarrow{v}_r \end{cases} \tag{2.70}$$

La vitesse absolue d'un point M s'exprime alors en fonction de la vitesse *relative* du point M et de la vitesse **d'entraînement** du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu.

La grandeur $\overrightarrow{v}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{r}_0}{dt} + x'\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)$ est appelée **vitesse d'entraînement** et représente la vitesse du repère (R_r) par rapport au repère (R_a).

2.9.4 Composition des vecteurs accélérations

On peut établir les expressions de l'accélération absolue $\overrightarrow{a}_a$ et l'accélération relative $\overrightarrow{a}_r$ du point matériel en dérivant le vecteur vitesse absolue et le vecteur vitesse relative par rapport au temps On obtient donc :

l'accélération relative $\overrightarrow{a}_r$:

En considérantles vecteurs $\overrightarrow{i'}$, $\overrightarrow{j'}$, $\overrightarrow{k'}$ de la base associée à (Rr) comme fixes avec le temps

$$\begin{cases} \overrightarrow{a}_r = \frac{d\overrightarrow{v}_r}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}\ \overrightarrow{i'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{j'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'}\right) \\ \overrightarrow{a}_r = \frac{d^2x'}{dt^2}\ \overrightarrow{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'} \end{cases} \tag{2.71}$$

l'accélération absolue $\overrightarrow{a}_a$:

$$\begin{cases} \overrightarrow{a}_a = \frac{d\overrightarrow{v}_a}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{r}_0}{dt} + x'\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} + y'\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} + z'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} + \frac{dx'}{dt}\ \overrightarrow{i'} + \frac{dy'}{dt}\overrightarrow{j'} + \frac{dz'}{dt}\overrightarrow{k'}\right) \\ \overrightarrow{a}_a = \underbrace{\left(\frac{d^2\overrightarrow{r}_0}{dt^2} + x'\frac{d^2\overrightarrow{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}\right)}_{\overrightarrow{a}_e} + \underbrace{\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'}\right)}_{\overrightarrow{a}_r} \\ \qquad + \underbrace{2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)}_{\overrightarrow{a}_c} \\ \overrightarrow{a}_a = \overrightarrow{a}_e + \overrightarrow{a}_r + \overrightarrow{a}_c \end{cases} \tag{2.72}$$

Cette expression fait apparaître trois termes :

$\overrightarrow{a}_e = \frac{d^2\overrightarrow{r}_0}{dt^2} + x'\frac{d^2\overrightarrow{i'}}{dt^2} + y'\frac{d^2\overrightarrow{j'}}{dt^2} + z'\frac{d^2\overrightarrow{k'}}{dt^2}$ est **l'accélération d'entraînement**, représentant l'accélération du point coïncidant A par rapport au repère absolu (R_a).

$\overrightarrow{a}_r = \frac{d^2x'}{dt^2}\overrightarrow{i'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\overrightarrow{j'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\overrightarrow{k'}$ est **l'accélération relative**.

$\overrightarrow{a}_c = 2\left(\frac{dx'}{dt}\frac{d\overrightarrow{i'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\frac{d\overrightarrow{j'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)$ est une accélération complémentaire, dite **accélération de Coriolis**

Chapitre 3

DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL

3.1 Introduction

Nous avons étudié dans le chapitre précédent la cinématique du point qui permet de décrire le mouvement d'un point matériel, sans s'intéresser aux causes qui provoquent le mouvement , par contre, nous nous intéressons dans ce chapitre à la cause qui a produit le mouvement, et relier entre la cause et le mouvement. Les causes du mouvement sont modélisées en mécanique par des grandeurs vectorielles appelés forces. Pour cela, nous aborderons les lois fondamentales de la dynamique ou les trois lois de Newton, en référence au savant physicien Isaac Newton, fondateur de la mécanique classique.

3.2 Notions fondamentales

3.2.1 Masse

La masse est une grandeur physique scalaire positive proportionnelle à la quantité de matière qui la constitue. Elle traduit la capacité d'un corps à s'opposer à toute modification de sa vitesse, donc elle mesure son inertie, c'est-à-dire que plus un objet aura une masse importante et plus il sera difficile de le faire accélérer, ralentir ou changer de direction. Elle est invariable dans la mécanique newtonienne, l'unité de masse dans le système international est le kilogramme (symbole : kg). Elle intervient directement dans le principe fondamental de la dynamique.

3.2.2 Quantité de mouvement

La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle qui introduire des informations sur l'objet lui-même et sur son mouvement. C'est la grandeur qui combine la masse d'un point matériel par sa vitesse, le vecteur quantité de mouvement $\overrightarrow{p}$ (parfois appelé impulsion) pour un point matériel de masse m et de vitesse $\overrightarrow{v}$ par rapport à R est définie comme étant le produit de sa masse par son vecteur vitesse.

$$\overrightarrow{p} = m\ \overrightarrow{v} \tag{3.1}$$

L'unité de la quantité de mouvement dans le système international est le $kg.m.s^{-1}$.

Le vecteur quantité de mouvement d'un système matériel (N particules) constitué de n masses m_i situées aux points M_i et se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}_i$ dans le référentiel R on définit comme étant la somme vectorielle des quantités de mouvements de chacune des particules. :

$$\overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\ \overrightarrow{v}_i = \sum_{i=1}^{i=n} \overrightarrow{p}_i \tag{3.2}$$

3.2.3 Force

La force est une grandeur vectorielle, caractérisé par une direction, un sens et une intensité interviennent pour déterminer l'action exercée. En physique désigne l'interaction entre deux objets ou systèmes, c'est une cause qui capable de modifier ou de produire un mouvement ou une déformation du système. Son unité de mesure est le Newton, noté N.

3.3 Lois de Newton

3.3.1 Première loi de Newton : principe d'inertie

Dans un référentiel Galiléen[1], Tout corps isolé (ou pseudo isolé) conserve son l'état de repos ou de mouvement rectiligne uniforme n'est soumis à aucune interaction avec d'autres objets matériels .

$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{F}_{ext} = \overrightarrow{0} \\ \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = \overrightarrow{0} \end{cases} \tag{3.3}$$

[1]Tout repère déplaçant avec une vitesse constante par rapport à un autre repère Galiléen, est considéré aussi Galiléen.

3.3.2 Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen, la variation de la quantité de mouvement d'un corps par rapport au temps est égale à la somme des forces extérieures appliquées.

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} \tag{3.4}$$

Dans le cas d'un système à masse constante, il est possible de sortir la masse de la dérivée de la quantité de mouvement et écrit le principe fondamental de la dynamique à l'aide du vecteur accélération sous la forme:

$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{F}_{ext} = \frac{d\overrightarrow{p}}{dt} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \\ \sum \overrightarrow{F}_{ext} = m\overrightarrow{a} \end{cases} \tag{3.5}$$

3.3.3 Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

La troisième loi de Newton, s'énonce de la manière suivante : Si un point matériel A exerce sur un point matériel B une force $\overrightarrow{f}_{1|2}$, alors le point B exerce sur le point A une force $\overrightarrow{f}_{2|1}$ de même intensité mais de sens opposée telle que

$$\overrightarrow{f}_{1|2} = -\overrightarrow{f}_{2|1} \tag{3.6}$$

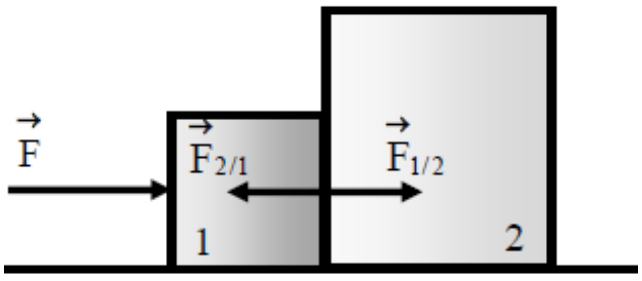


Fig.3.1: Principe des actions réciproques.

Ce principe est universel, il s'applique aussi bien pour les forces de contact que pour les forces à distance, à l'échelle des particules comme à l'échelle de l'univers.

