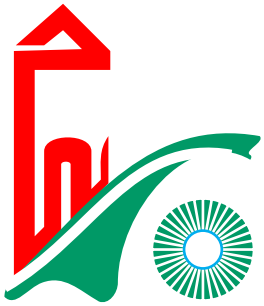
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

BOUCHIBANE ACHOUAK

LES INTÉGRALES DE HENSTOCK-KURZWEIL-PETTIS ET LES THÉORÈMES D'EXISTENCE POUR LE PROBLÉME DE CAUCHY

Soutenu publiquement le 29/06/2025, Devant le jury composé de :

Président :	Dr. Said RAFA	MCB.Université de Médéa
Examinateur :	Dr. Khaled MALOUM	MAA.Université de Médéa
Encadreur :	Dr. Noureddine MEKDACHE	MAA.Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2024-2025

Remerciements

C'est avec un grand plaisir que je réserve ces lignes en signe de gratitude et de reconnaissance à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

En tout premier lieu, je tiens à remercier Monsieur N. Mekdache d'avoir encadré ce travail, tout au long de ce mémoire, ses conseils m'ont été très précieux.

Je remercie vivement Monsieur S. Rafa de l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury.

Je remercie également Monsieur K . Maloum membres de jury pour l'honneur qu'ils m'ont accordé en acceptant de juger mon travail .

J'adresse également mes remerciements envers mes amis et mes collègues pour leur soutien.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

À mes chers parents, Aujourd'hui est le fruit de vos efforts, de vos sacrifices et de votre amour infini. Merci pour votre soutien inconditionnel, vos conseils et votre patience. Cette réussite est la vôtre autant que la mienne.

À mes frères et sœurs Merci pour votre complicité, vos encouragements et cette belle énergie qui m'ont porté(e) durant ce parcours. Vous êtes ma source de motivation.

À mes amis proches et mon mari Votre présence à mes côtés a illuminé chaque étape. Merci pour votre amitié, vos rires et votre soutien précieux.

Table des matières

Introduction **9**

1 Concepts et définitions fondamentales **10**

1.1 Notions et définitions 10

1.2 La compacité et la convexité 13

2 Propriétés de l'intégral de henstock- kurzweil- pettis **18**

2.1 L'intégrale de Henstock-Kurzweil dans les espaces de Banach 18

2.2 Propriétés fondamentales de l'ntégrale Henstock-Kurzweil-Pettis 20

2.3 Quelques théorèmes du point fixe 24

3 Solutions faibles pour le probléme de cauchy aux sens de Henstock- Kurzweil-Pettis **26**

3.1 Préliminaires 26

3.2 Résultats principaux 30

3.3 Application 36

Conclusion **40**

Bibliographie **41**

Résumé

Dans ce mémoire nous étudions et démontrons un théorème d'existence pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, \alpha] = I_\alpha, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

en utilisant l'intégrale de Henstock-Kurzweil-Pettis et ses propriétés. Les hypothèses imposées à la fonction f ne sont pas trop restrictives : nous supposons sa mesurabilité scalaire et continuité séquentielle faible par rapport à la seconde variable. De plus, nous supposons que f vérifie certaines conditions exprimées en termes de mesures de non-compacité faible.

Mots-clés : Pseudo-solution, intégrale de Pettis, intégrale de Henstock-Kurzweil, problème de Cauchy.

Abstract

In this paper we prove an existence theorem for the Cauchy problem

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, \alpha] = I_\alpha, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

using the Henstock-Kurzweil-Pettis integral and its properties. The requirements on the function f are not too restrictive : scalar measurability and weak sequential continuity with respect to the second variable. Moreover, we suppose that the function f satisfies some conditions expressed in terms of measures of weak noncompactness.

Keywords : Pseudo-solution, Pettis integral, Henstock-Kurzweil integral, Cauchy problem

Notation

— E : Espace de Banach.

— E^* : Dual topologique.

— I : Sous-intervalle arbitraire.

— HKP : Intégrales de Henstock-Kurzweil-Pettis.

— HK : Intégrales de Henstock-Kurzweil.

— HL :Intégrable au sens de Henstock-Lebesgue .

— PP :Presque partout.

— $(L, \|\cdot\|)$: Espace vectoriel normé.

— $(C(I_\alpha; E), w)$: Espace de toutes les fonctions continues de I à E muni de la topologie faible.

— $\mathcal{C}(I, E)$: Espace vectoriel localement métrisable convexe.

— $\mathcal{N}_w$:La famille de toutes les parties relativement faiblement compactes de E.

— $\mathcal{M}$:La famille de toutes les parties bornées de E.

— $\sigma(E; E^*)$: Topologie faible.

— $\mathcal{I}$: Famille de tous les sous-intervalles fermés non dégénérés.

— $\mathcal{F}$: Famille des fonctions HK-intégrables sur l'intervalle I.

— $\mathrm{conv}(A)$: Enveloppe convexe de A.

— $\overline{\mathrm{conv}}(A)$: Enveloppe convexe fermée de A.

— $\overset{\sigma}{\rightharpoonup}$: Convergence faible.

— AG^* : Absolument continue.

— ACG^* :Absolument continue généralisée .

Introduction

L'intégrale de Henstock-Kurzweil généralise les intégrales de Newton, de Riemann et de Lebesgue [14] Une particularité de cette intégrale est qu'elle permet d'intégrer des fonctions fortement oscillantes, telles que $f'(t)$ où $F(t) = t^2 \sin t^{-2}$ sur $[0, 1]$ et $F(0) = 0$ peut être définie [15]. Cette intégrale a été introduite indépendamment par Henstock et Kurzweil en 1957–1958 et s'est révélée particuliément utile dans l'étude des équations différentielles ordinaires . Dans son travail , Cao a défini l'intégrale de Henstock dans les espaces de Banach, généralisant ainsi l'intégrale de Bochner [16]. par ailleurs, l'intégrale de Pettis constitue également une généralisation de l'intégrale de Bochner. Cette notion est intrinsèquement liée aux topologies faibles dans les espaces de Banach Nous généralisons ces deux concepts d'intégration en introduisant l'intégrale de Henstock-Kurzweil-Pettis.
Dans cet mémoire, nous étudierons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, \alpha] = I_\alpha, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

où f est une fonction intégrable au sens de Henstock-Kurzweil-Pettis.

La mesure de la non-compacité faible est une technique importante pour rechercher des solutions d'équations différentielles et intégrales.
Ce travail s'inscrit dans la lignée des recherches menées par Banaś, Sadarangani et Hwang dans leur article fondateur :
"The Henstock-Kurzweil-Pettis Integrals and Existence Theorems for the Cauchy Problem" (Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 54 (2004), pp. 279–289)

Ce travail est réparti en trois chapitres :

Le premier chapitre : Intitulé " **Concepts et définitions fondamentales**" , Se contient notamment des rappels de quelques résultats théoriques, et notions de base de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans les chapitres qui suivent. Il est divisé comme suit :
Le deuxième chapitre : Intitulé " **Propriétés de l'intégral de henstock- kurzweil- pettis**"
Le troisième chapitre : Intitulé **Solutions faibles pour le probléme de cauchy aux sens de intégrale de Henstock-Kurzweil-Pettis** dans ce chapitre, En utilisant les techniques de mesure de la non-compacité faible, combinez-les avec les intégrales de Henstock – Kurzweil – Pettis pour discuter du théorème d'existence de solutions faibles de (1) pour une classe d'équations intégrodifférentielles fractionnaires dans un espace de Banach E.

Chapitre 1

Concepts et définitions fondamentales

Ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base qui seront utilisés à travers les chapitres suivants .

1.1 Notions et définitions

Définition 1.1 *Un K-espace vectoriel E est dit normé lorsqu'il est muni d'une norme, c'est-à-dire d'une application*

$$\mathcal{N} : E \to \mathbb{R}^+$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

1. ***Séparation*** *(axiome de séparation)*

$$\forall x \in E,\ \mathcal{N}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$$

2. ***Homogénéité*** *(homogénéité absolue) :*

$$\forall (\lambda, x) \in K \times E,\ \mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$$

3. ***Sous-additivité*** *(inégalité triangulaire)*

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$$

Définition 1.2 *[1] On dit un espace de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ tout espace vectoriel normé complet, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy dans E est convergente (par rapport à la topologie définie par la distance associée à la norme).*

Définition 1.3 *Le dual topologique E^* d'un Banach E est l'espace des formes linéaires continues :*

$$E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$$

Définition 1.4 *Un* espace mesurable *(en théorie de la mesure), également appelé* espace probabilisable *(en théorie des probabilités), est un couple $(S, \mathcal{A})$ où S est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur S. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés* ensembles mesurables *de S.*

Un espace mesurable est rarement utilisé seul : le plus souvent, il est complété d'une mesure μ en vue de construire un espace mesuré $(S; \mathcal{A}; \mu)$.

