Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par
BENATALLAH Ahlem

Stabilité des points d'équilibre des systèmes dynamiques projetés

---

Soutenue publiquement le 03 juillet 2023 devant le jury composé de

Président du jury :	**BENAICHOUCHE Noureddine**
	Maître Assistant. Université de Médéa
Examinateur :	**BIBI Hamza**
	Maître de Conférences (MCB). Université de Médéa
Encadreur :	**ALLECHE Boualem**
	Professeur. Université de Médéa

Remerciement

La Louange est à Allah, le Seigneur des mondes. Et que la prière et le salut soient sur celui qu'Allah a envoyé en miséricorde pour l'univers, ainsi que sur famille, ses compagnons et ses frères jusqu'au Jour de la Rétribution.

Je voudrais tout d'abord et avant tout remercier Dieu le Tout-Puissant de m'avoir accordé la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Je tiens à exprimer ma gratitude au ***Professeur ALLECHE Boualem*** *pour avoir accepté de diriger mon mémoire. Votre influence positive dans ma vie académique a été d'une valeur inestimable, et je tiens à vous remercier du fond du cœur pour votre engagement et votre soutien constant. Votre passion pour votre domaine de recherche est palpable, et cela a été une source d'inspiration pour moi tout au long de mon parcours. Votre expertise et votre connaissance approfondie du sujet ont éclairé ma compréhension et ont contribué à la qualité de mon travail de recherche. Je suis reconnaissant d'avoir eu l'opportunité de bénéficier de vos connaissances et de votre expérience.*

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers mes enseignants, « ***M. BENAICHOUCHE Noureddine*** *» et «* ***M. BIBI Hamza****», pour avoir accepté de siéger en tant que membres du jury et d'évaluer ce travail.*

J'adresse également mes remerciements à tous mes enseignants qui m'ont donné les bases des mathématiques, ainsi qu'à tout le personnel du département de mathématiques et d'informatique pour leur gentillesse et leur disponibilité.

♣ ***BENATALLAH. Ahlem*** ♣

Dédicace

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...
Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour, le respect, la reconnaissance...
Aussi, c'est tout simplement que : je dédie ce modeste travail

À ma très chère Mère

Tu représentes pour moi la source inépuisable de tendresse de patience, de sacrifice et l'exemple de dévouement qui n'a pas cessé de m'encourager. Ta prière et ta Bénédiction m'ont été d'un grand secours tout au long de ma vie.

À mon très cher Père

Aucune dédicace ne souriait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai toujours pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. Ce travail et le fruit de tes sacrifices que tu as consentis pour mon éducation et ma formation le long de ces années

À mes chères sœurs « Radhia et Djaouida » et chers frères « Rayane et Bachir »
À qui je souhaite une vie pleine de bonheur et de succès et que Dieu, le tout puissant, vous protège et vous garde.

À ma cher cousines « Samiha , Rania, Manel».

À ma chère amies « Imene », « Aya »,« kawther »,« Hadjira »,« Sabah » ,« Soumia »,« Hanaa »,« Linda »,« Nadia », « Faiza » ,« Hadjer »,« Fatima zahra » « Nadjet »,«Ibtissam » ,«Mebarka».

à mes amies et tous collègues de analyse mathématique et applications université de Yahia fares, promotion 2023.

♣ ***BENATALLAH. Ahlem*** ♣

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude de la stabilité des points d'équilibre dans les systèmes dynamiques projetés. L'étude débute par l'examen des problèmes d'équilibre impliquant l'inéquation des variationnelles. Ces problèmes surviennent dans divers contextes tels que l'optimisation, la complémentarité, les points fixes et les équations non linéaires. Ensuite, nous présentons deux modèles dynamiques de problèmes d'équilibre basés sur des opérateurs de projection. Nous analysons la relation entre les inéquations variationnelles et les systèmes dynamiques. Par l'étude des équations dynamiques associées aux inéquations variationnelles, nous abordons différents types de stabilité, tels que la stabilité asymptotique et la stabilité exponentielle. De plus, nous examinons les propriétés de stabilité associées aux points d'équilibre d'un système dynamique généralisé et étudions leur relation avec les solutions des inéquations variationnelles.

Abstract

This work is devoted to the study of the stability of equilibrium points in projected dynamical systems. The study begins by examining equilibrium problems involving the variational inequation. These problems arise in various contexts such as optimisation, complementarity, fixed points and non-linear equations. Next, we present two dynamic models of equilibrium problems based on projection operators. We analyse the relationship between variational inequations and dynamical systems. By studying the dynamic equations associated with variational inequations, we address different types of stability, such as asymptotic stability and exponential stability. In addition, we examine the stability properties associated with the equilibrium points of a generalised dynamical system and study their relationship with the solutions of the variational inequalities.

Table des figures

1.1 Représentation géométrique de cône normal. 6
1.2 Représentation géométrique du problème d'inégalité variationnelle et son équivalence en point fixe (avec $\gamma = 1$). 12

2.1 Le cône tangent et le cône normal à un corps convexe C. 21

3.1 Un point d'équilibre asymptotiquement stable. 30
3.2 Un attracteur à temps fini. 31
3.3 Un exemple où le point d'équilibre d'un SDP est asymptotiquement stable, mais même pas stable pour le DS(F). 32
3.4 Un exemple où le point d'équilibre du $DS(F)$ est asymptotiquement stable, mais même pas stable pour le SDP. 32
3.5 Exemple de puits qui n'est pas un attracteur monotone. 35

Acronymes

IV(F, C) :	L'inéquation variationnelle en terme de fonction F et l'ensemble convexe C.
IVM(F, C) :	L'inéquation variationnelle de Minty.
(SDP) :	Systèmes dynamiques projetés.
SDPL(F, C) :	Systèmes dynamiques projetés localement.
SDPG(F, C, α) :	Systèmes dynamiques projetés globalement.

Table de notation

Symbole	Description
$\mathbb{R}$	Corps des réels.
$\mathbb{R}^n$	L'espace euclidien d'ordre n.
$\mathbb{R}^+_n$	Orthant positif.
$(\mathbb{R}^n)'$	L'espace dual de $\mathbb{R}^n$.
C	Ensemble convexe et fermé de $\mathbb{R}^n$.
$\langle ., . \rangle$	Produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^n$.
∇f	Gradient de la fonction f.
P_C	Projection de x sur C.
$\prod_C(x, v)$	La dérivée directionnelle de la projection en x dans la direction v.
$N_C(x)$	Cône normal d'un ensemble convexe C de $\mathbb{R}^n$ au point x.
$T_C(x)$	Cône tangent à C au point $x \in C$.
∂C	Frontière de l'ensemble C.
$\mathring{C}$	Intérieur de C.
$\bar{B}$	La boule fermé .
B	La boule ouverte.

Table des matières

Résumé iv

Abstract v

Acronymes vii

Table de notation viii

Introduction 1

1 Inéquations variationnelles dans $\mathbb{R}^n$ 3
- 1.1 Modèles mathématiques des problèmes d'équilibre . . . 4
- 1.2 Inéquations variationnelles . . . 5
  - 1.2.1 Définitions et propriétés de base . . . 5
- 1.3 Formulations équivalentes . . . 5
  - 1.3.1 Formulation de problèmes de systèmes d'équations . . . 6
  - 1.3.2 Formulation de problèmes complémentarité . . . 6
  - 1.3.3 Formulation de problèmes d'optimisation . . . 7
  - 1.3.4 Formulation de problèmes point fixe . . . 9
- 1.4 Existence de solutions . . . 13
  - 1.4.1 Cas borné . . . 13
  - 1.4.2 Cas non borné . . . 15
  - 1.4.3 Existence et unicité . . . 17
- 1.5 Inéquation variationnelle de Minty . . . 19

2 Systèmes dynamiques projetés 20
- 2.1 Système dynamique projeté localement . . . 20
- 2.2 Système dynamique projeté globalement . . . 24

3 Analyse de stabilité des systèmes dynamiques projetés **29**
3.1 Concepts fondamentaux sur la stabilité 29
3.1.1 Définitions et interprétations 29
3.1.2 Puits non linéaire 33
3.2 La stabilité des points d'équilibre de SDPL(F,C) 35
3.3 La stabilité des points d'équilibre de SDPG(F, C, α) 40

Conclusion **43**

Bibliographie **44**

Introduction

L'étude de la stabilité des points d'équilibre dans les systèmes dynamiques projetés est un domaine essentiel dans le domaine de la dynamique des systèmes. Ces systèmes sont largement utilisés pour modéliser et analyser divers phénomènes dans des domaines tels que la physique, l'économie, la biologie, l'ingénierie et bien d'autres. Comprendre la stabilité des points d'équilibre dans ces systèmes revêt une importance primordiale, car cela permet d'analyser et de concevoir des systèmes de manière plus précise et efficace.

Dans ce travail, nous présentons une étude sur la stabilité des problèmes d'équilibre en les reliant aux inéquations variationnelles et aux systèmes dynamiques. Les inéquations variationnelles fournissent un cadre mathématique puissant pour modéliser les problèmes d'équilibre et les systèmes dynamiques. En étudiant la stabilité de ces inéquations et en établissant des liens avec les systèmes dynamiques projetés, nous pouvons obtenir une compréhension plus profonde des comportements dynamiques des problèmes d'équilibre, qui sont en fait considérés comme des problèmes statiques.

Notre travail est composé de trois chapitres distincts, mais liés par le fond et le contenu.

♣ Dans le premier chapitre, nous avons introduit des modèles mathématiques pour les problèmes d'équilibre. Nous avons ensuite défini une inéquation variationnelle de type **Stampacchia** et présenté des formulations équivalentes telles que les points fixes et les systèmes d'équations. Nous avons également abordé l'existence de solutions pour les inéquations variationnelles. Enfin, nous avons donné une définition de l'inéquation variationnelle de Minty et expliqué le lemme de Minty.

♣ Dans le deuxième chapitre, nous avons introduit deux modèles dynamiques pour les problèmes d'équilibre, qui utilisent des opérateurs de projection. Le premier modèle est appelé "système dynamique localement projeté", tandis que le deuxième modèle est appelé

"système dynamique globalement projeté". Nous avons également examiné l'équivalence entre les points d'équilibre de ces systèmes dynamiques et les solutions des inéquations variationnelles qui leur sont associées. Enfin, nous avons fourni les propriétés fondamentales, telles que l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle ordinaire qui définit un tel système dynamique projeté.

♣ Finalement le troisième chapitre, nous présentons les concepts de stabilité les plus importants pour un système dynamique classique $DS(F)$, mais ceux-ci restent des concepts valables dans un système dynamique projetés. Nous avons présenté deux exemples qui montrent une différence entre un système dynamique classique et celui projeté. Nous avons passé en revue la théorie des puits non linéaires et nous présentons quelques résultats de stabilité pour un système dynamique projeté localement sous des hypothèses de monotonie sur le champ de vecteurs, et nous présentons la théorie de la stabilité pour SDPL(F,C) similaire à la théorie non linéaire du puits. Enfin, nous donnons des résultats de stabilité asymptotique et exponentielle pour un système dynamique projeté globalement $SDPG(F, C, \alpha)$ lorsque la matrice jacobienne du champ de vecteurs est symétrique ou non symétrique.