3.4 Les forces

On distingue deux grandes catégories de forces:

3.4.1 Force à distance

Force de gravitation universelle

Considérons deux points matériels de masse m_1 et m_2 , séparées l'une de l'autre par une distance M_1M_2. deux points matériels exercent mutuellement l'un sur l'autre une force attractive décrite par :

$$\overrightarrow{F}_{2|1} = -\overrightarrow{F}_{1|2} = G\frac{m_1\ m_2}{(M_1M_2)^2}\overrightarrow{u} \tag{3.7}$$

G est la constante de gravitation $G = 6.67 \times 10^{-11} N.m^2/kg^2$.

$\overrightarrow{u}$ vecteur unitaire porté par la droite $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\|\overrightarrow{M_1M_2}\|}$.

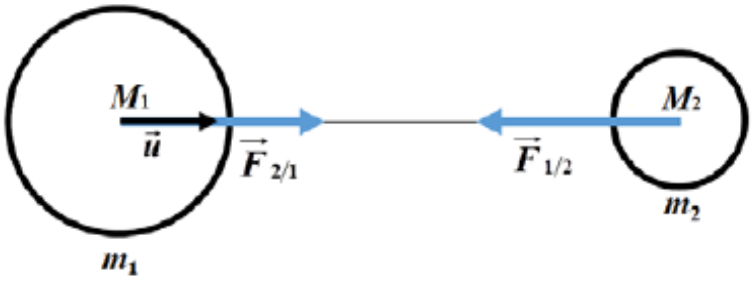


Fig.3.2: Force de gravitation.

Cas particulier :

* l'attraction d'une masse m au voisinage de la surface de la Terre de masse M_T et de rayon R_T

$$\begin{cases} F_{M_T|m} = G\frac{M_T\ m}{R_T^2} \\ F_{M_T|m} = p = mg \end{cases} \Longrightarrow g = \frac{GM_T}{R_T^2} \tag{3.8}$$

* l'attraction d'une masse m se trouve à une altitude h par rapport à la surface de la Terre de masse M_T et de rayon R_T

$$\begin{cases} F_{M_T|m} = G\frac{M_T\ m}{(R_T+h)^2} \\ F_{M_T|m} = p = mg \end{cases} \Longrightarrow g = \frac{GM_T}{(R_T+h)^2} \tag{3.9}$$

Force coulombienne

C'est une force qui apparaît entre deux charges q_1 et q_2 séparées l'une de l'autre par une distance r.

$$\overrightarrow{F}_{1|2} = -\overrightarrow{F}_{2|1} = K\frac{|q_1|\ \ |q_2|}{r^2}\overrightarrow{u} \tag{3.10}$$

K est la constante de gravitation $K = 9 \times 10^2 N.m^2/c^2$.

$\overrightarrow{u}$ vecteur unitaire porté par la droite $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{r}}{\|\overrightarrow{r}\|}$

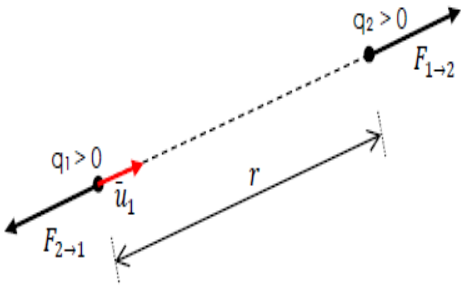


Fig.3.3: Force de coulombienne.

Les particules chargées créent autour d'elles, partout dans l'espace un champ électrique. Si une charge électrique se trouve en présence d'un champ électrique, ceci va lui faire subir une force de Lorentz en notant que: $\overrightarrow{F}_{1|2} = q_2\left(K\frac{|q_1|}{r^2}\overrightarrow{u}\right) = q_2.\overrightarrow{E}\,(q_1)$ soit $\overrightarrow{E}\,(q_1) = K\frac{|q_1|}{r^2}\overrightarrow{u}$.

3.4.2 Force électromagnétique

la force subie par une particule de charge q et de vitesse $\overrightarrow{v}$ soumise à un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et à un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est décrite par la force de Lorentz :

$$\overrightarrow{F} = q\left[\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}\right] \tag{3.11}$$

3.4.3 Forces de contact

Les forces de contact se manifestent lors lors du contact de deux corps, un solide avec un solide ou un solide avec un fluide.

Force de tension d'un fil

La force de tension d'un fil inextensible de masse négligeable n'existe que lors le fil est tendu, la tension est la même en tout point du fil et que sa valeur dépend du mouvement du point. Cette tension est nulle si le fil n'est plus tendu.

Exemple1

Considérons une masse m attachée à une extrémité d'un fil inextensible, l'autre extrémité est fixée à un support comme indiqué sur la **Fig.3.4**.

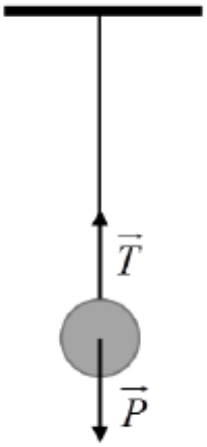


Fig.3.4: Tension d'un fil.

Exemple2

On considère une masse m attachée à une extrémité d'un ressort de constante de raideur k, l'autre extrémité est fixée à un support . Quand le ressort s'allonge, une force de rappel, proportionnelle à cet allongement et appelée tension, s'exerce sur la masse comme indiqué sur la **Fig.3.5**:

$$\overrightarrow{F} = -k\,(l - l_0)\,.\,\overrightarrow{u} = -k.x.\overrightarrow{u} \tag{3.12}$$

k : constante de raideur du ressort, l : longueur du ressort à l'instant t, l_0 : longueur du ressort à vide, $\overrightarrow{u}$: vecteur unitaire

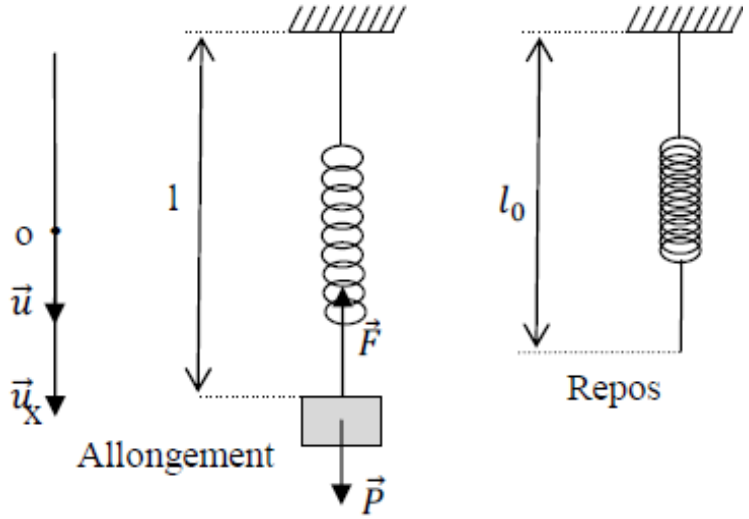


Fig.3.5: la tension d'un ressort.