Définition 1.5 *Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que cette fonction est intégrable aux sens Riemann si la limite des sommes de Riemann*

$$\lim_{\substack{\Sigma^*(p) \\ p \to 0}} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(t_i)$$

existe. Dans ce cas, la limite est appelée l'intégrale au sens de Riemann de la fonction f sur $[a, b]$

Définition 1.6 *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Un espace L^p est un espace vectoriel de classe des fonctions dont la puissance d'exposante p est intégrable au sens de Lebesgue si :*
1) Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f réelles sur Ω telles que f est mesurable

$$\int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty.$$

et muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

2) L'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p.) sur Ω muni de la semi-norme "borne supérieure essentielle"

$$\|f\|_\infty = \sup \operatorname*{ess}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf\{K \geq 0 \mid |f(x)| \leq K \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Définition 1.7 *Une fonction $f\colon E \to E$ est dite* absolument continue *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition finie $\{[a_i, b_i]\}_{i=1}^{p}$ de J vérifiant*

$$\sum_{i=1}^{p}(b_i - a_i) < \delta,$$

Alors

$$\sum_{i=1}^{p}\|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon.$$

On note par E l'espace de Banach des fonctions dérivables $f\colon E \to E$ dont la dérivée première est absolument continue.

Définition 1.8 *Soient E, F deux espaces de Banach, et $V\colon E \to F$ une application linéaire. On dit que V est un* opérateur borné *lorsque V est continue.*

Définition 1.9 *Soient$E$ et F deux espaces de Banach et f une application définie de E à valeurs dans F. On dit que f est complètement continue si elle est continue et transforme tout bornée de E en une ensemble relativement compact dans F.f est dite compacte si$f(E)$ est relativement compacte dans F.*

Théorème 1.10 (Hahn-Banach, forme géométrique) *[2]. Soient $A, B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints, avec A fermé et B compact (ou A fermé et B fermé, selon les variantes), dans un espace vectoriel topologique localement convexe E.*
Alors, il existe une forme linéaire continue $f : E \to \mathbb{R}$ et un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(a) \leq \alpha < f(b), \quad \text{pour tout } a \in A,\ b \in B.$$

Définition 1.11 *[3] Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$ et $T : E \to E$ une application. Un élément x de E est dit point fixe de T si $T(x) = x$.*

Définition 1.12 *Soit (M, d) un espace métrique complet et $T\colon M \to M$ une application. Soit K un réel strictement positif ($K > 0$). On dit que :*

- *T est* lipschitzienne de rapport *K si pour tout couple $(x, y) \in M$ on a :*

$$d(T(x), T(y)) \leq K\, d(x, y)$$

- *Si $K < 1$, alors T est dite* contractante
- *Si $K \leq 1$, alors T est dite* non expansive

1.2 La compacité et la convexité

Définition 1.13 *: [4] La topologie faible sur E, notée $\sigma(E, E^*)$, est la topologie la moins fine rendant continues toutes les formes linéaires $f \in E^*$.*

Caractérisation :

— Une base de voisinages de $x \in E$ est donnée par :

$$\mathcal{V}(x) = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} \{y \in E \mid |f_i(y-x)| < \varepsilon\} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}, f_i \in E^*, \varepsilon > 0 \right\}$$

— Une suite (x_n) converge faiblement vers x si :

$$\forall f \in E^*, \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

Définition 1.14 *Une application $T : E \to F$ entre espaces de Banach est dite faiblement continue si :*

$\forall \phi \in F^*, \quad \phi\, T$ *est continue .*

Autrement dit, T est continue lorsque E et F sont munis de leurs topologies faibles $\sigma(E, E^*)$ et $\sigma(F, F^*)$ respectivement.

Définition 1.15 *Soit E un espace de Banach et $K \subset E$. On dit que K est faiblement compact si l'une des conditions équivalentes est satisfaite :*

1. **Compacité faible** :
   K est compact pour la topologie $\sigma(E, E^*)$.
2. **Propriété de Bolzano-Weierstrass faible** :
   Toute suite $(x_n) \subset K$ admet une sous-suite (x_{n_k}) convergeant faiblement vers un élément $x \in K$.
3. **Fermeture faible + bornitude** (si E est réflexif) :
   K est faiblement fermé et borné.

Définition 1.16 *Soient E et F des espaces de Banach. Une application $T : E \to F$ est dite faiblement séquentiellement continue si pour toute suite (x_n) dans E :*

$$x_n \overset{\sigma}{\rightharpoonup} x \;\Rightarrow\; T(x_n) \overset{\sigma}{\rightharpoonup} T(x)$$

Définition 1.17 *Une application $f : X \to Y$ est séquentiellement continue si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X :*

$$x_n \to x \text{ dans } X \implies f(x_n) \to f(x) \text{ dans } Y.$$

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.18 *La suite (f_n) est dite équicontinue si :*

$$\forall xy \in I,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \in I,\ |x-y| < \delta \implies |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon.$$

On suppose $(L, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé (e.v.n) et soit $A \subset L$:

Définition 1.19 *L'enveloppe convexe de A, notée $\mathrm{conv}(A)$, est l'intersection de tous les convexes contenant A. Autrement dit, c'est le plus petit convexe contenant A.*

de l'enveloppe convexe est donée par :

$$\mathrm{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}^*, x_i \in A, \lambda_i \geq 0, 1 \leq i \leq n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Définition 1.20 *L'enveloppe convexe fermée de A, notée $\overline{\mathrm{conv}}(A)$, est le plus petit convexe fermé contenant A.*

L'enveloppe convexe fermé est caractérisée par la proposition suivante :

Soit A une partie de E. Alors

$$\overline{\mathrm{conv}}(A) = \overline{\mathrm{conv}(A)}.$$

Lemme de Mazur [5]

Lemme 1.21 *Soient E un espace de Banach et (x_n) une suite d'éléments de E qui converge faiblement vers $x \in E$ alors :*

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une suite (y_n) dans l'enveloppe convexe de $\{x_k\}_{k\geq n}$ qui converge vers x fortement.

Théorème 1.22 (d'Ascoli-Arzelà) *[6]*

Soient (X, d) un espace métrique compact, une partie A incluse dans $C(I, E)$ est relativement compacte (i.e $\overline{A}$ est compact) si et seulement si on a les deux conditions suivantes :

1. *A est équicontinue.*
2. *A est uniformément bornée.*

Théorème 1.23 (Compacité des espaces métriques) *Pour une partie A d'un espace métrique (X, d), les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est compact.*
2. *Propriété de Bolzano-Weierstrass : Toute partie infinie de A admet un point d'accumulation dans A (c'est-à-dire un point x de X tel que tout voisinage V de x contienne une infinité de points de A).*
3. *De toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergente dans A.*

Théorème 1.24 (Théorème de James) *Soit E un espace de Banach. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) E est réflexif, c'est-à-dire que l'application canonique $J : E \to E^*$ est bijective (où E^* est le dual de E).

(ii) Pour toute forme linéaire continue $f \in E$ il existe un vecteur $a \in E$ avec $\|a\| \leq 1$ tel que :

$$f(a) = \|f\| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)|.$$

Théorème 1.25 (Théorème de Banach-Alaoglu) *Soit E un espace vectoriel normé (ou localement convexe). Alors :*
La boule unité fermée du dual topologique E^* :

$$B_{E^*} = \{f \in E^* \mid \|f\| \leq 1\}.$$

est compacte pour la topologie faible

Mesure de non-compacité faible

La notion de mesure de non-compacité faible a été introduite par De Blasi [7]. Elle peut être utilisée de la même manière que la mesure de non-compacité forte, par exemple dans la théorie des points fixes, ainsi que dans la théorie des équations différentielles.

$$\mu(A) = \inf\{r > 0 \mid \exists C \in \mathcal{N}_w \text{ tel que } A \subseteq C + \overline{B}_r\}, \quad \forall A \in \mathcal{N}_w.$$

Une fonction $\mu\colon \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ est appelée mesure de non-compacité faible si

(a) $\mu(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{N}_w$;

(b) $\mu(\overline{\text{conv}}\, A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}$;

(c) Pour $A, B \in \mathcal{M}$ avec $A \subset B$, on a $\mu(A) \leq \mu(B)$;

(d) Pour tout $x_0 \in E$, $\mu(x_0 + A) = \mu(A)$;

(e) $\mu(kA) = k\mu(A)$ pour tout $k \in \mathbb{R}^+$.

