République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département De Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

pour l'obtention du diplome de

Master en mathématiques

Spécialité : Analyse Mathématique et Application

Présenté par

RAHMOUNI Khaoukha Fella

intitulé

Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire

---

Evaluer le jury composé de :

Directeur de Mémoire :	Mr.MEKDACHE Nour-Eddine	MAA	U.Y.F.M
Examinateur 1 :	Mr.MAALOUM Khaled	MAA	U.Y.F.M
Examinateur 2 :	Mr.KRIMI Mouhamed	MAA	U.Y.F.M

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2019/2020

Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire

Dédicace

Remerciments et louanges à Allah Tout Puissant pour m'avoir donné la foi et la force d'accomplir ce modeste travail. A mon prophète Mouhamed, que la prière d'Allah et son soient sur lui, qui dit: ≪ Celui qui prend un chemin pour rechercher la science, Allah lui fait prendre par cela un chemin vers le paradis ≫. Au symbole de douceur de tendresse, d'amour et d'affection, ma mère pour son soutien incessant. A mon père pour les sacrifices qu'il a consentis pour mon éducation. Que ce travail soit le témoignage de l'amour que je lui avoue. A mes chers amis qui m'ont soutenu et encouragé. A mes soeurs. A mes frères, sans oublier mon frère Lamine en France. En leur témoignant mon amour et ma prefonde admiration. Que Dieu vous protège et vous prête bonne santé et longue vie.

♡

❖ *FELLA RAHMOUNI*

Remerciments

Après avoir rendu grace à dieu le tout puissant et le miséricordieux.
Je remercie mes très chers parents pour leur soutien moral et leur encouragement.

Mes vifs remerciments vont à mon encadrer :
Monsieur MEKDACHE Nour Eddine,
pour m'avoir proposé ce sujet,
ses importantes orientations, sa patience et ses conteils m'ont parmis de surmonterde nombreuses difficultés liées ce sujet.

Je adresse également un grand merci
à tous les enseignants de département de Mathématiques ainsi que l'administration en général.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce travail.

Titre :Existence et unicité de la solution d'une équation différentielle fractionnaire

Résumé : Dans ce mémoire, nous présentons l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire au sens de Caputo. Cet résultat a été obtenu par l'utilisation du théorème de point fixe de Schaefer et le théorème de point fixe de Banach.

Mots clés : Equation différentielle fractionnaire, dérivée fractionnaire de type Caputo, intégral fractionnaire, point fixe, existence, unicité.

Faculté des sciences. Département de Mathématiques et Informatique.
Univercité Dr. Yahia Farès Médéa - Pôle urbain - 26000. Médéa. Algérie.

Abstract : In this paper, we present existence of solution for fractional order differential equation in the sense of Caputo, for boundary value problems. This result were obtained by using the Schaefer's fixed point theorem and Banach fixed point theorem .

Keywords : Fractional differential equation, fractional derivative Caputo type, fractional integral, fixed point, existence, uniqueness.

NOTATION

$L^p([a,b])$	: L'espace des fonctions p^{me} intégrables sur $[a,b]$.
$L^\infty([a,b])$	: L'espace des fonctions essentiellement bornées sur $[a,b]$.
$C(X,Y)$	: L'espace des fonctions continues de X dans Y.
p.p.	: Presque partout.
$\mathcal{L}(\cdot)$	: La transformée de Laplace.
$\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$	: La transformée de Laplace inverse.
$\Gamma(\cdot)$	: La fonction Gamma d'Euler.
$B(\cdot,\cdot)$	: La fonction Bêta.
I^n	: L'intégration itéré d'ordre entier.
I^α	: L'intégration d'ordre α.

D^n : La dérivation d'ordre entier.

${}^{C}D^{\alpha}$: La dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

${}^{RL}D^{\alpha}$: La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

$[\alpha]$: La partie entière de α.

Table des matières

Résumé **I**

Abstract **II**

1 Préliminaire **1**

1.1 Rappels et définitions 1

1.1.1 Espaces des fonctions intégrables 3

1.2 Fonctions Mathématiques Utiles 4

1.2.1 Fonction Gamma 4

1.2.2 Fonction Bêta 6

1.3 Quelques théorèmes du point fixe 8

1.3.1 La contraction de Banach 8

1.3.2 Le théorème du point fixe de Schauder 8

1.3.3 Le théorème du point fixe de Schaefer 8

1.3.4 Le théorème du point fixe de Ascoli-Arzelà 9

2 Calcul Fractionnaire **10**

2.1 Formule de Drichlet 10

2.2 Intégration Fractionnaire 11

2.2.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle [a,b] 11

2.2.2 L'intégrale de Riemann-Liouville 12

2.3 Dérivée de l'intégrale fractionnaire et l'intégrale fractionnaire de dérivée . . . 13
2.4 Dérivation Fractionnaire . . . 15
2.4.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville . . . 15
2.4.2 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . . 16
2.5 Lemmes fondamentaux . . . 18

3 Problème aux limites pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire cas où $0 < \alpha < 1$. 21
3.1 Introduction . . . 21
3.2 Existence et unicité de la solution . . . 21
3.3 Exemple . . . 31

Conclusion 33

Bibliographie 34

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'une des théories qui peut être considérée bien ancienne que nouvelle et qui gagne actuellement que popularité considérable parmi les chercheurs et les mathématiciens dans la science et en ingénierie est celle des calcul fractionnaire (la généralisation de la dérivation et l'intégration classique à un ordre non entier). De nombreux mathématiciens ont contribué au développement de la théorie du calcul fractionnaire jusqu'à la moitié du siècle passé, citons entre autres Laplace (1812), Fourrier (1822), Liouville (1832-1873), Riemann (1847), Grünwald (1867-1872).

Ce travail est dévisés en trois chapitres.

• Le premier chapitre est consacré aux notions de base et outils fonctionnels utilisés dans ce travail.

• la deuxième chapitre est consacré aux notions et les propriétés préliminaires liées aux deux plus importants approches de dérivation fractionnaire : l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo.

• Le dernier chapitre est consacré à l'étude du problème différentielle fractionnaire de type Caputo suivante :

$$^{c}D^{\alpha}y(t) = f(t, y(t)), \quad 0 < \alpha < 1,\ t \in J = [0, T]$$

et la condition initiale suivante :

$$ay(0) + by(T) = c.$$

Où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application lipschitzienne, et a, b, c sont des réelles avec $a + b \neq 0$.

1 Préliminaire

1.1 Rappels et définitions

Dans cette sections, nous présentons les notations et définitions et quelques propriétés préliminaires qui sont utilisées dans ce mémoire.