Réaction des supports et force de frottement solide-solide

Un objet posé sur un support de surface horizontale va appliquer par le biais de son poids une force perpendiculaire à cette surface. Pour que l'objet ne s'enfonce pas dans le support et d'après le principe de l'action et de la réaction, ce dernier va lui appliquer une force de réaction notée généralement $\overrightarrow{R}$ (force du contact) répartie sur toute la surface de contact support objet. La réaction du support peut être décomposée en la somme de deux forces: $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{R}_T$

Une force « réaction » normale à la surface $\overrightarrow{R}_N$

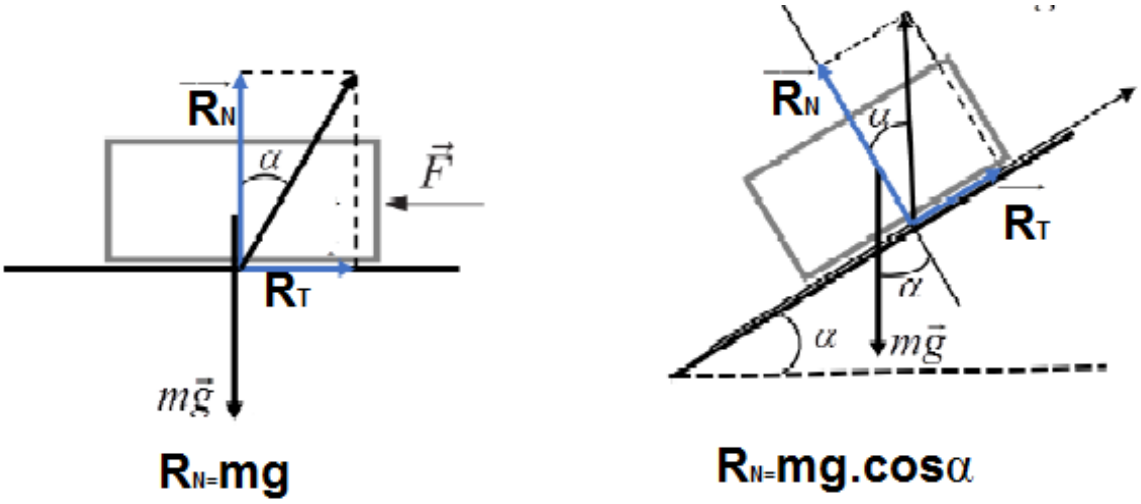


Fig.3.6: Force de réaction.

1- pour une surface horizontale.$R_N = m.g$

2- pour une surface inclinée $R_N = m.g.\cos\alpha$

Une force « réaction » tangentielle à la surface $\overrightarrow{R}_T$ appelée force de frottement. Cette force de frottement, est toujours opposée à celui du mouvement de la masse m. La présence de cette force explique la diminution progressive de la vitesse de du solide en mouvement.

Les lois du frottement montrent qu'en absence de glissement (absence de frottement) que le rapport de la composante tangentielle $\overrightarrow{R}_T$ à la composante normale $\overrightarrow{R}_N$ ne dépasse pas une certaine valeur appelée coefficient de frottement statique noté μ_s qui dépend des deux matériaux en contact (plus les surfaces seront rugueuses et plus μ_s sera grand)

$$\frac{\left\|\overrightarrow{R_T}\right\|}{\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|} \langle \mu_s \tag{3.13}$$

Sur un plan incliné d'un angle α on a $\begin{cases} R_N = m.g.\cos\alpha \\ R_T = m.g.\sin\alpha \end{cases}$

Donc le solide reste en équilibre tant que l'angle α satisfait la condition

$$\frac{\left\|\overrightarrow{R_T}\right\|}{\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|} \langle \mu_s \Longrightarrow \frac{m.g.\sin\alpha}{m.g.\cos\alpha} \langle \mu_s \Longrightarrow tg\alpha \langle \mu_s$$

Lorsqu'il y a glissement (presence de frottement), un coefficient de frottement dynamique noté μ_d apparait comme etant le rapport de de la composante tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ et de la composante normale $\overrightarrow{R_N}$.

$$\frac{\left\|\overrightarrow{R_T}\right\|}{\left\|\overrightarrow{R_N}\right\|} = \mu_d \tag{3.14}$$

Le support ne présente pas les mêmes frottements selon que le corps solide est immobile ou en mouvement. L'intensité de la force de frottement est plus importante dans le cas statique, dans tous les cas, on a toujours $\mu_d \langle \mu_s$.

Application 1:

Un objet de masse $m = 1kg$, posé sur un sol horizontal, est tiré avec une force $\overrightarrow{F}$ inclinée d'un angle $\alpha = 30°$ (**Fig.3.7**). Son contact avec le sol est caractérisé par les coefficients de frottements statique $\mu_s = 0,5$ et dynamique $\mu_d = 0,2$. Calculez l'intensité de la force $\overrightarrow{F}$ dans les trois cas suivants :

1. au moment de la rupture d'équilibre ;
2. le corps est en mouvement uniforme ;
3. son mouvement a une accélération de $1m/s^2$.

Réponses :

L'application de la deuxième loi de Newton donne :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a} \Longleftrightarrow \overrightarrow{p} + \overrightarrow{F} + \overrightarrow{R} = m\overrightarrow{a}$$

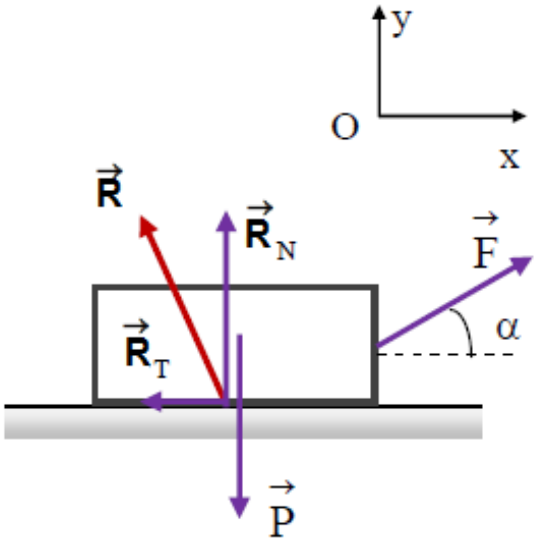


Fig.3.7: Représentation des forces appliquées sur la masse m.

Projetons cette équation sur les deux axes de coordonnées cartésiennes:

$$\begin{cases} F\cos\alpha - R_T = ma \ldots\ldots\ldots (*) \\ F\sin\alpha + R_N - mg = 0 \Longrightarrow R_N = mg - F\sin\alpha \end{cases}$$

On sait que $R_T = \mu R_N$ alors $R_T = \mu R_N = \mu\,(mg - F\sin\alpha)$
En substituant cette expression dans $(*)$, il vient:

$$(*) \Longleftrightarrow F\cos\alpha - \mu\,(mg - F\sin\alpha) = ma$$

et on tire :

$$F = \frac{ma+\mu mg}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}$$

.1er cas : rupture d'équilibre

$$(a = 0\ m/s^2 \text{ et } \mu = \mu_s) \Longrightarrow F = 4.48\ N$$

.2^{ième} cas : mouvement uniforme

$$(a = 0\ m/s^2 \text{ et } \mu = \mu_d) \Longrightarrow F = 2.70\ N$$

.3^{ième} cas : mouvement uniformément accéléré

$$(a = 1\ m/s^2 \text{ et } \mu = \mu_d) \Longrightarrow F = 3.10\ N$$

Application 2:

Un bloc, de masse $m = 1kg$, est posé sur une surface rugueuse inclinée d'un angle θ par rapport à l'horizontale (**Fig.3.8**) En augmentant graduellement la valeur de θ, on a effectué les observations suivantes :

- le bloc a commencé à glisser lorsque l'angle a atteint la valeur $\theta = 20°$;

- son accélération était de $3,2\ m/s^2$ pour $\theta = 30°$.

En déduire les valeurs des coefficients de frottements statique et dynamique.

Réponses :

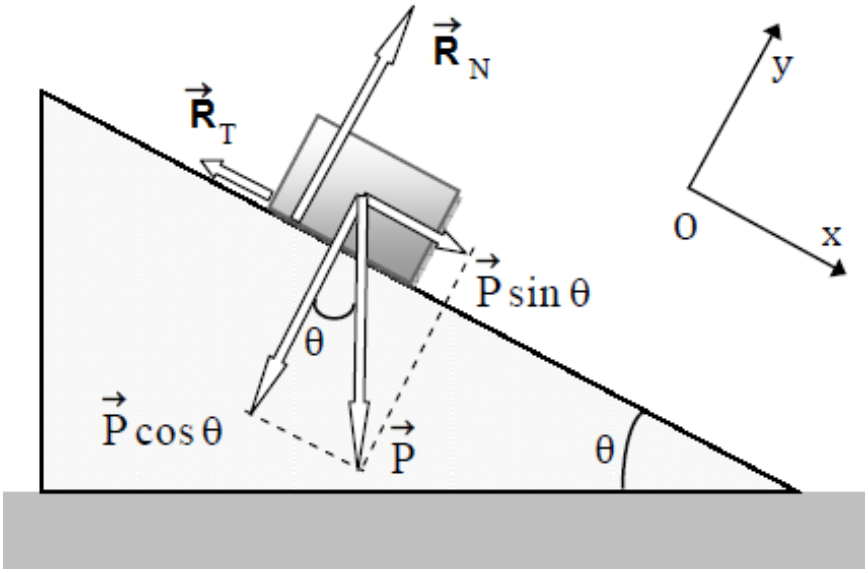


Fig.3.8: Représentation des forces appliquées sur la masse m.