Définition 1.26 *Soit $F\colon [a,b] \to E$ et soit $A \subset [a,b]$. La fonction $f\colon A \to E$ est appelée pseudodérivée de F sur A si pour tout $x^* \in E^*$, la fonction à valeurs réelles x^*F est dérivable presque partout sur A et $(x^*F)' = x^*f$ presque partout sur A.*

Définition 1.27 *Une famille $\mathscr{F}$ de fonctions F est dite uniformément absolument continue au sens restreint sur X (en abrégé, uniformément $AC^*(X)$) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute $F \in \mathscr{F}$ et pour toute suite finie ou infinie d'intervalles deux à deux disjoints $\{[a_i, b_i]\}$ avec $a_i, b_i \in X$ vérifiant $\sum_i |b_i - a_i| < \eta$, on a $\sum_i \omega(F, [a_i, b_i]) < \varepsilon$, où ω désigne l'oscillation de F sur $[a_i, b_i]$, c'est-à-dire :*

$$\omega(F, [a_i, b_i]) = \sup\{|F(r) - F(s)| : r, s \in [a_i, b_i]\}.$$

Une famille $\mathcal{F}$ de fonctions est dite uniformément absolument continue généralisée au sens restreint sur l'intervalle $[a,b]$, ou uniformément ACG* sur $[a,b]$, si $[a,b]$ est l'union d'une suite d'ensembles fermés E_i, tels que sur chaque E_i, la famille $\mathcal{F}$ soit uniformément AC$^*(E_i)$. Présentons maintenant un lemme important : l'intégrabilité uniforme d'une famille de fonctions signifie que la fonction $\delta(\cdot)$ dans la Définition de HK est commune à toutes les fonctions de cette famille[21].

Lemme 1.28 *Soient $f_n, f : I_\alpha \to E$ et supposons que chaque $f_n : I_\alpha \to E$ soit intégrable au sens de (HK) sur I_α. Soit F_n une primitive de f_n. Si on suppose que :*

(i) $f_n(t) \to f(t)$ *p.p. sur* I_α,

(ii) la famille $\mathcal{G} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ *est uniformément ACG* sur* I_α,

(iii) $\mathcal{G}$ *est équicontinue sur* I_α,

alors (f_n) *est uniformément intégrable au sens de (HK) sur* I_α.

Définition 1.29 *Une fonction $x : I_\alpha \to E$ est dite une pseudo-solution du problème de Cauchy (1) si elle vérifie les conditions suivantes :*

(i) $x(\cdot)$ *est ACG*$_*$,

(ii) $x(0) = x_0$,

(iii) pour tout $x^* \in E^*$, il existe un ensemble $A(x^*)$ de mesure de Lebesgue nulle, tel que pour tout $t \notin A(x^*)$,

$$x^*(x'(t)) = x^*(f(t, x(t))).$$

Chapitre 2

Propriétés de l'intégral de henstock-kurzweil- pettis

Dans cette partie, nous définissons l'intégrale de Henstock-Kurzweil-Pettis et nous donnons les propriétés de cette intégrale. Pour les définitions de base.

2.1 L'intégrale de Henstock-Kurzweil dans les espaces de Banach

Définition 2.1 *[9] Une fonction $f : [a,b] \to E$ est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur $[a,b]$ s'il existe $A \in E$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction positive $\delta(\cdot)$ définie sur $[a,b]$ telle que pour toute subdivision D de $[a,b]$ donnée par :*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

et $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ satisfaisant :

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on a :

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - A \right\| < \varepsilon.$$

On note $(HK)\int_a^b f(t)\,dt = A$. On dit que D est δ-fine, et on peut écrire $D = \{[u,v];\xi\}$ avec $\xi \in [u,v] \subset (\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi))$.

Si f est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur $[a,b]$, on écrit $f \in HK([a,b],E)$.

Définition 2.2 *Une fonction $f : I_\alpha \to E$ est Bochner-intégrable s'il existe une suite (s_n) de fonctions étagées telle que :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \|f - s_n\|_B \, d\mu = 0.$$

On définit alors :

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n \, d\mu.$$

Définition 2.3 *Une fonction $f : [a,b] \to E$ est intégrable au sens de Henstock-Lebesgue (HL) sur $[a,b]$ (on note $f \in HL([a,b],E)$) s'il existe une fonction $F : [a,b] \to E$, définie sur les sous-intervalles de $[a,b]$, vérifiant la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction positive $\delta(\cdot)$ sur $[a,b]$ telle que si $\mathcal{D} = \{[u,v],\xi\}$ est une subdivision δ-fine de $[a,b]$, on a*

$$\left\| \sum_{\mathcal{D}} f(\xi)(v-u) - (F(v) - F(u)) \right\| < \varepsilon.$$

Remarque 2.4 *On observe que par l'inégalité triangulaire, $f \in HL([a,b],E)$ implique $f \in HK([a,b],E)$. En revanche, la réciproque n'est généralement pas vraie. Pour les fonctions à valeurs réelles, ces deux intégrales sont équivalentes.*

Définition 2.5 *La fonction $f : I_\alpha \to E$ est dite intégrable au sens de Pettis (ou simplement (P)-intégrable) si :*

(i) $\forall x^* \in E^*$, $x^* f$ *est intégrable au sens de Lebesgue sur* I_α,

(ii) $\forall A \subset I_\alpha$ *mesurable,* $\exists g \in E$ *tel que* $\forall x^* \in E^*$, *on ait* $x^* g = (L)\int_A x^* f(s)\, ds$.

où $(L)\int$ désigne l'intégrale de Lebesgue.

Définition 2.6 *[9] Une fonction $f : I_\alpha \to E$ est dite intégrable au sens de Henstock-Kurzweil-Pettis s'il existe une fonction $g : I_\alpha \to E$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\forall x^* \in E^*$, $x^* f$ *est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil sur* I_α,

(ii) $\forall t \in I_\alpha$, $\forall x^* \in E^*$, *on a*

$$x^* g(t) = (HK)\int_0^t x^* f(s)\, ds.$$

EXEMPLE 1. Nous présentons un exemple de fonction qui est intégrable au sens de (HKP) mais qui n'est ni intégrable au sens de (HL) ni au sens de (P).
Soit $f\colon [0,1] \to L^\infty[0,1]$ définie par :

$$f(t) = \chi_{[0,t]} + A(t) \cdot F'(t),$$

où :

— $\chi_{[0,t]}$ est la fonction indicatrice de $[0,t]$,

— $F(t) = t^2 \sin(t^{-2})$ pour $t \neq 0$ (et $F(0) = 0$), et

$$F'(t) = 2t \sin(t^{-2}) - 2t^{-1} \cos(t^{-2}).$$

1. **Non-intégrabilité de $|F'|$:**
$$\int_0^1 |F'(t)|\, dt \geq 2 \int_0^1 \frac{|\cos(t^{-2})|}{t}\, dt = +\infty.$$
2. **ACG$_*$ sans absolue continuité :**
   — $e^{F(t)}$ est **ACG$_*$**, mais pas absolument continue car F n'est pas à variation bornée.

2.2 Propriétés fondamentales de l'ntégrale Henstock-Kurzweil-Pettis

Théorème 2.7 *Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction intégrable au sens de Henstock-Kurzweil-Pettis (HKP) sur $[a,b]$, et soit $F(x) = \int_a^x f(s)\, ds$.*
(a) *Pour tout $x^* \in E^*$, la fonction $x^* f$ est intégrable au sens de Henstock-Kurzweil (HK) sur $[a,b]$, et on a : $(HK) \int_a^x x^* f(s)\, ds = x^* F(x)$.*
(b) *La fonction F est faiblement continue sur $[a,b]$, et f est une pseudo-dérivée de F sur $[a,b]$.*

Preuve

(a) ("Voir la définition de HKP") **(b)** La fonction $x^* f$ est à valeurs réelles et intégrable au sens de HK, et $x^* F(x) = \int_a^x x^* f(s)\, ds$ (d'après (a)). Ainsi, $G(x) = \int_a^x x^* f(s)\, ds$ est continue (par le Théorème 2.6(a)), ce qui signifie que F est faiblement continue.
De plus il existe un ensemble $A(x^*)$, de mesure nulle $A(x^*) \subset [a,b]$, tel que : $G'(x) = x^* f(x)$,
mais comme $G'(x) = (x^* F)'(x)$, cela confirme que f est une pseudo-dérivée de F.

Théorème 2.8 *[13] [convergence faible pour l'intégrale HKP]*

Soient $f_n, f : I_\alpha \to E$ avec f_n (HKP)-intégrables sur I_α et F_n leurs primitives. Si :

1. $\forall x^* \in E^*$, $x^* f_n(t) \to x^* f(t)$ *p.p. sur* I_α,
2. *Pour tout* $x^* \in E^*$, $\mathcal{G} = \{x^* F_n\}_{n\geq 1}$ *est uniformément ACG* sur* I_α,
3. *Pour tout* $x^* \in E^*$, $\mathcal{G}$ *est équicontinue sur* I_α,

alors f est (HKP)-intégrable sur I_α, et $\int_0^t f_n \rightharpoonup \int_0^t f$ faiblement dans E pour tout $t \in I_\alpha$.

