République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

MÈMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par

Hamza AMIR et Youcef LARABI

Étude de certains paramètres de certains graphes OTIS

Soutenue publiquement le 2/07/2023, devant le jury composé de

Lemdani Rachid	*MCB.* **Univ. Médéa**	**Président**
Sahraooui Abdelkader	*MAA.* **Univ. Médéa**	**Encadreur**
Zemir Mohamed	*MAA.* **Univ. Médéa**	**Examinateur**

Année universitaire 2022/2023

Résumé

Une coloration propre d'un graphe $G = (V, E)$ oú V est l'ensemble des sommets et E est l'ensemble d'arêtes. est une application C de V dans un ensemble $\{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ telle que pour toute paire de sommets (v, w), $C(v) \neq C(w)$. Le graphe OTIS, noté $OT_G = (V_{OT}, E_{OT})$ du graphe G est tel que $V_{OT} = V \times V$ et $E_{OT} = \{(uv, uw)$ si $vw \in E\} \cup \{(vw, wv); v, w \in V\}$. Á travers ce mémoire, on détermine le nombre chromatique $\chi(OT_G)$ des graphes OTIS d'une chaîne P_4, d'un cycle, d'une griffe $k_{1,3}$, des graphes bipartis et bipartis complet $k_{2,3}$ et d'une roue W_4, W_5 et le graphe hypercube Q_3.

Mots clés: Coloration propre, nombre chromatique et Graphe OTIS d'un graphe.

Abstract

A proper coloring of a graph G is a application C of the set V in a set $\{c_1, c_2, ..., c_k\}$ such that $C(v) \neq C(w)$. The OTIS graph of the graph G is the graph $OT_G = (V_{OT}, E_{OT})$ such that $V_{OT} = V \times V$ and $E_{OT} = \{(uv, uw) sivw \in E\} \cup \{(vw, wv); v, w \in V\}$. Through this memory, we determine the chromatic number of chains, cycles, some bipartite graphs and wheel graphs.

Key Words: Proper coloring, chromatic number et OTIS Graphe OTIS of a graphe.

Remerciements

Nous tenons à remercie en premier lieu, Allah tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

Nous tenons, avant tout, à remercier chaleureusement notre promoteur Monsieur **Sahraooui Abdelkader**, Maître Assistant à l'université YAHIA FARES de Médéa, pour avoir accepté d'encadrer notre mémoire. Ainsi de nous avoir orientés, aidés et conseillés.

Nous remercions également Monsieur **Lemdani Rachid**, Maître de Conférences à l'université Dr. YAHIA FARES de Médéa, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Nous remercions également Monsieurs **Zemir Mohamed**, Maître Assistant à l'université YAHIA FARES de Médéa pour avoir accepté d'être examinateur.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude à l'ensemble des enseignants du département M.I de l'université Dr. YAHIA FARES de Médéa.

Enfin, il est important pour nous de remercier nous parents, d'avoir fait de leur mieux pour que nous puissions accomplir ce mémoire dans les meilleures conditions possibles et qui n'ont jamais cessé de nous encourager.

Dédicace

Je dédie ce travail

A ma très chère mère et mon très cher père Pour leur soutien, leur présences, leur amour qui m'a encouragé dans mes études.

A mon cher frère **Boubakeur**

A mes soeures

A mon oncle **Diffallah Laissaoui**, qui n'a jamais cessé de me soutenir et m'encourager tout au long de mes années d'études . Ses précieux conseils ont été d'une grande valeur pour moi.

A toute la famille **Amir** et la famille **Laissaoui** sans exception.

A tous les professeurs et enseignants qui ont collaboré à ma formation depuis mon premier cycle d'étude jusqu'à la fin de mes études universitaires.

A mes chers amis
Pour leur encouragement, leur soutien et l'ambiance que nous avons vécu pendant toute notre carrière d'étudiant a cet effet, je tiens à remercier tous mes collègues tous mes amis et aussi a tous ceux qui ont une relation de proche ou de loin avec la réalisation du présent rapport.