L'application de la deuxième loi de Newton donne :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a} \Longleftrightarrow \overrightarrow{p} + \overrightarrow{R} = m\overrightarrow{a}$$

Projetons cette équation sur les deux axes de coordonnées cartésiennes

$$\begin{cases} p\sin\alpha - R_T = ma..... (*) \\ -p\cos\alpha + R_N = 0 \Longrightarrow R_N = -p\cos\alpha \end{cases}$$

On sait que $R_T = \mu R_N$ alors $R_T = \mu R_N = \mu\left(-p\cos\alpha\right) = -\mu p\cos\alpha$

En substituant cette expression dans $(*)$, il vient:

$$(*) \Longleftrightarrow p\sin\alpha - \mu p\cos\alpha = ma \Longleftrightarrow \mu = \frac{p\sin\alpha - ma}{p\cos\alpha}$$

.1er cas : rupture d'équilibre

$$(a = 0\ m/s^2,\ \mu = \mu_s,\ \theta = 20^0) \Longrightarrow \mu_s = tg\theta = 0.364$$

.2^{ième} cas : mouvement uniformément accéléré

$$(a = 3.2\ m/s^2,\ \mu = \mu_d,\ \theta = 30^0) \Longrightarrow \mu_d = \frac{g\sin\alpha - a}{g\cos\alpha} = 0.2$$

Force de frottement solide-fluide

Le frottement visqueux est lie au mouvement de l'objet M se déplace dans un milieu fluide (gaz ou liquide), il subit de la part du fluide des forces de frottements. Nous distinguons deux types de forces de frottements visqueux :

*Forces de frottements visqueux à faible vitesse de type :

$$\overrightarrow{F} = -f.\overrightarrow{v} \tag{3.15}$$

Le coefficient f est le coefficient de frottement visqueux dépendant de la forme de l'objet solide en mouvement et de la viscosité η du fluide. Dans le cas particulier d'une sphère de rayon R se déplaçant dans un milieu visqueux, la force de viscosité devient (*loi de Stockes*):

$$\overrightarrow{F} = -6\pi R\eta\overrightarrow{v} \tag{3.16}$$

*Forces de frottements visqueux à grande vitesse : Lorsque la vitesse est élevée dans un milieux fluide, la force de frottement prend la forme :

$$\overrightarrow{F} = -f.\overrightarrow{v}^2 \tag{3.17}$$

Equation différentielle Le PFD donne:

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\overrightarrow{a} \Longleftrightarrow \overrightarrow{p} + \overrightarrow{f} = m\overrightarrow{a}$$
$$m\overrightarrow{g} - k\overrightarrow{v} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \Longleftrightarrow \frac{d\overrightarrow{v}}{dt} + \frac{k}{m}\overrightarrow{v} = \overrightarrow{g}$$

la vitesse augmente donc jusqu'à ce qu'elle atteigne la valeur qui annule l'accélération. Cette valeur appelée vitesse limite est définie par :

$$\overrightarrow{v}_l = \frac{m\overrightarrow{g}}{k}.$$

3.5 Moment cinétique d'un point matériel

Le moment cinétique est la grandeur physique qui joue un rôle analogue dans le cas des mouvements de rotation. On appelle moment cinétique $\overrightarrow{L}_{M/O}$ du point M en rotation autour d'un point fixe O dans le référentiel galiléen $R(O,x,y,z)$ de sa quantité de mouvement est défini par :

$$\overrightarrow{L}_{M/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P} = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} \tag{3.18}$$

Où, $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{v}$ (vecteur quantité de mouvement)

Par sa définition, le moment cinétique est un vecteur perpendiculaire au plan contenant les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{v}$ et orienté de façon à ce que le trièdre $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{L}_{M/O}\right)$ soit direct et son module est:

$$\left\|\overrightarrow{L}_{M/O}\right\| = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| . \left\|\overrightarrow{P}\right\| . \sin\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{P}\right) \tag{3.19}$$

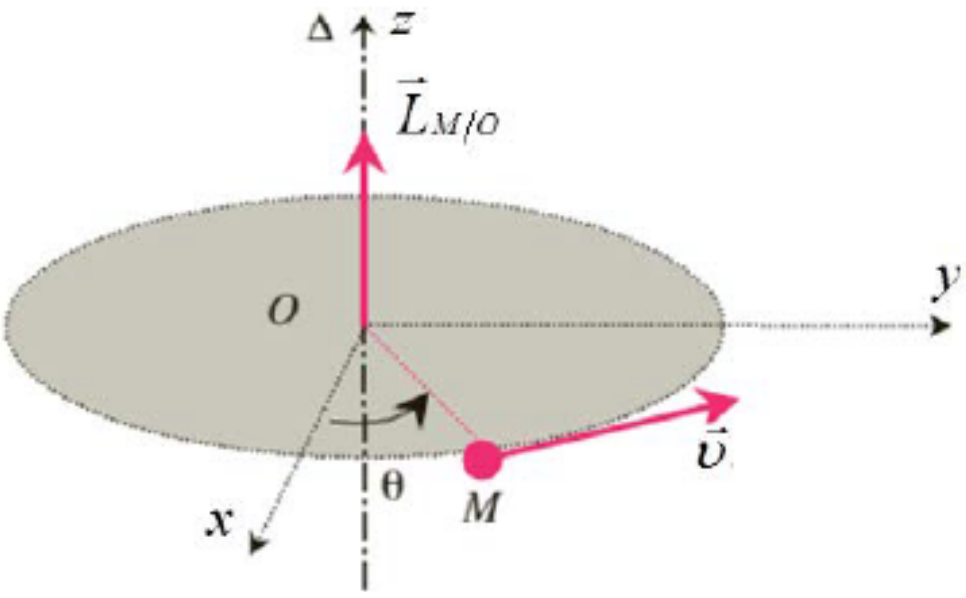


Fig.3.9: Représentation du moment cinétique d'un point M en mouvement autour de O.

En coordonnées cartésiennes où le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et la quantité de mouvement $\overrightarrow{P}$ sont :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{P} = P_x\overrightarrow{i} + P_y\overrightarrow{j} + P_z\overrightarrow{k} \end{cases} \tag{3.20}$$

On a:

$$\begin{cases} \overrightarrow{L}_{M/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} \\ \overrightarrow{L}_{M/O} = \underbrace{(y.P_z - z.Py)}_{\overrightarrow{L_x}} \overrightarrow{i} + \underbrace{(z.P_x - xP_z)}_{\overrightarrow{L}_y} \overrightarrow{j} + \underbrace{(x.P_y - y.P_x)}_{\overrightarrow{L}_z} \overrightarrow{k} \end{cases} \tag{3.21}$$

3.5.1 Théorème du moment cinétique

La dérivée du moment cinétique s'obtient :

$$\begin{cases} \frac{d\overrightarrow{L}_{M/O}}{dt} = \frac{\left(\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P}\right)}{dt} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \overrightarrow{P} + \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\overrightarrow{P}}{dt} \\ \frac{d\overrightarrow{L}_{M/O}}{dt} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{P} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} \\ \frac{d\overrightarrow{L}_{M/O}}{dt} = \underbrace{\frac{\overrightarrow{P}}{m} \wedge \overrightarrow{P}}_{0} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} \\ \frac{d\overrightarrow{L}_{M/O}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} \end{cases} \tag{3.22}$$

Le théorème s'énonce :

Dans un référentiel Galiléen, la dérivée par rapport au temps (le moment dynamique) du moment cinétique du point M par rapport au point fixe O du référentiel Galiléen (R) est égale au moment de la résultante des forces extérieures appliquées sur M.

$$\frac{d\overrightarrow{L}_{M/O}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \overrightarrow{F} \tag{3.23}$$

Le théorème du moment cinétique montre que la dérivée du moment cinétique d'un point matériel par rapport au temps est égale a la somme des moments des forces appliquées et s'interprète comme le principe fondamental de la dynamique pour les mouvements de rotation..

$$\frac{d\overrightarrow{L}_{M/O}}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{M}_{M/O} \tag{3.24}$$

Application:

Un pendule simple est constitué d'une masse m accroché à un fil de longueur l. On écarte le pendule de sa position d'équilibre avec un angle θ et on le lâche sans vitesse initial. Il acquiert un mouvement sinusoïdale.