Définition 1.1.1 *On appelle espace de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduie de la norme.*

Soit $J = [0, T]$, $T > 0$. Notons $C(J, \mathbb{R})$ est l'espace de Banach des fonctions continues définies de J dans $\mathbb{R}$, muni de la norme :

$$\|y\|_\infty = sup\{|y(t)| : t \in J\},$$

où $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

Définition 1.1.2 *[9] Une fonction $f : J \to E$ est dite absolument continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout partition finie $[a_i, b_i]_{i=0}^p$ vérifiant*

$$\sum_{i=0}^{p} (b_i - a_i) < \delta,$$

alors,

$$\sum_{i=0}^{p} \|f(b_i) - f(a_i)\| < \varepsilon.$$

▷ *On note par* $AC^1(J,E)$ *l'espace des fonctions dérivables* $f : J \to E$ *dont la première dérivée est absolument continue.*

Définition 1.1.3 *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach, et* $A : E \to F$ *une application linéaire. On dit que* A *est* ***bornée*** *si elle envoie les parties bornées de* E *sur des parties bornées de* F*.*

Définition 1.1.4 *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach. On appelle* ***opérateur borné*** *toute application linéaire continue de* E *dans* F*.*

Définition 1.1.5 *Soient* E *et* F *deux espaces de Banach et* f *une application définie de* E *à valeurs dans* F*. On dit que* f *est* ***complètement continue*** *si elle est continue et transforme tout borné de* E *en une ensemble relativement compact dans* F*.* f *est dite* ***compacte*** *si* $f(E)$*est relativement compacte dans* F*.*

Définition 1.1.6 *Soient* E *un espace de Banach, et* $A : E \to E$ *un opérateur. On dit que* A *est* ***une contraction*** *(ou contractant), s'il existe une constante* $0 \leq k < 1$ *telle que*

$$\|Ax - Ay\|_E \leq k\|x - y\|_E, \text{ pour tout } x, y \in E.$$

Proposition 1.1.1 *Soit* $C(J,E)$ *l'espace des fonctions continues de* J *vers l'espace de Banach* E *et* M *un sous ensemble de* $C(J,E)$*.*

1. M *est uniformement borné i.e : il existe* $b \geq 0$ *tel que* $\|f\|_\infty \leq b, \forall f \in M$ *;*
2. M *est équicontinu i.e :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_1, x_2 \in J : \|x_1 - x_2\| < \eta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon, \forall f \in M.$$

Définition 1.1.7 *Soit la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. On appelle la transformée de Laplace de $f(t)$, la fonction :*

$$F(s) = \mathcal{L}f(t)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, s \in \mathbb{C}.$$

Définition 1.1.8 *La transformée de Laplace inverse unilatérale $f(t)$ d'une fonction $F(s)$ est définie par :*

$$\mathcal{L}^{-1}F(s) = f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{st}ds.$$

1.1.1 Espaces des fonctions intégrables

Définition 1.1.9 *Une tribu sur $\mathbb{R}^n (n > 0)$ est une famille de parties de $\mathbb{R}^n$ contenant $(\emptyset, \mathbb{R})$, stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable (et donc par intersection dénombrable).*
*Si $\mathcal{B}$ désigne une tribu sur $\mathbb{R}^n$, les éléments de $\mathcal{B}$ s'appellent les **ensembles mesurables**. On dit que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$ est un espace mesurable.*

Définition 1.1.10 *Soit $\mathcal{B}$ une tribu de $\mathbb{R}^n$. Une **mesure positive** μ sur $\mathcal{B}$ est une application de $\mathcal{B}$ dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. *Pour toute famille dénombrable (B_i) d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints on a :*

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty B_i\right) = \sum_1^\infty \mu(B_i),$$

*$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$ est un **espace mesuré**.*

Définition 1.1.11 *Une fonction $F : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ est **mesurable** si l'image réciproque de tout intervalle ouvert de $\bar{\mathbb{R}}$ est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}$.*

Définition 1.1.12 *Soit $\Omega =]a, b[$ tel que $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq +\infty$.*

1. *Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles f sur Ω telles que f est mesurable et*
$$\int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty,$$
2. *Pour $p = +\infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur Ω.*

Théorème 1.1.1 *Soit $\Omega =]a, b[$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$.*

1. *Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :*
$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$
2. *L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :*
$$\|f\|_\infty = inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \ \ p.p \ \ sur \ \ \Omega\}.$$

1.2 Fonctions Mathématiques Utiles

Dans cette section nous donnons les définitions de quelques fonctions spéciales comme la fonction Gamma et la fonction Bêta, qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.2.1 Fonction Gamma

La fonction Gamma est tout simplement la généralisation de la notion de factoriel à tous les nombres réels. Elle est définie par une intégrale impropre.

Définition 1.2.1 *./[3]/*
Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > 0$ la fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante :
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \tag{1.2.1}$$

Propriétés de la fonction Gamma

Quelques propriétés de la fonction Gamma sont données par le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 *La fonction Gamma verifie les propriétés suivantes :*

1. $\Gamma(0^+) = +\infty$.

2. $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x), \quad x > 0$.

3. $\Gamma(x) = (x-1)!\ , \quad \forall x \in \mathbb{N}$.

Comme conséquence de cette propriété, on a :

$$\Gamma(x+1) = x!, \ \ \forall x \in \mathbb{N}.$$

Cas particuliers

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{1-1} dx = 1.$$
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!}\sqrt{\pi}.$$

Exemple 1 *:*

1) Pour $x = \dfrac{1}{2}$ *on a par définition :*

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt,$$

posons

$$t = u^2$$

donc

$$dt = 2udu$$

alors :

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2udu \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du\end{aligned}$$

L'intégrale de Gauss est donnée par :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

d'où

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

2) Pour $x = 0^+$ on a d'aprés les propriétés :

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

alors

$$\begin{aligned}\Gamma(0^+) &= \frac{\Gamma(1)}{0^+} \\ &= \frac{0!}{0^+} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

1.2.2 Fonction Bêta

Définition 1.2.2 *.[3]*

Pour $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x > 0$ et $y > 0$, la fonction Bêta est définie par :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt \tag{1.2.2}$$

Remarque 1 *: La relation entre la fonction Gamma d'Euler et Bêta d'Euler est donnée par :*

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad (x>0, y>0) \tag{1.2.3}$$

Preuve :