AMIR HAMZA

Dédicace

Je dédie ce travail

A ma très chére mère et mon très cher père Pour leur soutien, leur présence, et leur amour qui m'a encouragé dans mes études.

A mes chers frères
Mohamed amine et **younes**.

A toute la famille **Larabi** et la famille **Terras** sans exception.

A tous les professeurs et enseignants qui ont collaboré à ma formation depuis mon premier cycle d'étude jusqu'à la fin de mes études universitaires.

A mes chers amis
Pour leur encouragement, leur soutien et l'ambiance que nous avons vécu pendant toute notre carrière d'étudiant a cet effet, je tiens à remercier tous mes collègues tous mes amis et aussi a tous ceux qui ont une relation de proche ou de loin avec la réalisation du présent rapport. à toute la section RO. (Recherche Opérationnelle)

LARABI YOUCEF.

Table des matières

1 Généralités et définitions **4**
1.1 Définitions et notions générales sur les graphes 4
1.1.1 Graphes non orientés 4
1.1.2 Graphe simple 4
1.1.3 Voisinages et degrés 5
1.1.4 Graphes isomorphes 5
1.1.5 Graphes particuliers 6
1.2 Stable et Clique 6
1.2.1 Stable 6
1.2.2 Clique 7
1.2.3 Chaîne 7
1.2.4 Cycle 7
1.2.5 Graphe connexe 7
1.2.6 Graphe biparti et étoile 8
1.2.7 Graphe complémentaire 9
1.2.8 Graphe Roue 9
1.2.9 Graphe régulier 9
1.2.10 Arbre 10
1.2.11 Distance et diamètre 10
1.3 Graphe Hamiltonien 10
1.3.1 Chaîne Hamiltonienne et cycle Hamiltonien 10
1.3.2 Graphe semi-Hamiltonien 10
1.3.3 Graphe Hamiltonien 11
1.3.4 Graphe hamiltonien connexe 11
1.4 Graphe pancyclique 11
1.5 Hypercube 11

2 Quelques résultats existants sur les graphes OTIS et la coloration propres **12**
2.1 INTRODUCTION 12
2.2 Graphe OTIS 13
2.3 k-ary n-cube 14
2.4 Graphes OTIS-Q_n^k 15
2.5 Coloration dans les graphes 15
2.5.1 Coloration des sommets 15
2.5.2 Le nombre chromatique 15
2.5.3 Algorithme de coloration de Welsh et Powell 15
2.6 Résultats sur la coloration 16

3 Coloration de certain graphes OTIS **18**
3.1 Coloration de OT_{P_4} 18
3.2 Coloration des OTIS cycles 19
3.3 Coloration du graphe $OT_{K_{1,3}}$ 25
3.4 Coloration du graphe OTIS d'un graphe biparti $OT_{K_{2,3}}$ 26
3.5 Coloration du graphe $OT_{K_{2,3}}$ 29
3.6 Coloration du graphe OT_{W_4} 31
3.7 Coloration du graphe OT_{W_5} 32
3.8 Coloration du graphe OT_{Q_3} 35

Conclusion **38**

Références **38**

Introduction

La recherche opérationnelle est la discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie et dans le secteur public. Depuis une dizaine d'année, le champ d'application de la recherche opérationnelle s'est élargi à des domaines comme l'économie, la finance, le marketing et la planification d'entreprise. Plus récemment, la recherche opérationnelle a été utilisée pour la gestion des systèmes de santé et d'éducation, pour la résolution de problèmes environnementaux et dans d'autres domaines d'intérît public.

Confronté à un problème donné et pour en faciliter la compréhension, on recourt souvent au schéma. Ce dernier est composé exclusivement de points et de traits les reliant. Les points représentent les différents objets du problème. Quant aux traits, ils représentent les relations existant entre ces différents objets.

Ce schéma est conventionnellement nommé graphe. Les points et les traits sont appelés respectivement sommets et arêtes. Si les traits sont orientés, on parlera d'arcs, au lieu d'arêtes. Ce type de problème appartient à un très vaste domaine s'appelle la théorie des graphes, qui s'est développée dans des divers disciplines telles que la chimie, la sociologie, l'économie,. . . .