1. Représenter les forces appliquées sur la masse m

2. En appliquant le théorème du moment cinétique et les coordonnées polaires, retrouver l'équation différentielle du mouvement pour de faibles oscillations.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Ou g est l'accélération de la pesanteur.

Réponce:

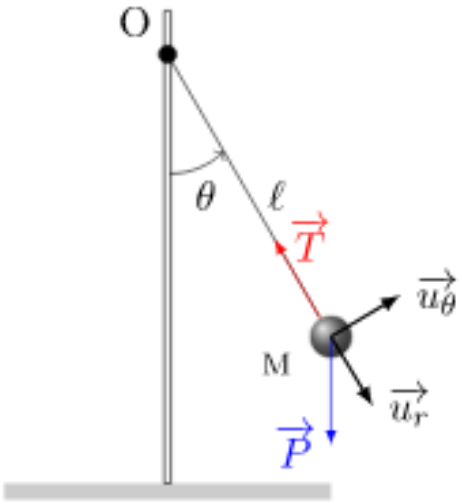


Fig.3.10: Représentation des forces appliquées sur la masse m.

La masse est soumise à deux forces le poids $\overrightarrow{P}$ et la tension du fil $\overrightarrow{T}$ (**Fig.3.10)**.
Il y'a donc deux moments de forces par rapport au point O, que nous noterons par $\overrightarrow{M}_{P/O}$ et $\overrightarrow{M}_{T/O}$ qui sont respectivement :

$$\overrightarrow{M}_{P/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u}_r & \overrightarrow{u}_\theta & \overrightarrow{k} \\ l & 0 & 0 \\ mg\cos\theta & -mg\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = -mgl\sin\theta\,\overrightarrow{k} = -mgl\theta\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{M}_{T/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u}_r & \overrightarrow{u}_\theta & \overrightarrow{k} \\ l & 0 & 0 \\ -T & 0 & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{0}$$

Nous appliquons le théorème du moment cinétique:

$$\frac{d\overrightarrow{L}_{M/O}}{dt} = \overrightarrow{M}_{P/O} + \overrightarrow{M}_{T/O} = mgl\sin\theta\,\overrightarrow{k} \tag{3.25}$$

Le calcul du moment cinetique $\overrightarrow{L}_{M/O}$ conduit à :

$$\overrightarrow{L}_{M/O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u}_r & \overrightarrow{u}_\theta & \overrightarrow{k} \\ l & 0 & 0 \\ mv_r & mv_\theta & 0 \end{vmatrix}$$

où les composantes du vecreur vitesse $\overrightarrow{v}$ en coordoonnés polaire sont :

$$\begin{cases} v_r = \frac{dr}{dt} = 0 \text{ puisque } r = l \\ v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = l\frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

le moment cinetique s'ecrit :

$$\overrightarrow{L}_{M/O} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{u}_r & \overrightarrow{u}_\theta & \overrightarrow{k} \\ l & 0 & 0 \\ 0 & ml\frac{d\theta}{dt} & 0 \end{vmatrix} = ml^2\frac{d\theta}{dt}\overrightarrow{k}$$

et sa derivéé sera :

$$\frac{d\overrightarrow{L}_{M/O}}{dt} = ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\overrightarrow{k} \tag{3.26}$$

l'egalité des equations 3.25 et 3.26 conduit à l'équation différentielle du mouvement pour de faibles oscillations.

$$\begin{cases} -mgl\theta\overrightarrow{k} = ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\overrightarrow{k} \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \end{cases} \tag{3.27}$$

Chapitre 4

TRAVAIL ET ENERGIE

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons vu que ne peut prédire le mouvement d'un point matériel lorsqu'on connait les forces qui en sont la cause avec l'application de la loi fondamentale de la dynamique. Cependant, on ne connait pas toujours toutes les forces, nous allons donc introduire la notion du travail et l'énergie qui font l'objet de ce chapitre, qui permet de résoudre les problèmes de la mécanique.

4.2 Travail d'une force

4.2.1 Travail d'une force constante

Le travail noté $W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right)$ d'une force $\overrightarrow{F}$ constante au cours d'un déplacement rectiligne d'un point A vers un point B est définit comme étant un produit scalaire entre la force $\overrightarrow{F}$ et son déplacement $\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{cases} W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{AB} \\ W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \left\|\overrightarrow{F}\right\| . \left\|\overrightarrow{AB}\right\| . \cos\alpha \end{cases} \tag{4.1}$$

Ou α est l'angle compris entre - $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{AB}$. Selon la valeur de cet angle, on peut distinguer les cas suivants :

$\alpha = 0$	$0\langle\alpha\langle\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}\langle\alpha\langle\pi$
$W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = 0$	$W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right)\rangle 0$	$W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right)\langle 0$
le travail est nul	le travail est moteur	le travail est résistant

L'unité du travail dans le Système International $(S.I)$ est le $joule$, $1J = 1N.m = 1kg.m^2.s^{-2}$

Analyse dimensionnelle donne:

$$[W] = M.L^2.T^{-2}$$

4.2.2 Travail d'une force variable

Soit un point matériel M, soumis à une force $\overrightarrow{F}$ et à un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ le long d'un trajet orienté (ζ).

Le travail élémentaire pour un petit déplacement $\overrightarrow{dl}$ du point d'application de la force $\overrightarrow{F}$, variable en module sur une courbe quelconque entre deux points A et B est donné par la relation :

$$dW_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} \tag{4.2}$$

Le vecteur déplacement élémentaire, $\overrightarrow{dl}$, le long d'un trajet quelconque est toujours tangent à la trajectoire.

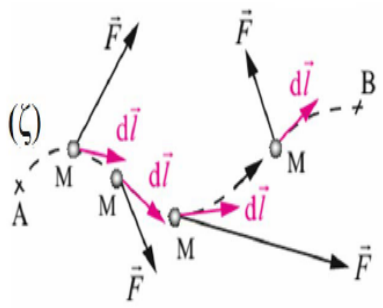


Fig.4.1: Le vecteur déplacement élémentaire, $\overrightarrow{dl}$, le long d'un trajet quelconque.