Pour $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x > 0$ et $y > 0$, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} u^{x-1}v^{y-1}e^{-u}e^{-v}dudv \\ &= \int_0^{+\infty} u^{x-1}\left(\int_0^{+\infty} v^{y-1}e^{-(u+v)}dv\right)du\end{aligned}$$

posons

$$t = u + v$$

donc

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} u^{x-1}du\int_0^{+\infty}(t-u)^{y-1}e^{-t}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}dt\int_0^{u}(t-u)^{y-1}u^{x-1}du\end{aligned}$$

posons

$$k = \frac{u}{t}$$

alors

$$\begin{aligned}\Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}dt\left(\int_0^{1}(kt)^{x-1}(t-kt)^{y-1}tdk\right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}dt\left((t)^{x+y-1}B(x,y)\right) \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t}(t)^{x+y-1}dtB(x,y) \\ &= \Gamma(x,y)B(x,y)\end{aligned}$$

donc :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

1.3 Quelques théorèmes du point fixe

1.3.1 La contraction de Banach

Théorème 1.3.1 *(Banach)[7]. Soit E un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_E$, et $A : E \to E$ un opérateur contractante c-à-d :*

$$\exists\, 0 \leq k < 1 : \qquad \|Ax - Ay\|_E \leq k \|x - y\|_E , \qquad \forall x, y \in E \tag{1.3.1}$$

Alors, A admet un point fixe unique ie :

$$\exists! u \in E \text{ tel que } Au = u$$

1.3.2 Le théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe suivant détermine seulement l'existence d'un point fixe.

Théorème 1.3.2 *(Schauder)[4]. Soit (X, d) un espace métrique complet, soit C une partie convexe et fermée de X, et soit $T : C \to C$ une application telle que l'ensemble $\{Tu : u \in C\}$ est relativement compact dans X. Alors, T possède au moins un point fixe.*

1.3.3 Le théorème du point fixe de Schaefer

Théorème 1.3.3 *(Schaefer)[2, 6]. Soit $F : C(J, E) \to C(J, E)$ un opérateur continue. Si l'ensemble*

$$E(F) = \{x \in C(J, E) : x = \lambda F(x), \text{ pour un certain } \lambda \in [0, 1]\} ,$$

est bornée. Alors, F possède au moins un point fixe.

1.3.4 Le théorème du point fixe de Ascoli-Arzelà

Théorème 1.3.4 *(Ascoli-Arzelà)[6]. Soit M un sous ensemble de $C(J,E)$, M est relativement compact dans $C(J,E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *L'ensemble M est uniformement borné, i.e : il existe $k>0$ tel que :*

$$\|f(x)\| \leq k, \text{ pour tout } x \in J \text{ et tout } f \in M;$$

2. *L'ensemble M est équicontinu, i.e :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_1, x_2 \in J : \|x_1 - x_2\| < \eta \Rightarrow \|f(x_1) - f(x_2)\| < \varepsilon, \forall f \in M.$$

3. *Pour tout $x \in J$ l'ensemble $\{f(x), f \in M\} \subset E$ est relativement compact.*

2 Calcul Fractionnaire

Dans ce chapitre nous intéressons au calcul intégral fractionnaire et dérivation fractionnaire. On s'intéresse aux deux méthodes de dérivation les plus utilisées : la méthode de Riemann-Liouville et la méthode de Caputo.

2.1 Formule de Drichlet

Soient $f(x, y)$ une fonction continue et α, β deux réels positifs. La formule de Drichlet est :

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} f(x,y) dy = \int_0^t dy \int_y^t (t-x)^{\alpha-1} (x-y)^{\beta-1} f(x,y) dx.$$

Si on prend

$$f(x, y) = g(x)h(y),$$

et

$$g \equiv 1$$

Alors :

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1} h(y) dy = B(\alpha, \beta) \int_0^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} h(y) dy$$

où B est la fonction Bèta.

2.2 Intégration Fractionnaire

Dans cette section, on va définir l'intégral d'ordre fractionnaire au sens de Riemann-Liouville.

2.2.1 L'intégrale fractionnaire sur un intervalle [a,b]

Définition 2.2.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La primitive de f est donnée par :*

$$I^{(1)}f(t) = \int_a^t f(s)ds \tag{2.2.1}$$

Proposition 2.2.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La primitive d'ordre n de f est donnée par :*

$$I^{(n)}f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{(n-1)}f(s)ds \tag{2.2.2}$$

Preuve :

En effet, les primitives d'ordre supérieur sont données par :

$$\begin{aligned} I^{(2)}f(t) &= \int_a^t (I^{(1)}f(s))ds \\ &= \int_a^t ds \int_a^s f(u)du \\ &= \int_a^t \left(\int_a^s f(u)du\right) ds \end{aligned}$$

D'aprés la formule de Drichlet on a :

$$\begin{aligned} I^{(2)}f(t) &= \int_a^t \left(\int_u^t f(u)du\right) ds \\ &= \int_a^t f(u) \left(\int_u^t ds\right) du \end{aligned}$$

alors

$$I^{(2)}f(t) = \int_a^t (t-u)f(u)du$$

De mème pour $n = 3$:

$$\begin{aligned} I^{(3)}f(t) &= \int_a^t (I^{(2)}f(s))ds \\ &= \frac{1}{2}\int_a^t (t-u)^2 f(u)du \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I^{(4)}f(t) &= \int_a^t (I^{(3)}f(s))ds \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{3}\int_a^t (t-u)^3 f(u)du \end{aligned}$$

Par récurrence on trouve :

$$I^{(n)}f(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-u)^{n-1} f(u)du$$

2.2.2 L'intégrale de Riemann-Liouville

Définition 2.2.2 *Soit α un réel positive, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. on appelle l'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre α de f l'intégrale suivant :*

$$I^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt \tag{2.2.3}$$

où Γ est la fonction Gamma.