L'histoire de la théorie des graphes débute avec les traveaux du mathématicien suisse Euler au 18^e siècle, et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tel que celui des ponts de Königsberg, quand il se demandait s'il est possible, en partant d'un ile quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et revenir à son point de départ. Dés le début du 20^e siècle, elle constitue une branche à partentière des mathématiques, grâce aux traveaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

En 1852, Francis Guthrie s'est demandé s'il est possible de colorer toute carte géographique avec quatre couleurs sous la contrainte que deux pays voisins sont colorés différemment. Ce n'est qu'en 1976, que deux chercheurs K. Appel et W. Haken ont pu répondre affirmativement à la conjoncture des quatre couleurs. La recherches d'une réponse à ce problème est à l'origine de nombreux résultats relatifs à la coloration dans les graphes. Soit G = (V, E) un graphe simple, avec V sont ensemble de sommets et E ensemble de arêtes . Une coloration propre des sommets est une application c de V dans N qui affecte une couleur (nombre entier positif) à chaque sommet, telle que deux sommets voisins n'ont pas la même couleur. Une classe de couleur i est un ensemble de sommets stable qui sont colorés avec la couleur i. Le nombre minimum de couleurs utilisés dans la coloration c est le nombre chromatique, noté $\chi(G)$. Notre mémoire est réparties en trois chapitres

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques définitions de la théorie des graphes nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Le deuxième chapitre, est réservé à la définition de graphe OTIS et la coloration propre des sommets de graphes. Nous citons quelques bornes et résultats existants sur les graphes OTIS est le nombre chromatique d'un graphe

Le chapitre trois portera notre contribution sur la détermination du nombre chromatique

des graphes OTIS d'une chaîne P_4, d'un cycle, d'une griffe $k_{1,3}$,des graphes bipartis et bipartis complet $k_{2,3}$ et d'une roue W_4, W_5

Chapitre 1

Généralités et définitions

1.1 Définitions et notions générales sur les graphes

1.1.1 Graphes non orientés

Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est la donnée de deux ensembles finis V(G) appelé ensemble des sommet et E(G)appelé ensemble d'arêtes tel que chaque arête $e \in E$ est définie par deux sommets u,v appelés extrémités de e on note $e = uv$;

- Le cardinal de V(G) est appelé l'ordre de G, noté $n(G)$;
- Le cardinal de E(G) est appelé la taille de G, notée $m(G)$;
- Pour $e = uv$, u et v sont adjacents entre eux et e est incidente à u et v ;
- Si u et v sont confondues, alors e est appelée boucle.

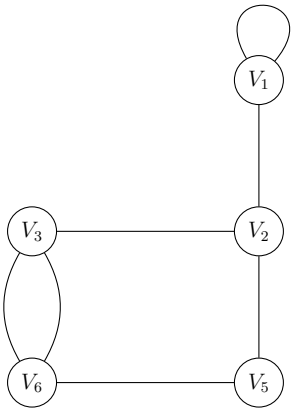


FIGURE 1.1 – Graphe non orienté.

1.1.2 Graphe simple

Un graphe est dit simple s'il est sans boucles est sans arêtes multiples (arêtes multiples ont les mêmes extrémités. Les graphes considérés à travers ce mémoire sont simples et finis. voir la figure 1.2. $G = (V(G), E(G))$ avec $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $E(G) = \{ab, bc, bd, be, cf, fe\}$.

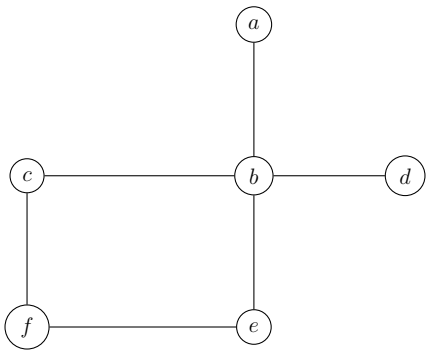


FIGURE 1.2 – Graphe simple

1.1.3 Voisinages et degrés

- Si $uv \in E(G)$, alors u et v sont dits voisins ;
- Le voisinage ouvert du sommet v de G, noté $N_G(v)$, est l'ensemble

$$N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$$

- le voisinage fermé du sommet v, noté $N_G[v]$, est défini par :