Le travail total effectue du point A au point B par la force $\overrightarrow{F}$ est :

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \int_A^B dW_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \int_A^B \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} \tag{4.3}$$

En coordonnée cartésienne, le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ et le vecteur force $\overrightarrow{F}$ sont respectivement,

$$\begin{cases} \overrightarrow{dl} = dx.\overrightarrow{i} + dy.\overrightarrow{j} + dz.\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{F} = F_x.\overrightarrow{i} + F_y.\overrightarrow{j} + F_z.\overrightarrow{k} \end{cases} \tag{4.4}$$

Le travail devient :

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \int F_x.dx + \int F_y.dy + \int F_z.dz \tag{4.5}$$

En coordonnée cylindrique, le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ et le vecteur force $\overrightarrow{F}$ sont respectivement,

$$\begin{cases} \overrightarrow{dl} = dr.\overrightarrow{u_r} + rd\theta.\overrightarrow{u_\theta} + dz.\overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{F} = F_r.\overrightarrow{u_r} + F_\theta.\overrightarrow{u_\theta} + F_z.\overrightarrow{k} \end{cases} \tag{4.6}$$

Le travail devient :

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \int F_r.dr + \int rF_\theta.d\theta + \int F_z.dz \tag{4.7}$$

En coordonnée sphériques, le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ et le vecteur force $\overrightarrow{F}$ sont respectivement,

$$\begin{cases} \overrightarrow{dl} = dr.\overrightarrow{u_r} + rd\theta.\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta d\phi.\overrightarrow{u_\varphi} \\ \overrightarrow{F} = F_r.\overrightarrow{u_r} + F_\theta.\overrightarrow{u_\theta} + F_\varphi.\overrightarrow{u_\varphi} \end{cases} \tag{4.8}$$

Le travail devient :

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \int F_r.dr + \int r.F_\theta.d\theta + \int r\sin\theta.F_\varphi.d\phi \tag{4.9}$$

4.3 Puissance d'une force

La puissance est définie par la dérivée du travail par rapport au temps :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl}\right)}{dt} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{v} \tag{4.10}$$

la puissance instantanée d'un point matériel M est le produit scalaire de la résultante des forces qui agissent sur M par la vitesse de ce point.

4.4 Théorème de l'énergie cinétique

L'énergie cinétique pour un point matériel M de masse m dans un référentiel galiléen, sous l'effet d'une force F en déplacement du point A vers le point B.

Le travail fourni de cette force est :

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \int_A^B \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl}$$

On utilisant le principe fondamental de la dynamique (la $2^{ème}$ loi de Newton) :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F} = m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \\ \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{v}.dt \end{cases}$$

Alors:

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{F}\right) = \int_A^B \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl} = \int_A^B m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt}.\overrightarrow{v}.dt = m\int_A^B \overrightarrow{v}.d\overrightarrow{v} = m\int_A^B v.dv = \left[\frac{1}{2}mv^2\right]_A^B \qquad (4.11)$$

Par définition, l'énergie cinétique, notée E_c, d'un point matériel est une quantité scalaire définie par :

*En mouvement rectiligne:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (4.12)$$

*En mouvement circulaire:

$$E_c = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2 \qquad (4.13)$$

Ou J_Δ et ω sont respectivement le moment d'inertie et la vitesse angulaire.

Selon la relation 4.11 le théorème de l'énergie cinétique s'énonce:

Dans un référentiel Galiléen, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel, soumis à un ensemble de forces extérieures, entre deux points A et B, est égale à la somme des travaux de ces forces entre ces deux points.

$$\Delta E_c = E_{C_B} - E_{C_A} = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}_{ext}\right) \qquad (4.14)$$

4.5 Force conservative

Une force est dite conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des positions initiales et finales

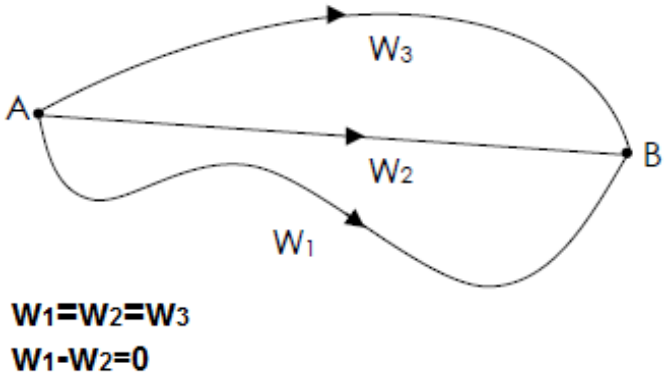


Fig.4.2: Un même travail fourni suivant différents chemins.

*Le travail du poids ne dépend pas du chemin suivie c'est donc une force conservative.

*Les forces de frottements ne sont pas conservatives car leur travail dépend toujours du chemin suivi. Alors Les forces non conservatives sont des forces dont le travail dépend du chemin suivi.

*des forces conservatives est que leur rotationnel est nul :

$$\overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{A} = \overrightarrow{0} \tag{4.15}$$

*Si la force f est conservative, elle derive d'un potentiel que nous noterons par $U(x, y, z)$ donné par la relation :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\ U(x, y, z) = \overrightarrow{F}(x, y, z) \tag{4.16}$$

Application1:

Soit le champ de force définie par : $\overrightarrow{F} = y.\overrightarrow{i} + x.\overrightarrow{j}$

1. Calculer le travail de la force $\overrightarrow{F}$ du point $O(0, 0)$ vers le point $A(1, 1)$ suivant les chemins :

– $O(0, 0)$ vers le point $A(1, 1)$ caractérisé par une droite

– $O(0, 0) \longrightarrow B(1, 0) \longrightarrow A(1, 1)$

– $O(0, 0) \longrightarrow C(0, 1) \longrightarrow A(1, 1)$

2. Calculer le rotationnel de la force $\overrightarrow{F}$.

3. Si la force est conservative, trouver le potentiel $U(x,y)$ duquel dérive ce champ. On prendra : $U(0,0)=0$.

Réponce:

1. Le travail de la force $\overrightarrow{F}$ peut etre calculer par la formule suivante :

$$W_{OA}\left(\overrightarrow{F}\right)=\int\overrightarrow{F}.\overrightarrow{dl}=\int\left(y.\overrightarrow{i}+x.\overrightarrow{j}\right).\left(d_x.\overrightarrow{i}+d_y.\overrightarrow{j}\right)=\int\left(y.d_x+x.d_y\right)$$

-Le chemin du point $O(0,0)$ vers le point $A(1,1)$ est caractérisé par une droite de la forme:

$$\begin{cases} y=x \\ dy=dx \end{cases}$$

$$W_{OA}\left(\overrightarrow{F}\right)=\int\left(y.d_x+x.d_y\right)=2\int_0^1 x.d_x=\left[x^2\right]_0^1=1joule$$

– Le chemin du $O(0,0)$ vers le point $A(1,1)$ passant par le point $B(1,0)$ se divise en deux chemins :

$$W_{OA}\left(\overrightarrow{F}\right)=W_{OB}\left(\overrightarrow{F}\right)+W_{BA}\left(\overrightarrow{F}\right)$$

$*W_{OB}\left(\overrightarrow{F}\right)=\int\left(y.d_x+x.d_y\right)$

Le chemin du point $O(0,0)$ vers le point $B(1,0)$ est caractérisé par les équations

$$\begin{cases} y=0\Longrightarrow dy=0 \\ x=1\Longrightarrow dx=0 \end{cases}\Longrightarrow W_{OB}\left(\overrightarrow{F}\right)=0joule.$$

$*W_{BA}\left(\overrightarrow{F}\right)=\int\left(y.d_x+x.d_y\right)$

Le chemin du point $B(1,0)$ vers le point $A(1,1)$ est caractérisé par l'équation:

$$x=1\Longrightarrow dx=0\Longrightarrow W_{BA}\left(\overrightarrow{F}\right)=\int\left(y.d_x+x.d_y\right)=\int_0^1 x.d_y=x.\int_0^1 d_y=x\left[y\right]_0^1=1joule.$$

Alors:

$$W_{OA}\left(\overrightarrow{F}\right)=W_{OB}\left(\overrightarrow{F}\right)+W_{BA}\left(\overrightarrow{F}\right)=0+1=1joule$$

– Le chemin du $O(0,0)$ vers le point $A(1,1)$ passant par le point $C(0,1)$ se divise en deux chemins :

$$W_{OA}\left(\overrightarrow{F}\right)=W_{OC}\left(\overrightarrow{F}\right)+W_{CA}\left(\overrightarrow{F}\right)$$

$*W_{OC}\left(\overrightarrow{F}\right) = \int (y.d_x + x.d_y)$

Le chemin du point $O(0,0)$ vers le point $C(0,1)$ est caractérisé par les équations

$$\begin{cases} y = 1 \Longrightarrow dy = 0 \\ x = 0 \Longrightarrow dx = 0 \end{cases} \Longrightarrow W_{OC}\left(\overrightarrow{F}\right) = 0 joule.$$

