REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère De L'enseignement Supèrieur Et De La Recherche Scientifique

Université YAHIA FARES - MÉDÉA ALGERIE
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et informatique

MÉMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

PAR :
YAHI Mounia & BOULESBAA Somia

Thème :

Étude des graphes de type Sierpinski

Composition du Jury :

Président :	**BENDALI BRAHAM Amel**	**MCB**	**UYFM**
Examinateur :	**BIBI Hamza**	**MCB**	**UYFM**
Encadreur :	**BENTERKI Abdessalem**	**MCB**	**UYFM**
Co-Encadreur :	**ZEMIR Mohamed**	**MAA**	**UYFM**

2020/2021

Dédicace

À mes très chers parents

Qui ont été toujours là pour moi, pour leurs soutiens durant toute
ma formation, leurs patiences, leurs amours et leurs encouragements tout au long
de mes études et au cours de la réalisation de ce mémoire.

À mes soeurs et mes frères :

Rekaia , Maroua , Oussama, Yacin et Ayoub.

À mon cher mari **Brahim.**

À ma chère binme **Mounia.**

À toutes ma familles et mes amies surtout mes chères : **Zinab, Nour, Sara**.

À tous ceux qui m'ont aidé afin de réaliser ce travail.

À tous, je dédie ce travail.

BOULESBAA Somia

Dédicace

A coeur vaillant rien dimpossible .A conscience tranquille tout est accessible.Quand il y a la soif dapprendre.Tout vient à point à qui sait attendre . Je dédie ce modeste travail à :

À mes très chers parents

Qui ont été toujours là pour moi, pour leurs soutiens durant toute ma formation, leurs patiences, leurs amours et leurs encouragements tout au long de mes études et au cours de la réalisation de ce mémoire.

À mes soeurs et mes frères :

Wissam,Salma,Mariem,Narimane,Fatiha,Taher et Sid Ali.

À mes neveux : **Mohammed Abd Aldjalil,Lodjain,Maria,Ranim,Miral,Mohammed Iyad .**

À mon cher fiancé **Ismail.**

À ma chère binme **Somia.**

À toutes ma familles et mes amies surtout mes chères : **Chahra, Fatiha, Khaoula,Fatima**.

À tous ceux qui m'ont aidé afin de réaliser ce travail.

À tous, je dédie ce travail.

YAHI Mounia

Remerciements

Avant tout nous remercions **Allah** le tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

♡

Nous tenons a exprimer toute notre gratitude et notre reconnaissance a notre promoteur **Dr. BENTERKI Abdessalem** et le co-promoteur **Mr ZEMIR Mohamed**, pour l'honneur qu'ils nous a fait en assurant la direction du présent mémoire. Nous le remercions pour sa disponibilité et pour la pertinence de ses conseils avec lesquels, il a su nous guider durant nos travaux de recherche.

♡

Nous remercions vivement **Dr. BENDALI BRAHAM Amel** qui a bien voulu nous faire honneur en acceptant de prendre en charge la présidence du jury.

♡

Nous remercions également **Dr. BIBI Hamza** pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de faire partie du jury.

♡

Nous tenons également à remercier nos familles pour leurs soutiens et leurs aides précieuses pendant tout ce temps.

Enfin, j'adresse un grand merci à tous les enseignants de l'Université Yahia FARES de Médéa qui m'ont accompagnés dès la première année jusqu'à la fin de mes études.

♡

Résumé

La question de construire les fractales intéresse les chercheurs depuis plusieurs années et est actuellement très utilisée.

Le but de notre travail est de présenter les triangles de Sierpenski qui sont des objets fractals. Nous avons été amenés, dans cette thèse, à donner les notions de base de topologie et de théorie de la mesure de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ nécessaires à l'étude des fractals. Nous avons ensuite introduit les notions de dimension de Hausdorff et la dimension topologique pour bien cerner la définition mathématique des fractals et nous avons présenté la géométrie des fractales, surtout les modèle de Sierpenski.

Enfin, nous sommes intéressés aux propriétés grapiques (arête,sommet...) de triangle de Sierpenki S_n et Sierpenski-Rumbus SR_n après connue la notion de Chaîne-Somme.

Mots-clés

Fractal, dimension de Hausdorff, dimension topologique, mesures de Hausdorff, triangle de Sierpenki , Sierpenski-Rumbus,nombre chromatique, Hamiltonicit , nombre de domination, , mesure extérieure.

Abstract

The question of constructing fractals has interested researchers for several years and is currently widely used.

The aim of our work is to present the Sierpenski triangles which are fractal objects. In this thesis, we have been led to give the basic notions of topology and theory of the measure of Euclidean space Rn necessary for the study of fractals. We then introduced the notions of Hausdorff dimension and the topological dimension for well define the mathematical definition of fractals and we presented the geometry of fractals, especially the Sierpenski model.

Finally, we are interested in the graphical properties (edge, vertex ...) of Sierpenki S_n and Sierpenski-Rumbus triangle SR_n after known the notion of Sum-Chain.

Keywords

Fractal, Hausdorff dimension, topological dimension, Hausdorff measure,Sierpenki triangle, Sierpenski-Rumbus , chromatic number , Hamiltonicity , domination number, outer measure.

Table des matières

Résumé **iv**

1 Rappel sur la théorie des graphes **1**
1.1 Concepts fondamentaux . . . 1
1.1.1 Graphes . . . 2
1.2 Quelques graphes particuliers . . . 6
1.3 Le nombre de la domination . . . 9
1.3.1 Définitions et propriétés . . . 9
1.4 Le nombre de coloration . . . 11
1.4.1 La coloration propre . . . 11
1.4.2 Posistion du problème . . . 12
1.4.3 Bornes sur le nombre chromatique . . . 12
1.4.4 Coloration équitable d'un cycle . . . 13
1.4.5 Coloration équitable d'une chaîne . . . 13
1.4.6 Coloration équitable d'un graphe complet . . . 14

2 Les mesures et les dimensions **15**
2.1 Mesure positive . . . 15
2.2 Mesure extérieure . . . 17
2.2.1 Exemples de mesures extérieures . . . 17
2.3 Mesure de Hausdorff . . . 18
2.4 Dimension de Hausdorff . . . 21
2.5 Calculs des dimensions . . . 23
2.6 Dimension Topologique . . . 26

2.7 La géométrie des fractals 29

3 Étude les graphes de type sierpinski 34

3.1 Les graphes de type Sierpinski 34
3.1.1 Introduction et propriétés de base 34
3.1.2 La coloration 38
3.1.3 Hamiltonicité 39
3.1.4 Nombre de domination 40
3.1.5 Diamètre 40
3.1.6 RESULTAT REMARQUABLE 41
3.2 Les graphes de type Sierpinski- Rhombus 42
3.2.1 Sierpinski-Rhombus SR_n 43
3.2.2 RESULTAT REMARQUABLE 49

Conclusion et perspectives 50

Références bibliographiques 51

Table des figures

1.1 Un graphe 1
1.2 Graphe non orienté 2
1.3 Un graphe simple 3
1.4 Exemple d'un graphe G avec un graphe partiel et un sous graphe 4
1.5 Une chane P_6 et un cycle C_6 5
1.6 Exemple d'un graphe G avec un chane hamiltoenne et cycle hamiltoenne . . 7
1.7 Graphe connexe. 8
1.8 Graphe complet K_5 8
1.9 Un arbre avec onze feuilles 9
1.10 Un exemple de graphe G avec $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 3$ 10
1.11 Le nombre chromatique $\chi(G) = 2$ 11
1.12 $\chi(C_4) = 2$ et $\chi(C_5) = 3$ 13
1.13 $\chi(P_5) = 2$. 14
1.14 $\chi(K_5) = 5$ 14

2.1 Graphe de $\mathcal{H}^s(F)$ 21
2.2 L'ensemble triadique de Cantor 23
2.3 Le triangle de Sierpinski 24
2.4 Recouvrements du triangle de Sierpinski 25
2.5 Le tapis de Sierpinski 26
2.6 Poussière de Cantor 27

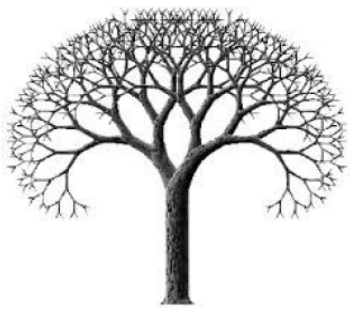
2.7 La dimension topologique du triangle de Sierpinski est 1. (a) Un triangle de Sierpinski (b) On retire un ensemble de deux points (dimension 0) (c) La figure est déconnecten deux objets de dimension 1 (on peut leur retirer un ensemble fini de points pour les det ainsi de suite). 28
2.8 Itération dun tapis de Sierpinski. 28
2.9 Particularités entre le tapis de Sierpinski et la poussière de Fourier. 29
2.10 (a) Premières étapes de la construction de lensemble de Cantor lensemble de Cantor est formé par les points à la base de chaque ligne. 30
2.11 Exemple d'auto-similarité 30
2.12 Les trois premières étapes de construction dun tapis de Sierpinski et le système demboî tement déchelles des parties vides, illustré pour la troisième étape. . 31

3.1 S_1 35
3.2 triangle de sierpinski S_n 36
3.3 2 37
3.4 Exemple d'un graphe $\chi(S_2) = 3$ 39
3.5 chaîne - Somme de deux graphs 42
3.6 chaînes - Somme de deux graphes triangulaires. 42
3.7 Sierpinski-Rhombus, SR_3 et SR_5. 43
3.8 Joint Sierpinski-Rhombus SR_n. 43
3.9 Étiquetage du quotient de SR_4 45
3.10 chaînes hamiltoniennes dans Sierpinski-Rhombus, SR_1 46
3.11 chaîne hamiltonienne de $SR_{n,T,T}$ à $SR_{n,B,B}$ 47
3.12 chaînes hamiltoniennes dans Sierpinski-Rhombus, SR_3 et SR_4. 48
3.13 Cycle hamiltonien de SR_n. 49
3.14 chaîne hamiltonienne de S_1. 49

Introduction

Les fractales sont prsentes partout autour de nous ! Par exemple, on les retrouve beaucoup dans la nature : les flocons de neige, les ramifications des branches, les fougres et tant d'autres.





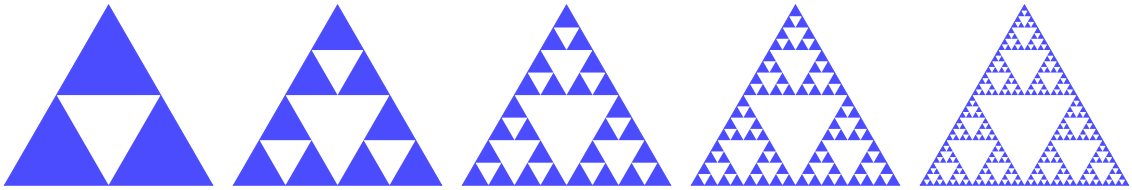
Le mathmaticien franais Benot MANDELBROT en fit l'objet d'une nouvelle discipline mathmatique en 1974, cependant les fractales taient dj prsente dans notre monde depuis longtemps. Le terme fractal est issu du latin fractus qui signifie bris, irrgulier. les nomma fractales qui en latin signifie brise, irrgulier. Ce terme dfini bien ce qu'est cet objet intriguant : un objet fractal est un objet aux contours irrguliers et fragments qui se rpte linfini itration aprs itration en diminuant de grandeur. Par consquent, ce sont des figures gomtriques ayant la proprit de pouvoir tre dcomposes en parties de telle faon que chaque partie soit une image rduite du tout. On observe donc une autosimilarit toutes les chelles.

Dans les annes 70, le champ d'action des mathmatiques a pris une nouvelle dimension par l'ajout de la gomtrie fractale. Depuis, il a t dmontr que les fractales peuvent servir de modle

pour reprsenter la gomtrie de la nature. ll nest donc pas surprenant que celles-ci senrichissent de plus en plus dapplications dans divers domaines.

Cependant, ce sujet d'actualit n'est bien connu que de l'lite et des passionns des mathmatiques mais aurait avantage tre intgr comme objet dtude dans lenseignement. Paralllement, les jeunes semblent de moins en moins attirs par les tudes suprieures en mathmatiques. Or, les fractales, tant la fois visuellement attrayantes et intriguantes, possdent des caractristiques pour piquer la curiosit et stimuler le got dapprendre [voir [18]].

L'un des mathmaticiens les plus connus ayant travailler sur ce sujet est *WACLAW SIERPINSKI* (1882-1969) [1] apparut en 1915 : le triangle de Sierpinski [voir [31]].



Cette construction consiste prendre un triangle quelconque et lui retirer le triangle form par les points milieux de ses trois cts. Pour chacun des trois triangles ainsi forms, on retire le triangle central de la mme faon et on poursuit le procd jusqu linfini.

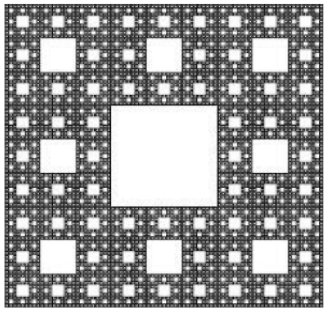
De mme, *SIERPINSKI* a t imagin en 1916 le tapis de Sierpinski . Cette fractale consiste a diviser un carr en neuf puis retirer celui du milieu n fois. On obtient donc chaque itration huit nouveaux carrs dont la longueur est un tiers de celle des carrs de litration prcdente.

Notre travail se subdivise en trois chapitres.

Le premier prsente les outils mathmatiques de base qui seront utiliss tout au long de ce travail. Il sera consacr au rappel de quelques notions de la thorie des graphes .

Le second est ddi quelques notions de topologie, de mesures et de mesures extrieures, Mesures de Hausdorff qui sont des mesures extrieures et leurs principales proprits. La no-

1. est l'auteur de 724 articles et de 50 livres. Parmi ses contributions, mentionnons quil fut le premier donner l'exemple d'un nombre absolument normal (ses chiffres apparaissent la mme frquence peu importe la base dans laquelle il est exprim).



tion de mesure de Hausdorff est plus gnrale que celle de Lebesgue,et malgr la difficult de calculer la mesure de Hausdorff dun objet fractal, on peut connaitre sa dimension de Hausdorff beaucoup plus facilement.Il sera consacr aussi ltude de la dimension topologique qui est primordiale pour la dfinition mathmatique des objets fractals. Nous y avons prsent la dimension topologique pour un espace topologique quelconque, et comme tous les fractals tudis sont exclusivement dans Rn , nous avons prsent la forme simplifie de la dimension topologique sur les spaces mtrisables.

Dans la troisime, Nous avons fait un tude de quelques graphes de type Sierpinski pour connue les nombres des sommets ,les artes,le chemin hamiltonien...,de mme une fractale de Sierpinski ou un joint de Sierpinski est un objet familier tudi par des professionnels des systmes dynamiques et des probabilits.Nous suggrons la rgle de graphe S_n drive des premires itrations de n de processus qui conduit l'tude de certaines de ses proprits et notamment sa structure priodique, son numro de contrle.Nous proposons galement un nouveau graphique, Sierpinski Gasket Rombus SR_n, bas sur un triangle.

Chapitre 1

Rappel sur la théorie des graphes

Dans ce chapitre, on présente des notions classiques de la théorie des graphes ainsi que des notations usuelles, dont on aura besoin durant la réalisation de ce travail.

Section 1.1

Concepts fondamentaux

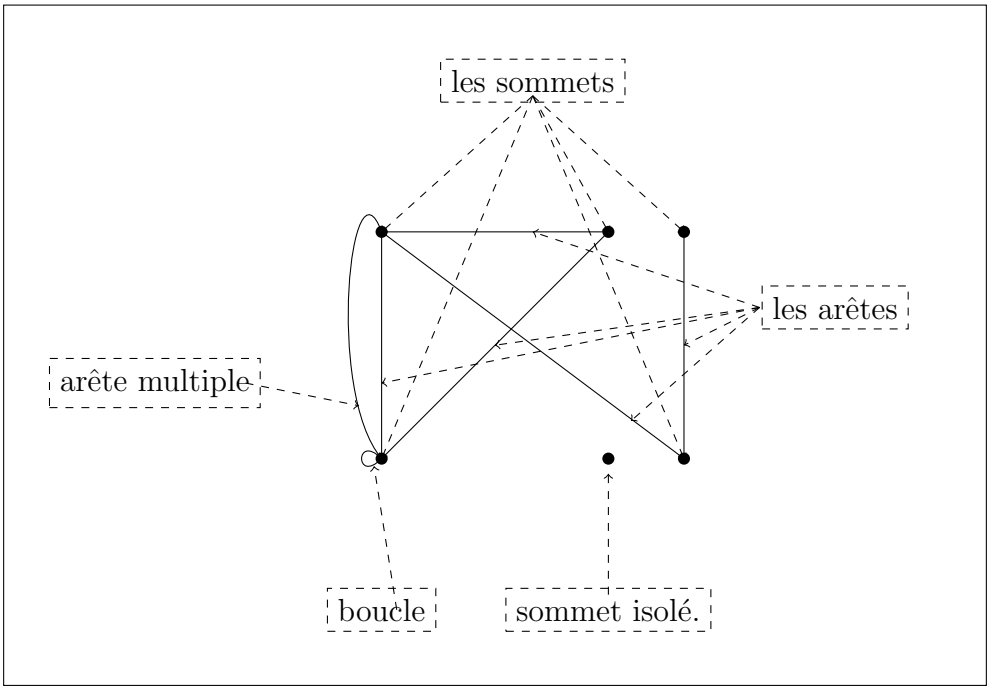


Figure 1.1 – Un graphe

1.1.1 Graphes

Définition 1.1.1 — ***Un graphe*** $G = (V, E)$ *est défini par deux ensembles finis non vide, un ensemble de sommets* V *et un ensemble d'arêtes* E.