Preuve 1. Soit $x^* \in E^*$ arbitraire. et f_n sont intégrables au sens de (HKP), $x^* f_n$ sont intégrables au sens de (HK). Ainsi :

(a) $x^* f_n(t) \to x^* f(t)$ p.p. sur I,

(b) $\mathcal{G}$ est uniformément ACG*.

(c) La suite $(x^* F_n)$ est uniformément convergente sur I .

En utilisant le théorème de convergence pour l'intégrale de Henstock-Kurzweil , on obtient :

$$\int_0^t x^* f_n(s)\, ds \to \int_0^t x^* f(s)\, ds \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Fixons $t \in I$ et posons :

$$C = \overline{\left\{ (HKP) \int_0^t f_n(s)\, ds : n = 1, 2, \dots \right\}}.$$

D'après 1, C est (faiblement) bornée et $C \setminus \left\{ (HKP) \int_0^t f_n(s)\, ds : n = 1, 2, \dots \right\}$ contient au plus un point. Supposons que C ne soit pas faiblement compact. D'après le théorème de James , il existe une suite bornée $(x_k^*) \subset E^*$, une suite $(x_k) \subset C$ et un $\varepsilon > 0$ tels que :

$$x_k^*(x_n) = 0 \quad \text{pour } k > n,$$

$$x_k^*(x_n) > \varepsilon \quad \text{pour } n = k.$$

On peut extraire des sous-suites $(g_n) \subset (f_n)$, $(y_k^*) \subset (x_k^*)$ vérifiant :

(S1) $\int_0^t y_k^* g_m(s)\, ds = 0$ pour $k > m$,

(S2) $\int_0^t y_k^* g_m(s)\, ds > \varepsilon$ pour $m = k$,

(S3) $\lim_{n\to\infty} \int_0^t x^* g_n(s)\, ds = \int_0^t x^* f(s)\, ds$ pour tout $x^* \in E^*$.

Considérons l'ensemble $\{y_n^* f : n = 1, 2, \dots\}$. D'après le théorème d'Alaoglu, toute sous-suite de $(y_n^* f)$ admet un point d'accumulation ponctuel.il existe une sous-suite $(y_{n_k}^*) \subset (y_n^*)$ telle que la limite $\lim_{k\to\infty} y_{n_k}^* f(t)$ existe presque partout. De plus, si y_0^* est un point d'accumulation faible-$*$ de $(y_{n_k}^*)$, alors :

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k}^* f(t) = y_0^* f(t) \quad \text{p.p. sur } I.$$

L'intégrabilité uniforme de $(x^* f_m)$ signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge δ sur I telle que :

$$\left| S(x^* f_m, D) - \int_a^b x^* f_m(s)\, ds \right| < \varepsilon$$

pour toute partition δ-fine D de I et tout m, où :

$$S(x^* f_m, D) = \sum_{j=1}^{k} x^* f_m(t_j) \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

Soit D une partition δ-fine de I.

Rappelons que :

$$(y_{n_k}^*) \subset (y_n^*) \subset (x_n^*), \quad (g_n) \subset (f_n)$$

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_k}^* f(t) = y_0^* f(t) \quad \text{p.p. sur } I$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t x^* g_n(s)\, ds = \int_0^t x^* f(s)\, ds \quad \text{pour tout } x^* \in E^*.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \left| S(y_{n_k}^* f, D) - \int_a^b y_{n_k}^* f(s)\, ds \right| \leq{}& \left| S(y_{n_k}^* f, D) - S(y_{n_k}^* g_m, D) \right| \\ &+ \left| S(y_{n_k}^* g_m, D) - \int_a^b y_{n_k}^* g_m(s)\, ds \right| \\ &+ \left| \int_a^b y_{n_k}^* g_m(s)\, ds - \int_a^b y_{n_k}^* f(s)\, ds \right|. \end{aligned}$$

Pour toute partition δ-fine fixée D de I, il découle de (a) qu'il existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $m \geq m_0$:

$$|S(y_{n_k}^* f; D) - S(y_{n_k}^* g_m; D)| < \varepsilon$$

De plus, puisque $\{x^* f_n : x^* \in E^*, n \in \mathbb{N}\}$ est uniformément intégrable, il en est de même pour $\{y^*_{n_k} g_m : k, m \in \mathbb{N}\}$. Enfin, il existe une jauge δ sur I telle que :

$$\left| S(y^*_{n_k} g_m; D) - \int_a^b y^*_{n_k} g_m(s) ds \right| < \varepsilon$$

pour $m \in \mathbb{N}$ suffisamment grand :

$$\left| \int_a^b y^*_{n_k} g_m(s) ds - \int_a^b y^*_{n_k} f(s) ds \right| < \varepsilon$$

Ainsi, l'ensemble $\{y^*_{n_k} f : k = 1, 2, \dots\}$ est uniformément intégrable.

Pour m suffisamment grand, chaque terme est majoré par $\varepsilon/3$, ce qui montre que $\{y^*_{n_k} f\}$ est uniformément intégrable.

En appliquant le théorème de convergence de Vitali pour les fonctions intégrables au sens de Henstock-Kurzweil , on obtient :

$$(L) \quad \lim_{k\to\infty} \int_0^t y^*_{n_k} f(s)\, ds = \int_0^t y^*_0 f(s)\, ds.$$

D'après (S3), pour tout k,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t y^*_k g_n(s)\, ds = \int_0^t y^*_k f(s)\, ds,$$

et d'après (S2),

$$(N) \quad \int_0^t y^*_k f(s)\, ds \geq \varepsilon.$$

En passant à la limite $k \to \infty$, on obtient :

$$\int_0^t y^*_0 f(s)\, ds \geq \varepsilon.$$

Cependant, en considérant un point d'accumulation y^*_0 de $(y^*_{n_k})$, on montre que :

$$\int_0^t y^*_0 f(s)\, ds = 0,$$

Ainsi, C est faiblement compact dans E. Comme

$$\int_0^t x^* f_n(s)\, ds \to \int_0^t x^* f(s)\, ds,$$

la suite

$$\int_0^t f_n(s)\, ds$$

est faiblement convergente vers

$$\int_0^t f(s)\,ds.$$

Pour tout $x^* \in E^*$, il existe une fonction g intégrable au sens de (HK) telle que pour tout $i, k \in \mathbb{N}$,

$$|x^*(f_i - f_k)| \leq g \quad \text{sur } I,$$

alors la conclusion du Théorème 2.7 reste valable.

Théorème 2.9 (Théorème de la moyenne pour l'intégrale (HKP)) *Soit une fonction $f : I_\alpha \to E$ intégrable au sens de Henstock-Kurzweil-Pettis . Alors :*

$$\int_I f(t)\,dt \in |I| \cdot \overline{\text{conv}} f(I)$$

où I est un sous-intervalle arbitraire de I_α et $|I|$ désigne la longueur de I.

Preuve Considérons un $x^* \in E^*$ arbitraire. D'après le théorème de la moyenne pour l'intégrale de Henstock-Kurzweil (HK), nous avons :

$$\int_I x^*(f(t))\,dt \in |I| \cdot \text{conv}\, x^* f(I) = x^*(|I| \cdot \overline{\text{conv}} f(I)).$$

Par définition de l'intégrale de Henstock-Kurzweil-Pettis, il existe $\int_I f(t)\,dt$ tel que :

$$\int_I x^* f(t)\,dt = x^* \left(\int_I f(t)\,dt \right).$$

On en déduit que :

$$x^* \left(\int_I f(t)\,dt \right) \in x^*(|I| \cdot \overline{\text{conv}} f(I)) \quad \text{pour tout } x^* \in E^*.$$

Comme l'ensemble $|I| \cdot \overline{\text{conv}} f(I)$ est convexe fermé, ceci implique que :

$$\int_I f(t)\,dt \in |I| \cdot \overline{\text{conv}} f(I).$$

2.3 Quelques théorèmes du point fixe

Théorème 2.10 (Schauder–Tikhonov) *[24] Soit K un convexe compact dans un espace localement convexe séparé, et soit $f : K \to K$ une application continue. Alors f admet au*

moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x^* \in K$ tel que :

$$f(x^*) = x^*.$$

Théorème 2.11 (Théorème de l'alternative non linéaire de Leray–Schauder) *[25]*
Soient E un espace de Banach et $C \subset E$ un sous-ensemble convexe non vide de E.
On suppose qu'il existe un ouvert U dans C tel que $0 \in U$ et une multifonction $N : U \to C$ semi-continue supérieure et compacte.
Alors on a l'alternative suivante :

1. *N admet un point fixe dans U, ou bien*
2. *Il existe $\lambda \in]0,1[$ et $u \in \partial U$ tel que $u \in \lambda N(u)$.*