Chapitre 1

Inéquations variationnelles dans $\mathbb{R}^n$

La théorie des inéquations variationnelles est une théorie qui englobe les problèmes d'optimisation, de mini-max, d'équilibre économique et de jeux, ainsi que de nombreux autre problèmes, (voir [1], par exemple). Cette théorie a été développée par **Hartman** et **Stampacchia** en 1966 comme outil pour l'étude des équations différentielles, dont ces applications sont principalement tirées de la mécanique. Ces inéquations variationnelles étaient de dimension infinie tout. La percée dans la théorie des dimensions finies a eu lieu en 1980 lorsque **Dafermos** a reconnu que les conditions d'équilibre du réseau de trafic comme indiqué par **Smith** (1979) avait une structure d'une inéquation variationnelle, (voir[6], par exemple).

On prendre un exemple suivant qui traite les inéquations variationnelles :([4])

Exemple 1. Soit f une fonction à valeur réelles lisse sur l'intervalle fermé $I = [a, b]$. On cherche les points $x_0 \in I$ pour lesquels

$$f(x_0) = \min_{x \in I} f(x).$$

Trois cas peuvent se présenter :
(i) si $a < x_0 < b$, alors $f'(x_0) = 0$;
(ii) si $x_0 = a$, alors $f'(x_0) \geq 0$; et
(iii) si $x_0 = b$, alors $f'(x_0) \leq 0$.
Ces déclarations peuvent être résumées en écrivant.

$$f'(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Une telle inégalité sera appelée inéquation variationnelle.

1.1 Modèles mathématiques des problèmes d'équilibre

Les problèmes d'équilibre jouent un rôle central dans l'étude des systèmes complexes et concurrentiels. Il existe de nombreux exemples classiques dans les domaines de l'ingénierie scientifique (problèmes d'équilibre dans un réseau de circulation) et économique (équilibre de Nash). Il existe aussi de nombreuses formulations variationnelles de ces problèmes, (voir[8], par exemple).

Les méthodologies appliquées à la formulation, à l'analyse qualitative et au calcul des équilibres incluent : les systèmes d'équations, la théorie de l'optimisation, la théorie de la complémentarité et la théorie des points fixes (voir [6]).

L'exemple suivant concerne l'équilibre économique (pour les détails voir [5]) :

Exemple 2 (équilibre de Nash)**.** Soient deux joueurs cherchant à optimiser, sur des ensembles disjoints, une fonction impliquant leurs stratégies respectives. Soient x_i le vecteur stratégique du joueur i, X_i son ensemble de stratégies admissibles et $f_i(x_1, x_2)$ sa fonction de coût convexe. La réaction $x_1(x_2)$ du joueur 1 à la stratégie x_2 adoptée par le joueur 2 satisfait :

$$\min_{x_1 \in X_1} f_i(x_1, x_2) = f_1(x_1(x_2), x_2)$$

et, symétriquement pour le joueur 2, j'obtiens :

$$\min_{x_2 \in X_2} f_i(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2(x_1)).$$

Si on pose :

$$F_1(x_1, x_2) = f_1^{'}(x_1(x_2), x_2)$$

(le gradient est calculé par rapport au vecteur x_1) et

$$F_2(x_1, x_2) = f_2^{'}(x_1, x_2(x_1))$$

(ce deuxième gradient est calculé par rapport au vecteur x_2), les 'réactions' $x_1(x_2)$ et $x_2(x_1)$ sont caractérisées par les conditions du premier ordre suivantes :

$$\begin{aligned} \langle F_1(x_1(x_2), x_2), x_1(x_2) - x_1 \rangle &\leq 0 \qquad \forall x_1 \in X_1 \\ \langle F_2(x_1(x_2), x_2), x_2(x_1) - x_2 \rangle &\leq 0 \qquad \forall x_2 \in X_2. \end{aligned}$$

1.2 Inéquations variationnelles

L'inéquation variationnelle est un outil très important dans l'étude des solutions d'équilibre et de leur stabilité.

1.2.1 Définitions et propriétés de base

Définition 1.1. [8] Pour un ensemble convexe fermé $C \subseteq \mathbb{R}^n$ et une fonction vectorielle $F : C \to \mathbb{R}^n$, une inéquation variationnelle de type **Stampacchia** consiste à déterminer un vecteur $x^* \in C$ tel que

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C, \tag{IV(F,C)}$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.2 (**Cône Normal**). [5] Soit $N_C(x)$ le cône normal à l'ensemble C au point $x \in C$ défini par :

$$N_C(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x' - x \rangle \leq 0, \ \forall x' \in C\}.$$

Le cône normal à l'ensemble des directions formant un angle 'obtus' avec l'ensemble $C - x = \{y - x : y \in C\}$. On a alors que (IV(F,C)) est équivalent à (voir figure (1.1)) :

$$-F(x^*) \in N_C(x^*).$$

Proposition 1.1. *Si la fonction F est le gradient d'une fonction f, alors on obtiens la condition nécessaire d'optimalité :*

$$-f'(x^*) \in N_C(x^*),$$

qui exprime qu'au point x^*, il n'existe pas de direction de descente admissible y, c'est-à-dire : $f'(x^*; y)$ n'est jamais négatif.

1.3 Formulations équivalentes

Dans cette section, nous allons donner plusieurs formulations équivalentes de l'inéquation variationnelle ci-dessus, (voir [6, 4]).

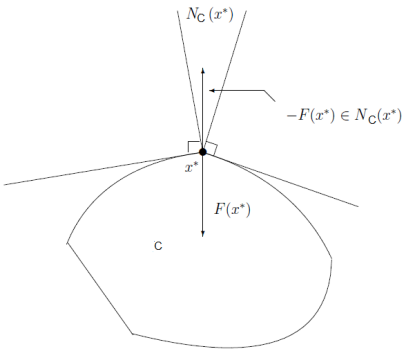


FIGURE 1.1 – Représentation géométrique de cône normal.

1.3.1 Formulation de problèmes de systèmes d'équations

Une inéquation variationnelle peut être formulée comme un système d'équations, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.2. *Soit $C = \mathbb{R}^n$ et soit $F : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ une fonction donnée. Un vecteur $x^* \in \mathbb{R}^n$ résout $IV(F, \mathbb{R}^n)$ si et seulement si $F(x^*) = 0$.*

Démonstration. Si $F(x^*) = 0$, alors l'inéquation IV(F,C) est vraie avec l'égalité. Inversement, si x^* satisfait IV(F,C), soit $x = x^* - F(x^*)$, ce qui implique que

$$\langle F(x^*), -F(x^*)\rangle \geq 0 \quad , \text{ ou } \quad -\|F(x^*)\|^2 \geq 0,$$

et donc, $F(x^*) = 0$. □

1.3.2 Formulation de problèmes complémentarité

Le problème d'inéquation variationnelle englobe le problème de complémentarité en tant que cas spécifique. Les problèmes de complémentarité sont définis dans l'orthant non négatif.

Soit $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$ un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$, et soit $F : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$. Trouve x^* tel que

$$x^* \geq 0 \ \ tel\ que \ \ F(x^*) \geq 0 \ \text{ et } \ \langle F(x^*), x^*\rangle = 0. \tag{PC}$$

Proposition 1.3. *Le point $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ est une solution au problème de complémentarité*

(PC) *si seulement si*

$$x^* \in \mathbb{R}^n_+ : \quad \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \textit{pour} \quad x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Démonstration. Notons d'abord que si x^* est solution du problème de complémentarité (PC), $\langle F(x^*), x \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n_+$, alors

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle = \langle F(x^*), x \rangle - \langle F(x^*), x^* \rangle = \langle F(x^*), x \rangle \geq 0.$$

Supposons d'autre part que $x^* \in \mathbb{R}^n_+$ est une solution de l'inéquation variationnelle. Alors
$x = x^* + e_i \ , \quad e_i = (0, ..., 0, 1, 0, .., 0) \quad$ (1 à la i ème place)
un élément de $\mathbb{R}^n_+$. Donc

$$0 \leq \langle F(x^*), x^* + e_i - x^* \rangle = \langle F(x^*), e_i \rangle = F_i(x^*).$$

Ou $F(x^*) \in \mathbb{R}^n_+$. Donc, puisque $x = 0 \in \mathbb{R}^n_+$,

$$\langle F(x^*), x^* \rangle \leq 0.$$

Mais x^*, $F(x^*) \in \mathbb{R}^n_+$ implique que $\langle F(x^*), x^* \rangle \geq 0$, donc

$$\langle F(x^*), x^* \rangle = 0.$$

□

1.3.3 Formulation de problèmes d'optimisation

Les deux propositions suivantes identifient la relation entre un problème d'optimisation et un problème d'inéquation variationnelle, voir([4],[6]).

Soit $f \in C^1$, $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé convexe. Définissons l'ensemble $F(x^*)$ par :

$$F(x^*) = \nabla f(x^*).$$

À ce stade, nous ne faisons pas la distinction entre $\mathbb{R}^n$ et $(\mathbb{R}^n)'$.

Proposition 1.4. *Soit x^* une solution du problème d'optimisation :*

$$f(x^*) = \min_{x \in C} f(x). \tag{1.1}$$

Où f est continuellement différentiable et C est fermé et convexe. Alors x^* est une solution du problème d'inéquation variationnelle :

$$\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C. \tag{1.2}$$

Démonstration. Si $x \in C$ alors $y = x^* + t(x - x^*) \in C$ pour $t \in [0, 1]$, donc la fonction $\phi(t) = f(x^* + t(x - x^*))$ pour $t \in [0, 1]$ atteint son minimum lorsque $t = 0$. par conséquent,

$$0 \leq \phi'(0) = \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle = \langle F(x^*), x - x^* \rangle,$$

c'est-à-dire que x^* est une solution de (1.2). □

Exemple 3. Soit f une fonction à valeurs réelles lisse définie sur l'ensemble convexe fermé C de $\mathbb{R}^n$ l'espace euclidien de dimension n. De nouveau nous caractériserons les points $x_0 \in C$ dans tel que

$$f(x_0) = \min_{x \in C} f(x).$$

Supposons que x_0 est un point où le minimum est atteint et soit $x \in C$, puisque C est convexe, le segment $(1 - t)x_0 + tx = x_0 + t(x - x_0), \quad 0 \leq t \leq 1$, appartient à C.
La fonction

$$\phi(t) = f(x_0 + t(x - x_0)), \quad 0 \leq t \leq 1$$

atteint son minimum en $t = 0$; donc, comme dans l'exemple 1,

$$\phi'(0) = \nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in C.$$

Par conséquent le point x_0 satisfait l'inéquation variationnelle

$$x_0 \in C : \nabla f(x_0)(x - x_0) \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in C.$$

Si C est borné, l'existence d'au moins un x_0 est immédiate.

Proposition 1.5. *Supposons que f est convexe et que x^* satisfait*

$$x^* \in C : \ \langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \textit{pour tout} \quad x \in C.$$

Alors

$$f(x^*) = \min_{x \in C} f(x).$$

Démonstration. En effet, puisque f est convexe

$$f(x) \geq f(x^*) + \langle F(x^*), x - x^* \rangle \quad \text{pour tout} \quad x \in C. \tag{1.3}$$

Mais $\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$, puisque x^* est solution de IV(F,C). Donc, de (1.3) on conclut que

$$f(x) \geq f(x^*), \ \forall x \in C,$$

c'est-à-dire que x^* est un point minimum du problème de programmation mathématique (1.1). □

1.3.4 Formulation de problèmes point fixe

La théorie du point fixe a servi à formuler et résoudre de multiples problèmes d'analyse non linéaire, ainsi qu'à obtenir des solutions pour les problèmes d'équilibre économique. La relation entre les problèmes d'inéquation variationnelle et les problèmes de point fixe peut être établie à l'aide d'opérateurs de projection.