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

- Pour d'un ensemble de sommet S, $S \subseteq V$ est défini par :

$$N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$$

et l'ensemble

$$N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G(v) \cup S$$

sont les voisinages ouvert et fermé du sous-ensemble $S \subseteq V$.
- S'il n'y a pas confusion, les voisinages ouvert et fermé seront notés par $N(v)$, $N[v]$,$N(S)$ et $N[S]$ au lieu de $N_G(v)$, $N_G[v]$, $N_G(S)$ et $N_G[S]$ respectivement.

- Le degré du sommet v de G , noté $d_G(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à v. Dans un graphe simple,$d_G(v) = |N_G(v)|$.

- Un sommet de degré nul est dit sommet isolé et un sommet de degré un est dit sommet pendant et le sommet adjacent à un sommet pendant est dit support.
On note par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ le degré maximum et le degré minimum de G respectivement sont définis

$$\Delta(G) = Max\{d_G; v \in v(G)\}$$

et

$$\delta(G) = Min\{d_G; v \in v(G)\}$$

S'il n'y a pas de confusion, on écrit $d(v)$, Δ et δ pour désigner $d_G(v), \Delta(G)$ et $\delta(G)$ respectivement.

1.1.4 Graphes isomorphes

On dit que deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont isomorphes, s'il y a une bijection f : $V_1 \to V_2$ qui préserve l'adjacence , c'est-à-dire que

$$\forall x, y \in V_1, xy \in E_1 \Leftrightarrow f(x)f(y) \in E_2$$



FIGURE 1.3 – Deux graphes isomorphes.

1.1.5 Graphes particuliers

Graphe partiel , Sous-graphe et graphe induit

• Un graphe partiel de G est un graphe obtenu en enlevant une ou plusieurs arêtes de G. Autrement dit, un graphe partiel de G est un graphe H ayant le même ensemble de sommets, et ayant comme ensemble d'arêtes, un sous-ensemble de $E(G) : E(H) \subset E(G)$. Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appelle sous-graphe de G, un graphe$H = (U, F)$ tel que $U \subseteq V$ et $F \subseteq E$.
• Pour un sous-ensemble de sommet $A \subseteq V$, le sous-graphe induit par A, noté $G[A]$ ou $\langle A \rangle$, est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A. Étant donné un graphe H , on dit que G est sans H si H n'est pas isomorphe à aucun sous-graphes induits de G.
La figure 1.4. contient un graphe partiel et un sous-graphe.

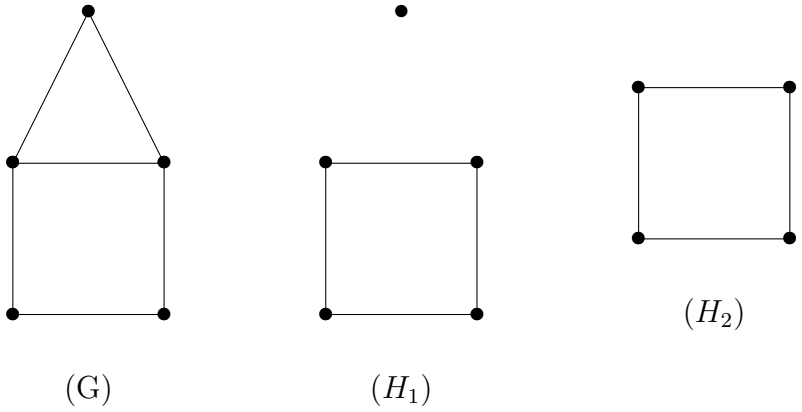


FIGURE 1.4 – H_1 est un Graphe partiel et H_2 est un sous-graphe de G .

1.2 Stable et Clique

1.2.1 Stable

Un stable de G est un sous-ensemble de sommets S deux à deux non adjacents entre eux.