Théorème 2.12 (Théorème de Covitz–Nadler) *Soit (M,d) un espace métrique complet. Si $T : M \to \mathcal{P}_{cl}(M)$ est une application contractante, alors T admet un point fixe.*

Théorème 2.13 (Théorème de Bohnenblust–Karlin) *Soient E un espace de Banach, $K \in \mathcal{P}(E)$, et on suppose que l'opérateur $G : K \to \mathcal{P}(K)$ est semi-continu supérieur et que l'ensemble $G(K)$ est relativement compact dans E, alors G admet un point fixe dans K.*

Théorème 2.14 (Théorème du point fixe de Banach) *[25] Soient E un espace de Banach et $T : E \to E$ un opérateur k-contractant, alors il existe un unique point fixe. (c.-à-d. $\exists! u \in E$ tel que $T(u) = u$).*

Théorème 2.15 (Théorème de Convergence de Vitali) *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $p \in [1, +\infty[$. Une suite $(f_n) \subset L^p(\mu)$ converge vers $f \in L^p(\mu)$ si et seulement si :*

(i) ***Convergence en mesure*** *: $f_n \to f$ en mesure, c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mu(\{x \in X \mid |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(ii) ***Intégrabilité uniforme*** *: La famille $(|f_n|^p)$ est uniformément intégrable :*

$$\lim_{a\to\infty} \sup_n \int_{\{|f_n|^p \geq a\}} |f_n|^p \, d\mu = 0.$$

(iii) ***Condition de tension*** *(pour $\mu(X) = +\infty$) :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathcal{A} \text{ de mesure finie}, \quad \sup_n \int_{X\setminus K} |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon.$$

Chapitre 3

Solutions faibles pour le probléme de cauchy aux sens de Henstock- Kurzweil-Pettis

On étudie l'existence de solutions faible pour le probléme de cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \quad t \in [0, \alpha] = I_\alpha, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où f est une fonction intégrable au sens de Henstock-Kurzweil-Pettis. Nous considérerons le problème :

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds, \quad t \in I_\alpha, \tag{3.2}$$

Soit $t \in [0, \alpha] = I_\alpha$, et E une espace de Banach réel , $\sigma(C(I_\alpha; E); C(I_\alpha, E)^*)$ désigne la topologique faible sur $(C(I_\alpha, E), \omega)$ l'espace des fonctions continues de I_α dans E, muni de la topologie la fonction $f : I_\alpha \to E$ est dite faiblement continue si elle est continue de I_α vers E muni de sa topologie faible.

3.1 Préliminaires

Dans cette section, nous introduisons des notations, des définitions et des résultats connus, qui seront utilisés dans la suite.

Lemme 3.1 *[23] Soient E_1, E_2 des sous-ensembles bornés de l'espace de Banach E. Si $\|E_1\| = \sup\{\|x\| : x \in E_1\} < 1$, alors*

$$\mu(E_1 + E_2) \leq \mu(E_2) + \|E_1\|\mu(K(E_2, 1)), \tag{3.3}$$

où $K(E_2, 1) = \{x : D(E_2, x) < 1\}$ et $D(E_2, x) = \inf\{\|x - y\| : y \in E_2\}$.

Lemme 3.2 *[23] Soit $H(C(I_\alpha, E), \omega)$ une famille de fonctions fortement équicontinues. Posons $H(t) = \{h(t) \in E \mid h \in H\}$ pour $t \in I_a$, et $H(I_a) = \bigcup_{t\in I_a} H(t)$. Alors*

$$\mu_C(H) = \sup_{t\in I_a} \mu(H(t)) = \mu(H(I_a)), \tag{3.4}$$

où $\mu_C(H)$ désigne la mesure de non-compacité faible dans $(C(I_\alpha, E), \omega)$ et la fonction $t \mapsto \mu(H(t))$ est continue.

Preuve

(I) Nous démontrons d'abord l'égalité : $\sup_{t\in I_a} \mu(H(t)) = \mu(H(I_a))$.

Puisque $H(t) \subset H(I_a)$, par la première propriété de la mesure de non-compacité on a $\mu(H(t)) \leq \mu(H(I_a))$ et par conséquent

$$\sup_{t\in I_a} \mu(H(t)) \leq \mu(H(I_a)). \tag{3.5}$$

Par l'équicontinuité forte de H, on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $|t - s| < \delta \Rightarrow \|u(t) - u(s)\| < \varepsilon$ pour $t, s \in I_a$ et pour tout $u \in H$. Nous divisons l'intervalle $I_a = \{t \in T : 0 \leq t \leq a\}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
t_0 &= 0,\\
t_1 &= \sup_{s\in I_a}\{s : s \geq t_0,\ s - t_0 < \delta\},\\
t_2 &= \sup_{s\in I_a}\{s : s \geq t_1,\ s - t_1 < \delta\},\\
&\vdots\\
t_n &= \sup_{s\in I_a}\{s : s \geq t_{n-1},\ s - t_{n-1} < \delta\}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Puisque T est fermé, nous avons $t_i \in I_a$. Si $t_{i+1} = t_i$ pour un certain i, alors on pose $t_{i+2} = \inf\{t \in T : t \geq t_{i+1}\}$.

Comme

$$u(t) = u(t_i) + u(t) - u(t_i) \in u(t_i) + \varepsilon K(0,1), \tag{3.7}$$

où $K(0,1) = \{x : \|x\| < 1\}$, nous avons

$$u(t) \in \bigcup_{i=1}^{n} H(t_i) + \varepsilon K(0,1), \quad H(I_a) \subset \bigcup_{i=1}^{n} H(t_i) + \varepsilon K(0,1). \tag{3.8}$$

D'après les propriétés de la mesure de non-compacité faible et le Lemme 3.1, on obtient

$$\begin{aligned} \mu(H(I_a)) &\leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} H(t_i)\right) + \|\varepsilon K(0,1)\| \cdot \mu\left(K\left(\bigcup_{i=1}^{n} H(t_i), 1\right)\right) \\ &< \sup_{t_i \in I_a} \mu(H(t_i)) + \varepsilon\mu(K(H(I_a), 1)) \\ &\leq \sup_{t \in I_a} \mu(H(t)) + \varepsilon\mu(K(H(I_a), 1)). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Comme cette inégalité est valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\mu(H(I_a)) \leq \sup_{t \in I_a} \mu(H(t)). \tag{3.10}$$

Par conséquent, des relations (3.5) et (3.10), nous concluons que

$$\mu(H(I_a)) = \sup_{t \in I_a} \mu(H(t)).$$

(II) Montrons maintenant que l'application $t \mapsto \mu(H(t))$ est continue.

Posons $v(t) = \mu(H(t))$. Puisque $H(t) \subset H(t)\dot{-}H(s)\dot{+}H(s) \subset H(t)\dot{-}H(s) + H(s)$, où

$$H(t)\dot{-}H(s)\dot{+}H(s) = \{y(t) : y(t) = y(t) - y(s) + y(s) \mid y \in H\}$$

et où la somme est au sens de Minkowski.

D'après la propriété (vi) de la mesure de non-compacité faible, on a

$$\mu(H(t)) \leq \mu(H(t)\dot{-}H(s)) + \mu(H(s)), \tag{3.11}$$

Ce implique que

$$\begin{aligned}\mu(H(t)) - \mu(H(s)) &\leq \mu(H(t)\dot{-}H(s)) \\ &\leq \delta(H(t)\dot{-}H(s)) \\ &= \sup_{x,y\in H} \|(x(t)-x(s)) - (y(t)-y(s))\| \\ &\leq \sup_{x,y\in H} \left(\|x(t)-x(s)\| + \|y(t)-y(s)\|\right).\end{aligned}$$

Par équicontinuité de la famille H, la fonction $v : t \mapsto \mu(H(t))$ est continue.

Théorème 3.3 (Eberlein-Šmulian) *Soit E un espace de Banach et $A \subset E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *A est relativement faiblement compact*

(2) *Toute suite dans A admet une sous-suite faiblement convergente dans E*

(3) *Tout sous-ensemble dénombrable de A est relativement faiblement compact*

Nous donnons quelques théorèmes de point fixe, qui jouent un rôle clé dans la preuve de nos principaux résultats.

Théorème 3.4 *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe métrisable. Soit D un sous-ensemble convexe fermé de E, et soit $F : D \to D$ une application faiblement séquentiellement continue. Si pour un certain $x \in D$, l'implication*

$$\overline{V} = \overline{\text{conv}}(\{x\} \cup F(V)) \implies V \text{ est relativement faiblement compact} \tag{3.12}$$

est vérifiée pour tout sous-ensemble V de D, alors F possède un point fixe.