Théorème 1.6 (**Projection sur un convexe fermé**). *Soit H un espace de Hilbert et soit $C \subset H$ est un ensemble convexe fermé non vide. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que :*

$$\|x - y\| = \inf_{z \in C} \|x - z\|, \tag{1.4}$$

et y est connu comme la projection orthogonale de x sur l'ensemble C par rapport à la norme euclidienne, c'est-à-dire

$$y = P_C(x) = \arg\min_{z \in C} \|x - z\|.$$

Démonstration. Soit $z_n \in C$ une suite minimisante, c'est-à-dire vérifiant :

$$\lim_{n \to \infty} \|z_n - x\| = d = \inf_{n \in C} \|z - x\|. \tag{1.5}$$

De la loi du parallélogramme, on obtient

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \quad x, y \in H,$$

conséquence de l'existence d'un produit scalaire sur H, on calcule que

$$\|z_n - z_m\|^2 = 2\|x - z_n\|^2 + 2\|x - z_m\|^2 - 4\|x - \tfrac{1}{2}(z_n + z_m)\|^2. \tag{1.6}$$

Ou C est convexe, donc $\frac{1}{2}(z_n + z_m) \in C$ et

$$d^2 \leq 2\|x - \tfrac{1}{2}(z_n + z_m)\|^2.$$

Donc

$$\|z_n - z_m\|^2 \leq 2\|x - z_n\|^2 + 2\|x - z_m\|^2 - 4d^2,$$

et on déduit de (1.5) que

$$\lim_{m,n\to\infty} \|z_n - z_m\| = 0.$$

Donc, puisque H est complet, il existe une élément $y \in C$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} z_n = y.$$

De plus,

$$\|x - y\| = \lim_{n\to\infty} \|x - z_n\| = d.$$

Pour voir que y est unique, il suffit d'observer que deux éléments quelconques $y, y' \in C$ qui satisfont (1.4) peuvent être insérés dans (1.6) à la place de z_n, z_m. Cela donne

$$\|y - y'\|^2 = 2\|x - y\|^2 + 2\|x - y'\|^2 - 4\|x - \tfrac{1}{2}(y + y')\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0,$$

ou $y = y'$. □

Nous procédons à la caractérisation de la projection.

Théorème 1.7. *Soit C un ensemble convexe fermé d'un espace de Hilbert H. Alors $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C, si et seulement si*

$$\textit{pour} \quad y \in C : \langle y, z - y\rangle \geq \langle x, z - y\rangle, \quad \textit{pour tout} \quad \forall z \in C.$$

Démonstration. Soit $x \in H$ et $y = P_C(x) \in C$. Puisque C est convexe, on a pour toute $z \in C$ et $t \in [0, 1]$,

$$(1 - t)y + tz = y + t(z - y) \in C,$$

et donc, d'après (1.4), la fonction

$$\phi(t) = \|x - y - t(z - y)\|^2 = \|x - y\|^2 - 2t(x - y, z - y) + t^2\|z - y\|^2,$$

atteint son minimum en $t = 0$. C'est-à-dire $\phi'(0) \geq 0$, à savoir

$$\langle x - y, z - y\rangle \leq 0 \quad \text{pour} \quad z \in C.$$

Ou

$$\langle y, z - y\rangle \geq \langle x, z - y\rangle \quad \text{pour} \quad z \in C.$$

D'autre part, si

$$y \in C : \langle y, z - y\rangle \geq \langle x, z - y\rangle \quad \text{pour} \quad z \in C,$$

alors

$$0 \leq \langle y - x, (z - x) + (x - y)\rangle \leq -\|x - y\|^2 + \langle y - x, z - x\rangle.$$

Donc

$$\|y - x\|^2 \leq \langle y - x, z - x\rangle \leq \|y - x\|\|z - x\|.$$

Alors, finalement,

$$\|y - x\| \leq \|z - x\| \quad \text{pour} \quad z \in C.$$

□

Corollaire 1.8. *Soit C est un ensemble convexe fermé d'un espace de Hilbert H. Alors l'opérateur P_C est non expansif, c'est-à-dire,*

$$\|P_C x - P_C x'\| \leq \|x - x'\|, \quad \textit{pour} \quad \forall x, x' \in H.$$

Démonstration. Soit $x, x' \in H$, soit $y = P_C x$ et $y' = P_C x'$. Alors

$$\begin{aligned} \text{pour } \ y \in C : \langle y, z - y\rangle &\geq \langle x, z - y\rangle, \quad \forall z \in C, \\ \text{pour } \ y' \in C : \langle y', z - y'\rangle &\geq \langle x', z - y'\rangle, \quad \forall z \in C. \end{aligned}$$

En choisissant $z = y'$ dans la première inégalité et $z = y$ dans la seconde, puis en ajoutant les deux, nous obtenons

$$\|y - y'\|^2 = \langle y - y', y - y'\rangle \leq \langle x - x', y - y'\rangle \leq \|x - x'\|\|y - y'\|,$$

ce qui donne

$$\|y - y'\| \leq \|x - x'\|$$

et la démonstration est complète. □

La relation entre une inéquation variationnelle et un problème de point fixe peut être résumée comme suit : l'interprétation géométrique de cette équivalence est illustrée à la figure 1.2.

Théorème 1.9. *Supposons que C est fermé et convexe. Alors $x^* \in C$ est une solution du problème d'inéquation variationnelle IV(F,C) si et seulement si pour tout $\gamma > 0$, x^* est une point fixe de l'application :*

$$P_C(I - \gamma F) : C \longmapsto C,$$

c'est-à-dire,

$$x^* = P_C(x^* - \gamma F(x^*)).$$

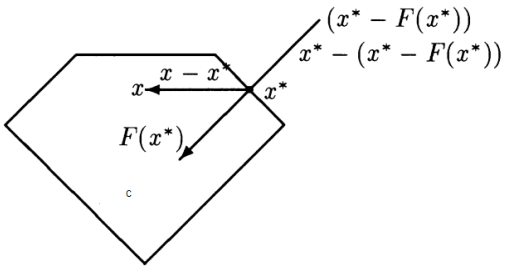


FIGURE 1.2 – Représentation géométrique du problème d'inégalité variationnelle et son équivalence en point fixe (avec $\gamma = 1$).

Démonstration. Supposons que x^* est une solution de l'inéquation variationnelle, c'est-à-dire,

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

En multipliant l'inéquation ci-dessus par $-\gamma < 0$ et en ajoutant $\langle x^*, x - x^* \rangle$ des deux côtés de l'inégalité résultante, on obtient

$$\langle x^*, x - x^* \rangle \geq \langle (x^* - \gamma F(x^*)), x - x^* \rangle, \quad \forall x \in C.$$

Du théorème de projection sur les convexes fermés (1.7), on en déduit que

$$x^* = P_C(x^* - \gamma F(x^*)).$$

Inversement, si $x^* = P_C(x^* - \gamma F(x^*))$, pour $\gamma > 0$, alors

$$\langle x^*, x - x^* \rangle \geq \langle (x^* - \gamma F(x^*)), x - x^* \rangle, \quad \forall x \in C.$$

Et donc,

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in C.$$

□

Autrement dit, la solution x^* de IV(F,C) est la projection orthogonale sur C du vecteur $x^* - F(x^*)$ pour tout, $\gamma > 0$.

1.4 Existence de solutions

Dans cette section, nous allons présenter les conditions d'existence des solutions pour l'inéquation variationnelle (IV(F,C)).

1.4.1 Cas borné

Avant d'aborder la théorie du cas où l'ensemble des contraintes C un convexe compact, c'est-à-dire le cas d'un domaine borné, rappelons la théorie de Brouwer.
En 1912, **Brouwer** a formulé le célèbre théorème qui garantit l'existence d'un point fixe pour toute fonction continue qui transforme une boule fermée sur elle-même dans un espace euclidien de dimension finie.
Pour la démonstration de théorème suivant voir [4, Theoreme 1.3].

Théorème 1.10 (**Brouwer**). *Soit F une application continue d'une boule fermée $\bar{B} \subset \mathbb{R}^n$ dans elle-même. Alors F admet au moins un point fixe.*

Théorème 1.11 (**Brouwer**). *Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et convexe, et soit $F : C \to C$ une fonction continue. Alors F possède un point fixe.*

Démonstration. Soit $\bar{B}$ une boule fermée dans $\mathbb{R}^n$ telle que $C \subset \bar{B}$. D'après le corollaire 1.8, P_C est continue ; D'où la cartographie

$$F \circ P_C : \bar{B} \to C \subset \bar{B}$$

est une application continue de $\bar{B}$ dans lui-même. Il admet un point fixe x par le théorème 1.10, à savoir,

$$F \circ P_C x = x \in C.$$

En particulier, $P_C x = x$ donc $F(x) = x$. □

L'existence d'une solution à un problème d'inéquation variationnelle peut être déduite de la continuité de la fonction F impliquée dans l'inéquation variationnelle, étant donné que l'ensemble des possibles C est compact dans le théorème suivant.

Théorème 1.12. *Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble compact et convexe, et soit $F : C \to (\mathbb{R}^n)'$ une fonction continue. Alors il existe un $x^* \in C$ qui est une solution du problème d'inéquation variationnelle (IV(F,C)).*

Démonstration. Pour prouver le théorème, il suffit de montrer qu'il existe

$$x^* \in C : \langle x^*, x - x^* \rangle \geq \langle x^* - \pi F(x^*), x - x^* \rangle \quad \text{pour tout} \quad \forall x \in C$$

avec $\pi > 0$. Maintenant, la correspondance.

$$P_C(I - \pi F) : C \longmapsto C$$

où $Ix^* = x^*$ est continu ; donc d'après le théorème 1.11, il admet un point fixe $x^* \in C$, à savoir,

$$x^* = P_C(x^* - \pi F)x^*.$$

Par conséquent, d'après le théorème 1.7, qui est la caractérisation de la projection.

$$\langle x^*, x - x^* \rangle \geq \langle x^* - \pi F(x^*), x - x^* \rangle \quad \text{pour} \quad \forall x \in C.$$

Ainsi, x^* est une solution de IV(F,C). □

1.4.2 Cas non borné

Dans le cas d'un ensemble de possibles non borné C, *le théorème du point fixe de Brouwer* n'est plus applicable ; l'existence d'une solution à un problème d'inéquation variationnelle peut néanmoins être établie sous la condition suivante.

Soit $\bar{B}(0,R)$ une boule fermée de rayon R centrée en 0 et soit $C_R = C \cap B_R(0)$. C_R est alors borné. Pour une représentation graphique, voir la figure (1.3).

Soit IV_R le problème d'inéquations variationnelle :
Déterminer $x_R^* \in C_R$, tel que

$$\langle F(x_R^*), x - x_R^* \rangle \quad \forall x \in C_R. \tag{1.7}$$

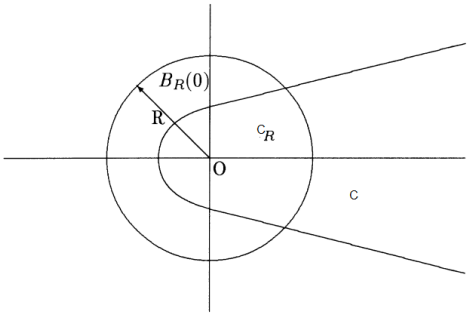


FIGURE 1.3 – Représentation de l'ensemble borné C_R.