Proposition 2.2.2 *Pour toute fonction continue f, on a :*

1. $I^{\alpha}(I^{\beta}f(x)) = I^{(\alpha+\beta)}f(x), \qquad (\alpha, \beta > 0).$
2. $\dfrac{d}{dx}(I^{\alpha}f(x)) = I^{\alpha-1}f(x), \qquad (\alpha > 1).$

Preuve :

1.

$$\begin{aligned} I^{\alpha}(I^{\beta}f(x)) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(I^{\beta}f(t))dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t (t-s)^{\beta-1}f(s)ds\right)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}dt\int_a^t (t-s)^{\beta-1}ds \end{aligned}$$

D'aprés la formule de Drichlet, on a :

$$\begin{aligned} I^{\alpha}(I^{\beta}f(x)) &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)ds \\ &= I^{(\alpha+\beta)}f(x). \end{aligned}$$

2.3 Dérivée de l'intégrale fractionnaire et l'intégrale fractionnaire de dérivée

Théorème 2.3.1 *Soit $\alpha > 0$, et f une fonction continue sur $J = [a, b]$. Si Df est continue alors pour tout $x > 0$ on a :*

$$D[I^{\alpha}f(x)] = I^{\alpha}[Df(x)] + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1} \tag{2.3.1}$$

Preuve :

Par définition on a :

$$I^{\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)}f(t)dt.$$

En faisant le changement de variable :

$$t = x - s^{\lambda}$$

avec

$$\lambda = \frac{1}{\alpha}$$

et

$$dt = -\lambda s^{\lambda-1} ds$$

alors on obtient :

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x^{\alpha}}^{0} (s^{\lambda})^{\alpha-1} f(x - s^{\lambda})(-\lambda x^{\lambda-1}) ds$$

ce qui se simplifie :

$$I^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_{0}^{x^{\alpha}} f(x - s^{\lambda}) ds.$$

En utilisant la règle d'intégration de Leibniz

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{0}^{b(t)} f(t,x)dx\right] = f(t,b(t))b'(t) + \int_{0}^{b(t)} \frac{d}{dt} f(t,x)dx$$

on a alors :

$$D[I^{\alpha} f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left[f(0)\alpha x^{\alpha-1} + \int_{0}^{x^{\alpha}} \frac{d}{dx}(x - s^{\lambda}) ds \right].$$

Maintenant, si on inverse le changement de variable c-à-d :

$$t = x - s^{\lambda}$$

donc

$$ds = -\frac{1}{\lambda} s^{1-\lambda} dt$$

on obtiet :

$$D(I^{\alpha} f(x)) = \frac{f(0)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \alpha x^{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{0} \frac{d}{dx} f(t) \left(-\frac{1}{\lambda} s^{1-\lambda} \right) dt$$

En conclusion depuis $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ et $s = (x-t)^{\frac{1}{\lambda}}$ l'équation précédente simplifie à

$$D[I^{\alpha} f(x)] = \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{x} (x-t)^{\alpha-1} \frac{d}{dx} f(t) dt$$

ce qui implique que :

$$D[I^{\alpha} f(x)] = I^{\alpha}[Df(x)] + \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}.$$

2.4 Dérivation Fractionnaire

2.4.1 La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Définition 2.4.1 *Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 \leq \alpha < n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. La dérivée d'ordre α au sens de Riemann-Liouville d'une fonction f est définie par :*

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha} f(x) &= {}^{RL}D^{n}(I^{(n-\alpha)} f(x)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}(\frac{d}{dx})^{n} \int_{a}^{x} (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt \end{aligned}$$

si on suppose que :

$$\beta = n - \alpha, \qquad avec \quad 0 < \beta < 1.$$

on a alors

$${}^{RL}D^{\alpha} f(x) = {}^{RL}D^{n}(I^{\beta} f(x)).$$

Notation : On note l'opérateur D^n, $n \in \mathbb{N}$ différentiation de l'opérateur d'ordre entier c-à-d :

$$D^{n} = \frac{d^{n}}{dt^{n}}.$$

Remarque 2 *La dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est non commultative c-à-d :*

$${}^{RL}D^{m} D^{\alpha} f(t) = {}^{RL}D^{m+\alpha} f(t) \neq {}^{RL}D^{\alpha} D^{m} f(t).$$

Théorème 2.4.1 *.[1, 5]. Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent, pour λ et $\mu \in \mathbb{R}$, alors : ${}^{RL}D^{\alpha}(\lambda f + \mu g)$ existe, et on a :*

$${}^{RL}D^{\alpha}(\lambda f + \mu g)(t) = \lambda {}^{RL}D^{\alpha} f(t) + \mu {}^{RL}D^{\alpha} g(t).$$

Preuve :

$$\begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha}(\lambda f+\mu g)(t) &:= D^{n}I^{n-\alpha}(\lambda f+\mu g)(t) \\ &= D^{n}(\lambda I^{n-\alpha}f(t)+\mu I^{n-\alpha}g(t)) \\ &= \lambda D^{n}I^{n-\alpha}f(t)+\mu D^{n}I^{n-\alpha}g(t) \\ &= \lambda\,{}^{RL}D^{\alpha}f(t)+\mu\,{}^{RL}D^{\alpha}g(t). \end{aligned}$$

2.4.2 La dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville a joué un rôle important dans le développement de calcul fractionnaire, à cause de ses applications dans les mathématiques pures et appliquées. Cependant, étant donnée que la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle et que les conditions initiales du problème de Cauchy sont exprimées par des dérivées d'ordre fractionnaire, Caputo propose une autre approche où la dérivée de la constante est nulle et que les conditions initiales exprimées comme dans le cas classique par des dérivées d'ordre entier.

Définition 2.4.2 *Soit $\alpha > 0$ avec $n-1 < \alpha < n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$ et f une fonction telle que : $\frac{d^n}{dt^n} f \in L^1([a,b])$.*
La dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo est définie par :

$${}^{c}D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)d\tau = I^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f(t). \tag{2.4.1}$$

Exemples :

1) La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle.

2) La dérivée de $f(t) = (t-a)^\beta$ au sens de Caputo.

Soit n un entier et $\quad n-1 < \alpha < n$ avec $\beta > n-1$, alors on a :

$$f^{(n)}(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-n}$$

où

$${}^cD^\alpha(t-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n-1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-n}d\tau$$

En effectuant le changement de variable

$$\tau = a + s(t-a)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
{}^cD^\alpha(t-a)^\beta &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-n}d\tau \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-\alpha)^{\beta-\alpha}\int_a^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}ds \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)B(n-\alpha,\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-n)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}
\end{aligned}$$

2.5 Lemmes fondamentaux

Lemme 2.5.1 *Soit $\alpha > 0$, alors l'équation différentielle*

$$^cD^\alpha h(t) = 0$$

admet les solutions

$$h(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1} t^{n-1};$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n-1, n = [\alpha] + 1$.