— *Le cardinal de* V *est appelé l'ordre de* G, *noté par* $n(G)$ *et le cardinal de* E *est appelé la taille de* G, *noté par* $m(G)$.

— **Sommet isolé :**Sommet d'un graphe relié à aucun autre.Il est donc de degré zéro.

— **Boucle :** Arête partant d'un sommet et arrivant sur lui même.

— **Arête multiple :** les deux arêtes ont le même sommet départ et le même sommet d'accés .

Graphe non orienté

Définition 1.1.2 ***Un graphe non orienté*** *est dont les arêtes ne sont pas orientés et chaque arête* (e) *est définie comme suit :* $e = (u, v) = uv$. *Dans ce cas on dit que :*

— u *et* v *sont adjacents.*

— (e) *est incidente à* u *et* v.

— *Deux arêtes* e_i *et* e_j *sont adjacents s'ils ont au moins une extrémité en commun.*

— *Une arête de type* $\{uu\}$ *est appelée boucle.*

Le graphe de la Figure 1.2 possède cinq sommets et six arêtes qui sont $V(G) = \{x, y, z, u, v\}$, $E(G) = \{xy, yz, zx, zu, xu, uv\}$.

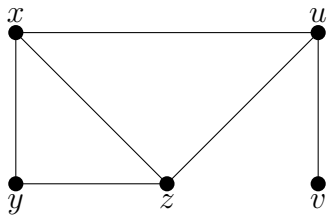


FIGURE 1.2 – Graphe non orienté

Graphe simple

Définition 1.1.3 *Un **graphe simple** est un graphe si l'on a les deux conditions :*

1. *i1 n'a pas de boucles,*
2. *entre deux sommets, il n'y a jamais plus d'un arc pour les relier.*

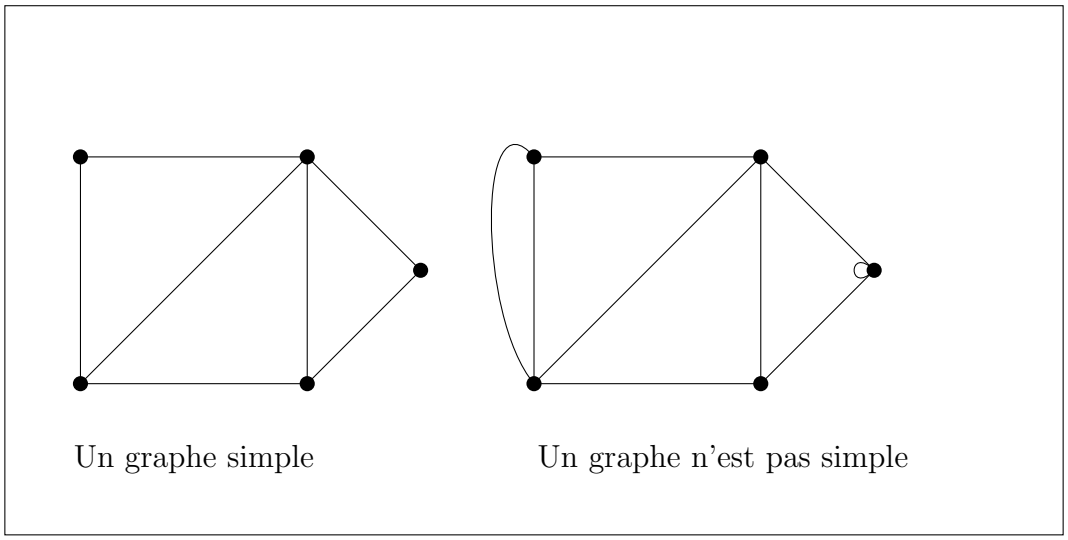


FIGURE 1.3 – Un graphe simple

Sous-graphe

Définition 1.1.4 *Soit $G = (V, E)$ un graphe alors $G = (V', E')$ est dit **sous-graphe** de G si l'ensemble des sommets $V' \subset V$ et l'ensembles des arêtes E' est formé par toutes les arêtes de E dont les extrémités sont dans V'.*

Graphe partiel

Définition 1.1.5 *Soit $G = (V, E)$ un graphe, le graphe $G = (V, E')$ est un graphe partiel de G si $E' \subset E$. Autrement dit,on obtient G' en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe G. Le graphe de la Figure représente un graphe G et son graphe partiel et sous graphe de G.*

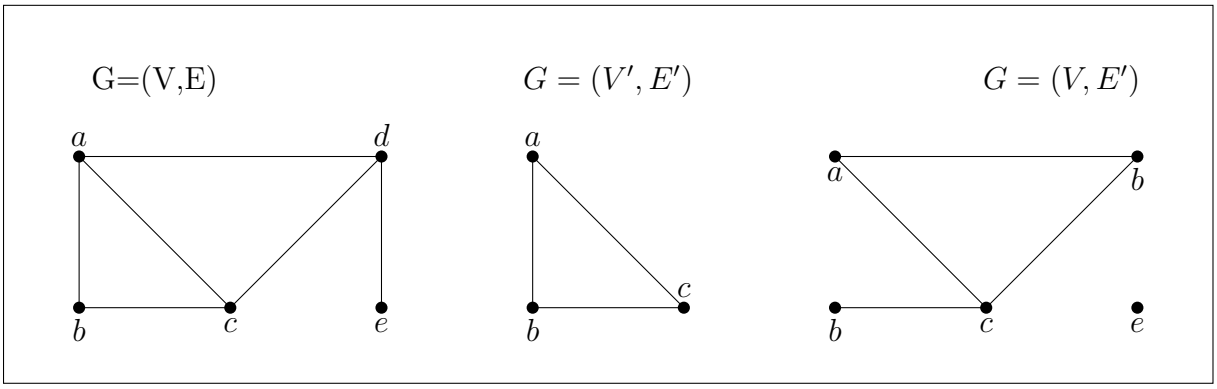


FIGURE 1.4 – Exemple d'un graphe G avec un graphe partiel et un sous graphe

Voisinage et degré d'un sommet

Soit $G = (V, E)$ un graphe pour un sommet v de G.

- *Le **voisinage ouvert** de v est : $N_G(v) = \{u \in V_G(v) : uv \in E(G)\}$.*
- *Le **voisinage fermé** de v est défini par : $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.*
- *Pour un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$, le voisinage ouvert de S est :$N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$.*
- *Le voisinage fermé de S est :$N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G[S]$.*

Pour G un graphe simple, on a :

- ***Le degré d'un sommet** est la taille de son voisinage. Soit $v \in V(G)$, le degré de v est noté par :*

$$d_G(v) = |N_G(v)|.$$

- ***Le degré maximum** d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets, noté par :*

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

- ***Le degré minimum** d'un graphe est le degré minimum de tous ses sommets, noté par :*

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Par exemple pour le graphe G de la Figure 1.2 le voisinage ouvert du sommet y est $N_G(y) = \{x, z\}$ et son voisinage fermé est $N_G[y] = \{x, y, z\}$. Le graphe G n'a pas de sommets isolés,et v est un sommet pendant. Le degré minimum du G est donc $\delta(G) = 1$ et le degré maximum est $\Delta(G) = 3$.

Corollaire 1.1.6 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, avec $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ [9]. Alors on a :*

$$\sum_{i=1}^{n} d_G(v_i) = 2m(G).i = \{1...n\}$$

Chanes et cycles

Définition 1.1.7 (Chane) *Soit un graphe $G = (V, E)$.*

- ***une chane*** *P_k de G est une séquence finie de sommets $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$, o pour tout $i = 1, ..., k$,$\{v_i, v_{i+1}\}$ est une arête de G. Les sommets v_1 et v_k sont les extrémités de la chane P_i et les sommets v_2 , , . . . , v_{k-1} sont les sommets intérieursde P_k.*
- ***Une chane*** *P_k* ***est simple*** *si chaque arête de P_k est emprunté une seule fois.*
- ***Une chane*** *P_k* ***est élémentaire*** *si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.*

Définition 1.1.8 (Cycles)

- ***Un cycles*** *C_k d'un graphe $G = (V, E)$ est une chane $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ telle que les extrémités sont confondues $v_1 = v_k$.*
- ***Un cycle élémentaire*** *est une chane élémentaire telle que ses deux extrémités sont confondues. Un cycle C_k est* ***simple*** *si chaque arête de C_k est emprunté une seule fois.*

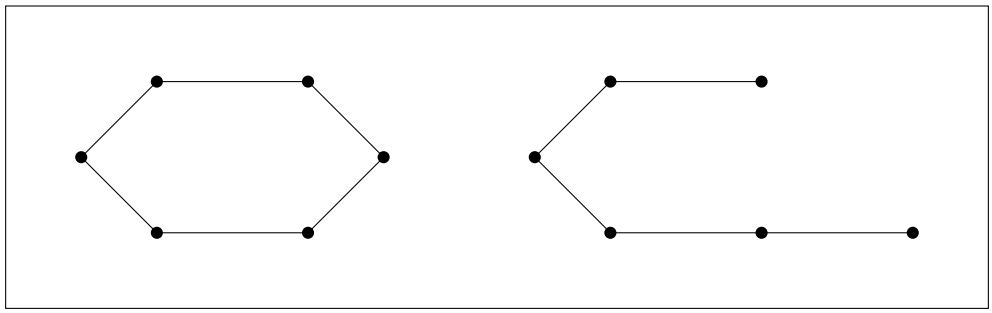


FIGURE 1.5 – Une chane P_6 et un cycle C_6

Section 1.2

Quelques graphes particuliers

Graphe hamiltonien et eulérien

Chane Eulérien	*Chane Hamiltonienne*
— *est une chane dans le graphe qui passe par toutes les arêtes juste une seule fois.* — *Si cette chane est fermée, onparlera de cycle eulérien .*	— *est une chane dans le graphe qui passe par tous les sommets une et une seule fois.* — *Si cette chane est fermée(i.e. il existe une arête reliant le sommet de départ au sommet d'arrivée), on parlera de cycle hamiltonien.*

— *Un graphe est dit hamiltonien s'il possède un* ***cycle hamiltonien****.*
— *Un graphe est dit eulérien s'il possède un* ***cycle eulérien****.*

Théorème 1.2.1 *Pour un graphe connexe non trivial G, les déclarations suivantes sont équivalent :*
(i) G est eulérien.
(ii) Le degré de chaque sommet de G est un entier pair positif.
(iii) G est une union de cycles arête-disjointe.

Exemple 1.2.2 *Par exemple pour le graphe G et G′ de la Figure 1.6, on a*

1. ***Pour*** *G*
   — *La chane {F-B-C-E-D-A} est une chane hamiltonienne .*
   — *le cycle {A-B-F-E-C-D-A} est un cycle hamiltonien . pas de cycle et chane eulérien*
2. ***Pour*** *G′*
   — *La chane {5-1-4-2-3} est une chane hamiltonienne .*
   — *le cycle {5-1-4-2-3-5} est un cycle hamiltonien .*
   — *La chane {1-2-5-1-4-3-2-4-5} est une chane eulérien . pas de cycle eulérien*

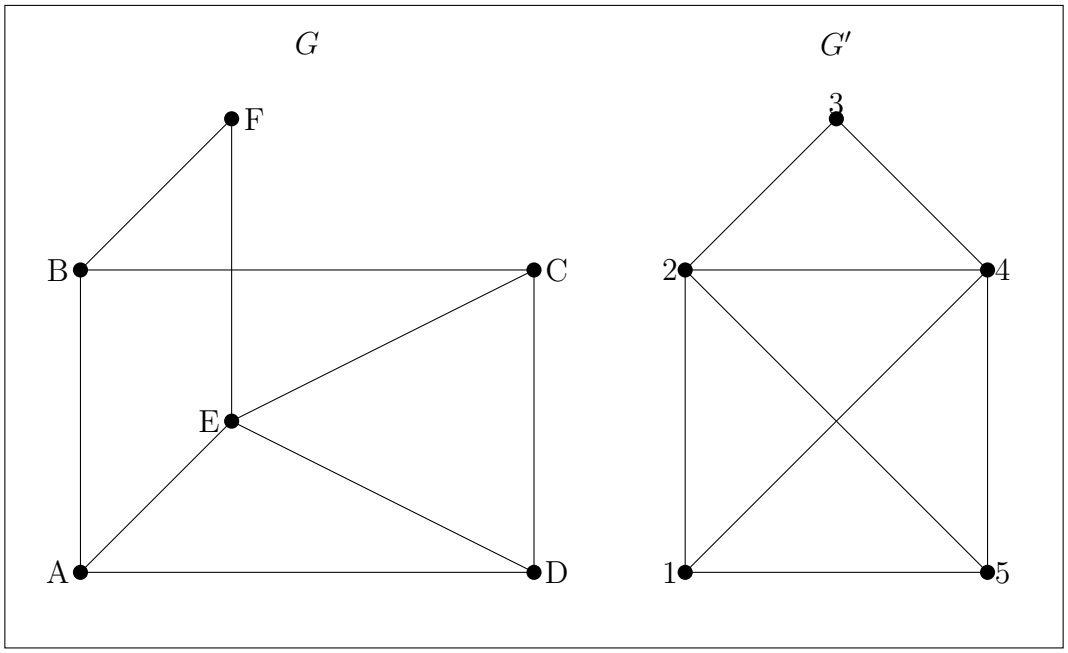


FIGURE 1.6 – Exemple d'un graphe G avec un chane hamiltoenne et cycle hamiltoenne

Connexité

Définition 1.2.3 — *Un graphe $G = (V, E)$ est* ***un graphe connexe*** *s'il existe une chane entre toutes les paires de sommets du graphe.*

- *Un graphe connexe a n sommets possède au moins $n - 1$ arêtes.*
- *une composantes connexe d'un graphe G est un sous-graphe induit maximal connexe de sommets.*
- *Une arête e est appelée* ***un isthme*** *de G si le graphe $G-e$ possède plus de composantes connexes que G*
- *Un sommet v du graphe G est appelé un sommet d'articulation du graphe G si le graphe $(G - v)$ a plus de composantes connexes que G.*
- *dans le graphe de la Figure 1.7 les sommets a, d, f sont des sommets d'articulation et l'arête ad est un isthme.*

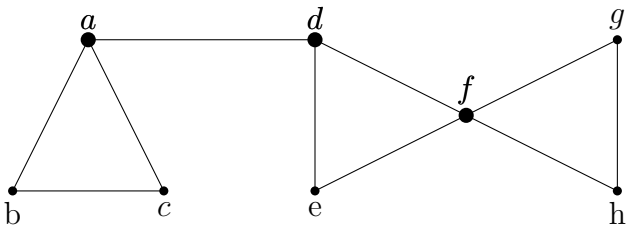


FIGURE 1.7 – Graphe connexe.

Graphe complet

Définition 1.2.4 *Un graphe $G = (V, E)$ est dit* ***complet*** *si tous les sommets sont deux à deux adjacents, et le graphe complet a n sommets contient $n(n-1)/2$ arêtes et noté K_n.*

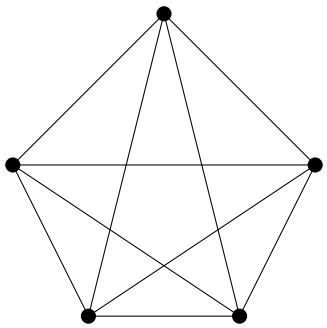


FIGURE 1.8 – Graphe complet K_5

Arbre

Définition 1.2.5 Un arbre *est un graphe connexe sans cycles.*

Théorème 1.2.6 *Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre $n \geq 2$*
.Alors les propriétés suivantes sont équivalentes pour caractériser un arbre[1] :

- *G est connexe et sans cycles.*
- *G est sans cycles et admet $n-1$ arcs.*

— *G est connexe et admet $n-1$ arcs.*
— *G est sans cycles et en ajoutant un arc, on crée un cycle.*
— *G est connexe, et si on supprime un arc quelconque, il n'est plus connexe .*
— *Il existe dans G une chane unique joignant tout couple de sommets.*

Proposition 1.2.7 *Un arbre d'ordre n contient $n-1$ arcs Un sommet est dit pendant s'il de degré* 1.