Théorème 1.13. *Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé et convexe et $F : C \to (\mathbb{R}^n)'$ une fonction continue. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution au problème (1.7) est qu'il existe un $R > 0$ tel qu'une solution $x_R^* \in C_R$ de (1.7) satisfait*

$$\|x_R^*\| < R. \tag{1.8}$$

Démonstration. Il est clair que s'il existe une solution au problème (1.7), alors x^* est une solution à (1.7) pour tout x tel que $\|x^*\| < R$.

Supposons maintenant que $x_R^* \in C_R$ vérifie (1.8). Alors x_R^* est aussi une solution au problème (1.7). En effet, puisque $\|x_R^*\| < R$, pour tout $x \in C$, $w = x_R^* + \varepsilon(x - x_R^*) \in C_R$ pour $\varepsilon \geq 0$ suffisamment petit. Par conséquent

$$x_R^* \in C_R \subset C : 0 \leq \langle F(x_R^*), w - x_R^* \rangle = \varepsilon \langle F(x_R^*), x - x_R^* \rangle \quad \text{pour} \quad x \in C,$$

ce qui signifie que x_R^*, est une solution au problème (1.7). □

De ce théorème, nous pouvons déduire plusieurs conditions suffisantes d'existence. Nous en énonçons une qui est à la fois utile et introduit la notion de coercitivite.

Corollaire 1.14. *Soit $F : C \to (\mathbb{R}^n)'$ une fonction satisfaisant*

$$\frac{\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle}{\|x - x_0\|} \to +\infty \quad \textit{comme} \quad \|x\| \to +\infty, \quad x \in C,$$

pour certains $x_0 \in C$. Alors il existe une solution au problème (1.7).

Démonstration. Choisissez $H > \|F(x_0)\|$ et $R > \|x_0\|$ tels que

$$\langle F(x) - F(x_0), x - x_0\rangle \geq H\|x - x_0\| \quad \text{pour} \quad \|x\| \geq R, \quad x \in C.$$

Alors

$$\langle F(x), x - x_0\rangle \geq H\|x - x_0\| + \langle F(x_0), x - x_0\rangle$$

$$\geq H|x - x_0\| - \|F(x_0)\|\|x - x_0\|$$

$$\geq (H - \|F(x_0)\|)(\|x\| - \|x_0\|) > 0 \quad \text{pour} \quad \|x\| = R. \tag{1.9}$$

Soit maintenant $x_R^* \in C_R$ la solution de (1.7). Alors

$$\langle F(x_R^*), x_R^* - x_0\rangle = -\langle F(x_R^*), x_0 - x_R^*\rangle \leq 0$$

donc, compte tenu de (1.9), $\|x_R^*\| \neq R$. En d'autres termes $\|x_R^*\| < R$. □

Corollaire 1.15. *Supposons que x^* est une solution de IV(F,C) et $x^* \in \mathring{C}$ l'intérieur de C. Alors $F(x^*) = 0$.*

Démonstration. Si $x^* \in \mathring{C}$, alors les points $x - x^*$ décrivent un voisinage de l'origine, c'est-à-dire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, il existe un $\varepsilon \geq 0$ et $x \in C$ tels que $\xi = \varepsilon(x - x^*)$. Par conséquent

$$\langle F(x^*), \xi\rangle = \varepsilon\langle F(x), x - x\rangle \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

d'où il résulte que $F(x^*) = 0$. □

1.4.3 Existence et unicité

Sous certaines conditions de monotonie, les propriétés qualitatives d'existence et d'unicité deviennent aisément accessibles.

Nous allons maintenant donner quelques définitions qui traitent des théories que nous verrons plus tard.

Définition 1.3 (**Continuité de Lipschitz**). [6] $F : C \longmapsto \mathbb{R}^n$ est dite localement Lipschitzienne si pour tout $x \in C$ il existe un voisinage $N(x)$ et une constante positive $L(x) > 0$ tels que

$$\|F(x') - F(x'')\| \leq L(x)\|x' - x''\|, \qquad \forall x', x'' \in C.$$

Lorsque l'inégalité ci-dessus est valable uniformément sur C pour une constante $L > 0$, c'est-à-dire

$$\|F(x') - F(x'')\| \leq L\|x' - x''\|, \qquad \forall x', x'' \in C,$$

alors F est dite Lipschitz continue sur C.

Définition 1.4 (**Monotonie**). [6] On dit qu'une $F(x)$ est localement monotone en x^* s'il existe un voisinage $N(x^*)$ de x^* tel que

$$\langle F(x) - F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \qquad \forall x, x^* \in C.$$

$F(x)$ est dit monotone sur C si

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0 \qquad \forall x, y \in C.$$

Définition 1.5 (**Monotonie Stricte**). [6] On dit qu'une $F(x)$ est localement strictement monotone en x^* s'il existe un voisinage $N(x^*)$ de x^* tel que

$$\langle F(x) - F(x^*), x - x^* \rangle > 0, \qquad \forall x, x^* \in C, x \neq x^*.$$

$F(x)$ est strictement monotone sur l'ensemble convexe C tel que

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle > 0, \qquad \forall x, y \in C, x \neq y.$$

Définition 1.6 (**Monotonie Forte**). [6] On dit qu'une $F(x)$ est localement fortement

monotone en x^* s'il existe un voisinage $N(x^*)$ de x^* et $\eta > 0$ tel que

$$\langle F(x) - F(x^*), x - x^* \rangle \geq \eta \|x - x^*\|^2, \qquad \forall x, x^* \in N(x^*);$$

$F(x)$ est dit fortement monotone sur C s'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \eta \|x - y\|^2, \qquad \forall x, y \in C.$$

Définition 1.7 (**Pseudo-monotone**). [9] $F(x)$ est dit localement pseudo-monotone en x^* s'il existe un voisinage $N(x^*)$ de x^* tel que

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle F(x), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in N(x^*);$$

$F(x)$ est dit pseudo-monotone sur C si

$$\langle F(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle F(x), x - y \rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in C.$$

Définition 1.8 (**Pseudo-monotone Stricte**). [9] On dit que $F(x)$ est localement strictement pseudo-monotone en x^* s'il existe un voisinage $N(x^*)$ de x^* tel que

$$\langle F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle F(x), x - x^* \rangle > 0, \quad \forall x \in N(x^*);$$

$F(x)$ est dit strictement pseudo-monotone sur C si

$$\langle F(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \langle F(x), x - y \rangle > 0, \quad \forall x, y \in C.$$

Sous la condition énoncée dans le théorème suivant, l'existence et l'unicité de la solution au problème d'inéquation variationnelle sont assurées, sans faire aucune hypothèse sur la compacité de l'ensemble des possibilités C. La démonstration du résultat peut être consultée dans [7, Théorème 1.8].

Théorème 1.16 (**Existence et unicité sous monotonie forte**). *Supposons que $F(x)$ est fortement monotone. Alors il existe précisément une solution x^* de IV(F,C).*

Dans le théorème suivant, nous présentons un résultat d'unicité.

Théorème 1.17. *Supposons que $F(x)$ est strictement monotone sur C. Alors la solution est unique, si elle existe.*

Démonstration. Supposons que x^1 et x^* soient tous des solutions et que $x^1 \neq x^*$. Alors, comme x^1 et x^* sont des solutions, elles doivent satisfaire :

$$\langle F(x^1), x' - x^1 \rangle \geq 0, \quad \forall x' \in C \tag{1.10}$$

$$\langle F(x^*), x' - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x' \in C. \tag{1.11}$$

En remplaçant x^* par x' dans (1.10) et x^1 par x' dans (1.11), puis en additionnant les inégalités résultantes, on obtient :

$$\langle (F(x^1) - F(x^*)), x^* - x^1 \rangle \geq 0. \tag{1.12}$$

Mais l'inégalité (1.12) est en contradiction avec la définition de la monotonie stricte. Par conséquent, $x^1 = x^*$ et la solution est unique, si elle existe. □

1.5 Inéquation variationnelle de Minty

L'inéquation variationnelle de Minty est une forme spécifique d'inéquation variationnelle qui revêt une grande importance dans l'étude des solutions d'équilibre et de leur stabilité. Le problème est défini de la manière suivante, voir([8],[9]).

Définition 1.9. Pour un ensemble convexe fermé $C \subseteq \mathbb{R}^n$ et une fonction vectorielle $F : C \to \mathbb{R}^n$, l'inéquation variationnelle de Minty consiste à déterminer un vecteur $x^* \in C$ tel que pour tout $x \in C$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\langle F(x), x^* - x \rangle \leq 0, \qquad \forall x \in C. \tag{$IVM(F,C)$}$$

Le lemme de Minty établit des relations entre les solutions de IV(F,C) et les solutions de $IVM(F,C)$, voir ([8]).

Théorème 1.18 (**Lemme de Minty**). *Soit l'opérateur $F : C \to \mathbb{R}^n$ donne où $C \subseteq \mathbb{R}^n$ donné, où C est un ensemble convexe fermé. Alors, les énoncés suivants sont valables :*

(i) si F est continu sur C, alors chaque solution de $IVM(F,C)$ est une solution de $IV(F,C)$;

(ii) si F est pseudo-monotone sur C, alors chaque solution de $IV(F,C)$ est une solution de $IVM(F,C)$.

Chapitre 2

Systèmes dynamiques projetés

Dans ce chapitre, nous présentons deux modèles dynamiques pour les problèmes d'équilibre, basés sur des opérateurs de projection : l'un est connu sous le nom de système dynamique projeté localement, et l'autre sous le nom de système dynamique projeté globalement. Nous étudions également les relations entre les points d'équilibre de ces systèmes dynamiques et les solutions d'une inéquation variationnelle associée, voir ([6],[7],[8],[9]).

2.1 Système dynamique projeté localement

Définition 2.1. [8] Soit C un ensemble convexe fermé dans $\mathbb{R}^n$. Étant donné $x \in C$ et $v \in \mathbb{R}^n$, on définit la projection du vecteur v en x (par rapport à C) par

$$\prod_C(x, v) = \lim_{\delta \to 0}(P_C(x + \delta v) - x)/\delta,$$

où P_C est l'opérateur de projection sur C défini précédemment. La valeur $\prod_C(x, v)$ est également appelée la dérivée directionnelle de la projection en x dans la direction v.

Définition 2.2 (**Cône tangent**)**.** Le cône tangent à C en x noté par $T_C(x)$ est défini par

$$T_C(x) = \{z \in C \mid \langle z, y\rangle \leq 0, \forall y \in N_C(x)\},$$

où $N_C(x)$ est le cône normal à C en x défini dans (1.2). Pour la représentation graphique, (voir figure (2.1), [10]).

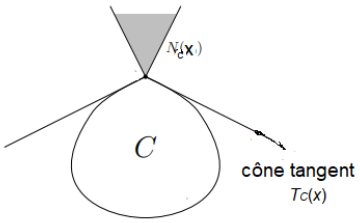


FIGURE 2.1 – Le cône tangent et le cône normal à un corps convexe C.

Voir [7] pour la démonstration du théorème suivant.