Définition 3.5 *On dit qu'une fonction continue $h\colon [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ est une fonction de Kamke si elle satisfait les conditions suivantes :*

(a) $h(0) = 0$

(b) $u(t) = 0$ *est l'unique solution de l'équation intégrale*

$$z(t) = \int_0^t h(z(s))\,ds \quad \text{pour tout } t \in I.$$

Soit $f\colon I \times B_r \to E$ telle que $\|f(t,x)\| \leq M$ pour tout $(t,x) \in I \times B_r$. Notons J l'intervalle $[0,d]$, où $d = \min(T, r/M)$. On pose

$$\widetilde{B} = \big\{x \in \mathcal{C}(I,E)\colon x(I) \subseteq B_r,\ \|x(t) - x(s)\| \leq M|t-s| \text{ pour } t,s \in I\big\}.$$

Remarquons que B est non vide, fermé, borné, convexe et équicontinu.

3.2 Résultats principaux

Dans cette section, nous prouvons l'existence de solutions au problème (3.1) dans l'espace $(C(I_\alpha, E), \omega)$

Le problème (3.1) sera étudié sous les hypothèses suivantes :

H1. Soit $f : I_\alpha \times E \to E$ telle que :

Pour toute fonction $x : I_\alpha \to E$ de classe ACG^*, la fonction composée $f(\cdot, x(\cdot))$ soit intégrable au sens de Henstock-Kurzweil-Pettis (HKP).

$f(t,\cdot)$ soit séquentiellement faiblement continue (i.e., si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E, alors $f(t,x_n) \rightharpoonup f(t,x)$ faiblement).

H2. Il existe une constante $c_\alpha \in [0,1)$ telle que, pour tout sous-ensemble borné $X \subset E$ et tout sous-intervalle $I \subseteq I_\alpha$:

$$\mu(f(I \times X)) \leq c_\alpha \cdot \mu(X), \quad 0 \leq c_\alpha < 1, \tag{3.13}$$

où μ est une fonction de mesure non-compacité

H3. G est un ensemble de fonctions $I_\alpha \to E$ tel que :

Fortement équicontinu (i.e., équicontinu pour la topologie forte de E).

Uniformément ACG^* faiblement (i.e., toutes les fonctions de G ont une variation généralisée bornée de manière faible et uniforme).

Présentons maintenant le théorème d'existence du problème (3.1).

Théorème 3.6 *[11]*

Supposons que pour chaque fonction ACG* $f : I_\alpha \to E$, la fonction $f(\cdot, x(\cdot))$ soit intégrable au sens (HKP), que $f(t, \cdot)$ soit faiblement séquentiellement continue, et que

$$\mu(f(I \times X)) \leq c \cdot \mu(X), \quad 0 \leq c_\alpha < 1, \tag{3.13}$$

pour tout sous-ensemble borné $X \subset E$ et pour tout sous-intervalle I de I_α.
Supposons que l'ensemble G soit fortement équicontinu et faiblement uniformément ACG* sur I_α. Alors, il existe au moins une pseudo-solution du problème (3.1) sur I_β, pour un certain nombre $0 < \beta \leq \alpha$.

Démonstration

Nous démontrerons en fait l'existence d'une solution pour le problème (3.2). D'après le Théorème 2.1(a), toute solution du problème (3.2) est une solution du problème (3.1).
Etap 1 Nous allons démontrer que l'opérateur F est bien défini
Fixons un $b \geq 0$ arbitraire. Par l'équicontinuité de G, il existe un nombre β, $0 < \beta \leq \alpha$, tel que

$$|x^*F(x)(t)| \leq |x^*x_0| + |x^* \int_0^t f(s, x(s)), ds|$$

$$|x^*F(x)(t)| \leq \|x^*\|\|x_0\| + \|x^*\| \parallel \int_0^t f(s, x(s)), ds \parallel \leq \|x^*\| + b$$

$$\sup\left\{|x^*F(x)(t)| : x^* \in E^*, \ \|x^*\| \leq 1\right\} \leq \|x_0\| + b$$

et par conséquent

$$\|F(x)(t)\| \leq \|x_0\| + b$$

$$\| \int_0^t f(s, x(s))\, ds\| \leq b,$$

pour $t \in I_\beta$ et $x \in C(x_0, \alpha)$.

D'après les hypothèses, l'opérateur F est bien défini et vérifie

$$F\colon C(x_0, \beta) \to C(x_0, \beta).$$

Etap 2 Nous allons démontrer que l'opérateur F est séquentiellement continu.
soit $x_n(\cdot)$ Une suite converge faiblement dans $C(I_\beta, E)$ vers $x(\cdot)$ si et seulement si $x_n(t)$ converge faiblement vers $x(t)$ pour chaque $t \in I_\beta$.
Par conséquent, si $x_n \overset{\sigma}{\rightharpoonup} x$ dans $C(I_\beta, E)$, alors $f(t, x_n(t)) \overset{\sigma}{\rightharpoonup} f(t, x(t))$ dans E pour tout $t \in I_\beta$. D'après le Théorème de convergence faible pour l'intégrale HKP, nous obtenons :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^t f(s, x_n(s))\, ds = \int_0^t f(s, x(s))\, ds.$$

au sens faible dans E, pour chaque $t \in I_\beta$. Au sens faible dans E, pour chaque $t \in I_\beta$. De plus, puisque f est séquentiellement faiblement continue, nous avons :

$$\int_0^t f(s, x_n(s)), ds \rightharpoonup \int_0^t tf(s, x(s)), ds.$$

Nous constatons que $Fx_n(t) \overset{\sigma}{\rightharpoonup} Fx(t)$ au sens faible dans E pour chaque $t \in I_\beta$, donc $Fx_n \to Fx$ dans $(C(I_\beta, E), \omega)$.
Alors l'opérateur F est séquentiellement continu.

Etap 3 Nous allons montrer que l'implication (3.3) est vrai et l'opérateur F admet un point fixe.

F est un opérateur bien défini de

$$\widetilde{B} = \{x \in \mathcal{C}(I, E) \colon x(I) \subseteq B_r,\ \|x(t) - x(s)\| \leq M|t - s| \text{ pour } t, s \in I\beta\}.$$

dans $\widetilde{B}$. Notons S l'ensemble des points fixes de F (c'est-à-dire $S = F(S)$). De manière équivalente, il s'agit de l'ensemble de toutes les solutions de (3.1).

Supposons que $\overline{V} = \overline{\text{conv}}(\{x\} \cup F(V))$ pour un certain $V \subset$. Nous allons prouver que V est relativement faiblement compact, ce qui établira (3 .3).
D'après la définition de $\widetilde{B}$ et le Lemme 3.2, la fonction $v : t \mapsto \mu(V(t))$ est continue sur I_β.
Pour $t \in I_\beta$. fixé, divisons l'intervalle $[0, 1]$ en m parties : $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = t$, où $t_i = it/m$ pour $i = 0, 1, ..., m$. Posons $V([t_{i-1}, t_i]) := \{u(s) \in V \mid t_{i-1} \leq s \leq t_i\}$.
Par le Lemme (3.1.2) et la continuité de V, il existe $s_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tel que :

$$\mu(V([t_{i-1}, t_i])) = \sup\{\mu(V(s)) \mid t_{i-1} \leq s \leq t_i\} =: v(s_i). \tag{3.14}$$

D'autre part, par le théorème de la moyenne, nous obtenons pour tout $u \in V$:

$$F(u)(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{m-1} \int_{t_{i+1}}^{t_i} f(s, u(s))\, ds) \in x_0 + \sum_{i=1}^{m-1} (t_{i+1} - t_i) \text{conv} f(I_\beta \times V([t_i, t_{i+1}])).$$

Donc :

$$F(V)(t) = x_0 + \sum_{i=1}^{m-1} (t_{i+1} - t_i) \text{conv} f(I_\beta \times V([t_i, t_{i+1}])).$$

Par les propriétés de la mesure de non-compacité faible et l'hypothèse (3.13), on a

$$\begin{aligned}
\mu(F(V(t))) &= \mu\left(\left\{x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds : x \in V\right\}\right) \\
&\leq \mu\left(\left\{\int_0^t f(s, x(s))\, ds : x \in V\right\}\right) \\
&\leq \mu\left(t \cdot \text{conv}\, f([0,t] \times V([0,t]))\right) \\
&\leq t \cdot \mu(f([0,t] \times V([0,t]))) \\
&\leq \beta \cdot \mu(f(I_\beta \times V(I_\beta))) \leq \beta \cdot c \cdot \mu(V(I_\beta)).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mu(F(V(t))) \leq \beta \cdot c \cdot \mu(V(I_\beta))$ pour tout $t \in I_\beta$. Puisque $\overline{V} = \overline{\text{conv}}(F(V) \cup \{x\})$, alors

$$\mu(V(t)) = \mu(\text{conv}(F(V(t)) \cup \{x\})) \leq \mu(F(V(t))) \leq \beta \cdot c \cdot \mu(V(I_\beta)).$$

$$\mu(F(V)(t)) \leq \int_0^t h(v(s))ds \quad \text{pour } t \in I_\beta.$$

Comme $V = \text{conv}(\{x\} \cup F(V))$, nous avons $\mu(V(t)) \leq \mu(F(V)(t))$, et donc :

$$v(t) \leq \int_0^t h(v(s))ds \quad \text{pour } t \in I_\beta.$$

D'après le Lemme (3.2),

$$\mu(V(I_\beta)) \leq \beta \cdot c \cdot \mu(V(I_\beta)) \leq \alpha \cdot c \cdot \mu(V(I_\beta)).$$

Donc $\mu(V(I_\beta)) = 0$ et $\mu(V(t)) = 0$ pour tout $t \in I_\beta$.