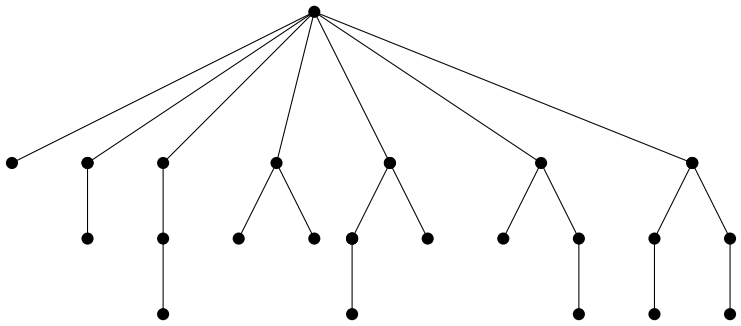


FIGURE 1.9 – Un arbre avec onze feuilles

Section 1.3

Le nombre de la domination

1.3.1 Définitions et propriétés

Définition 1.3.1 *Soit $G=(V,E)$ un graphe simple. Un sous ensemble de sommets $D \subseteq V$ de G est dit* ***ensemble dominant*** *si tout sommet de $V-D$ est adjacent à au moins un sommet de D.Un ensemble D est dit minimal si aucun sous ensemble propre de D n'est un ensemble dominant . Un dominant de cardinalite minimum est un dominant minimal l'inverse est faux . Il existe d'autre définition équivalente aux ensemble dominants dans les grapes. En voici des exemples :*

— *$D \subseteq V$ est un ensemble dominant $\Longleftrightarrow \forall v \in V-D, \quad |N(v) \cap D| \geq 1$*
— *$D \subseteq V$ est un ensemble dominant $\Longleftrightarrow \forall v \in V-D, \quad N(v) \cap D \neq \emptyset$*

— $D \subseteq V$ *est un ensemble dominant* $\Longleftrightarrow N[D] = N(D) \cup D = V$

Définition 1.3.2 *Le* ***nombre de domination*** *inférieur (ou nombre de domination) d'un graphe* G *, noté* $\gamma(G)$ *, représente le cardinal minimum d'un ensemble dominant de* G*. Un ensemble* ***dominant minimum*** *avec une telle cardinalité est appelé* $\gamma(G) - ensemble$*, on note qu' un graphe* G *peut avoir plusieurs* $\gamma(G) - ensembles$*. La* ***cardinalité maximum*** *d'un ensemble dominant minimal est appelée nombre de domination supérieur, et est noté par* $\Gamma(G)$*.*

Par exemple pour le graphe $K_{2,3}$ *de la Figure 1.10 ,* $\gamma(G) = 2$*, et* $\{u, v\}$*,* $\{u, x\}$ *et* $\{v,z\}$ *sont des* $\gamma(G) - ensembles$*.* $\Gamma(G) = 3$ *et* $\{x, y, z\}$ *est l'unique* $\Gamma(G) - ensemble$

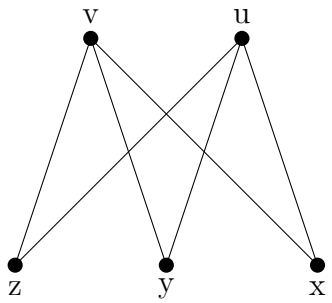


FIGURE 1.10 – Un exemple de graphe G avec $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 3$

Remarque 1.3.3 *Si* D *est un ensemble dominant d'un graphe simple*$G = (V, E)$*, alors*

1. *un sous-ensemble de* D *n'est pas nécessairement un ensemble dominant de* G*, tandis que tout ensemble contenant* D *est un ensemble dominant de* G
2. D *contient tous les sommets isolés de* G*.*
3. *Puisque lensemble des sommets d'un graphe est toujours un ensemble dominant et un dominant contient au moins un sommet, alors le nombre de domination est toujours défini et* $1 \leqslant \gamma(G) \leqslant |V|$*.*
4. $\gamma(G) = 1$ *si et seulement si* G *possède un sommet* v *de degré* $n-1$*(sommet universel), dans ce cas* $\{v\}$ *est un ensemble dominant minimum de* G*.*
5. $\gamma(G) = n$ *si et seulement si* $G = \overline{K_n}$ *, et* V *est l'unique ensemble dominant de* G*. Bollobas et Cokayne [4] ont montré que tout graphe sans sommet isolé possède un ensemble dominant minimum dont lequel chaque sommet satisfait la deuxième c*

Section 1.4

Le nombre de coloration

1.4.1 La coloration propre

Définition 1.4.1 *On appelle* ***coloration d'un graphe*** $G = (V, E)$ *est une application c qui associé à chaque sommet de* $V(G)$ *une couleur de l'ensemble (est une fonction*$\{1, 2, 3, ..., k\}(K \in N)$*). Une coloration est propre si chaque deux sommets voisins portent des couleurs différentes* $\{(uv)\} \epsilon\ E\ (G) \Longrightarrow c(u) \neq c(v)$

(Voir Figure 1.11) :



FIGURE 1.11 – Le nombre chromatique $\chi(G) = 2$

Définition 1.4.2 *De maniére équivalente, la classe de couleur d'une coloration de G en k couleurs est une partition de l'ensemble des sommets* $V(G)$ *en k ensembles stables (ou indépendants)* $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup ..... \cup V_k$ *avec* $Vi =$ *ensemble des sommets colorer par la couleur i* $(i = 1, ..., k)$*. On dira que le graphe G admet une k-coloration.*

On appellera ***nombre chromatique*** *d'un graphe* $G = (V, E)$*, noté* $\chi(G)$*, le*

Définition 1.4.3 *nombre minimum de couleurs nécessaires à sa coloration. c'est -à- dire le plus petit nombre des couleurs permettant de colorer tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur. La coloration optimale (minimale) du graphe* $G = (V, E)$ *est appellée* $\chi(G)$*-coloration, ou bien* $\chi(G)$*-chromatique.*

1.4.2 Posistion du problème

On peut poser le probleme de coloration des graphes par le modéle suivant :

$$\begin{cases} \min(f = \|k\|) \\ \sum_{K=1}^{X} x_{ik} = 1 \\ x_{ik} + x_{jk} = 1 \\ \forall\ i,j \in X\ tq(i,j) \in E\ et\ k \in K \end{cases}$$

O : K : l'ensemble des couleurs

X : l'ensemble des sommets

E : l'ensemble des arêtes

$x_{ik} \in \{0;1\}$ *tel que* $x_{ik} = 1$ *si le sommet* i *est de couleur* k *sinon* $x_{ik} = 0$. *La première contrainte nous informe qu'un sommet* i *doit être coloré d'une ceule et unique couleur, tandis que la deuxième indique l'impesibilité que deux sommet* (i,j) *relié par un arête, soint coloré par une couleur.[10]*

1.4.3 Bornes sur le nombre chromatique

[17]

- *Le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre* n *est* n.
- *Le nombre chromatique d'un graphe discret d'ordre* n *est* 1.
- *Le nombre chromatique d'un cycle d'ordre pair est* 2.
- *Le nombre chromatique d'un cycle d'ordre impair* $\geqslant 3$ *est* 3.
- *Le nombre chromatique d'une chane d'ordre* $\geqslant 2$ *est* 2.

Théorème 1.4.4 *[5] Si* H *est un sous graphe de* G. *Alors*

$$\chi(H) \leq \chi(G)$$

Théorème 1.4.5 *[5] Pour tout graphe* G,

$$\omega(G) \leq \chi(G)$$

Ou $\omega(G)$ *est la taille d'une clique maximum.*

Théorème 1.4.6 *[21] Soit G un graphe connexe. Si G n'est ni un cycle impair ni un graphe complet. Alors*

$$\chi(G) \leq \Delta(G)$$

De plus, si G est complet ou contient un cycle impair

$$\chi(G) = \Delta(G) + 1$$

Théorème 1.4.7 *[21] Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

La borne inférieure du nombre chromatique d'un graphe G implique le nombre chromatique de ses sous -graphes.

1.4.4 Coloration équitable d'un cycle

Théorème 1.4.8 *[30] Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

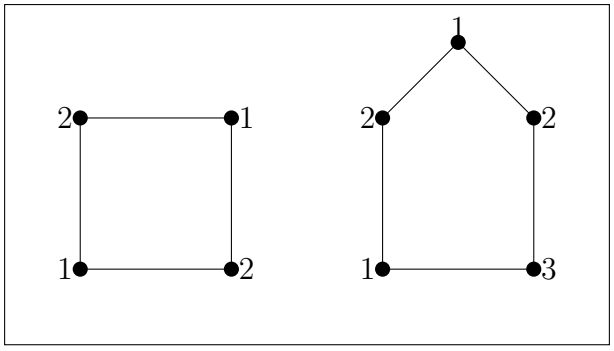


FIGURE 1.12 – $\chi(C_4) = 2$ et $\chi(C_5) = 3$

1.4.5 Coloration équitable d'une chaîne

Théorème 1.4.9 *[30] Pour tout $n \geq 2$,*

$$\chi(P_n) = 2$$

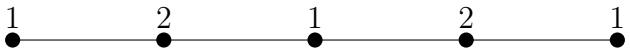


FIGURE 1.13 – $\chi(P_5) = 2$.

1.4.6 Coloration équitable d'un graphe complet

Théorème 1.4.10 *[30] Pout tout $n \geq 2$,*

$$\chi(K_n) = n$$

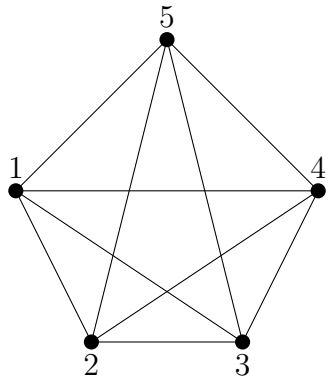


FIGURE 1.14 – $\chi(K_5) = 5$

Chapitre 2

Les mesures et les dimensions

Dans ce chapitre, nous donnons quelques notions de base qui serons utilisées tout au long de cette thèse. Nous commençons tout d'abord par un rappel sur la théorie de la mesure qui joue un rôle important dans l'étude des fractals.

Section 2.1

Mesure positive

Soit E un ensemble quelconque (généralement, nous travaillons sur un espace euclidien n-dimensionnel,$\mathbb{R}^n$).

Une collection non vide $\mathcal{A}$ de parties de E est dite :

— *algèbre* sur E si elle contient $\emptyset$ et E, stable par passage au complémentaire et par union finie (i.e. pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a : $A^c \in \mathcal{A}$ et $A \cup B \in \mathcal{A}$).

— *σ-algèbre* ou bien *tribu* sur E si elle contient $\emptyset$ et E, stable par passage au complémentaire et par union dénombrable.

Si $\mathcal{B}$ est une tribu sur E, le couple $(E, \mathcal{B})$ est appelé *espace mesurable*. Les parties de E qui sont (resp. ne sont pas) des éléments de $\mathcal{B}$ sont dites *mesurables* (resp. non mesurables).

Soient E et I deux ensembles. Pour tout $i \in I$, on se donne une tribu $\mathcal{B}_i$ sur E. Alors $\bigcap_{i\in I} \mathcal{B}_i = \{A \subset E : A \in \mathcal{B}_i, \forall i \in I\}$ est encore une tribu sur E. Cette stabilité par intersection des tribus permet de définir la notion de *tribu engendrée* par une partie $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ comme la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$. On la note $\sigma_E(\mathcal{C})$ ou $\sigma(\mathcal{C})$.

On rappelle qu'une "topologie" sur E est la donnée d'une famille de parties de E, appelées "ouverts de E", contenant $\emptyset$ et E, stable par union (quelconque) et stable par intersection finie. L'ensemble E, muni de cette famille de parties, est alors appelé un "espace topologique".

On appelle *tribu borélienne* (ou tribu de Borel) sur un espace topologique E, la tribu

engendrée par l'ensemble des ouverts de E, cette tribu sera noté $\mathcal{B}(E)$. Les éléments de $\mathcal{B}(E)$ sont appelés les *boréliens* de E. Dans le cas $E = \mathbb{R}^n$, cette tribu est donc noté $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Il est clair (Rudin [23, p. 11]) que les fermés de E sont des boréliens puisque par définition ce sont les complémentaires des ouverts de E. De même, les réunions dénombrables de fermés et les intersections dénombrables d'ouverts constituent des boréliens fort importants, auxquels on a respectivement donné à la suite de Hausdorff le nom de F_σ et G_δ. Les lettres F et G sont utilisés pour désigner respectivement les fermés et les ouverts ; σ se rapporte à la réunion, δ se rapporte à l'intersection. Par exemple, tout intervalle semi-ouvert $[a, b[$ est un G_δ mais également un F_σ dans $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{C}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$ contenant $\emptyset$. Une *mesure positive* sur $\mathcal{C}$ est une application $\mu : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :

① $\mu(\emptyset) = 0$.

② μ est σ-additive, c'est-à-dire que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}$ de parties deux à deux disjointes, (i.e. $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$) et telle que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}$, on ait

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \tag{2.1}$$

Si $\mathcal{B}$ est une tribu sur E et si μ est une mesure positive sur $\mathcal{B}$, le triplet $(E, \mathcal{B}, \mu)$ est appelé espace mesuré.

Une mesure μ sur $\mathcal{B}$ est dite *finie* si $\mu(E) < +\infty$. Une *probabilité* sur $\mathcal{B}$ est une mesure sur $\mathcal{B}$ telle que $\mu(E) = 1$.

Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. On dit que A est *négligeable* s'il existe un ensemble $B \in \mathcal{B}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$. Si toutes les parties négligeables sont mesurables, on dit que μ est *complète* ou que $(E, \mathcal{B}, \mu)$ est complet.

Soit E un espace topologique, une mesure μ sur $\mathcal{B}(E)$ est dite *mesure borélienne* sur E si elle est localement finie, c'est-à-dire ; chaque $x \in E$ admet un voisinage ouvert U_x tel que $\mu(U_x) < +\infty$. (voir pour plus de détails)

Soit μ une mesure borélienne sur un espace topologique E. On dit que μ est une mesure *régulière* si pour tout $B \in \mathcal{B}(E)$ on a :

$$\begin{aligned} \sup\{\mu(F) : F \subset B, \text{F fermé de E}\} &= \mu(B) \\ &= \inf\{\mu(O) : B \subset O, \text{O ouvert de E}\} \end{aligned}$$

On peut consulter (Rudin [22, p. 303]) pour voir qu'une mesure μ sur E est régulière si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{B}(E)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert O et un fermé F tels que

$F \subset B \subset O$ et

$$\mu(O) - \varepsilon \leqslant \mu(B) \leqslant \mu(F) + \varepsilon. \tag{2.2}$$

Section 2.2

Mesure extérieure

Définition 2.2.1 *On appelle* mesure extérieure *sur E, une application $\mu^* : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :*

① $\mu^*(\emptyset) = 0$.

② *(σ-sous-additivité)* $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$ *pour tout* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(E)$.

③ *(monotonie)* $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$.

2.2.1 Exemples de mesures extérieures

Exemple 2.2.2 Mesure de comptage : *Pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$, La mesure de comptage n'est autre que la fonction "cardinal" de A, à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.*

Exemple 2.2.3 Mesure extérieure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$:
La mesure extérieure de Lebesgue, ou longueur, d'une partie A de $\mathbb{R}$ est définie comme l'infimum des sommes des longueurs des intervalles recouvrant A :

$$\mathcal{L}^1(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty}]a_i, b_i[\right\} \tag{2.3}$$

Pour les intervalles fermés ou ouverts, on a $\mathcal{L}^1(]a,b[) = \mathcal{L}^1([a,b]) = b-a$. Si $A = \bigcup_i [a_i, b_i]$ des intervalles finies (dénombrables) disjoints, on a $\mathcal{L}^1(A) = \sum_i (b_i - a_i)$.

Exemple 2.2.4 Mesure extérieure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$:
Si $A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$, le n-dimensionelle volume de A est donné par

$$vol^n(A) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n).$$

On définit alors la mesure extérieure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ par

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} vol^n(A_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right\} \tag{2.4}$$

Exemple 2.2.5 Restriction d'une mesure :
Soit μ une mesure dans $\mathbb{R}^n$ et E un sous-ensemble borélienne de $\mathbb{R}^n$. On défini une mesure ν dans $\mathbb{R}^n$ s'appelle la restriction de μ sur E, par $\nu(A) = \mu(E \cap A)$ pour tout ensemble A.