Preuve :

Supposons que

$$^cD^\alpha h(t) = 0,$$

d'après la définition de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo on obtient

$$I^{n-\alpha} \left(\frac{d}{dt}\right)^n h(t) = 0$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{ds}\right)^n h(s) ds = 0$$

et puisque $\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \neq 0$, on a

$$\int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^n h(s) ds = 0$$

et par suite

$$t^{n-\alpha-1} * h^n(s) = 0$$

On applique la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo

$$\mathcal{L}(^cD^\alpha h(t))(p) = \mathcal{L}(0)(p) = 0$$

on obtient

$$p^n H(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} h^{k-1}(0) = 0$$

avec $H(p) = \mathcal{L}(h)(p)$, donc

$$H(p) = \sum_{k=1}^{n} p^{-k} h^{k-1}(0)$$

appliquant maintenant la tranformée inverse de Laplace :

$$\mathcal{L}^{-1}(H(p))(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n} p^{-k} h^{k-1}(0)\right)(t)$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} h(t) &= \sum_{k=1}^{n} h^{k-1}(0) L^{-1}(p^{-k})(t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} h^{k-1}(0) \frac{t^{k-1}}{\Gamma(k)}, \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $i = k - 1$ on trouve

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^i(0)}{i!} t^i$$

pour $c_i = \dfrac{h_i(0)}{i!}$ on a

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i.$$

supposant maintenant que

$$h(t) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i$$

on applique l'opérateur de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha} h(t) &= {}^{c}D^{\alpha}\left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i \, {}^{c}D^{\alpha} t^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_i I^{n-\alpha}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n} t^i \end{aligned}$$

puisque $(0 \leq i \leq n-1 < n)$ on a

$${}^{c}D^{\alpha} h(t) = 0.$$

Lemme 2.5.2 *Soit $\alpha > 0$, alors*

$$I^{\alpha}\ {}^{c}D^{\alpha}h(t) = h(t) + c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n-1}t^{n-1}$$

pour $c_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, ..., n-1, n = [\alpha] + 1$

Preuve :

On a par la définition de la dérivée fractionnaire de Caputo

$${}^{c}D^{\alpha}h(t) = I^{n-\alpha}h^{(n)}(t),$$

On applique l'opérateur de l'intégrale fractionnaire aux deux membres de l'égalité

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}\ {}^{c}D^{\alpha}h(t) &= I^{\alpha}I^{n-\alpha}h^{(n)}(t) \\
&= I^{n}\ {}^{RL}D^{n}h(t) \\
&= h(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \lim_{n\to 0} \left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j} I^{n-n}h(t) \\
&= h(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} \left(\left(\frac{d}{dt}\right)^{n-j} h(t)\right) h(0) \\
&= h(t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{t^{n-j}}{\Gamma(n-j+1)} h^{n-j}(0)
\end{aligned}$$

par le changement de variable $k = n - j$ on obtient :

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}\ {}^{c}D^{\alpha}h(t) &= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{h^{(k)}(0)t^k}{k!} \\
&= h(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k' t^k}{k!} \\
&= h(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k t^k}{k!}
\end{aligned}$$

3

Problème aux limites pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire cas où $0 < \alpha < 1$.

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence de solution d'un problème aux limites pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire.

Soit :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = f(t, y(t)), \quad 0 < \alpha < 1,\ t \in J = [0, T] \\ ay(0) + by(T) = c. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Où ${}^cD^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre α, $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application lipschitzienne, et a, b, c sont des réelles avec $a + b \neq 0$.

3.2 Existence et unicité de la solution

Lemme 3.2.1 *Soient $0 < \alpha < 1$ et $h : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de l'équation intégrale fractionnaire*

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{1}{a + b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T - s)^{\alpha-1} h(s) ds - c \right] \tag{3.2.1}$$

si et seulement si y et la solution du problème aux limites pour l'équation différentielle fractionnaire

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = h(t), \quad 0 < \alpha < 1,\ t \in J \\ ay(0) + by(T) = c. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

.

Preuve :

Supposons que y est solution de (3.2.1), c'est à dire :

$$y(t) = I^{\alpha}h(t) - \frac{1}{a+b}\left[bI^{\alpha}h(T) - c\right]$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned} {}^{c}D^{\alpha}y(t) &= {}^{c}D^{\alpha}\left(I^{\alpha}h(t) - \underbrace{\frac{1}{a+b}\left[bI^{\alpha}h(T) - c\right]}_{K}\right) \\ &= {}^{c}D^{\alpha}I^{\alpha}h(t) - {}^{c}D^{\alpha}(K) \\ &= {}^{c}D^{\alpha}I^{\alpha}h(t) \end{aligned}$$

et d'après les propriétés du calcul fractionnaire on a :

$${}^{c}D^{\alpha}I^{\alpha}h(t) = h(t)$$

et

$${}^{c}D^{\alpha}(K) = 0$$

Ce qui montre :

$${}^{c}D^{\alpha}y(t) = h(t)$$

D'autre part on a :

$$\begin{cases} y(0) = I^{\alpha}h(0) - \dfrac{1}{a+b}\left[bI^{\alpha}h(T) - c\right] \\ y(T) = I^{\alpha}h(T) - \dfrac{1}{a+b}\left[bI^{\alpha}h(T) - c\right] \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} ay(0) + by(T) &= a\left[I^{\alpha}h(0) - \frac{1}{a+b}\left[bI^{\alpha}h(T) - c\right]\right] + b\left[I^{\alpha}h(T) - \frac{1}{a+b}\left[bI^{\alpha}h(T) - c\right]\right] \\ &= \frac{ac}{a+b} - \frac{ab}{a+b}\left[I^{\alpha}h(T)\right] + \frac{ab}{a+b}\left[I^{\alpha}h(T)\right] + \frac{bc}{a+b} \\ &= \frac{ac}{a+b} + \frac{ab}{a+b} \\ &= c \end{aligned}$$

Ce qui montre :

$$ay(0) + by(T) = c$$

Inversement supposons que y est solution de problème :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha y(t) = h(t), t \in J \\ ay(0) + by(T) = c. \end{cases}$$

D'après le lemme 2.5.2 on a :

$$I^\alpha D^\alpha y(t) = y(t) + c_0$$

donc

$$y(t) = I^\alpha h(t) - c_0$$

De plus on a :

$$\begin{cases} y(0) = I^\alpha h(0) - c_0 \\ y(T) = I^\alpha h(T) - c_0 \end{cases}$$

et on sait que :

$$I^\alpha h(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds.$$

Donc

$$\begin{aligned} ay(0) + by(T) = c &\Leftrightarrow a(-c_0) + b\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c_0\right] = c \\ &\Leftrightarrow c_0 = \frac{1}{a+b}\left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c\right] \\ &\Leftrightarrow c_0 = \frac{1}{a+b}\left[bI^\alpha h(T) - c\right]. \end{aligned}$$

Alors,

$$y(t) = I^\alpha h(t) - \frac{1}{a+b}\left[bI^\alpha h(T) - c\right].$$

Maintenant, on va établir l'existence et l'unicité de la solution pour le problème (3.1.1)

Lemme 3.2.2 *(Lemme de Gronwall).[8]*

Soit $y_0 > 0$. Si $y \in C(J, \mathbb{R})$ est une solution de l'inéquation intégrale

$$0 \leq y(t) \leq y_0 + K \int_0^t y(s) ds, \qquad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Alors $y(t) \leq y_0 e^{Kt}$, $\forall 0 \leq t \leq T$.