Théorème 2.1. *La projection $\prod_C(x, v)$ est égale à la projection de v sur le cône tangent à C en x, c'est-à-dire $\prod_C(x, v) = P_{T_C(x)}(v)$.*

Définition 2.3. [8] Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé et convexe.. On dénote la frontière et l'intérieur de C par ∂C et $\mathring{C}$, respectivement. Étant donné $x \in \partial C$, on définit l'ensemble

$$n(x) = \{\gamma \in \mathbb{R}^n : \|\gamma\| = 1, \gamma \in N_C(x)\}.$$

On peut voir [7, 8] pour le résultat suivant.

Lemme 2.2.

1. *Si $x \in intC$, alors*
$$\prod_C(x, v) = v;$$
2. *Si $x \in \partial C$ et $\max_{n\in n(x)} < v, n > \leq 0$, alors*
$$\prod_C(x, v) = v;$$
3. *Si $x \in \partial C$ et $\max_{n\in n(x)} < v, n >> 0$, alors*
$$\prod_C(x, v) = v - \langle v, n^*(x)\rangle n^*(x),$$

où

$$n^*(x) = \arg\max_{n \in n(x)} \langle v, n \rangle.$$

Définition 2.4. [8] Nous définissons le système dynamique projeté localement comme l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$x' = \prod_C(x, -F(x)), \quad x(0) = x_0 \in C, \tag{SDPL(F,C))}$$

où C est un ensemble convexe fermé et F est un champ de vecteurs continu défini sur C.

Remarque 2.1. Dans la définition de SDPL(F,C), on projette le champ de vecteurs $-F$ sur l'ensemble C, car les points stationnaires de SDPL(F,C) sont caractérisés par les solutions de l'inéquation variationnelle IV(F,C). De plus, certaines conditions particulières sur F seront utiles pour l'analyse de la stabilité de SDPL(F,C).

Nous notons que le terme de droite de l'équation différentielle ordinaire précédente est égal à $-F(x)$ à l'intérieur de C et peut être discontinu sur le bord de C. Il est donc nécessaire de clarifier la notion de solution d'une équation différentielle ordinaire avec un terme de droite discontinu.

Définition 2.5. [8] On dit que la fonction $x : [0, +\infty) \to C$ est une solution de l'équation SDPL(F,C) si x est absolument continue et vérifie

$$x'(t) = \prod_C(x(t), -F(x(t))),$$

pour presque tout $t \geq 0$ (sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle).

Proposition 2.3. *Dans le cas particulier $C = \mathbb{R}^n$, le SDPL(F,C) coïncide avec le système dynamique autonome classique*

$$x' = -F(x), \tag{DS(F))}$$

et ses points d'équilibre sont les solutions du système d'équations non linéaires $F(x) = 0$.

On rappelle le théorème fondamental de SDPL, (voir [7, Theoreme 2.5] pour la démonstration).

Théorème 2.4. *Supposons que C est un polyèdre convexe. Supposons que F soit linéairement bornée, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives k_1 et k_2 telles que*

$$\|f(x)\| \leq \|k_1\|\|x\| + \|k_2\| \quad \forall x \in \mathbb{C}.$$

De plus, supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\langle F(x) - F(y), x - y\rangle \leq M\|x - y\|^2, \quad \forall x, y \in C.$$

Alors :

(i) pour tout $x_0 \in C$, il existe une unique solution $x_0(t)$ de SDPL(F,C), tel que $x(0) = x_0$,

(ii) si $x_n \to x_0$ lorsque $n \to +\infty$, alors $x_n(t)$ converge vers $x_0(t)$ uniformément sur tout ensemble compact de $[0, +\infty)$.

Remarque 2.2. On remarque que, si le champ de vecteurs F est continu de Lipschitz sur C, alors les hypothèses du théorème 2.4 sont vérifiées.

Nous définissons maintenant un point stationnaire ou un point d'équilibre de SDPL(F,C).

Définition 2.6. [8]
Le vecteur $x^* \in C$ est un point stationnaire de SDPL(F,C) si le champ de vecteurs $-F(x^*)$ est tangent à C en ce point, c'est-à-dire si

$$\prod_C (x^*, -F(x^*)) = 0.$$

On observe que x^* est un point d'équilibre si, une fois qu'une solution de SDPL(F,C) atteint x^*, elle reste en x^* pour tous les temps futurs.

Remarque 2.3. Il découle de la définition 2.6 que x^* est un point d'équilibre de SDPL(F,C) si le champ de vecteurs F s'annule en x^*. Cependant, le contraire n'est vrai que si x^* est un point intérieur de l'ensemble de contraintes C. En effet, lorsque x^* se trouve sur la frontière de C, il est possible que $F(x^*) \neq 0$.

La relation importante annoncée dans la remarque 2.1 entre les points d'équilibre de SDPL et les solutions de IV est donnée dans le théorème suivant, que nous démontrons par souci d'exhaustivité.

Théorème 2.5. *Les points d'équilibre du SDPL(F,C) coïncident avec les solutions de IV(F,C).*

Démonstration. D'après la remarque 2.1, un vecteur $x^* \in C$ est un point d'équilibre de SDPL(F,C) si et seulement si

$$P_{T_C(x^*)}(-F(x^*)) = 0.$$

Cela signifie que $-F(x^*)$ est orthogonal à l'espace tangent de C en x^*, donc

$$-F(x^*) \in N_C(x^*),$$

ce qui est une caractérisation bien connue des solutions de IV(F,C). □

2.2 Système dynamique projeté globalement

Définition 2.7. [8] Nous définissons le système dynamique projeté globalement comme étant l'équation différentielle ordinaire :

$$x' = P_C(x - \alpha F(x)) - x, \qquad (SDPG(F, C, \alpha))$$

où α est une constante positive.

Remarque 2.4. Notons que le membre de droite de $SDPG(F, C, \alpha)$ est continu sur C et peut être différent de $-F(x)$ même si x est un point intérieur à C. Ainsi, en général, les solutions de $SDPG(F, C, \alpha)$ et SDPL(F,C) sont différentes.

Proposition 2.6.
Dans le cas particulier $C = \mathbb{R}^n$ le $SDPG(F, C, \alpha)$ coïncide avec le système dynamique autonome classique

$$x' = -\alpha F(x). \qquad (DS(\alpha F))$$

Nous présentons maintenant quelques résultats sur l'existence et l'unicité de solution globale d'équations différentielles ordinaires dont nous avons besoin dans ce document.

Le théorème suivant est une version simple du résultat sur l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires connu sous le nom de *Théorème de Cauchy-Lipschitz local*. Il y a plusieurs démonstration à ce résultat, mais le lecteur peut consulter les références suivantes [11, 2, 3] pour un exposé complet.

Théorème 2.7. *[Théorème de Cauchy-Lipschitz] Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction localement lipschitzienne. Alors, pour tout $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, il existe un intervalle I tel que l'équation différentielle $x'((t) = f(x((t))$ admet une solution locale unique définie sur I et vérifie la condition initiale $x((t_0) = x_0$. Autrement dit, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t)) \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

admet une solution locale unique définie sur I.

Le résultat classique suivant, appelé *lemme de Gronwall*, joue un rôle clé dans le prolongement des solutions aux équations différentielles. Pour la démonstration de ce résultat, le lecteur peut consulter [11, 2, 3], par exemple.

Lemme 2.8 (Gronwall). *Soient $\hat{u}$ et $\hat{v}$ des fonctions continues non négatives définies sur l'intervalle $t \in [t, t_0]$. Soit $a(t) = a_0(|t - t_0|)$, où a_0 est une fonction croissante monotone. Supposons que, pour $t \geq t_0$,*

$$\hat{u}(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^{t} \hat{u}(s)\hat{v}(s)ds.$$

Alors

$$\hat{u}(t) \leq a(t) \exp\left\{\int_{t_0}^{t} \hat{v}(s)ds\right\}.$$

Dans [12], le résultat suivant a été démontré pour les fonctions affines. Nous citons ce résultat car il a le mérite de montrer la technique d'existence de solution globale dans le cas simple des fonctions affines.

Théorème 2.9. *On suppose $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = Mx + q$, ou M est une matrice réelle $n \times n$ et $q \in \mathbb{R}^n$. Alors l'équation différentielle $x'(t) = f(x(t))$ admet une solution globale unique définie sur tout $\mathbb{R}$ et vérifie la condition initiale $x(t_0) = x_0$.*

Démonstration. La fonction f est lipschitzienne car $\|f(x) - f(y)\| \leq \|M\|\|x - y\|$. Ainsi, pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une solution unique $x(t)$ de $x'(t) = f(x(t))$, définie sur un intervalle $[t_0, T)$, avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$. Soit $[t_0, T)$ son intervalle maximal d'existence ; nous montrons ensuite que $T = +\infty$. Étant donné que f est linéairement borné, c'est-à-dire

$$\|f(x)\| \leq \|M\|\|x\| + \|q\|,$$

pour toute $x \in \mathbb{R}^n$. Alors, d'après la solution intégrale (voir la démonstration du théorème 2.7 dans les références citées ci-dessus), on a

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x_0\| + \int_{t_0}^{t} \|f(x(s))\|ds \\ &\leq (\|x_0\| + K_2(t - t_0)) + k_1 \int_{t_0}^{t} \|x(s)\|ds, \end{aligned}$$

où $k_1 = \|M\|$ et $k_2 = \|q\|$.
Par conséquent, en utilisant le lemme de Gronwall (2.8), nous avons

$$\|x(t)\| \leq (\|x_0\| + k_2(t - t_0)\exp[k_1(t - t_0)], \quad t \in [t_0, T).$$

Ainsi, la solution $x(t)$ est bornée sur $[t_0, T)$. En utilisant des techniques spécifiques (voir [11], par exemple), on démontre que si $T < +\infty$, alors x se prolonge à T. En recommençant cette opération, x se prolonge à un intervalle $[0, T + \delta[$, avec $\delta > 0$, ce qui contredit le fait que l'intervalle $[0, t]$ est maximal. Alors $T = +\infty$. □

Avec une démonstration semblable à celle utilisée dans le théorème 2.9 pour les fonctions affines, on a le résultat général suivant, voir [11, Theoreme 2.4.5] pour la démonstration.

Théorème 2.10. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction localement lipschitzienne et linéairement bornée. Alors, pour tout couple (t_0, x_0), l'équation différentielle $x'(t) = f(t, x(t))$ admet une solution globale unique définie sur tout $\mathbb{R}$ et vérifie la condition initiale $x(t_0) = x_0$.*

Nous avons maintenant le résultat suivant (voir [8]) sur l'existence de solution globale au système dynamique projeté globalement.

Théorème 2.11. *Supposons que $F(x)$ soit localement lipschitzienne dans un domaine $\mathbb{R}^n$ et linéairement bornée. Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe une solution unique globale $x(t)$ pour $SDPG(F, C, \alpha)$ avec $x(0) = x_0$, c'est-à-dire définie sur tout $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Supposons

$$T(x) = P_C(x - \alpha F(x)) - x;$$

alors, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned} \|T(x) - T(y)\| &\leq \|P_C(x - \alpha F(x)) - P_C(y - \alpha F(y))\| + \|x - y\| \\ &\leq 2\|x - y\| + \alpha\|F(x) - F(y)\|, \end{aligned}$$

Ainsi, $T(x)$ est localement lipschitzienne dans $\mathbb{R}^n$.

Par conséquent, en utilisant le théorème 2.10 ci-dessus, on déduit que pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}^n$, il existe une solution unique globale $x(t)$ de $SDPG(F, C, \alpha)$ définie sur tout $\mathbb{R}$, avec la condition initiale $x(t_0) = x_0$. □

Maintenant, nous donnons ce résultat concernant les propriétés des trajectoires des solutions des systèmes dynamiques projetés globalement.