Section 2.3

Mesure de Hausdorff

Dans cette section, nous étudions les mesures de Hausdorff et leurs propriétés pour introduire la dimension de Hausdorff qui sappellera plus tard la dimension des fractals.
Pour un sous-ensemble non vide U de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ de dimension n, on définit le *diamètre* de U, noté $\mathrm{diam}(U)$, par : $\mathrm{diam}(U) := \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$ où $|\cdot|$ est la distance euclidienne usuelle.

Si un ensemble F est recouvert par une collection dénombrable d'ouverts $\{U_i\}$ de diamètre au plus δ, c'est-à-dire $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ avec $0 < \mathrm{diam}(U_i) \leqslant \delta$ pour tout i, on dit que $\{U_i\}$ est un *δ-recouvrement* de F.

Soit F un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et soit s un réel positif. Pour tout $\delta > 0$, on définit

$$\mathcal{H}^s_\delta(F) := \inf\left\{\alpha(s) \cdot \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{diam}(U_i)}{2}\right)^s : \{U_i\} \text{ est } \delta - \text{recouvrement de F}\right\} \tag{2.5}$$

où $\alpha(s) := \dfrac{vol^s(B_r)}{r^s} = \dfrac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$ (voir [6, p. 327]) avec $\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x$ vérifie

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$$

et $vol^s(B_r)$ signifie le volume de la boule de rayon r en dimension s. [1]

Définition 2.3.1 *Soient $F \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant s < +\infty$ et $0 < \delta < +\infty$. On définit la* mesure de Hausdorff s-dimensionnelle $\mathcal{H}^s$ *de F par*

$$\mathcal{H}^s(F) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(F) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(F) \tag{2.6}$$

avec la convention $\mathcal{H}^s(F) = +\infty$ pour $s < 0$.

1. Cette formule est pour $s \in \mathbb{N}$, mais si l'on cherche à définir des dimensions s non entières, il est naturel d'utiliser la même formule pour $\alpha(s)$.

Remarque 2.3.2

— Comme $\mathcal{H}^s_\delta(F)$ est clairement une fonction décroissante de δ, l'existence de $\lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_\delta(F)$ est assurée, et cette limite est un supremum et peut être égal à 0 ou à $+\infty$.

— Cette mesure est appelée aussi la mesure de Hausdorff sphérique (Falconer [12, 13]).

Les propositions suivantes donnent les premières propriétés des mesures de Hausdorff.

Proposition 2.3.3 *Pour tout $s \geqslant 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $F \mapsto \mathcal{H}^s(F)$ est une mesure ext érieure sur $\mathbb{R}^n$ et définit une mesure sur la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Proposition 2.3.4 *Si $F \subset \mathbb{R}^n$ et $\lambda > 0$, alors*

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F) \quad où \quad \lambda F = \{\lambda x : x \in F\} \tag{2.7}$$

Démonstration :

Si $\{Ui\}$ est un δ-recouvrement de F , alors $\{\lambda Ui\}$ est un $\lambda\delta$-recouvrement de δF. D'o

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda Ui|^s = \lambda^s \sum_{i=1}^{\infty} |Ui|^s \Rightarrow \mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leqslant \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(F) \tag{2.8}$$

car l'inégalité est valable pour tout δ-recouvrement $\{Ui\}$. En faisant tendre $\delta \longrightarrow 0$, on obtient

$$\mathcal{H}^s(\lambda F) = \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_\delta(\lambda F) = \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \Rightarrow \lambda^s \lim_{\delta\to 0}\mathcal{H}^s_\delta(F) = \lambda^s\mathcal{H}^s(F) \tag{2.9}$$

En remplaçant λ par $1/\lambda$ et F par λF on obtient l'autre inégalité, d'o le résultat.

⊡

Un raisonnement similaire donne une estimation de la mesure de Hausdorff sur l'effet de transformations sur les ensembles.

Proposition 2.3.5 *Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ et soit $f : F \to \mathbb{R}^m$ une application lipschitzienne, i.e.*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|, \quad \forall x, y \in F \tag{2.10}$$

pour une constante $c > 0$. Alors, pour tout $s > 0$

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leqslant c^s\mathcal{H}^s(F) \tag{2.11}$$

Si f est une isométrie, i.e. $|f(x)-f(y)| = |x-y|$, alors $\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F)$. Donc, la mesure de Hausdorff est invariante par translation (i.e. $\mathcal{H}^s(F+z) = \mathcal{H}^s(F)$ où $F+z = \{x+z : x \in F\}$).

Rappellons qu'une mesure extérieure est dite *régulière* si, pour tout ensemble A, il existe un ensemble μ^*-mesurable X tel que $A \subset X$ et $\mu^*(A) = \mu^*(X)$.
Le lemme suivant est utile pour la suite. Voir Falconer[12, p. 4] pour la démonstration.

Lemme 2.3.6 *Si μ^* est une mesure exterieure régulière et si $\{A_i\}_i$ est une suite croissante d'ensembles, alors*

$$\lim_{i\to\infty} \mu^*(A_i) = \mu^*(\lim_{i\to\infty} A_i). \tag{2.12}$$

Théorème 2.3.7 (Régularité de la mesure de Hausdorff)
Soit $s > 0$ et soit $A \subset \mathbb{R}^n$ une partie quelconque. Alors

1. *Il existe un ensemble G_δ noté G avec $A \subset G$ et tel que*

$$\mathcal{H}^s(G) = \mathcal{H}^s(A) \tag{2.13}$$

2. *Si A est $\mathcal{H}^s$-mesurable et $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$, alors il existe un ensemble F_σ noté H avec $H \subset A$ et tel que*

$$\mathcal{H}^s(H) = \mathcal{H}^s(A). \tag{2.14}$$

Théorème 2.3.8 (Propriétés des mesures de Hausdorff)

① *$\mathcal{H}^0$ est la mesure de comptage, i.e. $\mathcal{H}^0(A) = \sum_{p\in A} 1$.*

② $\mathcal{H}^1(A) = \mathcal{L}^1(A), \quad \forall A \subset \mathbb{R}$.

③ $\mathcal{H}^s(A) = 0, \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n$ *si* $s > n$.

④ $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A), \quad \forall A \subset \mathbb{R}^n$.

Lemme 2.3.9 *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et supposons que $0 \leqslant s < t < +\infty$ et $\delta > 0$. Alors :*

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) \geqslant \delta^{s-t}\mathcal{H}^t_\delta(A). \tag{2.15}$$

Selon le Lemme 2.3.9, on a le théorème suivant :

Théorème 2.3.10
Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et supposons que $0 \leqslant s < t < +\infty$. Alors :

1. $\mathcal{H}^s(A) < +\infty \Longrightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$.
2. $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Longrightarrow \mathcal{H}^s(A) = +\infty$.

Section 2.4

Dimension de Hausdorff

D'après le Théorème 2.3.10, la mesure s-dimensionnelle d'un ensemble vaut d'abord l'infini pour s petit, puis zéro si s dépasse un certain seuil, qui est précisemment la dimension de l'ensemble. Alors on a la définition suivante :

Définition 2.4.1 *La* dimension de Hausdorff[2] *d'un ensemble F est donnée par :*

$$\dim_H(F) := \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = +\infty\} = \inf\{s : \mathcal{H}^s(F) = 0\}. \tag{2.16}$$

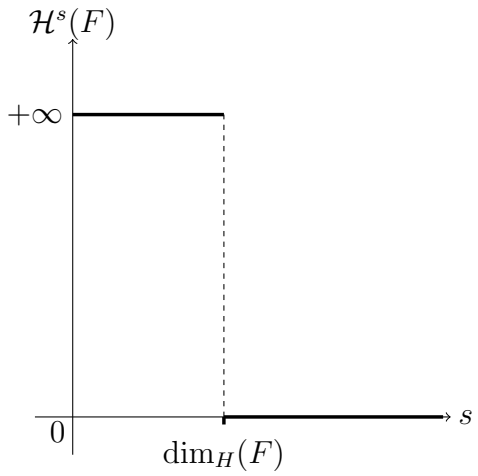


FIGURE 2.1 – Graphe de $\mathcal{H}^s(F)$ en fonction de s pour un ensemble F

On a donc

$$\mathcal{H}^s(F) = \begin{cases} +\infty & \text{si } s < \dim_H(F) \\ 0 & \text{si } s > \dim_H(F) \end{cases} \tag{2.17}$$

La dimension de Hausdorff satisfait les propriétés suivantes :

Théorème 2.4.2 (Propriétés de la dimension de Hausdorff)

1. $A \subset B \Longrightarrow \dim_H(A) \leqslant \dim_H(B)$[3]. *(Monotonie)*

2. Que certains auteurs appellent "dimension de Hausdorff-Besicovitch".
3. si $A \subset \mathbb{R}^n$ alors $\dim_H(A) \leqslant n$.

2. $\dim_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sup_{1\leqslant i\leqslant\infty} \dim_H(A_i)$. *(Stabilité dénombrable)*
3. *Si* $A \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble dénombrable, alors* $\dim_H(A) = 0$.
4. *Si* $A \subset \mathbb{R}^n$ *un ensemble ouvert, alors* $\dim_H(A) = n$.
5. $\dim_H([0,1]^n) = n$.

Proposition 2.4.3 *Soit* $F \subset \mathbb{R}^n$ *et soit* $f : F \to \mathbb{R}^m$ *une application lipschitzienne de constante* $c > 0$. *Alors, pour tout* $s > 0$, *on a*

$$\dim_H(f(F)) \leqslant \dim_H(F) \tag{2.18}$$

Corollaire 2.4.4 *Soit* $f : F \to \mathbb{R}^m$ *une application bi-lipschitzienne, i.e.*

$$\exists\ 0 < c_1 \leqslant c_2,\ c_1|x-y| \leqslant |f(x)-f(y)| \leqslant c_2|x-y| \tag{2.19}$$

Alors

$$\dim_H(f(F)) = \dim_H(F). \tag{2.20}$$

Ce corollaire dévoile une propriété fondamentale de la dimension de Hausdorff. "*C'est l'invariance de la dimension de Hausdorff par des applications bi-lipschitziennes*". Ainsi, deux ensembles de dimensions différentes ne peuvent avoir d'applications bi-lipschitziennes entre eux.

En général, la dimension donne certaines propriétés topologiques de l'ensemble. Par exemple, chaque ensemble de dimension plus petite que 1 est totalement discontinu comme le montre la proposition suivante.

Rappellons qu'un espace E est dit totalement discontinu si la composante connexe de chacun de ses points est l'ensemble réduit a ce point.

Proposition 2.4.5 *Un ensemble* $F \subset \mathbb{R}^n$ *avec* $\dim_H(F) < 1$ *est totalement discontinu.*

Théorème 2.4.6 (Dimension des graphes)
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *une fonction lipschitzienne et soit* A *une partie mesurable de* $\mathbb{R}^n$. *On note* $G(f,A) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ *le graphe de* f *sur* A. *Alors*

$$\dim_H(G(f,A)) = n \quad si\ \mathcal{L}^n(A) > 0 \tag{2.21}$$

Remarque 2.4.7

— De manière générale, la dimension de Hausdorff d'un graphe est supérieure ou égale à la dimension de l'espace de départ ; elle peut être strictement supérieure pour des applications qui sont seulement Hôlderiennes (ou encore moins régulières) et pas Lipschitziennes.

Section 2.5

Calculs des dimensions

Nous allons à présent calculer les dimensions de Hausdorff de quelques ensembles simples et bien connus. Commençons par l'exemple utilisé par Hausdorff lui-même pour illustrer sa notion de dimension.

Exemple 2.5.1 L'ensemble triadique de Cantor :
L'ensemble triadique de Cantor est définit comme la limite des ensembles fermés C_k, où $C_0 = [a, b]$ (prenant $[a, b] = [0, 1]$) et C_k est obtenu à partir de C_{k-1} en supprimant le tiers (ouvert) central de chacune des composantes connexes de C_{k-1}. L'ensemble résultant est clairement de mesure de Lebesgue nulle[4]*, on peut se demander quelle est sa dimension.*

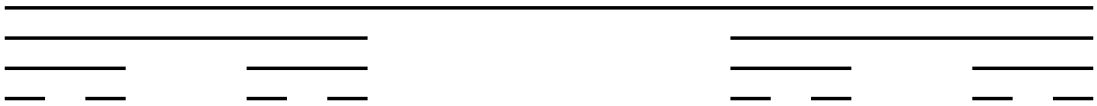


FIGURE 2.2 – Premières étapes de la construction de l'ensemble triadique de Cantor

Théorème 2.5.2
Soit C l'ensemble triadique de Cantor. Alors $\dim_H C = \dfrac{\log 2}{\log 3}$.

La dimension de Hausdorff est déjà plus difficile à calculer. Par ailleurs, on peut faire un calcul heuristique simple en tirant parti de la construction auto-similaire de l'ensemble C et la proposition de changement d'échelle 2.3.4.

CALCUL HEURISTIQUE :

L'ensemble de Cantor se divise en sa partie gauche $C_g = C \cap [0, \frac{1}{3}]$ et sa partie droite $C_d = C \cap [\frac{2}{3}, 1]$, toutes deux égales à l'ensemble de Cantor multiplié par un facteur $\frac{1}{3}$. Comme C est réunion disjointe de ces deux parties, $C = C_g \cup C_d$. On a pour tout $s > 0$

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C_g) + \mathcal{H}^s(C_d) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C) = \frac{2}{3^s}\mathcal{H}^s(C)$$

4. $\mathcal{L}^1(C) = \mathcal{L}^1(\bigcap_{k=1}^{\infty} C_k) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{L}^1(C_k) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0.$

ce qui impose $3^s = 2$, i.e. $s = \dfrac{\log 2}{\log 3}$.
On peut le faire par un calcul rigoureux mais avec moins des conditions.

Calcul :

Notons C_k la réunion des intervalles de longueur 3^{-k}, appelés intervalles fondamentaux, lors de la $k^{\text{ème}}$ étape dans la construction de $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$. Soit $\{U_i\}$ le recouvrement de C composé de 2^k intervalles de longueur 3^{-k}. Comme C est compact (voir [7]), on peut toujours supposer que les U_i forment une collection finie de sous-intervalles fermés de $[0, 1]$. Ainsi, en supposant que ce recouvrement est celui pour lequel l'infinimum est atteint, on trouve :

$$\mathcal{H}^s(C) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}^s_{3^{-k}}(C) = \lim_{k\to\infty} \alpha(s) \cdot 2^k \cdot \left(\frac{3^{-k}}{2}\right)^s.$$

Après réarrangement des termes, $\mathcal{H}^s(C) = \dfrac{\alpha(s)}{2^s} \lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{2}{3^s}\right)^k$. Or, cette limite tend vers 0 lorsque $\dfrac{2}{3^s} < 1$, et elle diverge à l'infini pour $\dfrac{2}{3^s} > 1$. Autrement dit, elle se situe entre 0 et $+\infty$ lorsque $\dfrac{2}{3^s} = 1$, c'est-à-dire pour $s = \dfrac{\log 2}{\log 3}$. Donc, la dimension de Hausdorff de l'ensemble triadique de Cantor est $\dfrac{\log 2}{\log 3}$.

Remarque 2.5.3

— La méthode de calcul "heuristique" utilisé dans le Théorème 2.5.2 donne la vraie réponse pour la dimension de plusieurs ensembles auto-similaire.

Exemple 2.5.4 Le triangle de Sierpinski :
On obtient le triangle de Sierpinski par itérations à partir d'un triangle équilatéral duquel on enlève le triangle central, i.e. celui dont les sommets sont les milieux des cotés du triangle de départ, et on recommence cette opération à l'infini sur chaque triangle restant.



Figure 2.3 – Premières étapes de la construction d'un triangle de Sierpinski

Théorème 2.5.5
Soit S le triangle de Sierpinski. Alors $\dim_H S = \dfrac{\log 3}{\log 2}$.