• Le nombre de stabilité de G, noté $\alpha(G)$, est le cardinal maximal d'un stable de G , C'est-à-dire :
$\alpha(G) = max\{|S| \,;$ S est un stable de G $\}$.

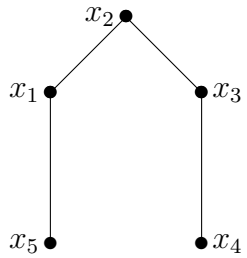


FIGURE 1.5 – P_5 .

Dans le graphe de la figure 1.5
$\alpha(P_5) = |\{x_2, x_5, x_4\}| = 3$

1.2.2 Clique

Une clique de G est un sous-ensemble de sommets deux-à-deux adjacents entre eux.
Autrement dit : une clique est un sous-graphe complet de G.
Une clique de p sommets est notée K_p. La taille d'une clique est égale au nombre de ses sommets.
La taille d'une clique maximale est appelée nombre de clique, notée $\omega(G)$.

1.2.3 Chaîne

Soit un graphe G = (V ; E) une chaîne, notée P_k, de G est une séquence fini de k sommets $u_1, u_2, ..., u_k$, où pour tout $1 \leq i < k-1$, $(u_i u_{i+1}) \in E$.
• Les sommets u_1 et u_k sont les extrémiteés de la chaîne P_k et les sommets $u_2, ..., u_{k-1}$ sont les sommets intérieurs de P_k.
• Une chaîne P_k est simple si toutes ses arêtes sont distinctes.
• Une chaîne P_k est élémentaire si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.
• La chaîne P_k est dite fermée si u_1 et u_k sont confondues

1.2.4 Cycle

Un cycle, noté C_n, d'un graphe G = (V ; E) est une chaîne fermée.

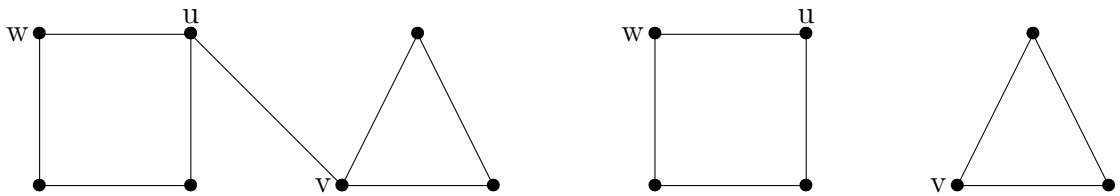
1.2.5 Graphe connexe

Un graphe G = (V, E) est dit connexe si toute paire de sommets $u, v \in V$ est relié par au moins une chaîne.

• Une composante connexe d'un graphe G est un sous-graphe maximal connexe.

• Une arête e est appelée un isthme si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes.

Exemple 1 *Le graphe G admet l'arête uv comme isthme, car $G - uv$ est non connexe,uv est un isthme et wu ne l'est pas. Voir la figure1.6 .*



(G_1) (G_2)

FIGURE 1.6 – G_1 est connexe et G_2 est non connexe .

1.2.6 Graphe biparti et étoile

- Un graphe G = (V, E) est dit biparti si V peut-être partitionner en deux stables V_1 et V_2 tel que une arête e relie un sommet de V_1 et un sommet de V_2. Voir la figure 1.8
- Un graphe biparti complet est un graphe biparti si chaque sommet de V_1 est relié à tout les sommets de V_2 et inversement ,
- Si $|V_1|$ = p et $|V_2|$ = q le graphe biparti complet est noté par $K_{p,q}$. Voir la figure 1.9

- Plus généralement, un graphe G = (V, E) est dit k-parti ($k \geq 2$), si V peut-être partitionné en k stables $V_1, V_2, ..., V_k$, il est dit multiparti-complet si, pour tout, $i \neq j$, tout sommet de V_i est adjacent à tout sommet de V_j .

- Une étoile est le graphe biparti complet $k_{1,S}$. le sommet de degré S est le centre de l'étoile. cas particulier si S = 3, $K_{1,3}$ est appelé griffe.
  Voir les figures 1.10 et 1.11 .
- Une doublé étoile est le graphe formé par deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ en reliant ses deux centres par un arête. Voir la figure 1.12 .