Théorème 2.12. *Si F est localement lipschitzienne, alors pour tout $x_0 \in C$, la solution $x(t)$ de $SDPG(F, C, \alpha)$, telle que $x(0) = x_0$ et définie dans un voisinage I de 0, est telle que $x(t) \in C$, pour tout $t \in I$.*

Démonstration. Premièrement, nous montrons que, si $x(t)$ est une solution quelconque de $SDPG(F, C, \alpha)$, défini dans $[a, b]$ avec $x(t) \notin C$ pour tout $t \in [a, b]$, alors la distance $d(x(t), C)$ entre $x(t)$ et C est décroissante en t.
Soit $t_0 \in [a, b]$, et soit B la boule ouverte de centre $P_C(x(t_0))$ et de rayon $\|P_C(x(t_0)) - x(t_0)\|$, puisque $x(t_0) \notin C$, alors

$$\langle x'(t_0), P_C(x(t_0)) - x(t_0) \rangle > 0.$$

Ainsi, il existe $\delta(t_0) > 0$ suffisamment petit pour que

$$\begin{aligned} x(t) &\notin B, \qquad \forall t \in (t_0 - \delta(t_0), t_0), \\ x(t) &\in B, \qquad \forall t \in (t_0, t_0 + \delta(t_0)), \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} d(x(t), C) &> d(x(t_0), C), \qquad \forall t \in (t_0 - \delta(t_0), t_0), \\ d(x(t), C) &< d(x(t_0), C), \qquad \forall t \in (t_0, t_0 + \delta(t_0)). \end{aligned}$$

On considère $t_1, ..., t_n \in [a, b]$ tel que

$$[a, b] \in \cup_{i=1}^{n} (t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i));$$

donc, en utilisant la propriété précédente pour chaque intervalle $(t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i))$, nous obtenons

$$d(x(s_1), C) > d(x(s_2), C),$$

si $a \leq s_1 < s_2 \leq b$, à savoir, $d(x(t), C)$ est décroissante en t.

Maintenant, considérons $x(t)$ comme étant la solution de $SDPG(F, C, \alpha)$ avec $x(0) = x_0 \in C$. Supposons par contradiction qu'il existe $t', t'' \in I$ tels que $x(t') \in C$ et $x(t) \notin C$ pour tout $t \in (t', t'')$. Alors nous avons

$$d(x(t'), C) = 0$$

et $d(x(t), C)$ est positive et décroissante pour tout $t \in (t', t'')$. Cependant, cela est impos-

sible car la distance $d(x(t), C)$ est continue en t. Par conséquent, nous concluons que
$x(t) \in C \quad$ pour tout $t \in I$. □

Définition 2.8. [8] Les points d'équilibre de $SDPG(F, C, \alpha)$ sont naturellement définis comme suit : un vecteur $x^* \in C$ est un point d'équilibre de $SDPG(F, C, \alpha)$ si

$$P_C(x^* - \alpha F(x^*)) - x^* = 0.$$

Il est bien connu que $x^* \in C$ est une solution de IV(F,C) si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, on a

$$x^* = P_C(x^* - \alpha F(x^*)).$$

Remarque 2.5. Les points d'équilibre du $SDPG(F, C, \alpha)$ coïncident également avec les solutions de IV(F,C), bien que comme observé, les solutions de SDPL(F,C) et $SDPG(F, C, \alpha)$ ne coïncident pas en général.

Chapitre 3

Analyse de stabilité des systèmes dynamiques projetés

Dans ce chapitre, nous analysons la stabilité des points d'équilibre pour les systèmes dynamiques projetés localement et globalement. Et aussi nous supposerons l'existence et l'unicité des solutions pour ces systèmes dynamiques projetés localement et globalement.

3.1 Concepts fondamentaux sur la stabilité

Dans cette section, nous introduisons les concepts les plus importants de stabilité pour un système dynamique classique $DS(F)$. Bien entendu, ces notions restent valables, avec les modifications appropriées, lorsqu'on considère les points d'équilibre d'un système dynamique projeté localement ou globalement. Nous utiliserons $B(x, r)$ pour désigner la boule ouverte de centre x et de rayon r

3.1.1 Définitions et interprétations

Définition 3.1 (**Point d'équilibre stable**). [8] Un point d'équilibre x^* de $DS(F)$ est stable si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in B(x^*, \delta)$, la solution $x(t)$ de $DS(F)$ avec $x(0) = x_0$ est défini et $x(t) \in B(x^*, \epsilon)$ pour tout $t > 0$.

Définition 3.2 (**Point d'équilibre asymptotiquement stable**). [8] Un point d'équilibre stable x^* est asymptotiquement stable s'il existe un $\delta > 0$ tel que, pour toute solution $x(t)$ avec $x(0) \in B(x^*, \delta)$, on a

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = x^*.$$

Pour une représentation graphique, voir figure (3.1).

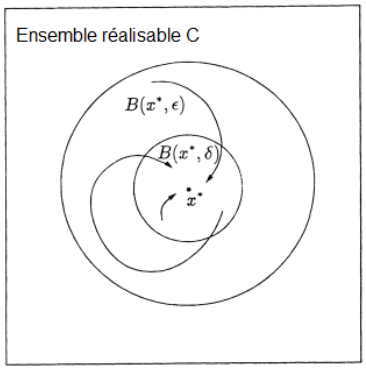


FIGURE 3.1 – Un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Définition 3.3 (**Point d'équilibre exponentiellement stable**). [8] Un point d'équilibre x^* est exponentiellement stable s'il existe un $\delta > 0$ et les constantes $a > 0$ et $c > 0$ tel que, pour toute solution $x(t)$ avec $x(0) \in B(x^*, \delta)$, on a

$$\|x(t) - x^*\| \leq C\|x(0) - x^*\| \exp -at \qquad \forall t \geq 0; \tag{3.1}$$

x^* est globalement exponentiellement stable si (3.1) est vraie pour toutes les solutions $x(t)$ de $DS(F)$.

Définition 3.4 (**Attracteur monotone**). [8] Un point d'équilibre x^* est un attracteur monotone s'il existe un $\delta > 0$ tel que, pour toute solution $x(t)$ avec $x(0) \in B(x^*, \delta)$, $\|x(t) - x^*\|$ est une fonction non croissante de t ; x^* est un attracteur global monotone si $\|x(t) - x^*\|$ est non croissant en t pour toute solution $x(t)$ de $DS(F)$.

Définition 3.5 (**Attracteur strictement monotone**). [8] Un point d'équilibre x^* est un attracteur strictement monotone s'il existe un $\delta > 0$ tel que, pour toute solution $x(t)$ avec $x(0) \in B(x^*, \delta)$, $\|x(t) - x^*\|$ est décroissant vers zéro en t ; x^* est un attracteur monotone strictement global si $\|x(t) - x^*\|$ est décroissant vers zéro en t pour toutes les solutions $x(t)$ de $DS(F)$.

Dans la définition suivante, nous introduisons le concept d'attracteur à temps fini et nous donnons une représentation dans la figure (3.2).

Définition 3.6 (**Attracteur de temps fini**). [7] Un point d'équilibre x^* est un attracteur à temps fini s'il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in B(x^*, \delta)$, il existe un $T(x) < \infty$ tel

que

$$x.t = x^*, \qquad \text{quand} \quad t \geq T(x).$$

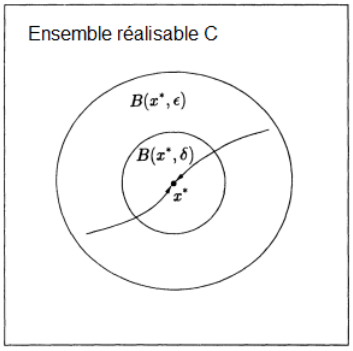


FIGURE 3.2 – Un attracteur à temps fini.

Remarque 3.1. Il est facile de constater que les attracteurs monotones correspondent à des points d'équilibre stables, tandis que les attracteurs strictement monotones et les attracteurs à temps fini sont considérés comme asymptotiquement stables.

Les exemples suivants illustrent les différences qui peuvent survenir entre la stabilité d'un système dynamique projeté localement ou globalement et celle d'un système dynamique classique $DS(F)$ dans le même champ de vecteurs, (pour plus de détails, se référer à [7]).

Exemple 4. Soit l'ensemble de contraintes C défini par le carré $ABCD$ dans la figure 3.3. Supposons

$$F(x_1, x_2) = \phi(x_1 + x_2 - 4)[(x_1 - 4x_1)/(x_1 + x_2), (x_2 - 4x_2)/(x_1 + x_2)],$$

où $\phi(w) = -1, 0, 1$, lorsque w est, respectivement, négatif, nul ou positif, et $1 \leq x_1 \leq 3$, $1 \leq x_2 \leq 3$.

Soit $\tilde{F}$ une extension continue quelconque de F à tout l'espace $\mathbb{R}^2$. Alors $B(2, 2)$ est un point d'équilibre de la résolution de systèmes dynamiques projetés

$$x' = \prod(x, \tilde{F}(x)),$$

et il est asymptotiquement stable.

Le point B est également un point d'équilibre de la résolution $DS(F)$ habituelle

$$x' = -\tilde{F}(x),$$

mais il n'est même pas stable dans ce cas.

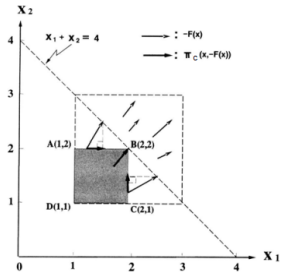


FIGURE 3.3 – Un exemple où le point d'équilibre d'un SDP est asymptotiquement stable, mais même pas stable pour le DS(F).

Exemple 5. Soit le champ de vecteurs $F(x_1, x_2) = (x_1+4x_2, x_1)$ et l'ensemble de contraintes C le triangle AOB représenté sur la figure 3.4. Alors l'origine $O(0, 0)$ est le seul point d'équilibre pour la résolution SDP.

$$x' = \prod(x, -F(x)),$$

et la résolution $DS(F)$ habituelle

$$x' = -F(x).$$

Bien que O soit asymptotiquement stable pour le système linéaire $x' = -F(x)$, il n'est pas stable pour le SDP, comme on l'observe facilement le long de l'arête OB dans figure 3.4.

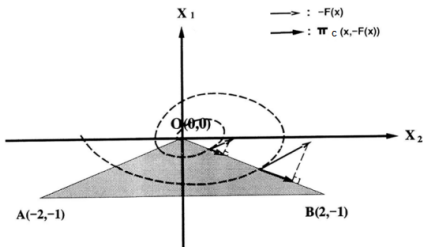


FIGURE 3.4 – Un exemple où le point d'équilibre du $DS(F)$ est asymptotiquement stable, mais même pas stable pour le SDP.

3.1.2 Puits non linéaire

Pour un système dynamique $DS(F)$, si F est continuellement différentiable, une méthode classique d'analyse de la stabilité d'un point d'équilibre x^* consiste à analyser les valeurs propres de la partie linéaire de F en x^*. En particulier, un point d'équilibre x^* de $DS(F)$ est appelé un puits si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne $JF(x^*)$ ont des parties réelles positives.

Nous introduisons le théorème des puits non linéaires suivant. Pour la démonstration, veuillez vous référer à [2, 8].