$*W_{CA}\left(\overrightarrow{F}\right) = \int (y.d_x + x.d_y)$

Le chemin du point $C(0,1)$ vers le point $A(1,1)$ est caractérisé par l'équation:

$$y = 1 \Longrightarrow dy = 0 \Longrightarrow W_{CA}\left(\overrightarrow{F}\right) = \int (y.d_x + x.d_y) = \int_0^1 y.d_x = y.\int_0^1 d_x = y\,[x]_0^1 = 1 joule.$$

Alors:

$$W_{OA}\left(\overrightarrow{F}\right) = W_{OC}\left(\overrightarrow{F}\right) + W_{CA}\left(\overrightarrow{F}\right) = 0 + 1 = 1 joule$$

et enfin,

$W_{OA}\left(\overrightarrow{F}\right) = W_{OB}\left(\overrightarrow{F}\right) + W_{BA}\left(\overrightarrow{F}\right) = W_{OC}\left(\overrightarrow{F}\right) + W_{CA}\left(\overrightarrow{F}\right) = 1 joule$

Nous remarquons que quelque soit le chemin pris par la force, son travail ne change pas, il ne dépend pas du chemin suivi, elle est dite une force conservative.

2. Le rotationnel de la force $\overrightarrow{F}$ se calcule à partir du :

$$\overrightarrow{rot}.\overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{\partial}{\partial z}x\right).\overrightarrow{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}y\right)\overrightarrow{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}x - \frac{\partial}{\partial y}y\right)\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$$

Le rotationnel de la force $\overrightarrow{F}$ est nul c'est donc une force conservative

3. La force est conservative si elle dérive d'un potentiel $U(x,y)$

$$-\overrightarrow{\text{grad}}\ U(x,y) = \overrightarrow{F}(x,y)$$

Le potentiel U(x, y) est donné en coordonnés cartésiennes par la relation :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}}U(x,y) = \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{F}(x,y) = F_x.\overrightarrow{i} + F_y.\overrightarrow{j} \end{cases}$$

par identification :

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = y \Longrightarrow \partial U(x,y) = -y\partial x \Longrightarrow \int \partial U(x,y) = \int -y\partial x \\ U(x,y) = -yx + C_1(y) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (*) \\ F_y = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = x \Longrightarrow \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = -x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \end{cases}$$

Pour determiner la constante $C1(y)$, nous derivons l'expression $(*)$ par rapport à y :

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = -x + \frac{\partial C_1(y)}{\partial y}$$

Alors par identification avec l'expression (1) on trouve:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = -x + \frac{\partial C_1(y)}{\partial y} = -x \Longrightarrow \frac{\partial C_1(y)}{\partial y} = 0 \Longrightarrow C_1(y) = C_2$$

On prendra la condition initiale $U(0,0) = 0$ pour trouver la constante C_2. Il viendra : $C_2 = 0$ et enfin le potentiel cherché est :

$$U(x,y) = -yx$$

4.6 Energie potentielle

Par définition, le travail des forces conservatives peut s'exprimer à partir d'une fonction d'état appelée énergie potentielle Ep.

$$\Delta E_p = E_p(B) - E_p(A) = -W_{AB}\left(\overrightarrow{F}_C\right) \tag{4.17}$$

Avec $\overrightarrow{F}_C$: force conservative

4.7 Energie mécanique

Soit un système se déplaçant, dans un référentiel galiléen entre les points A et B sous l'effet de forces conservatives et non conservatives. D'après le théorème de l'énergie cinétique, on a :

$$E_c(B) - E_c(A) = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}_{ext}\right) = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}_C\right) + \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}_{NC}\right) \tag{4.18}$$

$\overrightarrow{F}_C$: Forces conservatives. $\overrightarrow{F}_{NC}$: Forces non conservatives

$$E_c(B) - E_c(A) = -\left(E_p(B) - E_p(A)\right) + \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}_{NC}\right)$$
$$\left(E_c(B) + E_p(B)\right) - \left(E_c(A) + E_p(A)\right) = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}_{NC}\right)$$

On peut définir alors une nouvelle grandeur correspondant à la somme des énergies cinétique et potentielle qu'on va appeler énergie mécanique et se note E_m.

$$E_m = E_c + E_p \tag{4.19}$$

Alors entre les deux poit A et B

$$E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}_{NC}\right) \tag{4.20}$$

Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel au cours du mouvement est égale au travail des forces non conservatives exercées sur ce point.

$$E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{AB}\left(\overrightarrow{F}_{NC}\right) \tag{4.21}$$

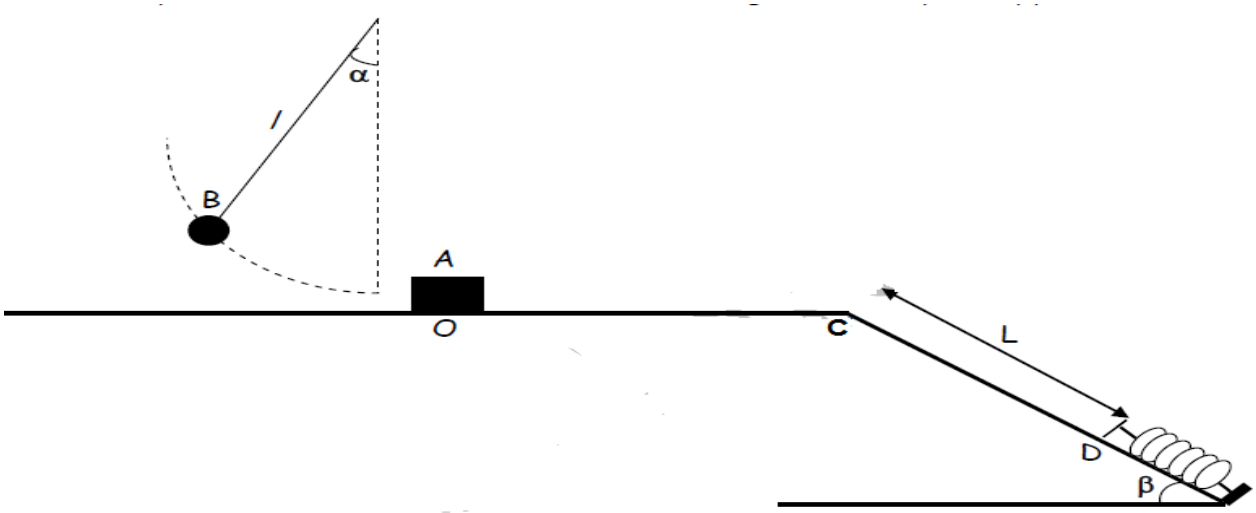
Dans un référentiel galiléen, l'énergie mécanique d'un point soumis à des forces conservatives se conserve. L'énergie mécanique est donc dans ce cas une constante du mouvement.

$$E_m(B) - E_m(A) = 0 \tag{4.22}$$

Appliction2:

Une boule B de masse m, accrochée à un fil inextensible de longueur l, est écartée de sa position d'équilibre d'un angle α et est abandonnée sans vitesse initiale. A son passage par la position verticale, la boule percute un corps A de même masse et s'arrête. Le corps A glisse sur une piste OCD de la figure 1. La partie $OC = d$ est un plan horizontal rugueux de coefficient de frottement dynamique μ_d. La portion $CD = L$, parfaitement lisse, est inclinée d'un angle $\beta = 30°$ par rapport à l'horizontale.

On donne : $m = 200g$, $d = 1m$, $l = 10cm$, $L = 1m$, $\mu_d = 0.1$, $g = 10m/s^2$ et $k = 140N/m$.



1- Dessiner les forces exercées sur le corps A en une position entre O et C.

2- Calculer l'accélération du corps A entre O et C. Déduire la nature du mouvement.

3- Donner l'expression de la vitesse de la boule B juste avant de toucher le corps A

4- En utilisant la conservation de la quantité de mouvement du système, déterminer la vitesse du corps A après l'interaction.