D'après le théorème d'Arzelà-Ascoli, V est relativement faiblement compact dans $C(I_\beta, E)$.

En utilisant le théorème 3.4, il existe un point fixe de l'opérateur F.

Etap 4 Nous allons démontrer que l'ensemble des points fixes de F S est connexe dans $(C(I_\alpha, E), w)$.

Pour tout $\eta > 0$, notons S_η l'ensemble de toutes les fonctions $u : I_\alpha \to E$ satisfaisant les conditions suivantes :

(i) $u(0) = x_0$, et $\|u(t) - u(s)\| \leq M|t - s|$ pour tous $t, s \in I_\alpha$;

(ii) $\sup_{t\in J} \left\| u(t) - x_0 - \int_0^t f(s, u(s))\, ds \right\| < \eta$;

L'ensemble S_η est non vide car $S \subset S_\eta$.

Soit $\beta = \min(d, \eta/M)$. Pour tout $\varepsilon \in (0, \beta)$, on définit une fonction $v(\cdot, \varepsilon)$ par :

$$v(t, \varepsilon) = \begin{cases} x_0, & \text{pour } 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ x_0 + \int_0^{t-\varepsilon} f(s, v(s, \varepsilon))\, ds, & \text{pour } \varepsilon < t \leq d. \end{cases}$$

On a $v(., \varepsilon)$ vérifie (i) pour $v(0, \varepsilon) = \mathrm{x_0} et\ \|v(t, \varepsilon) - v(s, \varepsilon)\| \leq M|t - s|$, De plus :

$$\| v(t, \varepsilon) - x_0 - \int_0^t f(s, v(s, \varepsilon))\, ds \| = \begin{cases} \| \int_0^t f(s, v(\varepsilon, s))\, ds \| & \text{si } 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ \| \int_{t-\varepsilon}^t f(s, v(\varepsilon, s))\, ds \| & \text{si } \varepsilon < t \leq d, \end{cases}$$

$$\leqslant M_\varepsilon < \eta$$

Montrons maintenant la connexité de S_η. Posons $v(\cdot, \varepsilon) = v^\varepsilon$. Alors :

$$v_{\varepsilon(t)} = \begin{cases} x_0, & 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ F(v_\varepsilon)(t - \varepsilon), & \varepsilon < t \leq d. \end{cases}$$

Montrons que l'application $\varepsilon \mapsto v_\varepsilon(\cdot)$ est faiblement continue de $(0, \beta)$ vers $C(I_\alpha, E)$.

Soient $0 < \varepsilon < \delta \leq d$. Pour $t \in [0, \varepsilon]$,

$$|x^*(v_\varepsilon(t) - v_\delta(t))| = 0. \tag{3.15}$$

Pour $t \in (\varepsilon, \delta]$,

$$|x^*(v_\varepsilon(t) - v_\delta(t))| = \left| x^* \left(\int_0^{t-\varepsilon} f(s, v_\varepsilon(s))\, ds \right) \right| \leq \|x^*\| M|t - \varepsilon| \leq \|x^*\| M|\delta - \varepsilon|. \tag{3.16}$$

Maintenant, pour $t \in (\delta, 2\delta]$, nous avons :

$$\begin{aligned}
|x^*(v_\varepsilon(t) - v_\delta(t))| &= \left| x^* \left(\int_0^{t-\varepsilon} f(s, v_\varepsilon(s))\, ds - \int_0^{t-\delta} f(s, v_\delta(s))\, ds \right) \right| \\
&= |x^*(F(v_\varepsilon)(t-\varepsilon) - F(v_\delta)(t-\delta))| \\
&\leq |x^*(F(v_\varepsilon)(t-\varepsilon) - F(v_\varepsilon)(t-\delta))| + |x^*(F(v_\varepsilon)(t-\delta) - F(v_\delta)(t-\delta))| \\
&\leq |x^*(F(v_\varepsilon)(t-\delta) - F(v_\delta)(t-\delta))| + \|x^*\| M |t - \varepsilon - t + \delta| \\
&= |x^*(F(v_\varepsilon)(t-\delta) - F(v_\delta)(t-\delta))| + \|x^*\| M |\delta - \varepsilon|.
\end{aligned}$$

Mais F est faiblement continue et comme $t - \delta \leq \delta$, en utilisant (3.16), nous concluons que l'application $\varepsilon \mapsto v_\varepsilon(t)$ est faiblement continue pour chaque $t \in [0, 2\delta]$. Par récurrence, nous pouvons répéter cet argument pour déduire que l'application $\varepsilon \mapsto v_\varepsilon(\cdot)$ de $(0, \beta)$ dans $(C(I_\alpha, E), w)$ est continue . Par conséquent, l'ensemble $V := \{v_\varepsilon(\cdot) : 0 < \varepsilon < \beta\}$ est connexe dans $(C(I_\alpha, E), w)$. Soit $x \in S_\eta$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $0 < \varepsilon < \beta$ et

$$\sup_{t \in I_\alpha} \|x(t) - x_0 - \int_0^t f(s, x(s))\, ds\| + M\varepsilon < \eta.$$

Pour tout p, $0 \leq p \leq d$, nous définissons une fonction $y(\cdot, p)$ par la formule :

$$y(t,p) = \begin{cases} x(t), & \text{pour } 0 \leq t \leq p, \\ x(p), & \text{pour } p < t \leq \min(d, p+\varepsilon], \\ x(p) + \int_p^{t-\varepsilon} f(s, y(s,p))\, ds, & \text{pour } \min(d, p+\varepsilon) \leq t \leq d. \end{cases}$$

En répétant les considérations ci-dessus pour $y(\cdot, p)$ au lieu de $v(\cdot, \varepsilon)$, nous établissons que $y(\cdot, p) \in S_\eta$ pour chaque $p \in [0, d]$ et nous prouvons la continuité de l'application $p \mapsto y(\cdot, p)$ de I_α dans $(C(I_\alpha, E), w)$ En conséquence, l'ensemble

$$T_x = \{y(\cdot; p) : 0 \leq p \leq d\}$$

est connexe dans $(C(I_\alpha; E), w)$. Comme $y(\cdot; 0) = v(\cdot; \varepsilon) \in V \bigcap T_x$, l'ensemble $V \bigcap T_x$ est également connexe, et il en va de même pour

$$W = \bigcup_{x \in S_\eta} T_x \cup V$$

est connexe dans $(C(I_\alpha, E), w)$. De plus, $S_\eta \subset W$, car $x = y(\cdot; d) \in T_x$ pour chaque $x \in S_\eta$. D'autre part, $W \subset S_\eta$, puisque $T_x \subset S_\eta$ et $V \subset S_\eta$. Enfin, $S_\eta = W$ est un sous-ensemble convexe de $(C(I_\alpha; E), w)$.

Supposons que l'ensemble S ne pas connexe. Comme S est faiblement compact, il existe des ensembles faiblement compacts non vides W_1 et W_2 tels que $S = W_1 \cup W_2$ et $W_1 \cap W_2 = \varnothing$. Par conséquent, il existe deux ensembles faiblement ouverts disjoints U_1 et U_2 tels que $W_1 \subset U_1$ et $W_2 \subset U_2$.
Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un $u_n \in V_n \setminus U$ où $V_n = \overline{S_{1/n}}$ et $U = U_1 \cup U_2$. Posons $H = \overline{\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}}^w$.
Puisque $U_n - F(U_n) \to 0$ dans $C(I_\alpha, E)w)$ quand $n \to \infty$ et que

$$H(t) \subset \{u_n(t) - F(u_n)(t) \mid u_n \in H\} + F(H)(t),$$

en répétant l'argument de I, on peut montrer qu'il existe $u_0 \in H$ tel que $u_0 = F(u_0)$, c'est-à-dire $u_0 \in S$.
De plus, $S \subset (C(I_\alpha, E), w) \setminus U$ puisque U est faiblement ouvert, et donc $u_0 \in S \setminus U$, ce qui constitue une contradiction.
Par conséquent, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $V_m \subset U$. Comme $U_1 \cap V_m \neq \varnothing$ et $U_2 \cap V_m \neq \varnothing$, l'ensemble V_m n'est pas connexe, ce qui contredit la connexité de chaque V_n.
Ainsi, S est connexe dans $(C(I_\alpha, E), w)$.