Théorème 3.1. *Si x^* est un puits de $DS(F)$, alors x^* est exponentiellement stable.*

Nous présentons maintenant une condition nécessaire pour un attracteur monotone de $DS(F)$.

Théorème 3.2. *Si x^* est un attracteur monotone pour $DS(F)$, alors la matrice jacobienne $JF(x^*)$ est semi-définie positive.*

Démonstration. Supposons que x^* est un attracteur monotone par rapport à $B(x^*, \delta)$. Soit x un point quelconque de $B(x^*, \delta)$, et soit $x(t)$ la solution de $DS(F)$ passant par x quand $t = 0$. Alors, la fonction $D(t) = \|x(t) - x^*\|^2/2$ est non croissant ; Par conséquent,

$$D'(t) \leq 0, \quad \text{pour tout } t \geq 0;$$

en particulier,

$$D'(0) = \langle -F(x), x - x^* \rangle \leq 0.$$

Ainsi,

$$\langle F(x), x - x^* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in B(x^*, \delta).$$

Maintenant, on considère $\bar{x} \in B(x^*, \delta)$ et

$$x = x^* + \alpha(\bar{x} - x^*), \qquad \text{avec } \alpha \in (0, 1).$$

Puisque x^* est un point d'équilibre et puisque F est continûment dérivable, on a

$$F_i(x) = \langle \nabla F_i(\xi_i), x - x^* \rangle \qquad \forall_i = 1, ..., n,$$

où ξ_i j'appartiens au segment $[x, x^*]$. Donc

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle F(x), x - x^* \rangle \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \langle \nabla F_i(\xi_i), x - x^* \rangle (x_i - x_i^*) \\ &= \alpha^2 \textstyle\sum_{i=1}^n \langle \nabla F_i(\xi_i), \bar{x} - x^* \rangle (\bar{x}_i - x_i^*) \quad \forall \alpha \in (0,1), \end{aligned}$$

et ainsi nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_i - x_i^*) \langle \nabla F_i(\xi_i), \bar{x} - x^* \rangle \geq 0, \qquad \forall \alpha \in (0,1).$$

Si $\alpha \to 0$, alors $x \to x^*$ et aussi $\xi_i \to x^*$, pour tout $i = 1, ..., n$. D'où,

$$\langle \bar{x} - x^*, JF(x^*)(\bar{x} - x^*) \rangle \geq 0,$$

et $JF(x^*)$ est semi-défini positif. □

Remarque 3.2. Nous remarquons que les attracteurs monotones ne peuvent pas être assimilés à des points asymptotiquement stables. Dans l'exemple trivial.

$$x_1' = -x_1,$$

$$x_2' = 0,$$

$x^* = (0,0)$ est un attracteur monotone, mais il n'est pas asymptotiquement stable. De plus, si l'on considère

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 - x_2, \\ x_2' &= 2x_1, \end{aligned}$$

$x^* = (0,0)$ est un puits, donc il est exponentiellement stable et en particulier asymptotiquement stable, car la matrice jacobienne

$$JF(x^*) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

a des valeurs propres $1 \pm i$; mais

$$\langle x, JF(x^*)x \rangle = x_1(x_2 - 2x_1) \ngeq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2;$$

c'est-à-dire que $JF(x^*)$ n'est pas semi-défini positif, et donc, d'après le théorème 3.2, x^* n'est pas un attracteur monotone (voir figure 3.5).

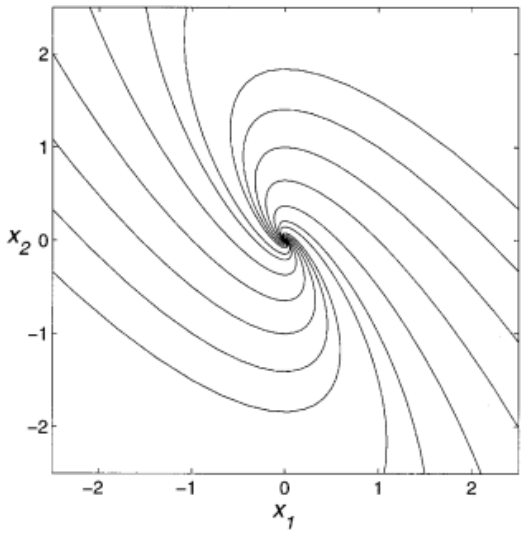


FIGURE 3.5 – Exemple de puits qui n'est pas un attracteur monotone.

3.2 La stabilité des points d'équilibre de SDPL(F,C)

Dans le théorème suivant, on caractérise les attracteurs monotones globaux de SDPL(F,C) avec des solutions de l'inéquation variationnelle de Minty $IVM(F,C)$.

Théorème 3.3. *Un point $x^* \in C$ est solution de $IVM(F,C)$ si et seulement si c'est un attracteur global monotone de SDPL(F,C).*

Démonstration. Puisque x^* est une solution de $IVM(F,C)$, alors par le lemme de Minty (1.18) x^* est aussi une solution de IV(F,C) et est donc un point d'équilibre de SDPL(F,C). Soit $x(t)$ une solution arbitraire de SDPL(F,C) ; alors la fonction

$$D(t) = \|x(t) - x^*\|$$

est absolument continue et, pour tout $t \geq 0$, sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nul, on admet que

$$D'(t) = \langle x(t) - x^*, -F(x(t))\rangle / D(t) - \beta(x(t))\langle x(t) - x^*, n^*(x(t))\rangle / D(t),$$

où

$$\beta(x(t)) \geq 0 \quad \text{et} \quad n^*(x(t)) \in N_C(x(t)).$$

Donc, si

$$\begin{aligned} D'(t) &\leq \langle -F(x(t)), x(t) - x^* \rangle / D(t) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Donc, si $0 \leq t_1 < t_2$, nous avons

$$D(t_2) - D(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} D'(t)dt \leq 0.$$

Autrement dit, $D(t)$ est non croissant et, par conséquent, x^* est un attracteur global monotone de SDPL(F,C).

Maintenant, nous supposons que $x^* \in C$ est un attracteur global monotone. Soit T le plus petit sous-espace affine contenant C, et soit $S = T - x^*$. Soit x un point arbitraire dans l'intérieur relatif de C, et soit $x(t)$ la solution de SDPL(F,C) telle que $x(0) = x$. Comme au voisinage de x dans C, SDPL(F,C) coïncide avec

$$x' = P_S(-F(x)),$$

alors $x(t)$ est continûment dérivable dans un voisinage I de 0 et la fonction

$$D(t) = \|x(t) - x^*\|^2/2$$

est dérivable et non croissante sur I ; par conséquent,

$$D'(t) \leq 0 \qquad \forall t \in I,$$

et en particulier,

$$\begin{aligned} 0 &\geq D'(0) \\ &= \langle -F(x), x - x^* \rangle - \langle P_{S^\perp}(-F(x)), x - x^* \rangle \\ &= \langle F(x), x^* - x \rangle. \end{aligned}$$

Puisque l'opérateur F est continu, alors

$$\langle F(x), x^* - x\rangle \leq 0 \qquad \forall x \in C$$

c'est-à-dire que x^* est une solution de $IVM(F,C)$. □

Le résultat suivant concerne l'existence de solutions pour la stabilité des points d'équilibre de SDPL(F,C), en utilisant la propriété de monotonie du champ de vecteurs F.

Théorème 3.4. *Supposons que x^* est un point d'équilibre de $SDPL(F,C)$.*
Alors :

(i) Si $F(x)$ est localement pseudo-monotone en x^*, alors x^* est un attracteur monotone.

(ii) Si $F(x)$ est localement strictement pseudo-monotone en x^*, alors x^* est strictement attracteur monotone.

(iii) Si $F(x)$ est localement fortement monotone en x^*, alors x^* est exponentiellement stable.

(iv) Si $F(x)$ est pseudo-monotone, strictement pseudo-monotone, ou fortement monotone sur C alors, respectivement, x^* est un attracteur global monotone, un attracteur strictement global monotone ou un attracteur globalement exponentiellement stable.

Démonstration.

(i) Si $F(x)$ est pseudo-monotone sur $N(x^*)$ voisinage de x^*, alors d'après le théorème 2.5 et le lemme de Minty (1.18), x^* est solution de IVM$(F, N(x^*))$, et donc x^* est un monotone attracteur de SDPL(F,C).

(ii) On suppose maintenant que $F(x)$ est strictement pseudo-monotone sur $N(x^*)$ et on définit la fonction continue ϕ comme suit :

$$\phi(x) = \langle F(x), x - x^*\rangle > 0, \qquad \forall x \in N(x^*).$$

Considérons maintenant une solution arbitraire $x(t)$ de SDPL(F,C) avec $x(0) \in N(x^*)$. Alors,

$$D(t) = \|x(t) - x^*\|$$

est absolument continue et, pour tout $t \geq 0$, sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nul, on a

$$D'(t) \leq \langle -F(x(t)), x(t) - x^*\rangle / D(t) < 0.$$

Donc, si $0 \leq t_1 < t_2$, nous avons

$$D(t_2) - D(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} D'(t)dt \leq 0;$$

autrement dit, $D(t)$ est décroissante et il y a

$$\lim_{t \to +\infty} d(x(t)) = l \geq 0.$$

On prouve que $l = 0$. Par contradiction, supposons que $l > 0$ et considérons

$$\delta = \|x(0) - x^*\|;$$

alors,

$$x(t) \in H = (B(x^*, \delta) \setminus B(x^*, l)) \cap C, \ \textit{pour tout} \quad t \geq 0.$$

Comme H est un ensemble compact, on a

$$\max_{x \in H} \phi(x)/\|x - x^*\| = M < 0,$$

et ainsi

$$D'(t) \leq \phi(x(t))/D(t) \leq M < 0.$$

Ceci est impossible et donc x^* est un attracteur strictement monotone.

(iii) Supposons que $F(x)$ est fortement monotone sur $N(x^*)$ avec constant $\eta > 0$. On considère une solution arbitraire $x(t)$ de SDPL(F,C) commençant à $x(0) \in N(x^*)$; alors, pour tout $t \geq 0$, sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nul, on a

$$\begin{aligned} D'(t) &\leq -\langle F(x(t)) - F(x^*), x(t) - x^* \rangle / \|x(t) - x^*\| \\ &\leq -\eta \|x(t) - x^*\|; \end{aligned}$$

donc

$$D'(t) \leq -\eta D(t).$$

D'abord, on suppose que $D(t) \neq 0$ pour tout $t > 0$; alors, pour tout fixé $\bar{t} > 0$, $D(t)$ est absolument continue sur $[0, \bar{t}]$. Puisqu'une fonction log est continue de Lipschitz sur $[D(\bar{t}), D(0)]$, alors $\log(D(t))$ est absolument continue sur $[0, \bar{t}]$. Par conséquent,

nous obtenons

$$\begin{aligned}\log[D(\bar{t})] - \log[D(0)] &= \int_0^{\bar{t}} (D'(t)/D(t))dt \\ &\leq -\eta\bar{t},\end{aligned}$$

et

$$\|x(\bar{t}) - x^*\| \leq \|x(0) - x^*\| \exp(-\eta\bar{t});$$

c'est-à-dire que x^* est exponentiellement stable.

S'il existe des $t_0 > 0$ avec $D(t_0) = 0$, alors on a

$$\|x(t) - x^*\| = 0, \qquad \forall t \geq t_0.$$

En posant

$$C = \exp(\eta t_0).$$

Puisque $D(t)$ est décroissante sur $[0, t_0]$, on a

$$\begin{aligned}\|x(t) - x^*\| &\leq \|x(0) - x^*\| \\ &\leq C\|x(0) - x^*\| \exp(-\eta t), \quad \forall t \geq 0;\end{aligned}$$

ainsi, x^*est exponentiellement stable.