Lemme 3.2.3 *(Gronwall-inégalité avec opérateur intégral singulier de type mixte)*
Soit $y \in C(J,\mathbb{R})$ satisfait l'inégalité suivante :

$$|y(t)| \leq a + b\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|y(s)|^{\lambda}ds + c\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|y(s)|^{\lambda}ds. \tag{3.2.3}$$

où $\alpha \in]0,1[$, $\lambda \in [0, 1-\frac{1}{p}]$ pour un certain $1 < p < \frac{1}{1-\alpha}$, a,b,c sont des constantes positives. Alors il existe $M^* > 0$ tel que

$$|y(t)| \leq M^*.$$

Preuve

Soit $M = (b+c)\left[\dfrac{T^{p(\alpha-1)+1}}{p(\alpha-1)+1}\right]^{\frac{1}{p}} > 0$, et

$$x(t) = \begin{cases} 1 & si \quad |y(t)| \leq 1, \\ y(t) & si \quad |y(t)| > 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
|y(t)| \leq |x(t)| &\leq 1 + a + b\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|x(s)|^{\lambda}ds + c\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|x(s)|^{\lambda}ds \\
&\leq (a+1) + b\left(\int_0^t (t-s)^{p(\alpha-1)}ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^t |x(s)|^{\frac{\lambda p}{p-1}}ds\right)^{\frac{p-1}{p}} + \\
&+ c\left(\int_0^T (T-s)^{p(\alpha-1)}ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^T |x(s)|^{\frac{\lambda p}{p-1}}ds\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq (a+1) + b\left[\frac{T^{p(\alpha-1)+1}}{p(\alpha-1)+1}\right]^{\frac{1}{p}}\int_0^t |x(s)|^{\frac{\lambda p}{p-1}}ds + \\
&+ c\left[\frac{T^{p(\alpha-1)+1}}{p(\alpha-1)+1}\right]^{\frac{1}{p}}\int_0^T |x(s)|^{\frac{\lambda p}{p-1}}ds \\
&\leq (a+1) + (b+c)\left[\frac{T^{p(\alpha-1)+1}}{p(\alpha-1)+1}\right]^{\frac{1}{p}}\int_0^T |x(s)|^{\frac{\lambda p}{p-1}}ds \\
&= (a+1) + M\int_0^T |x(s)|^{\frac{\lambda p}{p-1}}ds \\
&\leq (a+1) + M\int_0^T |x(s)|ds.
\end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall 3.2.2 on a

$$|y(t)| \leq |x(t)| \leq (a+1)e^{MT} := M^*.$$

Résultats principals

Supposons que :

• **(H1)** La fonction $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est Lebesgue mesurable par rapport à t sur J.

• **(H2)** Il existe une constante $\alpha_1 \in [0, \alpha[$, et une fonction à valeurs réelles $m(t) \in L^{\frac{1}{\alpha_1}}(J, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$|f(t, u_1) - f(t, u_2)| \leq m(t)|u_1 - u_2|, \text{ pour chaque } t \in J, \text{ et tout } u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

• **(H3)** Il existe une constante $\alpha_2 \in [0, \alpha[$, et une fonction à valeurs réelles $h(t) \in L^{\frac{1}{\alpha_2}}(J, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$|f(t, y)| \leq h(t), \text{ pour chaque } t \in J, \text{ et tout } y \in \mathbb{R}.$$

on pose $\|m\|_{L^{\frac{1}{\alpha_1}}(J,\mathbb{R}_+)} = M$, $\|h\|_{L^{\frac{1}{\alpha_2}}(J,\mathbb{R}_+)} = H$.
On va donner un premier résultat concernant l'unicité de la solution du problème (3.1.1), en utilisant le théorème de constraction de Banach.

Théorème 3.2.1 *Supposons que* ***(H1)-(H3)*** *sont satisfaites. Si*

$$\Omega_{\alpha,\alpha_1,T}(t) = \frac{M}{\Gamma(\alpha)(\frac{\alpha-\alpha_1}{1-\alpha_1})^{1-\alpha_1}} \left(t^{\alpha-\alpha_1} + \frac{|b|T^{\alpha-\alpha_1}}{|a+b|} \right) \leq k < 1 \text{ pour tout } t \in J, \tag{3.2.4}$$

alors le problème (3.1.1) admet une solution unique.

Preuve

Pour chaque $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t |(t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))| ds &\leq \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha_2}} ds \right)^{1-\alpha_2} \left(\int_0^t (h(s))^{\frac{1}{\alpha_2}} ds \right)^{\alpha_2} \\
&\leq \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha_2}} ds \right)^{1-\alpha_2} \left(\int_0^T (h(s))^{\frac{1}{\alpha_2}} ds \right)^{\alpha_2} \\
&\leq \frac{T^{\alpha-\alpha_2} H}{(\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2})^{1-\alpha_2}}.
\end{aligned}$$

Donc $|(t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s))|$ est Lebesgue intégrable par rapport à $s \in [0, t]$, pour tout $t \in J$ et $y \in C(J, \mathbb{R})$.

Par conséquent, le problème (3.1.1) est équivalent à l'équation intégrale fractionnaire suivante :

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \\ - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - c \right], \ t \in J.$$

Soit

$$\frac{T^{\alpha-\alpha_2} H}{\Gamma(\alpha)(\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2})} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \leq r.$$

Maintenant, on va définir l'opérateur F sur $B_r := \{y \in C(J, \mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq r\}$ comme suit

$$(Fy)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - c \right], \ t \in J. \tag{3.2.5}$$

Il est clair que les points fixes de F sur B_r sont les solutions du problème (3.1.1). On va utiliser le théorème de contraction de Banach pour montrer que F admet un point fixe. La preuve est dévisée en deux étapes.

Etape 1 : $Fy \in B_r$ pour tout $y \in B_r$.