Calcul :

On voit que le recouvrement optimal utilise des boules de diamètre $\delta = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2^k}$. Notons que δ tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini. Dans chaque cas, on utilise 3^k boules. Ainsi, en supposant que ce recouvrement est celui pour lequel l'infinimum est atteint, on trouve

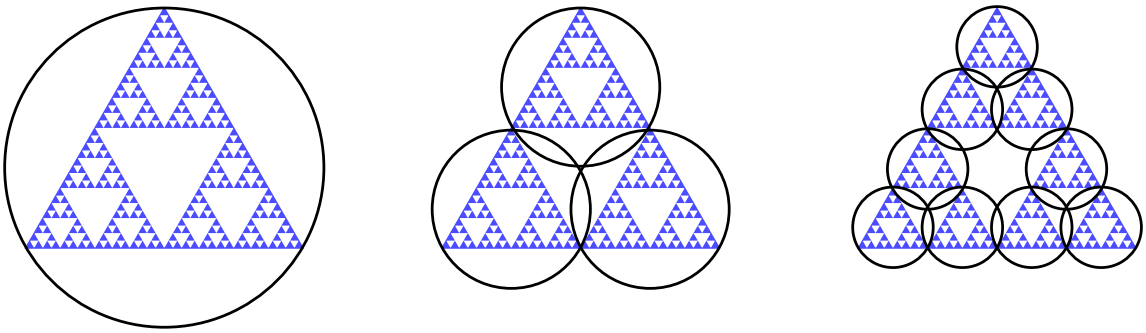


Figure 2.4 – Recouvrements d'un triangle de Sierpinski

$$\mathcal{H}^s(S) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(S) = \lim_{k \to \infty} \alpha(s) \cdot 3^k \left(\frac{\sqrt{3}}{2^k} \right)^s = \lim_{k \to \infty} \sqrt{3} \cdot \alpha(s) \left(\frac{3}{2^s} \right)^k.$$

Or, cette limite tend vers 0 lorsque $\dfrac{3}{2^s} < 1$ et elle diverge à l'infini pour $\dfrac{3}{2^s} > 1$. Autrement dit, elle se situe entre 0 et $+\infty$ lorsque $\dfrac{3}{2^s} = 1$, c'est-à-dire pour $s = \dfrac{\log 3}{\log 2}$. Donc, la dimension de Hausdorff du triangle de Sieprinski est $\dfrac{\log 3}{\log 2}$.

Exemple 2.5.6 Le tapis de Sierpinski :
L'idée de l'ensemble de Cantor est de couper un segment en parties égales, d'enlever une de ces parties, et de recommencer. C'est cette idée qui préside aux tapis de Sierpinski que nous allons examiner.

Théorème 2.5.7
Soit S le tapis de Sierpinski. Alors $\dim_H S = \dfrac{\log 8}{\log 3}$.



FIGURE 2.5 – Premières étapes de la construction d'un tapis de Sierpinski

Section 2.6

Dimension Topologique

Pour définir la dimension topologique, nous avons besoin de rappeler quelques notions sur les espaces topologiques.

`Un espace topologique` est un couple (E, T), o E est un ensemble et T un ensemble de parties de E que l'on définit comme les ouverts de (E, T), vérifiant les propriétés suivantes :

- L'ensemble vide et E appartiennent à T.
- Toute réunion d'ouverts est un ouvert, c'est-à -dire si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille (finie ou infinie, dénombrable ou non dénombrable) d'éléments de T, alors $\bigcup_{i\in I} O_i \in T$.
- Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert, c'est-à -dire si $O_1, \ldots, O_n$ sont des éléments de T $(n > 0)$, alors $O_1 \cap \ldots \cap O_n \in T$.

L'ensemble T, qui est un ensemble de parties de E, est alors appelé une topologie sur E.

Définition 2.6.1 *Soit E un espace métrisable à base dénombrable. On définit la dimension topologique de E par récurrence :*

- $\dim_T E = -1$ *si* $E = \emptyset$.
- $\dim_T E = 0$ *si sa topologie admet une base de parties à la fois ouvertes et fermées, soit encore une base de parties à frontière vide (ou de dimension -1). On dit aussi que E est totalement discontinu.*
- $\dim_T E \leqslant n$ *si sa topologie admet une base d'ouverts à frontière de dimension au plus* $n-1$.
- $\dim_T E = n$ *s'il est de dimension au plus n mais n'est pas de dimension au plus* $n-1$.

❒ $\dim_T E = +\infty$ *s'il n'existe pas de* n *tel qu'il soit de dimension au plus* n*.*

Remarque 2.6.2

— Le nombre $\dim_T E$ est un entier $\geqslant -1$.
— Si E et F deux espaces homéomorphe, alors $\dim_T E = \dim_T F$.
— Si M un sous-espace de E alors $\dim_T M \leqslant \dim_T E$.(voir [11] pour plus de détails)

Nous nous restreindrons dans la suite de ce document à l'étude de la dimension topologique sur les espaces métrisables seulement. On peut alors définir la dimension topologique de la façons suivante :

Exemple 2.6.3

① *Les points sont de dimension topologique 0.*

② *Les courbes sont de dimensions topologique 1.*

③ *La dimension topologique d'une surface est 2.*

④ *La dimension topologique d'un volume est 3.*

Exemple 2.6.4 Poussière de Cantor :
La dimension topologique de poussière de Cantor est 0.

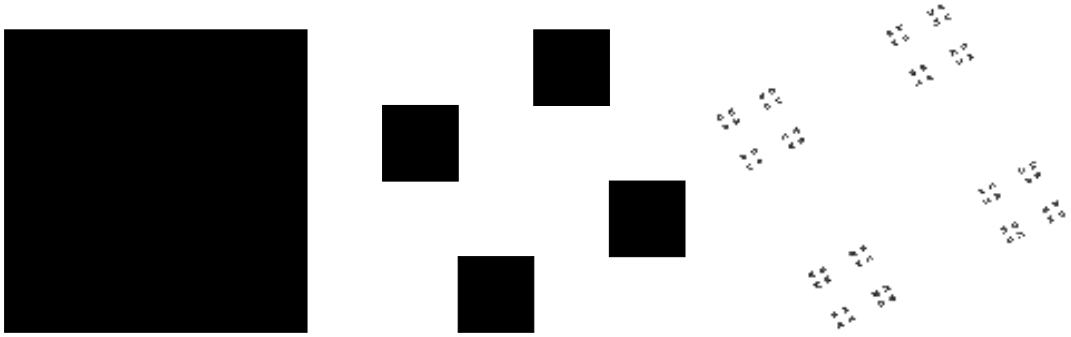


FIGURE 2.6 – Premières étapes de la construction du Poussière de Cantor

Exemple 2.6.5 triangle de sierpinski :
La dimension topologique du triangle de Sierpinski est 1.

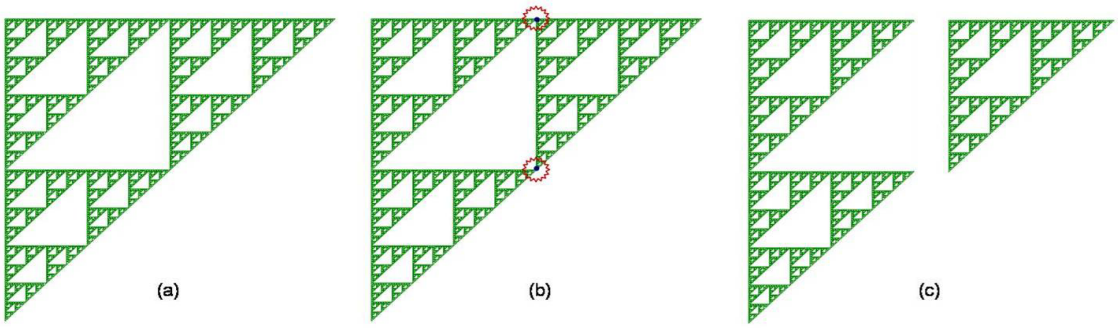


FIGURE 2.7 – La dimension topologique du triangle de Sierpinski est 1. (a) Un triangle de Sierpinski (b) On retire un ensemble de deux points (dimension 0) (c) La figure est déconnecten deux objets de dimension 1 (on peut leur retirer un ensemble fini de points pour les det ainsi de suite).

Exemple 2.6.6 Tapis de sierpinski :
La dimension topologique du Tapis de Sierpinski est 1.

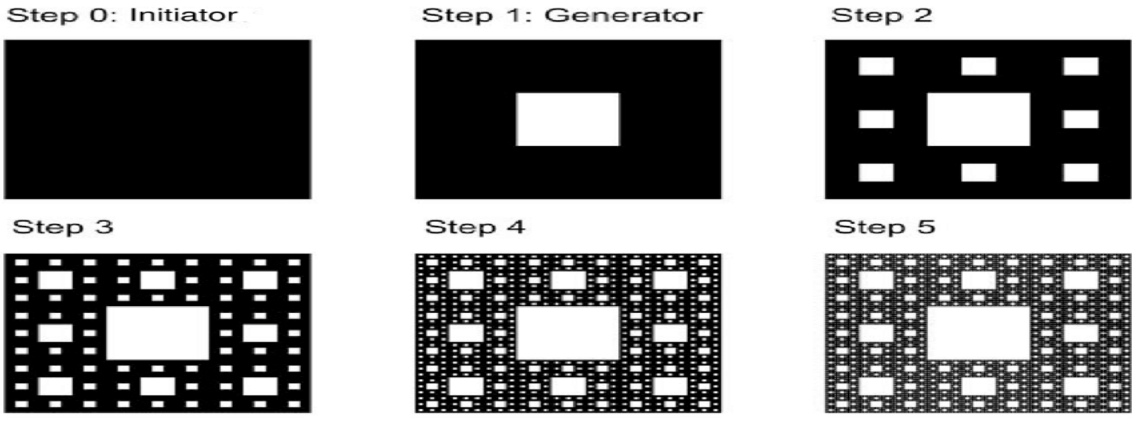


FIGURE 2.8 – Itération dun tapis de Sierpinski.

Lintérêt principal du tapis de Sierpinski et de la poussière de Fournier est la répartition non homogène de la surface bâtie. Le tapis de Sierpinski est constitu dun seul agravec des léments assemblés qui forment une seule unité connexe, alors que la poussière de fournier

est composée de plusieurs éléments de même taille mais de nature isolée. Toutefois, les deux modèles sont purement surfaciques et suivent la même loi de distribution

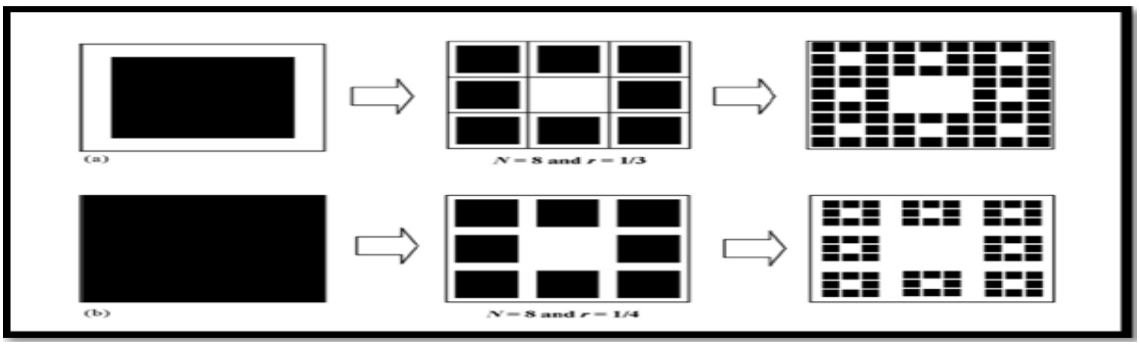


FIGURE 2.9 – Particularités entre le tapis de Sierpinski et la poussière de Fourier.

Section 2.7

La géométrie des fractals

Benoît Mandelbrot (1982) a défini des objets spéciaux qui s'appelent des *fractals* par "A subset of $\mathbb{R}^n$ is a fractal if its topological dimension is less than its fractal dimension [5]".

Après cette phrase, nous avons la définition suivante.

Définition 2.7.1 *Un* fractal *est un objet dont la dimension de Hausdorff est strictement supérieure à la dimension topologique.*

Exemple 2.7.2
- *Comme la dimension topologique du poussière de Cantor de l'exemple 2.6.4 est 0 et sa dimension de Hausdorff est 1* (voir [13, p. 34])*, alors la poussière de Cantor est un objet fractal.*
- *Les objets définis dans la section § 2.5 sont tous des fractals.*

Remarque 2.7.3 *Un fractal est un objet qui a les deux propriétés suivantes :*

☛ *Irrégulier à toutes les échelles (i.e. si, même en le regardant de plus en plus près (par exemple avec un zoom), il apparaît toujours irrégulier (non lisse))*

5. Elle signifie la dimension de Hausdorff, et malgré l'existence de plusieures dimensions (Minkowski, packing, ...), la dimension de Hausdorff possède les bonnes propriétés mathématiques et exprime le mieux possible la dimension fractale recherchée pour beaucoup de sous-ensembles intéressants.

☛ *Auto-similaire (i.e. s'il se décompose en un nombre fini de parties, toutes ces parties sont similaires à l'objet principale).*

Exemple 2.7.4

l'ensemble de Cantor T contient des copies similaires à T avec un facteur $\frac{1}{3}$.

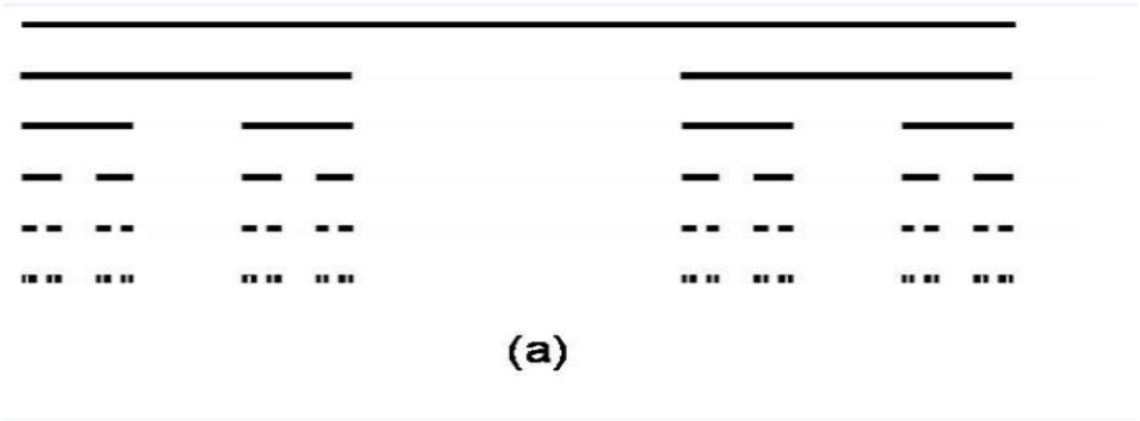


FIGURE 2.10 – (a) Premières étapes de la construction de lensemble de Cantor lensemble de Cantor est formé par les points à la base de chaque ligne.

Exemple 2.7.5

Le triangle de Sierpenski T contient trois copies similaires à T avec un facteur $\frac{1}{2}$.

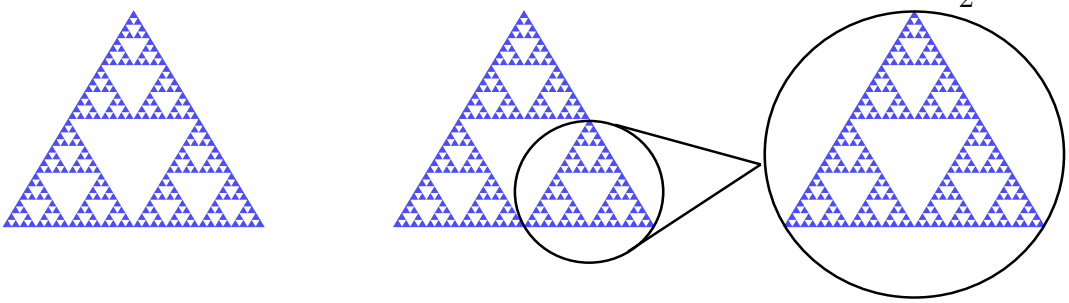


FIGURE 2.11 – Exemple d'auto-similarité

On peut dire alors qu'un fractal est un objet dont chaque élément est aussi un objet fractal.

Exemple 2.7.6

Le tapis de Sierpinski est une fractale obtenue à partir dun initiateur de forme carrée avec une longueur de base L. Cet initiateur est réduit par un facteur de réduction $\frac{1}{3}$*. (la longueur de base Lest divisée en trois (03) éléments.*

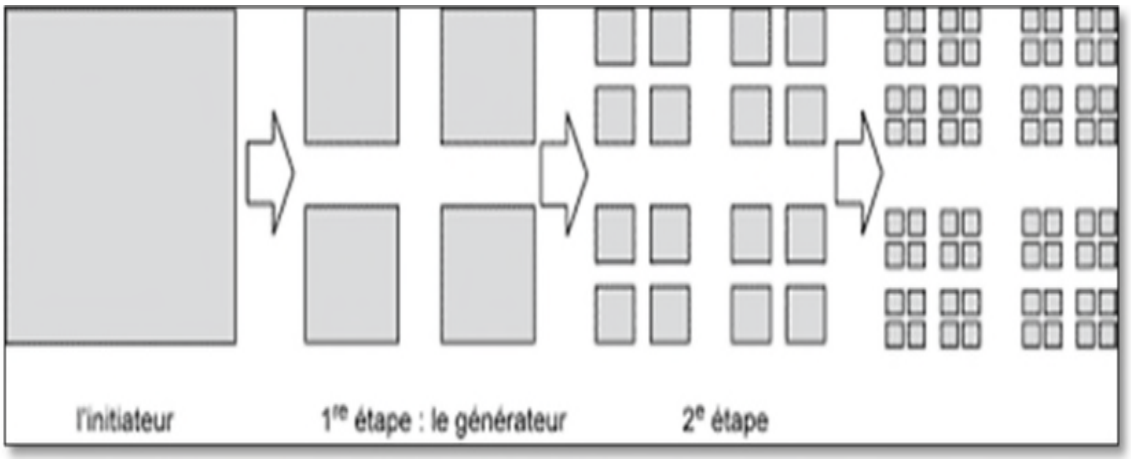


FIGURE 2.12 – Les trois premières étapes de construction dun tapis de Sierpinski et le système demboî tement déchelles des parties vides, illustré pour la troisième étape.