5- Exprimer la vitesse du corps A au point C en fonction de g, l, d, α et μ_d

6- De quel angle α_m doit – on écarter la boule B pour que le corps A arrive en C avec une vitesse nulle.

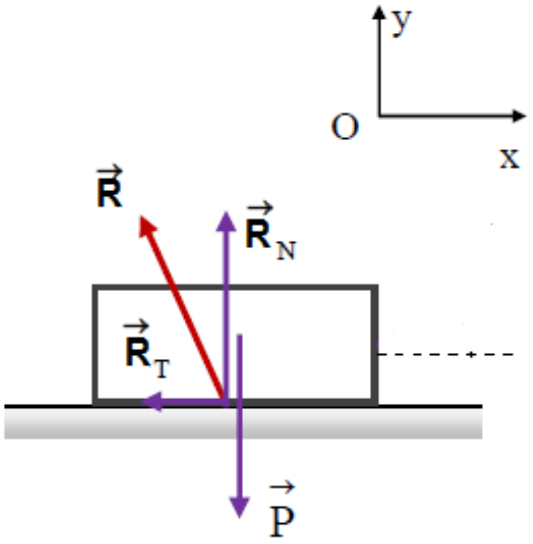
7- A partir du point C, le corps A aborde la partie CD avec une vitesse nulle. Il arrive sur un ressort parfait de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k.

- Représenter les forces exercées sur A au cours de la compression du ressort.

- Quelle est la valeur de la compression maximale du ressort.

Réponce:

1-les forces exercées sur le corps A



2-l'accélération du corps A entre O et C :

L'application de la deuxième loi de Newton donne :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\,\overrightarrow{a} \Longleftrightarrow \overrightarrow{p} + \overrightarrow{R} = m\,\overrightarrow{a}$$

Projetons cette équation sur les deux axes de coordonnées cartésiennes:

$$\begin{cases} -R_T = ma \ldots\ldots\ldots (*) \\ R_N - mg = 0 \Longrightarrow R_N = mg \end{cases}$$

On sait que $R_T = \mu R_N$ alors $R_T = \mu_d.R_N = \mu_d.m.g$

En substituant cette expression dans $(*)$, il vient:

$$(*) \Longleftrightarrow -\mu_d.m.g = ma$$
$$a = -\mu_d.m = -1m/s^2$$

3- l'expression de la vitesse de la boule B juste avant de toucher le corps A

pas de frottement: L'énergie mécanique est donc dans ce cas une constante du mouvement.

$$E_m(B) = E_m(A)$$
$$(E_c(B) + E_p(B)) = (E_c(A) + E_p(A))$$
$$0 + mgh = \tfrac{1}{2}mv_B^2 + 0$$
$$v_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$$

4- la vitesse du corps A après l'interaction.

En utilisant la conservation de la quantité de mouvement du système:

$$m.\overrightarrow{v}_B + 0 = m.\overrightarrow{v}_A \Longrightarrow v_B = v_B = \sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha\right)}$$

5- la vitesse du corps A au point C en fonction de g, l, d, α et μ_d

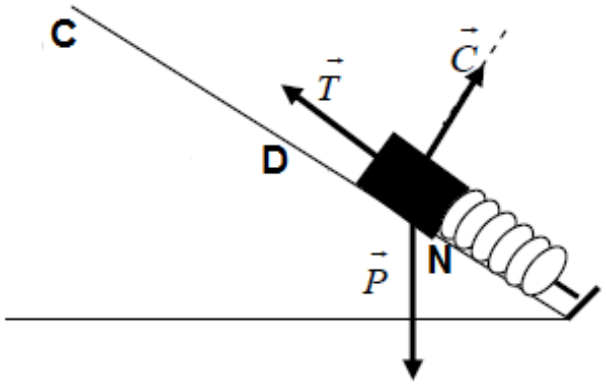
En utilisant le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = E_{C_C} - E_{C_O} = \sum W_{OC}\left(\overrightarrow{F}_{ext}\right)$$
$$E_{C_C} - E_{C_O} = W_{OC}\left(\overrightarrow{P}\right) + W_{OC}\left(\overrightarrow{R}_N\right) + W_{OC}\left(\overrightarrow{R}_T\right)$$
$$\tfrac{1}{2}mv_C^2 - \tfrac{1}{2}mv_B^2 = 0 + 0 + (-R_T.OC)$$
$$v_C^2 - v_B^2 = -\mu_d.m.g.OC \Longrightarrow v_C = \sqrt{v_B^2 - 2.\mu_d.g.OC}$$
$$v_C = \sqrt{2gl\left(1-\cos\alpha\right) - 2.\mu_d.g.d}$$

6- l'angle α_m doit – on écarter la boule B pour que le corps A arrive en C avec une vitesse nulle.

$$v_C = 0 \Longrightarrow 2gl\left(1-\cos\alpha_m\right) - 2.\mu_d.g.d \Longrightarrow 2gl\left(1-\cos\alpha_m\right) = 2.\mu_d.g.d$$
$$1-\cos\alpha_m = \tfrac{\mu_d.d}{l} \Longrightarrow \cos\alpha_m = 1 - \tfrac{\mu_d.d}{l}$$
$$\cos\alpha_m = 1 - \tfrac{0.1.1}{0.1} = 0 \Longrightarrow \alpha_m = \tfrac{\pi}{2}$$

7- les forces exercées sur A au cours de la compression du ressort:



-la valeur de la compression maximale du ressort.

pas de frottement: L'énergie mécanique est donc dans ce cas une constante

$$E_m\left(B\right) = E_m\left(A\right)$$
$$\left(E_C\left(C\right) + E_p\left(C\right)\right) = \left(E_c\left(N\right) + E_p\left(N\right)\right)$$
$$0 + m.g.h_C = 0 + m.g.h_N + \tfrac{1}{2}.k.x^2$$

$$m.g.\left(h_C - h_N\right) = \tfrac{1}{2}k.x^2$$
$$m.g.\left(L + x\right)\sin\beta = \tfrac{1}{2}k.x^2$$
$$\tfrac{1}{2}k.x^2 - m.g.\left(L + x\right) = 0$$
$$\tfrac{1}{2}k.x^2 - m.g.\sin\beta.x - m.g.L.\sin\beta = 0$$
$$70.x^2 - x - 1 = 0$$
$$x = 12.7cm.$$

Références bibliographiques

- N. ZIANI et A. BOUTAOUS, MECANIQUE DU POINT MATERIEL.COURS et EXERCICES, Université des sciences et technologie d'Oran Mohamed Boudiaf Algerie 2015/2016.

- B. Boukhalfa , MECANIQUE DU POINT MATERIEL. COURS et EXERCICES, Université Abderrahmane MIRA-Béjaia (2018).

- P. SYLVIE, B.YVES. MÉCANIQUE GÉNÉRALE Cours et exercices corrigés.

- H. MICHEL et D. NICOLAS, MINI MANUEL DE MECANIQUE DU POINT, édition Dunod (2008).

- A. FIZAZI, MECANIQUE DU POINT MATERIEL, Rappel de cours et Exercices Corrigés, Office de publication universitaires, Edition N° 5231, 2016.

- B. FERADJI, INITIATION A LA MECANIQUE DU POINT MATERIEL-cours et séries de travaux dirigés, Office de publication universitaires, Edition N° 5480, 2016.

- L. BENALLEGUE, M. DEBIANE, A. GOURARI et A. MAHAMDIA physique 1 MECANIQUE DU POINT MATERIEL, Faculte de physique USTHB 2011.

- A. CHAFA, A.DIB , F.CHAFA, MEKIDECHE, A.DERBOUZ, FKAOUAH, Polycopié d'examens de mécanique du point, , USTHB, www.usthb.dz/fphy/IMG/pdf/examens.pdf.

- M. Alonso et E. Finn, Physique générale 1 : mécanique et thermodynamique, Dunod, (2004).

- H. FALAH Sakeek, LECTURES IN GENERAL PHYSICS Part One Mechanics Principles and Applications.