On a F est bien définie, en effet : si $y \in C(J, \mathbb{R})$ alors $Fy \in C(J, \mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
|(Fy)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds + \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha_2}} ds \right)^{1-\alpha_2} \left(\int_0^t (h(s))^{\frac{1}{\alpha_2}} ds \right)^{\alpha_2} + \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \left(\int_0^T (T-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha_2}} ds \right)^{1-\alpha_2} \left(\int_0^t (h(s))^{\frac{1}{\alpha_2}} ds \right)^{\alpha_2} + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{T^{\alpha-\alpha_2} H}{\Gamma(\alpha)(\frac{\alpha-\alpha_2}{1-\alpha_2})} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) + \frac{|c|}{|a+b|} \leq r,
\end{aligned}$$

alors $\|Fy\|_\infty \leq r$, donc on peut conclure que $Fy \in B_r$ pour tout $y \in B_r$,

c'est-à-dire : $Fy : B_r \to B_r$ est bien définie.

Etape 2 : F est une contraction sur B_r.

Pour $x, y \in B_r$ et pour tout $t \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
|(Fx)(t) - (Fy)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| ds + \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,x(s)) - f(s,y(s))| ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} m(s) |x(s) - y(s)| ds + \\
&+ \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} m(s) |x(s) - y(s)| ds \\
&\leq \frac{\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} m(s) ds + \frac{|b| \|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} m(s) ds \\
&\leq \frac{\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha_1}} ds \right)^{1-\alpha_1} \left(\int_0^t (m(s))^{\frac{1}{\alpha_1}} ds \right)^{\alpha_1} + \\
&+ \frac{|b| \|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \left(\int_0^T (T-s)^{\frac{\alpha-1}{1-\alpha_1}} ds \right)^{1-\alpha_1} \left(\int_0^T (m(s))^{\frac{1}{\alpha_1}} ds \right)^{\alpha_1} \\
&\leq \frac{\|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^{\alpha-\alpha_1}}{(\frac{\alpha-\alpha_1}{1-\alpha_1})} \|m\|_{L^{\frac{1}{\alpha_1}}(J,\mathbb{R})} + \frac{|b| \|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \frac{T^{\alpha-\alpha_1}}{(\frac{\alpha-\alpha_1}{1-\alpha_1})} \|m\|_{L^{\frac{1}{\alpha_1}}(J,\mathbb{R})} \\
&\leq \left[\frac{M}{\Gamma(\alpha)(\frac{\alpha-\alpha_1}{1-\alpha_1})^{1-\alpha_1}} \left(t^{\alpha-\alpha_1} + \frac{|b| T^{\alpha-\alpha_1}}{|a+b|} \right) \right] \|x-y\|_\infty
\end{aligned}$$

On obtient

$$\|Fx - Fy\|_\infty \leq \Omega_{\alpha,\alpha_1,T}(t) \|x-y\|_\infty.$$

D'après le théorème (3.2.1) en peut déduire que F est une constraction, et d'après le théorème de contraction de Banach F admet un seul point fixe qui est une solution du problème (3.1.1).

Notre deuxième résultat pour le problème (3.1.1) est basé sur le théorème du point fixe de Schaefer.

Théorème 3.2.2 *Supposons que :*

- ***(H4)*** *La fonction $f : J \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.*
- ***(H5)*** *Il existe une constante $\lambda \in [0, 1 - \frac{1}{p}]$ pour $1 < p < \frac{1}{1-\alpha}$ et $N > 0$ tel que :*

$$|f(t,u)| \leq N(1 + |u|^\lambda) \text{ pour chaque } t \in J, \text{ et tout } u \in \mathbb{R}.$$

alors, le problème (3.1.1) admet au moins une solution sur J.

Preuve :

On va transformer le problème (3.1.1) en un problème de point fixe, et on va déterminer ces points fixes qui sont les solutions du problème (3.1.1). Consédirons l'opérateur $F : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$ défini comme (3.2.5). La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1 : F est continue.

Soit $\{y_n\}$ une suite tel que $y_n \to y$ dans $C(J,\mathbb{R})$. Alors pour tout $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned}
&|(Fy_n)(t) - (Fy)(t)| \leq \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))| ds + \\
&\quad + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))| ds \leq \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{t\in J} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))| ds + \\
&\quad + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \sup_{t\in J} |f(s,y_n(s)) - f(s,y(s))| ds \leq \\
&\leq \frac{\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|}{|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \right] \leq \\
&\leq \frac{\|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty}{\Gamma(\alpha+1)} \left(t^\alpha + \frac{|b|}{|a+b|} T^\alpha \right)
\end{aligned}$$

et comme $t \in [0,T]$, alors :

$$|(Fy_n)(t) - (Fy)(t)| \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) \|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty.$$

puisque f est continue, on a

$$\|Fy_n - Fy\|_\infty \leq \frac{T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|} \right) \|f(.,y_n(.)) - f(.,y(.))\|_\infty \to 0 \; lorsque \; n \to \infty.$$

Etape 2 : L'image de tout ensemble borné par F est un ensemble borné dans $C(J,\mathbb{R})$.

En effet, il suffit de montrer que pour tout $\eta^* > 0$, il existe $\ell > 0$ de telle sorte que pour chaque $y \in B_{\eta^*} = \{y \in C(J,\mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq \eta^*\}$ on a $\|F\|_\infty \leq \ell$.

Pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{aligned}
|(Fy)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds + \\
&\quad + \frac{|b|}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{N}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} (1 + |y(s)|^\lambda) ds + \\
&\quad + \frac{|b|N}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} (1 + |y(s)|^\lambda) ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
&\leq \frac{N}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|N}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|} + \\
&\quad + \frac{N}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |y(s)|^\lambda ds + \\
&\quad + \frac{|b|N}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |y(s)|^\lambda ds \\
&\leq \frac{NT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|b|NT^\alpha}{|a+b|\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|c|}{|a+b|} + \\
&\quad + \frac{N}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |y(s)|^\lambda ds + \\
&\quad + \frac{|b|N}{|a+b|\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |y(s)|^\lambda ds \\
&\leq \frac{NT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|b|NT^\alpha}{|a+b|\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{NT^\alpha (\eta^*)^\lambda}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{|b|NT^\alpha (\eta^*)^\lambda}{|a+b|\Gamma(\alpha+1)}
\end{aligned}$$

ce qui imlique que

$$\|Fy\|_\infty \leq \frac{NT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) + \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{NT^\alpha (\eta^*)^\lambda}{\Gamma(\alpha+1)} \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right) := \ell$$