Ainsi, nous avons la possibilité de comparer les dimensions de différents d'objets fractals, et cela peut être résumé dans le tableau suivant :

objet	*Dimension Topologique*	*Dimension de Hausdorff*
cantor	*0*	$\frac{\log 2}{\log 3}$
Le triangle de sierpinski	*1*	$\frac{\log 3}{\log 2}$
Le tapis de sierpinski	*1*	$\frac{\log 8}{\log 3}$
cercle	*1*	*1*

Programme de Triangle de sierprinski :

```
function sierpinski_triangle(it)
    % Error detection
```

```
if(nargin < 1), error('Please, specify the number of iterations.'); end
if(it < 0), error('The number of iterations must be greater or equal than 0'); end

% Useful Parameters
L = 10; side = L;
it = it - 1;
% Support initialization
sop_x = [0 L/2 L];
sop_y = [0 sqrt(3*(L^2)/4) 0];
fill(sop_x, sop_y, 'k'); hold on; axis square; ylim([0 10]);
title(['Sierpinski Triangle for ' num2str(it+1) ' iterations']);
clear('sop_x','sop_y');

% Iteration >0
if(it > -1)
    side = side/2;
    it0_x = [side/2 side 3*side/2];
    it0_y = [sqrt(3*(side^2)/4) 0 sqrt(3*(side^2)/4)];
    fill(it0_x, it0_y, 'w'); hold on;
    % Initialization of cells that will contain the triangles coordinates
    coor{1,1} = it0_x;
    coor{2,1} = it0_y;
    % Next iterations
    for i = 1:1:it
        temp = {};
        side = side/2;
        for n = 1:1:size(coor,2)
            h = sqrt(3*(side^2)/4);
            % Relative right triangle
            x_r = [coor{1,n}(2)+side/2 coor{1,n}(2)+side coor{1,n}(2)+3*side/2];
            y_r = [coor{2,n}(2)+h coor{2,n}(2) coor{2,n}(2)+h];
            fill(x_r, y_r, 'w'); hold on;
            % Relative above triangle
            x_u = [coor{1,n}(1)+side/2 coor{1,n}(1)+side coor{1,n}(1)+3*side/2];
```

```
                y_u = [coor{2,n}(1)+h coor{2,n}(1) coor{2,n}(1)+h];
                fill(x_u, y_u, 'w'); hold on;
                % Relative left triangle
                x_l = [coor{1,n}(2)-3*side/2 coor{1,n}(2)-side coor{1,n}(2)-side/2];
                y_l = [coor{2,n}(2)+h coor{2,n}(2) coor{2,n}(2)+h];
                fill(x_l, y_l, 'w'); hold on;
                % New triangles coordinates storage
                l = size(temp,2);
                temp{1,l+1} = x_r; temp{2,l+1} = y_r;
                temp{1,l+2} = x_u; temp{2,l+2} = y_u;
                temp{1,l+3} = x_l; temp{2,l+3} = y_l;
            end
            % Cleaning up temporal cells
            coor = temp;
            clear('temp');
        end
        hold off;
    end

    axis off;
end
```

Chapitre 3

Étude les graphes de type Sierpinski

Dans ce chapitre,une fractale de Sierpinski ou un joint de Sierpinski est un objet familier étudié par des professionnels des systèmes dynamiques et des probabilités. Nous suggérons la règle de graphe S_n dérivée des premières itérations de n de Le processus qui conduit à l'étude de certaines de ses propriétés et notamment Sa structure périodique, son numéro de contrôle et son numéro de grain différent. Nous proposons également un nouveau graphique, Sierpinski Rombus SR_n, basé sur un triangle. Graphique similaire au graphique Sierpinski Gasket. Sierpinski Rhombus SR_n est obtenu en déterminant Deux copies du diagramme Sierpinski le long de leurs bords latéraux. En outre, nous examinons certaines des bases Caractéristiques de Sierpinski et Sierpinski Rhombus SRn et trouvez Hamiltonicité, rotation et chromaticité du nombre S_n et SR_n.

Section 3.1

Les graphes de type Sierpinski

3.1.1 Introduction et propriétés de base

La structure connue sous le nom de fractale de Sierpinski ou joint de Sierpinski $\sum$ est un objet étudié par les écoliers et les spécialistes des systèmes dynamiques et la probabilité. Il est connue pour être un objet auto-similaire avec fractale dimension $d = \frac{log3}{log2} \simeq 1,585$ *([32]). Cependant, dans cet article, nous considérons la structure finie obtenue en itérant, un nombre fini de fois, le processus qui définit $\sum$, conduisant à (i) le joint Sierpinski fini σ_n, et (ii) le joint Sierpinski associé le graphe S_n, défini comme un avec l'ensemble de sommets V_n égal aux points d'intersection des segments dev ligne dans σ_n, et l'ensemble d'arêtes*

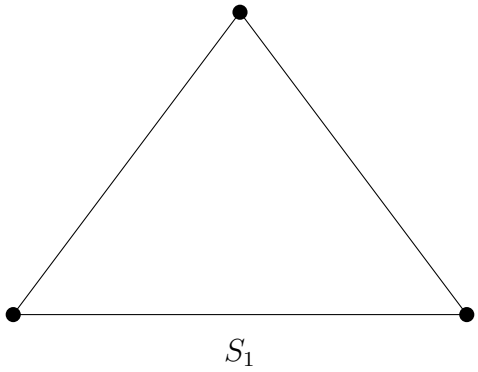


FIGURE 3.1 – S_1

E_n constitué des segments de ligne de reliant deux sommets, voir la figure 3.2 pour une représentation de $S2, S3$ et $S4$.
Il est immédiat que $S_n + 1$ se compose de trois copies de S_n que nous appellerons en haut, en bas gauche et en bas droite composantes de S_{n+1} et désignent respectivement $S_{n+1,T}, S_{n+1,L}$ et $S_{n+1,R}$ (Figure 3.3).
Tout d'abord, nous mentionnons l'ensemble des travaux qui traitent de simples marches aléatoires et Mouvement brownien sur le "graphe infini de Sierpinski" et le joint de Sierpinski respectivement. Une publication typique dans ce genre est celle de Teufl [29], où une forte le résultat de déplacement moyen est prouvé pour une marche aléatoire sur un graphe de Sierpinski c'est une version infinie du graphe S_n défini ci-dessus mais avec chaque arête étant de longueur un et avec chaque sommet ayant le degré quatre dans notre cas, tous mais trois sommets ont un degré quatre et les arêtes peuvent être arbitrairement courtes. Plusieurs références clés peuvent être trouvées dans l'article de Teufl.
Deuxièmement, dans [25], par exemple, les auteurs étudient les nombres croisés pour"Graphiques de type Sierpinski", qui sont des versions étendues des "graphes de Sierpinski" $S(n, k)$ étudié pour la première fois dans [26]. Ces graphiques été motivés par la topologie études de l'espace Lipscomb qui généralise le joint de Sierpinski et sont défini comme suit : $S(n, k)$ a un ensemble de sommets $\{1, 2, ..., k\}^n$, et il y a une arête entre deux sommets $u = (u_1, ..., u_n)$ et $v = (v_1, ..., v_n)$ ssi il y a un $h \in [n]$ tel que

- $u_j = v_j pour j = 1, ..., h - 1;$
- $u_h \neq v_h; et$
- $u_j = v_h; v_j = u_h pour j = h + 1, ..., n.$

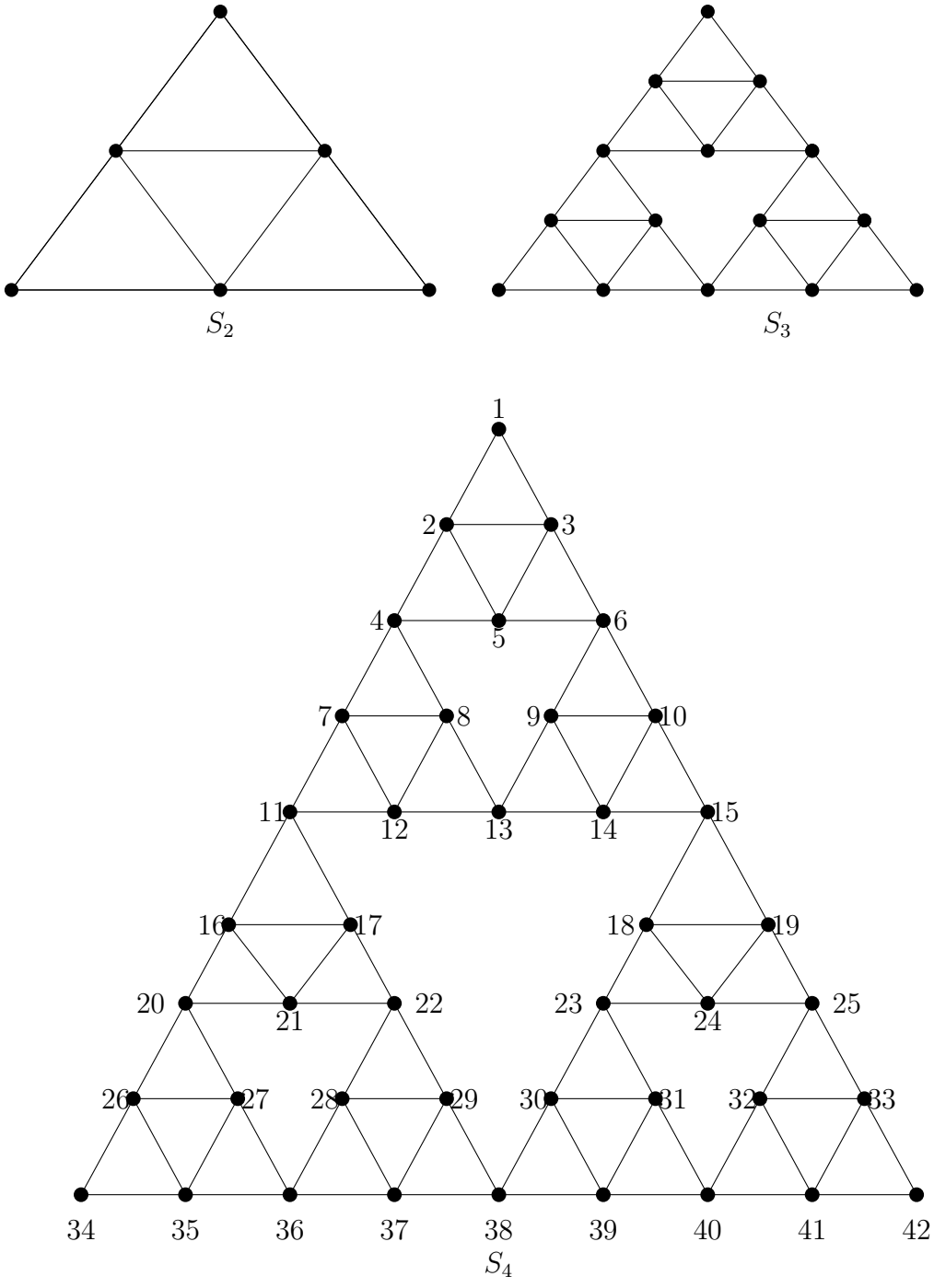


FIGURE 3.2 – triangle de sierpinski S_n

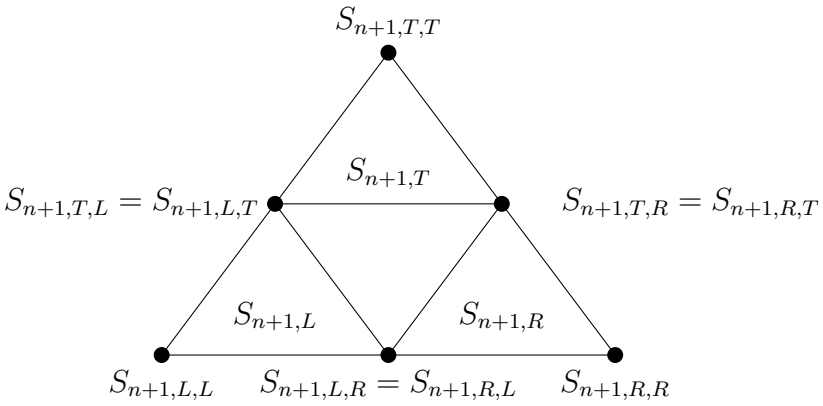


FIGURE 3.3 – 2

Une connexion intressante est que le graphe $S(n,3)$,$n \geq 1$ est isomophe au graphe du jeu de la tour de Hano avec n disques : voir [16] pour une revue populaire et [24] pour une liste de références suivantes. Après avoir discuté de certains résultat de base dans cette section, nous démontrerons que S_n est hamiltonien et pancyclique (c'est-à-dire qu'il a des cycles pour tout tailles). on définit le nombre de dominanation de S_n, provant au qu'il a une efficacité asymptotiquement de 90%.
En contraste frappant avec les graphes de Sierpinski pour [26]
il a été révélépar Klavvzar, Milutinovic et Petr [27] que les graphes $S(n,k)$ ont Les groupes dominants, c'est- à -dire qu'ils sont efficaces à 100%.

Proposition 3.1.1 *S_n a $\frac{3}{2}(3^{n-1}+1)$ sommets et 3^n arêtes.*

Preuve : *Pour construire S_{n+1} à partir de S_n, nous ajoutons un triangle orienté vers le bas dans chacun des 3^{n-1} triangles orientés vers le haut de S_n. Ainsi, nous ajoutons 3^n points. En d'autres termes,*

$$\begin{aligned} |V_{n+1}| &= |V_n| + 3^n \\ &= |V_1| + \sum_{i=1}^{n} 3^i \\ &= \frac{3}{2} * (3^n + 1), \end{aligned} \tag{3.1}$$

Exemple 3.1.2 *pour le graphe S_3 et de la Figure 3.2 Ona $|V_3| = \frac{3}{2}(3^{n-1}+1) = \frac{3}{2}(3^2+1) =$* 15 ,

comme affirmé. Le nombre d'arêtes dans S_n peut maintenant être facilement déterminé en utilisant le fait que la somme des degrés des sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes :

$$\begin{aligned} |E_n| &= \frac{1}{2} * \sum_{j=1}^{|V_{n+1}|} d_G(v_j) \\ &= \frac{1}{2} * (4 * \frac{3}{2}(3^{n-1} - 1) + 2 * 3) \\ &= 3^n, \end{aligned} \tag{3.2}$$

Exemple 3.1.3 *pour le graphe S_3 et de la Figure3.2 Ona $|E_n| = 3^n = 3^3 = 27$*

complétant la preuve. Notez qu'une autre preuve de la proposition 1 peut être basée sur les faits que $|V_{n+1}| = 3|V_n| - 3et|E_{n+1}| = 3|E_n|$.