Enfin, en supposant que les trois hypothèses sont vérifiées et en appliquant les théorèmes (3.4) et (3.6), nous concluons que le problème (3.1) admet un point fixe, qui est également la solution faible qui est une pseudo-solution de (3.1).

3.3 Application

Considérons l'espace de Banach réel $E = \mathbb{R}$ muni de la norme usuelle, et l'intervalle $I = [0, 1]$.
On étudie le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) := t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) + x(t), \quad t \in (0, 1], \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

et on définit :

$$f(0, x) := x, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Vérification des hypothèses

— **Continuité faible :**

La fonction $f(t,x)$ est continue en x pour tout t, car la somme de fonctions continues . Ainsi, elle est également faiblement continue, car en dimension finie,alors la fonction est séquentiellement faiblement continue .

— **Intégrabilité au sens de Henstock-Kurzweil-Pettis :**

En appliquant la définition de HKP, on obtient

1 Soit $x^* \in \mathbb{R}$, alors :

$$x^* f(t) = x^* \cdot \left(t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) + x(t) \right) = x^* t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) + x^* x(t)$$

On sait que :

— $t \mapsto t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est intégrable au sens de Henstock–Kurzweil, mais pas au sens de Lebesgue,

— $x(t)$ est continue sur $[0,1]$, donc Riemann-intégrable, donc aussi Henstock–Kurzweil intégrable.

Alors $x^* f(t)$ est la somme de deux fonctions HK-intégrables. Donc

$$x^* f \in HK([0,1]) \quad \forall x^* \in \mathbb{R}$$

2 On définit :

$$g(t) := \int_0^t f(s)\, ds = \int_0^t \left(s^2 \sin\left(\frac{1}{s^2}\right) + x(s) \right) ds$$

Soit $x^* \in \mathbb{R}$, alors :

$$x^* g(t) = x^* \cdot \int_0^t f(s)\, ds = \int_0^t x^* f(s)\, ds$$

L'intégrale au second membre est bien définie au sens de Henstock–Kurzweil, car

$$x^* f \in HK([0,1])$$

La fonction $t \mapsto f(t, x(t))$ est intégrable au sens de Henstock–Kurzweil–Pettis sur $[0,1]$.

— **Condition de Lipschitz :**

Pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ et tout $t \in [0,1]$, on a :

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = \left|t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) + x_1 - \left(t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) + x_2\right)\right| = |x_1 - x_2|.$$

Par conséquent,

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq 1 \cdot |x_1 - x_2|.$$

Ainsi, f est lipschitzienne en x avec constante de Lipschitz $L = 1$.

— G **est un ensemble de fonctions** $I_\alpha \to E$ **tel que :**

$G = \{f(t, x(t)) \mid x \in C([0,1], \mathbb{R})\}$

Équicontinuité forte : Pour tout $x \in C([0,1], \mathbb{R})$, la fonction définie par

$$f(t, x(t)) = t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) + x(t)$$

est continue sur $[0,1]$, car la fonction

$$t \mapsto t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

admet un prolongement continu en $t = 0$ (en posant $f(0,x) = x$), et $x(t)$ est continue par hypothèse.

De plus, la continuité de $x(t)$ est uniforme sur $[0,1]$, ce qui entraîne que la famille G est **fortement équicontinue**.

Uniformément ACG^*-faiblement : Chaque fonction $x(t) \in C([0,1], \mathbb{R})$ est absolument continue généralisée (ACG^*).

La fonction

$$t \mapsto t^2 \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

est intégrable au sens de Henstock–Kurzweil, donc admet une primitive appartenant à la classe ACG^*.

Ainsi, la somme $f(t, x(t))$ appartient également à ACG^*.

Par ailleurs, la variation généralisée des fonctions de G est **uniformément bornée**, car elle est contrôlée par la variation des fonctions continues $x(t)$, qui sont elles-mêmes uniformément bornées.

Toutes les hypothèses garantissant l'existence et l'unicité d'une solution faible sont satisfaites. Par conséquent, et d'après le théorème 3.4 il existe une unique solution faible $x \in C([0,1],\mathbb{R})$ du problème de Cauchy au sens de Kurzweil-Pettis, vérifiant :

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\, ds, \quad t \in [0,1]$$

$$x(t) = \int_0^t \left(s^2 \sin\left(\frac{1}{s^2}\right) + x(s) \right) \mathrm{d}s, \quad t \in [0,1].$$

Conclusion

Cette étude a exploré le concept de l'intégrale de Henstock-Kurzweil-Pettis (HKP) comme une généralisation à la fois de l'intégrale de Pettis et de l'intégrale de Henstock-Kurzweil dans les espaces de Banach. Des définitions claires de ce type d'intégrale ont été présentées, mettant en lumière ses propriétés essentielles, telles que la continuité faible de la fonction primitive et son application à la résolution des problèmes de Cauchy.

Des exemples illustratifs ont montré que l'intégrale (HKP) est plus générale que d'autres intégrales, comme celles de Pettis et Henstock-Kurzweil, ce qui en fait un outil puissant pour l'étude des équations différentielles dans les espaces de dimension infinie. Les résultats présentés élargissent le cadre théorique existant et offrent une approche globale pour la recherche de solutions aux équations différentielles sous des conditions faibles.

Dans le futur, nous étudierons d'existence pou le problème de Cauchy dans les espaces de Banach munis de la topologie faible et intégrales de Henstock–Kurzweil–Pettis.

Bibliographie

[1] B. J. J. Matos, *Analyse Fonctionnelle*, Université d'Évry, Année 2014/2015.

[2] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Université Pierre et Marie Curie et École Polytechnique, 1987.

[3] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, 2e tirage, Masson, Paris, 1983 (page 72).

[4] L. Schwartz, *Topologie Générale et Analyse Fonctionnelle*, Hermann, Paris, 1966.

[5] S. Abbas, M. Benchohra, and G. M. N'Guérékata, *Topics in Fractional Differential Equations*, Springer, New York, 2002.

[6] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle*, Dunod, 1999.

[7] F. S. De Blasi, On a property of the unit sphere in a Banach space, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie*, 21 (1977), 259–262.

[8] L. P. Yee and Ch. T. Seng, A short proof of the controlled convergence theorem for Henstock integrals, *Bull. London Math. Soc.*, 19 (1987), 60–62.

[9] S.S. Cao : The Henstock integral for Banach valued functions. SEA Bull. Math. 16 (1992), 35–40

[10] T.S. Chew and F. Flordelija : On $x' = f(t, x)$ and Henstock-Kurzweil integrals. Differential Integral Equations 4 (1991), 861–868

[11] Pozna´n : Kneser's theorems for strong, weak and pseudo-solutions of ordinary differential equations in Banach space 1995b

[12] A.R. Mitchell and Ch. Smith : An existence theorem for weak solutions of differential equations in Banach spaces. In : Nonlinear Equations in Abstract Spaces (V. Laksmikantham, ed.). 1978, pp. 387–404.

[13] R. Wang : Convergence Theorems for the Henstock—Kurzweil—Pettis Integral ;Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae 2001

[14] R.A. Gordon : The McShane integral of Banach-valued functions. Illinois J. Math. 34 (1990)

[15] T.S. Chew : On Kurzweil generalized observerdinary differential equations. J. Differential Equations 76 (1988)

[16] B.J. Pettis : On integration in vector spaces. Trans. Amer. Math. Soc. 44 (1938),

[17] M. Cichon´ and I. Kubiaczyk : On the set of solutions of the Cauchy problem in Banach spaces. Arch. Math. (1994), pp. 124–129.

[18] J. Bana´s and K. Goebel : Measures of Noncompactness in Banach Spaces. Lecture Notes in Pure and Appl. Math. Vol 60. Marcel Dekker, New York-Basel, 1980.

[19] M. Cichon´ : Weak solutions of differential equations in Banach spaces. Discuss. Math. Diff. Inclusions 15 (1995),

[20] F.S. DeBlasi : On a property of the unit sphere in a Banach space. Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S. Roumanie 21 (1977), 259–262

[21] V.G. Celidze and A. G. Dzvarsheishvili : Theory of Denjoy Integral and Some of Its Applications. Tbilisi, 1987

[22] J.M. Ball : Weak continuity properties of mappings and semi-groups. Proc. Royal Soc. Edinbourgh Sect. A 72 (1979)

[23] Aneta Sikorska-Nowak : Integrodifferential Equations on Time Scales with Henstock-Kurzweil-Pettis Delta Integrals,Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis Volume 2010

[24] Zeidler,E : . Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, Vol. I : Fixed-Point Theorems. Springer. (1986)

[25] Gilbarg, D., Trudinger N :. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Springer. (2001)