Etape 3 : L'image de tout borné par F est un ensemble équicontinu de $C(J,\mathbb{R})$. Soit $0 \le t_1 \le t_2 \le T$, $y \in B_{\eta^*}$. En utilisant (H5), on a

$$
\begin{aligned}
&|(Fy)(t_2) - (Fy)(t_1)| = \\
&= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right| \\
&\le \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}] f(s, y(s)) ds \right| + \\
&\quad + \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds \right| \\
&\le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}] |f(s, y(s))| ds + \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
&\le \frac{N}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}] (1 + |y(s)|^{\lambda}) ds + \\
&\quad + \frac{N}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} (1 + |y(s)^{\lambda}) ds \\
&\le \frac{N(1 + (\eta^*)^{\lambda})}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_2 - s)^{\alpha-1} - (t_1 - s)^{\alpha-1}] ds + \frac{N(1 + (\eta^*)^{\lambda})}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \\
&\le \frac{N(1 + (\eta^*)^{\lambda})}{\Gamma(\alpha + 1)} (|t_1^{\alpha} - t_2^{\alpha}| + 2(t_2 - t_1^{\alpha})) \\
&\le \frac{3N(1 + (\eta^*)^{\lambda})(t_2 - t_1)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)}.
\end{aligned}
$$

quand $t_2 \to t_1$, le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro, d'où la continuité de F. D'après l'étapes 2 et 3 et le théorème d'Arzelá-Ascoli $F(B_{\eta^*})$ est relativement compact pour tout borné B_{η^*}, c'est à dire F est complètement continue, et d'après l'étape 1, F est continue. Par conséquent $F : C(J,\mathbb{R}) \to C(J,\mathbb{R})$ est continue et complètement continue.

Etape 4 :

Maintenant, il reste à montrer que l'ensemble

$$E(F) = \{x \in C(J,E) : x = \lambda F(x), \textit{ pour un certain } \lambda \in [0,1]\}$$

est bornée.

Soit $y \in E(F)$, alors $y = \lambda F(y)$ pour $\lambda \in [0,1]$. Donc, pour chaque $t \in J$, on a

$$y(t) = \lambda\Big(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - \\ - \frac{1}{a+b}[\frac{b}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s,y(s))ds - c]\Big)$$

Pour tout $t \in J$, on a

$$|y(t)| \leq \frac{\lambda N T^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\lambda|b|NT^\alpha}{|a+b|\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\lambda|c|}{|a+b|} + \\ + \frac{\lambda N}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}|y(s)|^\lambda ds + \frac{\lambda|b|N}{|a+b|\Gamma(\alpha)}\int_0^T (T-s)^{\alpha-1}|y(s)|^\lambda ds.$$

D'après le lemme (3.2.3), il exist $M^* > 0$ tel que

$$|y(t)| \leq M^*, \quad t \in J.$$

Ainsi pour tout $t \in J$, on a

$$\|y\|_\infty \leq M^*.$$

Cela montre que E(F) est borné. Par conséquent, d'après le théorème du point fixe de Schaefer, on déduit que F admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (3.1.1).

3.3 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux resultats.

Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$^cD^\alpha y(t) = \frac{e^{-4t}|y(t)|}{(9+e^t)(1+|y(t)|)}, \ t \in J = [0,1], \ \alpha \in]0,1[, \tag{3.3.1}$$

$$y(0) + y(1) = 0. \tag{3.3.2}$$

avec a=b=T=1.

Posons

$$f(t,x) = \frac{e^{-4t}x}{(9+e^t)(1+x)}, \ (t,x) \in J \times \mathbb{R}_+$$

Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+$ et $t \in J$. Alors on a

$$\begin{aligned}
|f(t,x_1) - f(t,x_2)| &= \frac{e^{-4t}}{(9+e^t)} \left| \frac{x_1}{(1+x_1)} - \frac{x_2}{(1+x_2)} \right| \\
&= \frac{e^{-4t}\,|x_1 - x_2|}{(9+e^t)(1+x_1)(1+x_2)} \\
&\leq \frac{e^{-4t}}{(9+e^t)}\,|x_1 - x_2| \\
&\leq \frac{e^{-4t}}{10}\,|x_1 - x_2|\,.
\end{aligned}$$

Evidemment, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et pour chaque $t \in J$,

$$|f(t,x)| = \frac{e^{-4t}}{(9+e^t)} \left| \frac{x}{1+x} \right| \leq \frac{e^{-4t}}{(9+e^t)} \leq \frac{e^{-4t}}{10}.$$

Pour $t \in J$, $\beta \in]0, \alpha[$, soit $m(t) = h(t) = \dfrac{e^{-4t}}{10} \in L^{\frac{1}{\beta}}(J, \mathbb{R}_+)$, $M = \left\| \dfrac{e^{-4t}}{10} \right\|_{L^{\frac{1}{\beta}}(J,\mathbb{R}_+)}$.
En choisissant $\beta \in]0, \alpha[$ approprié, on peut arriver à l'inégalité suivante

$$\Omega_{\alpha,\beta,T}(t) = \frac{M}{\Gamma(\alpha)(\frac{\alpha-\beta}{1-\beta})^{(1-\beta)}} \times \frac{3}{2} < 1$$

Ainsi toutes les hypothèses du théorème (3.2.1) sont satisfaites, nos résultats peuvent être appliqués au problème (3.1.1).

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté l'existence et l'unicité de solution du problème pour une équation différentielle d'ordre fractionnaire au sens de Caputo.
Ce résultat a été obtenu par l'application du théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le théorème de point fixe de Banach et Schaefer.

Bibliographie

[1] A. A. Kilbas, H.M.Srivastava and J.J. Trujillo *Theory and applications of fractional differential Equations*, North-Holland Mathematical studies 204, Ed van Mill, Amsterdamn, (2006).

[2] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[3] Erdely A, Magnus W, Oberhettinger F and Tricomi F, Higher *Transcendental Functions*, Vol.III,Krieger Pub, Melbourne, Florida, (1981).

[4] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Applications, Fixed Point Theorems Springer-Verlag*, New York, 1986.

[5] F.Boyer,P.Fabrie, *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navir-Stokes Equations and Related Models*, Appl.Math.Sci, New York, 2013.

[6] J.Hale and S. Verduyn Lunel, *Introduction to Functionnal Differential Equations Applied Mathematical Sciences*, 99, Springer-Verlag, New York, 1993.

[7] Kai.Diethelm, *The Analtsis of Fractional Differential Equation, An Application Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, Ed Springer, 2004.

[8] M. Benchohra, S. Hamani, S.K. Ntouyas, *Boundary value problems for differential equations with fractional order*, Surv. Math. Appl, 2008.

[9] K.Yosida,*Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1980.