3.1.2 La coloration

Proposition 3.1.4 *S_n est proprement tricolore, c'est-à-dire $\chi(S_n) = 3$ pour chaque n.*

Preuve *clairement, $\chi(S_1) = 3$ Supposons $\chi(S_n) = 3$. Couleur S_n avec trois couleurs . Nous avons maintenant correctement 3 couleurs S_{n+1} de la manière suivante : Après avoir inséré un triangle orienté vers le bas dans chaque triangle orienté vers le haut de S_n, chaque sommet ajouté se voit attribuer une couleur précédemment utilisée différente des couleurs du sommets de S_n qui lui sont adjacents.*

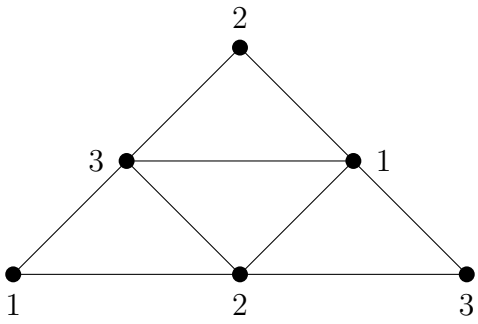


FIGURE 3.4 – Exemple d'un graphe $\chi(S_2) = 3$

3.1.3 Hamiltonicité

Nous commençons par un lemme important :

Lemme 3.1.5 *S_n a deux chaînes hamiltoniennes, disons H_{n0} et H_{n1}, tous deux commençant à le même sommet de degré deux et se terminant à différents sommets de degré deux.*

Preuve *Le lemme est clairement vrai pour S_1.*
Supposons que ce soit vrai pour S_n. Considérons S_{n+1}, qui est une triple "répétition" de S_n, comme mentionné dans la section 1,
ie, il se compose des trois copies ci-jointes $S_{n+1,T}, S_{n+1,L}$ et $S_{n+1,R}$ de S_n.
Considérons une chaîne hamiltonienne de $S_{n+1,T}$, allant du sommet supérieur (de degré 2) de $S_{n+1,T}$ au sommet supérieur de $S_{n+1,R}$. Utiliser une autre hamiltonienne chaîne (garanti par l'hypothèse d'induction), nous passons de ce sommet au sommet gauche de $S_{n+1,R}$. Enfin, nous prenons la chaîne hamiltonienne de $S_{n+1,L}$ commençant à son sommet droit et se terminant à son sommet gauche, mais avec une modification critique , à savoir éviter le sommet supérieur de $S_{n+1,L}$.
De cette façon , nous avons construit une chaîne hamiltonienne de S_{n+1} de son sommet supérieur à sa gauche. Un argument similaire est utilisé si la chaîne doit se terminer par le sommet droit de S_{n+1}. Nous simplifions ensuite notre notation. Les sommets supérieur, gauche et droit de $S_{n+1,T}$ seront désignés respectivement par $S_{n+1,T,T}, S_{n+1,T,L}$ et $S_{n+1,T,R}$. D'autres sommets critiques dans S_{n+1} sont désignés de manière analogue par $S_{n+1,L,T}$, $S_{n+1,L,L}$, $S_{n+1,L,R}$, $S_{n+1,R,T}$,
$S_{n+1,R,L}$ et $S_{n+1,R,R}$; bien sûr, nous avons $S_{n+1,T,R} = S_{n+1,R,T}$; $S_{n+1,R,L} = S_{n+1,L,R}$; et $S_{n+1,L,T} = S_{n+1,T,L}$. Voir la figure3.3.

Théorème 3.1.6 *S_n est hamiltonienne pour chaque n.*

Preuve *Par le lemme 3.1.5, on prend une chaîne hamiltonienne de $S_{n+1,T}$ qui se déplace de $S_{n+1,T,L}$ à $S_{n+1,T,R}$. Ensuite, prenez une chaîne hamiltonienne de $S_{n+1,T,R}$ à $S_{n+1,R,L}$ et enfin passer de ce sommet à notre sommet de départ en utilisant une autre hamiltonienne chaîne de S_n. Cela nous donne un cycle hamiltonien pour S_{n+1}.*

3.1.4 Nombre de domination

Les sommets de trois degrés deux $\{v_T, v_{L,} v_R\}$ de S_n seront appelés "sommets de coin" et les trois sommets $S_{n,T,R}, S_{n,R,L}$ et $S_{n,L,T}$ seront appelés le "milieu sommets "de S_n. Soit $S'_n = S_n \setminus \{v_T, v_L, v_R\}$.

Théorème 3.1.7 *Pour tout $n \geq 4$ on a*

$$\gamma_n = 3 * \gamma_{n-1} \tag{3.3}$$

Preuve *Le fait que $\gamma_n \leq 3\gamma_{n-1}$ est une conséquence triviale de la décomposition de S_{n+1} en ses trois composants. Il est immédiat que $\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = 2$; et $\gamma_3 = 3$. Nous vérifions ensuite que les deux parties du résultat sont vraies pour $n = 4$. Notez d'abord que $\gamma_4 \leq 9$. Aussi si $\gamma_4 = 8$, nous contredisons le fait que pour tout graphe G de degré maximum $\triangle|\gamma(G|\,(\triangle +1) \geq |V(G)|$.*

3.1.5 Diamètre

Lemme 3.1.8 *$diam(S_n) = 2^{n-1}$.*

Preuve *Le fait que $n \geq 2^{n-1}$ est évident. Nous utilisons l'induction pour l'inverse inégalité. Le résultat est clairement vrai pour $n = 1$. Supposons qu'il soit vrai pour n. Soit x, y deux points quelconques dans (sans perte de généralité) $S_{n+1,T}$ et $S_{n+1,L}$ respectivement. Tout chaîne entre x et y doit passer par $S_{n+1,L,T}$ que nous désignera par brièveté z. Nous avons donc*

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y) \quad \leq 2n - 1 + 2n - 1 = 2n, \tag{3.4}$$

comme demandé.

Lemme 3.1.9 *$ST(a) \geq ST(v)$ pour chaque $v \in S_n$, où $ST(v) = \sum_{u(S_n)} 2^{d(u,v)}$.*

Preuve. *Nous procédons par induction. Le résultat est facile à vérifier pour S_1 et S_2. Supposons que c'est vrai pour Sn. Dans S_{n+1}, notons les sommets $S_{n+1,T,T}, S_{n+1,L,T}$, et $S_{n+1,R,T}$ par a, b et c respectivement. Soit d et e des sommets arbitraires dans $S_{n+1,T}$ et $S_{n+1,L} \cup S_{n+1,R}$ respectivement. D'après le lemme 3.1.8, nous avons*

$$\begin{aligned} &d(a,e) = 2^{n-1} + min\{d(b,e), d(c,e)\}, \\ &\quad et \\ &d(d,e) = min\{d(d,b) + d(b,e), d(d,c) + d(c,e)\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Puisque, cependant, $min\{d(b,e), d(c,e)\} = d(\alpha, e)$, où $\alpha = b$ ou $\alpha = c$, il suit que

$$d(d,e) \leqslant d(d,\alpha) + d(\alpha,e) \leqslant 2^{n-1} + d(\alpha,e) = d(a,e). \tag{3.6}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} ST(d) &= \sum_{u \in S_{n+1}} 2^{d(d,u)} \\ &= \sum_{u \in S_{n+1,T}} 2^{d(d,u)} + \sum_{u \in \left[S_{n+1,L} \cup S_{n+1,R}\right] \setminus \{b,c\}} 2^{d(d,u)} \\ &\leqslant \sum_{u \in S_{n+1,T}} 2^{d(d,u)} + \sum_{u \in \left[S_{n+1,L} \cup S_{n+1,R}\right] \setminus \{b,c\}} 2^{d(a,u)} \\ &\leqslant \sum_{u \in S_{n+1,T}} 2^{d(a,u)} + \sum_{u \in \left[S_{n+1,L} \cup S_{n+1,R}\right] \setminus \{b,c\}} 2^{d(a,u)} \\ &= ST(a), \end{aligned} \tag{3.7}$$

où l'avant-dernière ligne ci-dessus suit en raison de l'hypothèse d'induction.

3.1.6 RESULTAT REMARQUABLE

Graphe Siepinski *S_n est un graphe simple non orienté est défini par deux ensembles finis non vide, un ensemble des sommets V_n et un ensemble des arêtes E_n.*

- *S_n est un graphe connexe*
- *n'est pas complet*
- *n'est pas un arbre*
- *S_n n'est pas eulérien, car il a des sommets de degré impair.*

Section 3.2

Les graphes de type Sierpinski- Rhombus

Définition 3.2.1 *une chaînes - Somme est une manière de combiner deux graphes en les collant le long d'un chaînes. Si deux graphes G et H, chacun contient un chaînes d'égale longueur, la chaîne - Somme de G et H est formé à partir de leur union disjointe en identifiant une paire de sommets dans ces deux chaînes pour former une seule chaînes partagé.*

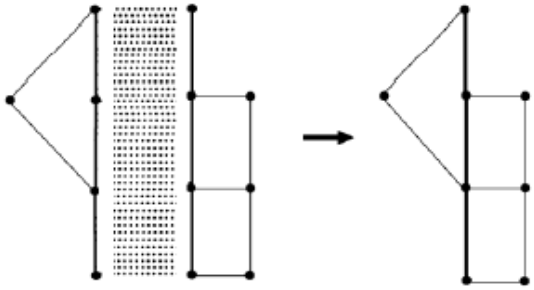


FIGURE 3.5 – chaîne - Somme de deux graphs

Les graphes sont formés en prenant la chaînes - Somme de deux graphes triangulaires, où le chaîne le long de l'un de leurs côtés est considéré.

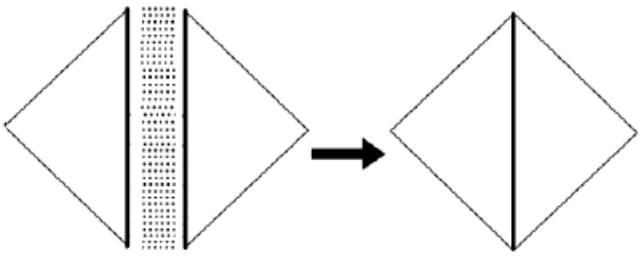


FIGURE 3.6 – chaînes - Somme de deux graphes triangulaires.

Définition 3.2.2 *Un losange Sierpinski de niveau n [noté SR_n], est obtenu en identifiant les arêtes dans deux graphes Sierpinski S_n le long d'un de leurs côtés.*

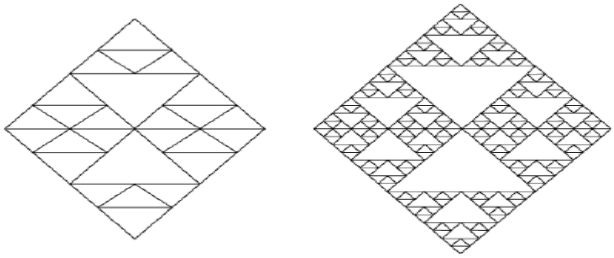


FIGURE 3.7 – Sierpinski-Rhombus, SR_3 et SR_5.

3.2.1 Sierpinski-Rhombus SR_n

Sierpinski-Rhombus SR_n se compose de deux exemplaires de Sierpinski S_n. Les quatre sommets de SR_n sont notés $SR_{n,T,T}$, $SR_{n,R,R}$, $SR_{n,B,B}$ et $SR_{n,L,L}$. SR_n peut être décomposé en quatre parties : Le triangle supérieur Sierpinski Joint de niveau $n-1$ [noté ($S_{n,T}$)], le Sierpinski gauche Rhombus de niveau $n-1$ [noté ($SR_{n,L}L$)], le losange droit de joint de Sierpinski de niveau $n-1$ [noté ($SR_{n,R}$)] et le triangle inférieur de joint de Sierpinski de niveau $n-1$ [noté ($S_{n,B}$)].

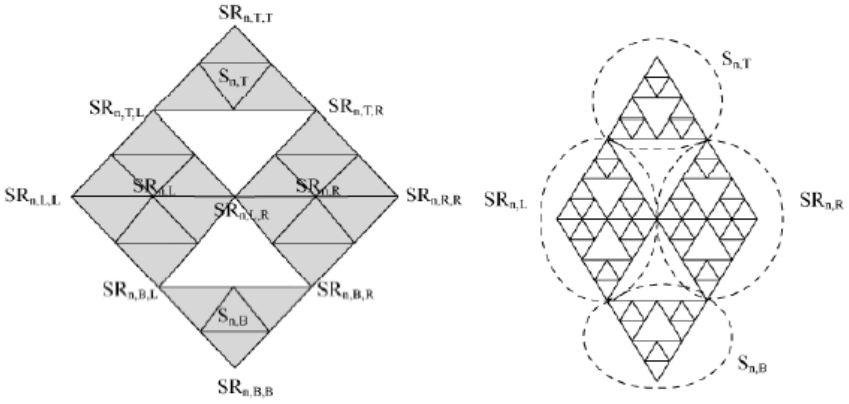


FIGURE 3.8 – Joint Sierpinski-Rhombus SR_n.

Théorème 3.2.3 *Sierpinski-Rhombus SR_n a $3^n - 2^{n-1} + 2$ sommets .*

Preuve : *Pour construire, SR_{n+1} à partir de SR_n par recurrence, on pose la propriété suivant : SR_n admet $3^n - 2^{n-1} + 2$ sommets. Montrons que SR_1 est vrai*

$$\begin{aligned} |SR_1| &= 2|S_1| - 2 \\ &= 2 * 3 - 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

alors SR_1 est vrai Supposons que SR_n est vrai i.e on montrons que SR_{n+1} est vrai

$$\begin{aligned} |V_{n+1}| &= |V_n| + 2 * 3^n - 2^{n-1} \\ &= 3^n - 2^{n-1} + 2 + 2 * 3^n - 2^{n-1} \\ &= 3 * 3^n - 2 * 2^{n-1} + 2 \\ &= 3^{n+1} - 2^n + 2 \end{aligned}$$

Théorème 3.2.4 *Sierpinski-Rhombus SR_n a $2 * 3^n 2^{n-1}$ arêtes.*

Preuve : *comme affirmé. Le nombre d'arêtes dans SR_n peut maintenant être facilement déterminé en utilisant le fait que la somme des degrés des sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes :*

$$\begin{aligned} |E_n| &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{|V_n|} d_G(v_j) \\ &= \frac{1}{2}[2 * 2 + 2 * 3 + 6(2^{n-1} - 1) + 4(3^n - 2^n - 1)] \\ &= 2 * 3^n - 2^{n-1} \end{aligned} \tag{3.8}$$

complétant la preuve.

Proposition 3.2.5 *A partir de la construction de SR_n, nous observons ce qui suit,*

- *1. La connectivité des sommets est 2 et la connectivité des arêtes est également 2.*
- *2. SR_n n'est pas eulérien, car il a des sommets de degré impair par 1.2.1.*
- *3. La couverture de cycle disjoint d'arête n'existe pas pour SR_n, car il a un degré impair.*

Afin d'améliorer ou d'augmenter l'efficacité de la transmission des messages, nous devons minimiser le diamètre du graphe. La distance entre deux sommets x, y dans un graphe connexe G est la longueur du chaîne le plus court (x, y) chaîne et est notée $d(x, y)$. Le diamètre $d(G)$ d'un graphe connexe G est défini comme $max\{d(x, y) : x, y \in V(G)\}$ [20].

Théorème 3.2.6 *Le diamètre du Sierpinski-Rhombus SR_n est 2^n, pour $n \geq 1$ L'étiquetage du quotient de SR_n est défini comme le graphe à quatre sommets spéciaux (1...1), (2...2), (3...3) et (4...4) appelés les sommets extrêmes de SR_n, avec les sommets de la forme $(u_0, u_1, ..., u_r)\{i, j\}$, $1 \leq n-2$, $i < j$ où tous les $u_k s$, i et j proviennent de$\{1, 2, 3, 4\}$ et $(u_0, u_1, ..., u_r)$ est appelé le préfixe de $(u_0, ..., u_r)\{i, j\}$. (Voir Figure 3.9.)*

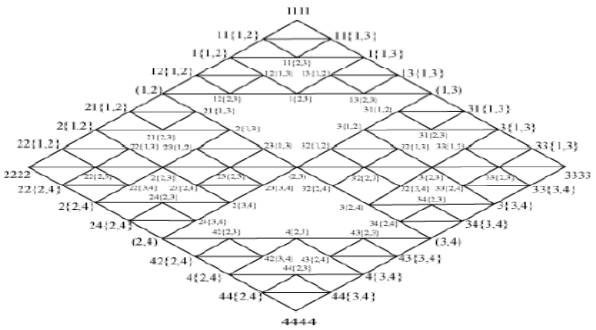


FIGURE 3.9 – Étiquetage du quotient de SR_4 .

Une coloration k-vertex de G est une affectation de k couleurs aux sommets de G. La coloration est correcte si aucun deux sommets adjacents distincts n'ont la même couleur. G est k-vertex colorable si G a une coloration k-vertex appropriée abrégée en k-colorable. Le nombre chromatique, $\chi(G)$ de G est le k minimum pour lequel G est k-colorable. Si $\chi(G) = k$, alors G est dit k-chromatique.