(iv) Si les conditions de monotonicité de $F(x)$ sont satisfaites sur C, alors la stabilité globale résulte de x^* tient .

□

La définition suivante généralise le concept de monotonie forte en introduisant la notion de monotonie forte avec un degré spécifique.

Définition 3.7 (**Monotonie forte avec degré** α)**.** [7] $F(x)$ est dit localement fortement monotone de degré α en x^* si il existe un voisinage $N(x^*)$ de x^* et $\eta > 0$ tel que

$$\langle F(x) - F(x^*), x - x^* \rangle \geq \eta\|x - x^*\|^\alpha, \qquad \forall x \in N(x^*); \tag{3.2}$$

$F(x)$ est fortement monotone de degré α en x^* si (3.2) est vrai pour tout $x \in C$. $F(x)$ est dit fortement monotone de degré α si (3.2) est vrai pour tout $x, x^* \in C$.

Nous présentons le résultat de maintien le plus fort selon lequel x^* devient un attractif à

temps fini, lorsque le degré de monotonie forte en x^* est inférieur à deux. La démonstration complète de ce résultat peut être trouvée dans [6, Theoreme 3.8].

Théorème 3.5. *Supposons que x^* résolve SDPL(F,C). Si $F(x)$ est localement fortement monotone de degré $\alpha < 2$ en x^*, alors x^* est un attracteur à temps fini.*

Nous présentons maintenant un théorème de stabilité pour SDPL(F,C) analogue au théorème du puits non linéaire. Nous supposons une condition plus forte pour F, c'est-à-dire que la matrice jacobienne $JF(x^*)$ est définie positive. Mais nous obtenons aussi un résultat plus fort : x^* est exponentiellement stable et est un attracteur strictement monotone.

Théorème 3.6. *Supposons que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs $\mathscr{C}^1$ et que x^* un point d'équilibre de SDPL(F,C). Si la matrice jacobienne $JF(x^*)$ est définie positive, alors x^* est un attracteur strictement monotone et exponentiellement stable.*

Démonstration. Par continuité, il existe un voisinage $N(x^*)$ de x^* dans C tel que $JF(x)$ est définie positive pour tout $x \in N(x^*)$. Donc, il existe que $\eta > 0$ tel que

$$\langle y, JF(x)y\rangle \geq \eta, \qquad \forall x \in N(x^*), \forall y \;\; t.q. \|y\| = 1;$$

donc

$$\langle y, JF(x)y\rangle \geq \eta\|y\|^2, \qquad \forall x \in N(x^*), \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

c'est-à-dire que $JF(x)$ est définie fortement positive sur $N(x^*)$. Par conséquent, $F(x)$ est fortement monotone sur $N(x^*)$, et d'après le théorème 3.4 , x^* est un attracteur strictement monotone et exponentiellement stable. □

3.3 La stabilité des points d'équilibre de SDPG(F, C, α)

La première remarque cruciale est que les solutions de $IVM(F, C)$ et de l'attracteur monotone global de $SDPG(F, C, \alpha)$ ne coïncident pas, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 6. Soit

$$F(x_1, x_2) = (x_2, -x_1) + [(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1]^2(1, 1) \qquad \text{et} \quad C = \mathbb{R}^2_+.$$

Le point d'équilibre $x^* = (0, 0)$ résout $IVM(F, C)$ car

$$\langle F(x), x\rangle = [(x_1 - 1)^2 + x_2^2 - 1]^2(x_1 + x_2) \geq 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2_+.$$

Néanmoins, on considère le demi-cercle A en C de centre $(1, 0)$ et de rayon 1 ; alors, pour tout $x \in A$, on a

$$\langle F(x), x\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \|F(x)\| = \|x\|.$$

Par conséquent, pour tout fixe $\alpha > 0$, il existe $x \in A$ suffisamment proche de x^* pour que $x - \alpha F(x) \notin C$ et donc

$$\langle P_C(x - \alpha F(x)) - x, x^* - x\rangle < 0.$$

Alors, la solution $x(t)$ de $SDPG(F, C, \alpha)$ avec $x(0) = x$ s'éloigne de x^* en t à l'intérieur d'un voisinage de 0 ; ainsi, x^* n'est pas un attracteur monotone pour $SDPG(F, C, \alpha)$ pour tout fixé $\alpha > 0$.

Une preuve de la stabilité exponentielle globale de $SDPG(F, C, \alpha)$, dans le cas où α est suffisamment petit, a été établie même lorsque la matrice jacobienne JF est symétrique et définie positive, comme indiqué dans les références [12, 9].

Théorème 3.7. *Soit x^* un point d'équilibre de $SDPG(F, C, \alpha)$. Si JF est symétrique et uniformément défini positif dans $\mathbb{R}^n$ et $\|JF\|$ est bornée supérieurement, alors x^* est globalement exponentiellement stable pour $SDPG(F, C, \alpha)$, à condition que $\alpha < 2/\max_{x\in\mathbb{R}^n}\|JF(x)\|$.*

Le résultat suivant sur la stabilité exponentielle des systèmes dynamiques projetés globalement peut être démontré lorsque la matrice jacobienne JF n'est pas symétrique mais que le domaine C est borné. Cette démonstration est présentée dans [12, 9].

Théorème 3.8. *Soit x^* un point d'équilibre de $SDPG(F, C, \alpha)$. Si C est borné, F est continûment dérivable sur C et JF est définie positive sur C, alors il existe $\alpha_0 > 0$ tel que x^* est globalement exponentiellement stable pour $SDPG(F, C, \alpha)$ pour tout $\alpha < \alpha_0$.*

Comme pour SDPL(F,C), on prouve pour $SDPG(F, C, \alpha)$ un résultat analogue quand $JF(x^*)$ est définie positive.

Théorème 3.9. *Supposons que $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs $\mathscr{C}^1$ et que x^* est un point d'équilibre de $SDPG(F, C, \alpha)$. Si la matrice jacobienne $JF(x^*)$ est définie positive, alors il existe $\alpha_0 > 0$ tel que x^* un attracteur strictement monotone et exponentiellement stable pour $SDPG(F, C, \alpha)$ pour tout $\alpha < \alpha_0$.*

Démonstration. Par continuité, $JF(x)$ est définie positive pour tout x dans un voisinage $N(x^*)$ de x^* dans C ; ainsi, $JF(x)$ est fortement définie positive sur $N(x^*)$ et $F(x)$ est fortement monotone sur $N(x^*)$ avec une certaine constante $\eta > 0$. De plus, $\|JF(x)\|$ est

borné dans $N(x^*)$; donc $F(x)$ est continue de Lipschitz sur $N(x^*)$ avec $L > 0$ constant. Par conséquent, pour tout $x \in N(x^*)$, ce qui suit est vrai :

$$\begin{aligned}
\|P_C(x - \alpha F(x)) - x^*\|^2 &= \|P_C(x - \alpha F(x)) - P_C(x^* - \alpha F(x^*))\|^2 \\
&\leq \|x - x^* - \alpha(F(x) - F(x^*))\|^2 \\
&= \|x - x^*\|^2 - 2\alpha\langle F(x) - F(x^*), x - x^*\rangle + \alpha^2\|F(x) - F(x^*)\|^2 \\
&\leq (1 - 2\alpha\eta + \alpha^2 L^2)\|x - x^*\|^2.
\end{aligned}$$

En posant

$$\alpha_0 = 2\eta/L^2 \; et \; 0 < \alpha < \alpha_0.$$

Pour toute solution $x(t)$ avec $x(0) \in N(x^*)$, on note

$$D(t) = \|x(t) - x^*\|^2/2;$$

ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
D'(t) &= \langle x(t) - x^*, P_C(x(t) - \alpha F(x(t))) - x(t)\rangle \\
&= \langle x(t) - x^*, P_C(x(t) - \alpha F(x(t))) - x^*\rangle - \|x(t) - x^*\|^2 \\
&\leq \|x(t) - x^*\|\|P_C(x(t) - \alpha F(x(t))) - x^*\| - \|x(t) - x^*\|^2 \\
&\leq (\sqrt{1 + 2\alpha\eta + \alpha^2 L^2} - 1)\|x(t) - x^*\|^2 \\
&= -2aD(t),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
a &= 1 - \sqrt{1 + 2\alpha\eta + \alpha^2 L^2} \\
&= 1 - \sqrt{1 - L^2\alpha(\alpha_0 - \alpha)} > 0.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|x(t) - x^*\| \leq \|x(0) - x^*\| \exp -at, \quad \forall t \geq 0;$$

c'est-à-dire, x^* est exponentiellement stable. De plus, $D'(t) < 0$ et $\lim_{t \to +\infty} x(t) = x^*$, donc x^* est aussi un attracteur strictement monotone. □

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude de la stabilité des points d'équilibre pour les systèmes dynamiques projetés. De manière générale, cette étude porte sur les liens entre les inéquations variationnelles et les points d'équilibre dans un système dynamique projeté. Nous explorons les propriétés de stabilité liées aux points d'équilibre d'un système dynamique généralisé et examinons comment ils se rapportent aux solutions des inéquations variationnelles. Grâce à une analyse rigoureuse et à l'utilisation de techniques mathématiques, nous visons à fournir une compréhension globale de la stabilité dans ce contexte. L'étude de la stabilité des systèmes dynamiques est un domaine fondamental des mathématiques appliquées et de la théorie du contrôle. Il est largement utilisé dans des domaines tels que l'ingénierie, la physique, la biologie et l'économie pour analyser et concevoir des systèmes dynamiques complexes. Enfin, nous sommes très intéressés par l'amélioration de nos compétences dans ce domaine afin de développer des idées innovantes et fructueuses à l'avenir. C'est un domaine plein d'opportunités pour élargir des perspectives utiles.

Bibliographie

[1] N. El Farouq. *Algorithmes de résolution d'inéquations variationnelles*. L'école nationale supérieure des mines de Paris, Paris, 1993.

[2] M. W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press. NY, 1974.

[3] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Inc, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.

[4] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia. *An introduction to variational inequalities and their applications*. Academic Press, Inc, 1980.

[5] P. Marcotte. *Inéquations variationnelles : Motivation, Algorithmes de résolution et quelques Applications*. Zinal, Suisse, 4-8 mars 1997.

[6] A. Nagumey. *Network Economics : A Variational Inequality Approach*. Springer Science+Business Media, Dordrecht, 1999. 2nd Edition.

[7] A. Nagumey and D. Zhang. *Projected Dynamical Systems and Variational Inequalities with Applications*. Springer Science+Business Media, LLC, New York, 1996.

[8] M. Pappalardo and M. Passacantando. Stability for Equilibrium Problems : From Variational Inequalities to Dynamical Systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 113(3) :567–582, 2002.

[9] M. Passacantando. *Stability of Equilibrium Points of Projected Dynamical Systems*, pages 407–421. 01 2005.

[10] A. Plakhov. Local Structure of Convex Surfaces near Regular andConical Points. 06 2022.

[11] I. I. Varbie. *Differential Equations. An Introduction to Basic Concepts, Results and Applications*. World Scientific, London, 2004.

[12] Y. S. Xia and J. Wang. On the stability of globally projected dynamical systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 106(2) :129–150, July 2000.