Théorème 3.2.7 *Le nombre chromatique de SR_n est 3, pour tout $n \geq 1$.*

Preuve : *Clairement,$\chi(SR_1) = 3$. Supposons, $\chi(SR_{n-1}) = 3$. La moitié supérieure de SR_n peut être colorée avec exactement trois couleurs . Les sommets restants dans la moitié inférieure de SR_n sont colorés comme suit : Le sommet (4...4) aura la même couleur que (1...1). Les autres sommets de la moitié inférieure de SRn seront de la forme $(u_0, u_1, ..., u_r)\{i, j\}, 0 \leq n-2, i < j$, où*

$(u_0, u1, ..., u_r, i, j) \in \{2, 3, 4\}$..... *(i)*
En remplaçant le chiffre "4" par "1", nous obtenons, $(u_0, u_1, ..., u_r)\{i, j\}, 0 \leq r \leq n-2, i < j$ *où*
$(u_0, u1, ..., u_r, i, j) \in \{1, 2, 3\}$..... *(ii)*
Maintenant, les sommets restants dans (i) *devraient prendre la même couleur que dans* (ii)*. Par exemple, remplacez* 4 *par* 1 *au sommet* $4\{4, 2\}$ *nous obtenons le sommet* $1\{1, 2\}$*. Par conséquent,* $4\{4, 2\}$ *aura la même couleur que* $1\{1, 2\}$*. Une chaîne qui contient chaque sommet de* G *est appelé une chaîne hamiltonienne. Un cycle qui contient chaque sommet de* G *est appelé cycle hamiltonien.* G *est dit hamiltonien s'il contient un cycle hamiltonien.* G *est Hamiltonien - connexe, s'il existe une chaîne hamiltonienne entre chaque paire de sommets dans* G *[28].*

Lemme 3.2.8 *SR_n a deux chaînes hamiltoniennes entre le sommet le plus haut $SR_{n,T,T}$ et le sommet le plus bas $SR_{n,B,B}$. De plus, il existe des chaînes hamiltoniennes du sommet le plus haut/bas $SR_{n,T,T}/SR_{n,B,B}$ au sommet le plus à gauche/droit $SR_{n,L,L}/SR_{n,R,R}$.*

le lemme est vrai pour SR_1 dans les deux cas (c'est-à-dire de $SR_{n,T,T}$ à $SR_{n,B,B}$ et de $SR_{n,T,T}/SR_{n,B,B}$ à $SR_{n,L,L}/SR_{n,R,R}$). Supposons que ce soit vrai pour SR_n. Considérons

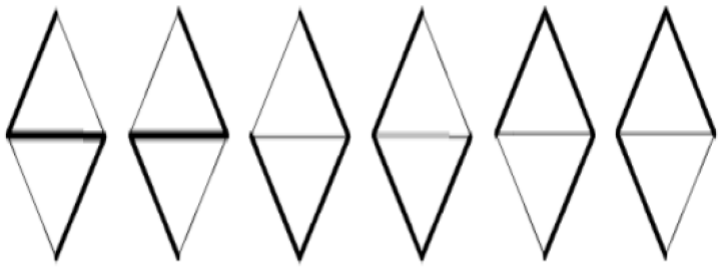


FIGURE 3.10 – chaînes hamiltoniennes dans Sierpinski-Rhombus, SR_1

SR_{n+1}, qui se compose de $S_{n,T}$, $SR_{n,L}$, $SR_{n,R}$ et $S_{n,B}$ comme mentionné dans cette section . Cas (i) : Considérons une chaîne hamiltonienne de $S_{n,T}$ se déplaçant à partir du sommet supérieur de $S_{n,T}$ au sommet de $SR_{n,L}$. Suivi par la chaîne hamiltonienne (garanti par l'hypothèse d'induction) on passe du sommet supérieur de $SR_{n,L}$ au sommet droit $SR_{n,L,R}$. Suivi par la chaîne hamiltonienne (garanti par l'hypothèse d'induction) on passe de ce sommet au sommet inférieur $SR_{n,B,R}$ de $SR_{n,R}$, mais avec une modification critique, en évitant

le sommet $SR_{n,T,R}$ de $SR_{n,R}$. Enfin, nous considérons la chaîne hamiltonienne de $S_{n,B}$ commençant à son sommet droit $SR_{n,B,R}$ et se terminant à son sommet inférieur $SR_{n,B,B}$ (avec une modification critique, en évitant le sommet gauche $SR_{n,B,L}$) de $S_{n,B}$. Ainsi, nous avons construit une chaîne hamiltonienne de SR_{n+1} de son sommet le plus haut $SR_{n,T,T}$ à son sommet le plus bas $SR_{n,B,B}$. En considérant la réflexion verticale du chaîne obtenu dans le

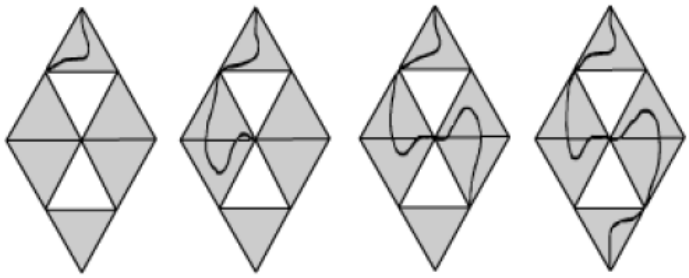


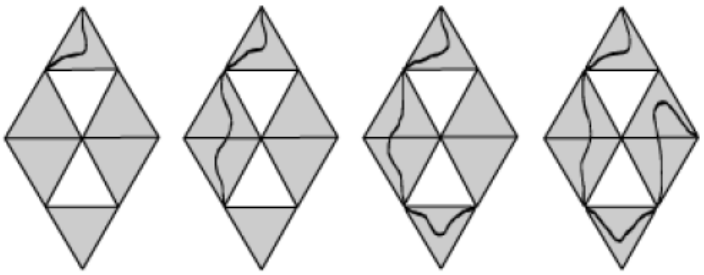
FIGURE 3.11 – chaîne hamiltonienne de $SR_{n,T,T}$ à $SR_{n,B,B}$

cas (i) , nous obtenons une autre chaîne hamiltonienne du sommet supérieur de SR_{n+1} au sommet inférieur. Cas (ii) : Considérons une chaîne hamiltonienne de $S_{n,T}$ se déplaçant du sommet supérieur de $S_{n,T}$ au sommet supérieur de $SR_{n,L}$. Suivi par la chaîne hamiltonienne (garanti par l'hypothèse d'induction) on passe de ce sommet au sommet inférieur de $SR_{n,L}$. Suivi par la chaîne hamiltonienne (garanti par l'hypothèse d'induction) on passe du sommet $SR_{n,B,L}$ au sommet droit $SR_{n,B,R}$ de $S_{n,B}$. Enfin, on prend la chaîne hamiltonienne de $SR_{n,R}$ commençant au sommet $SR_{n,B,R}$ et se terminant au sommet $R_{n,R,R}$ mais avec une modification critique, en évitant les sommets $SR_{n,L,R}$ et $SR_{n,T,R}$ de $SR_{n,R}$. Dans cette méthode, nous avons construit une chaîne hamiltonienne de SR_{n+1} à partir de son sommet le plus haut $SR_{n,T,T}$ jusqu'à son sommet le plus à droite $SR_{n,R,R}$ Par un argument similaire, nous

pouvons obtenir la chaîne hamiltonienne

- *de $SR_{n,T,T}$ à $SR_{n,L,L}$,*
- *de $SR_{n,L,L}$ à $SR_{n,B,B}$ et*
- *de $SR_{n,R,R}$ à $SR_{n,B,B}$.*

. Cycle hamiltonien deSR_n. SR_n est hamiltonien pour chaque n.



hamiltonien de $SR_{n,T,T}$ à $SR_{n,R,R}$

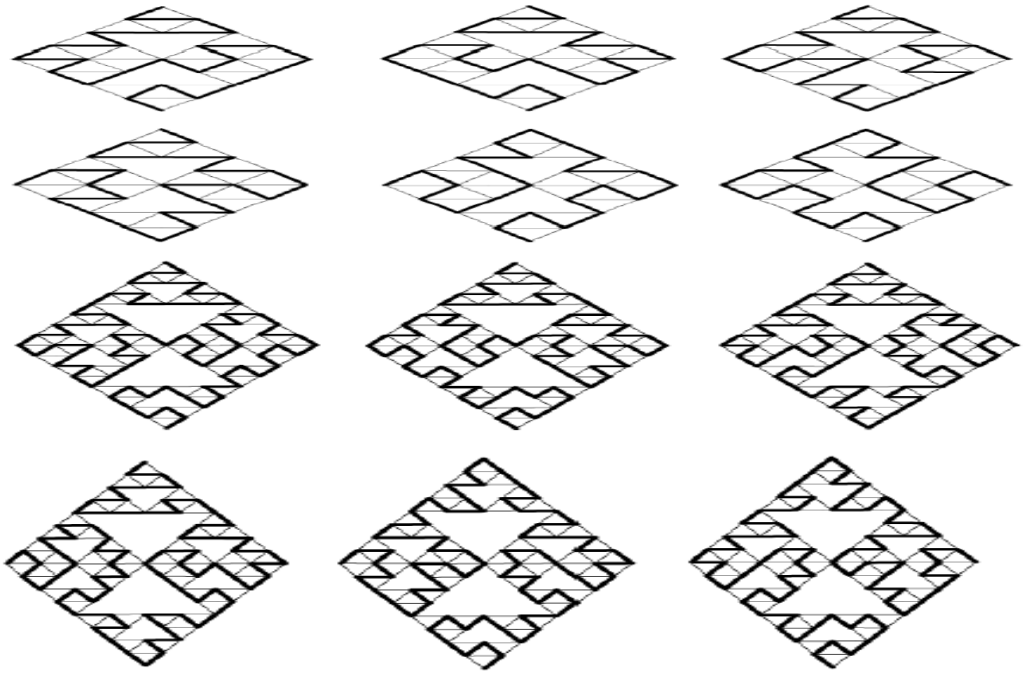


FIGURE 3.12 – chaînes hamiltoniennes dans Sierpinski-Rhombus, SR_3 et SR_4.

Preuve : *On prend la chaîne hamiltonienne de $S_{n+1,T}$ qui passe de $SR_{n+1,T,L}$ à $SR_{n+1,T,R}$. Ensuite, nous prenons la chaîne hamiltonienne de $SR_{n+1,R}$ qui se déplace de $SR_{n+1,T,R}$ vers $SR_{n+1,B,R}$. Ensuite, nous prenons la chaîne hamiltonienne de $S_{n+1,B}$ qui passe de $SR_{n+1,B,R}$ à $SR_{n+1,B,L}$. Et enfin, nous prenons la chaîne hamiltonienne de $SR_{n+1,L}$ qui passe de $SR_{n+1,B,L}$ à $SR_{n+1,T,L}$. Ceci donne le cycle hamiltonien pour SR_n.*

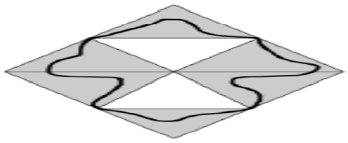


FIGURE 3.13 – Cycle hamiltonien de SR_n.

Lemme 3.2.9 *[19] Chaque chaîne hamiltonienne de S_n, disons, de $S_{n,L,L}$ à $S_{n,R,R}$, peut être séquentiellement réduit en longueur de un à chaque étape, tout en maintenant les sommets de début et de fin, avec la fin du processus dans une chaîne de $S_{n,L,L}$ à $S_{n,R,R}$ le long de la base de S_n.*

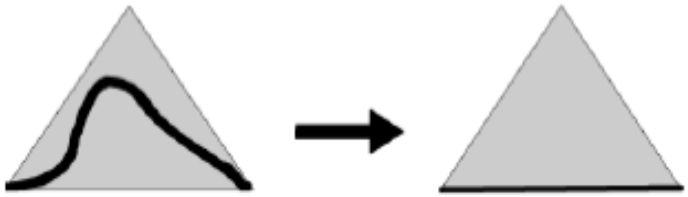


FIGURE 3.14 – chaîne hamiltonienne de S_1.

3.2.2 RESULTAT REMARQUABLE

Sierpinski-Rhombus *SR_n est un graphe simple non orienté est défini par deux ensembles finis non vide, un ensemble des sommets V_n et un ensemble des arêtes E_n.*

- *SR_n est un graphe connexe*
- *n'est pas complet*
- *n'est pas un arbre*
- *SR_n n'est pas eulérien, car il a des sommets de degré impair.*

Conclusion et perspectives

Dans Cette thèse, nous avons donné un bref aperu sur le développement théorique des fractales, mis en évidence leurs propriétés fondamentales, les différentes structures géométriques plus précisément, les graphes de type sierpinski et plus particulièrement le triange de Sierpinski S_n et Sierpinski-Rhombus SR_n , et exposé leurs nombreuses applications. Nous avons montré que des structures à caractère fractal existent dans la nature, grâce à leurs caractéristiques particulières. Le concept des fractales offre une comprhension sur de nombreux phénomènes naturels ou artificiels par exemple on utilise lapproche fractale en géophysique en biologie, en géologie et en finance ,et il est devenu donc un nouveau champ des mathématiques qui permet d'étudier avec succès plusieurs objets dont la forme est extrêmement irrégulier.

Après l'avoir un petite rappele sur la théorie des graphes, nous avons regardé le côté annalytique et graphique pour présenter des graphes de type Sierpinski qui a des applications dans les domaines systèmes dynamiques et probabilités [32] .

Plusieurs questions se révelent d'ores et déjà intéressantes.

- *Est-ce quand peut faire un étude graphique, comme les triangles de Sierpinski, pour les flocons de neige, les ramifications des branches et les fougères ?*
- *Y-a-t-il une méthode générale pour représenter graphiquement les objets de type fractal ?*

Nous a permis également d'acquérir des compétences en théorie des graphes et en théorie de la mesure pour pouvoir accéder à des objets ou des problèmes dans la nature.

Références bibliographiques

[1] Bouchou A. Graphe et modlisation, 2018.

[2] Vuong A. and Wyckoff I. Conditions for weighted cover pebbling of graphs. arXiv preprint math/0410410*, 2004.*

[3] K Appel, Wolfgang Haken, et al. The existence of unavoidable sets of geographically good configurations. Illinois Journal of Mathematics*, 20(2) :218–297, 1976.*

[4] Bollobás B. and Cockayne E. J. Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance. Journal of Graph Theory*, 3(3) :241–249, 1979.*

[5] C Berge. Graphes et hypergraphes (2ème éd.). Dunod, Paris*, 1973.*

[6] Berger M. A Panoramic View of Riemannian Geometry*. Springer, France, 2002.*

[7] Bourbaki N. Topologie générale Chapitres 1-4. Éléments de mathémtique*. Springer-Verlag Berlin, 2007.*

[8] Bouziad A. and Calbrix J. Théorie de la mesure et l'intégration*. Université de Rouen, 1993.*

[9] BERGE C. Graphes et hypergraphes*. DUNOD Paris, 1970.*

[10] MULER D. Introduction la thorie des graphes*. City Edition,France, 2007.*

[11] Engelking R. General Topology*. Heldermann Verlag Berlin, 1989.*

[12] Falconer K.J. The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.*

[13] Falconer K.J. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, New York, 2ème edition, 1990.*

[14] Edgar G. Measure. Topology, and Fractal Geometry. Springer-Verlag*, 1990.*

[15] Herbin R. et Gallouët T. Mesure et Integation*. Université de Provence, 2008.*

[16] Touhey K. Sierpinski gasket graphs and some of their properties. http ://www.math.ubc.ca/cass/courses/m308-02b/projects/touhey/.*, 2005.*

[17] Foissy L. Cours thorie des graphes, 2010.

[18] Lajoie J. La géométrie fractale. Master's thesis, Université du Québec à trois-rivières, 2006.

[19] Teguia A. M. and A.P. Godbole. Sierpinski gasket graphs and some of their properties. arXiv preprint math/0509259*, 2005.*

[20] Paul Manuel, Indra Rajasingh, and Bharathi Rajan. Prabha, augmented butterfly network. J. Combin. Inform. Syst. Sci*, 33 :27–35, 2008.*

[21] Brouks R.L. On colouring the nodes of a network. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 37, pages 194–197. Cambridge University Press, 1941.*

[22] Rudin W. Principles of Mathematical Analysis*. Dunod, 3ème edition, 1976.*

[23] Rudin W. Analyse réelle et complexe. Cours et exercices*. Dunod, 3ème edition, 1987.*

[24] Klavžar S. Sierpinski gasket graphs and some of their properties. http ://www-mat.pfmb.uni-mb.si/personal/klavzar/hanoi.htm*, 2005.*

[25] Klavžar S. and Mohar B. Crossing Numbers of Sierpinki-like Graphs*. Institute of Mathematics, Physics, and Mechanics, University of Ljubljana, 2004.*

[26] Klavžar S. and Milutinović U. Graphs s (n, k) and a variant of the tower of hanoi problem. Czechoslovak Mathematical Journal*, 47(1) :95–104, 1997.*

[27] Klavžar S., Milutinović U., and Petr C. 1-perfect codes in sierpiński graphs. Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 66(3) :369–384, 2002.*

[28] Razavi S. and Azad H.S. The triangular pyramid : Routing and topological properties. Information Sciences*, 180(11) :2328–2339, 2010.*

[29] Elmar Teufl. The average displacement of the simple random walk on the sierpiński graph. Combinatorics, Probability and Computing*, 12(2) :203–222, 2003.*

[30] Meyer W. Equitable coloring. The American Mathematical Monthly*, 80(8) :920–922, 1973.*

[31] Sierpinski W. Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. CR Acad. Sci.*, 160 :302–305, 1915.*

[32] Edgar G. Measure ,topology ,and fractal geometry. springer Science & Business Media., 2007.