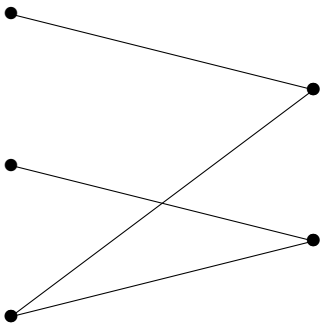


FIGURE 1.7 – Graphe biparti

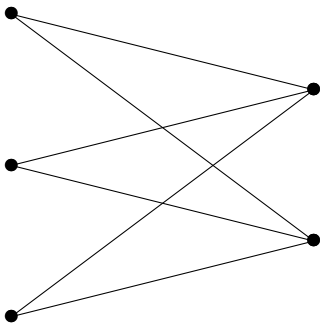


FIGURE 1.8 – Graphe biparti-complet $k_{2,3}$

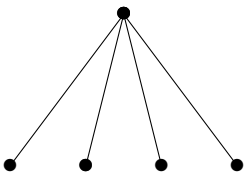


FIGURE 1.9 – Graphe étoile.

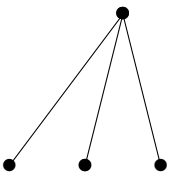


FIGURE 1.10 – Griffe.

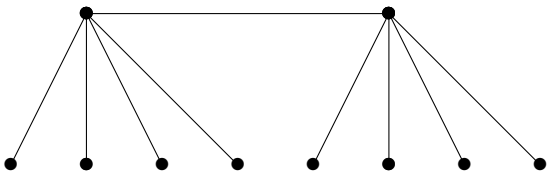


FIGURE 1.11 – une double étoile .

1.2.7 Graphe complémentaire

• Le complémentaire du graphe $G = (V, E)$, noté $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$, est un graphe vérifiant $\overline{V} = V$ et $\overline{E} = \{e = uv, e \notin E\}$.
• Autrement dit : deux sommets sont adjacents dans $\overline{G}$ si seulement s'ils ne le sont pas dans G. Voir la figure 1.13 .



FIGURE 1.12 – graphe G et sous graphe complémentaire $\overline{G}$

Remarque

L'union de G et $\overline{G}$ est un graphe complet.Voir la Figure 1.14 qui illustre un C_5 ,$\overline{C}_5$ et K_5.

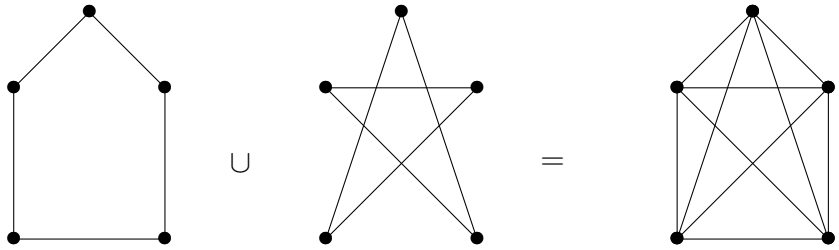


FIGURE 1.13 – Graphe $C_5 \cup \overline{C}_5 = K_5$

1.2.8 Graphe Roue

Une roue, notée W_n, est formé d'un cycle C_{n-1} et un sommet supplémentaire, appelé centre, adjacent à tous les sommets du cycle C_{n-1}.

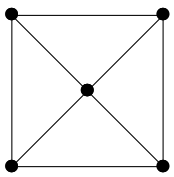


FIGURE 1.14 – W_5.

1.2.9 Graphe régulier

Un graphe G est dit k-régulier si tous ses sommets sont de même degré k.

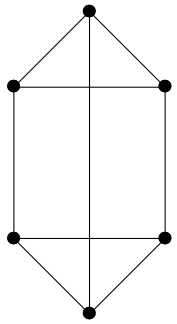


FIGURE 1.15 – Graphe 3-régulier.

1.2.10 Arbre

• Un arbre d'ordre n est un graphe connexe sans cycles il contient exactement (n-1) arête. Voir la figure 1.17 .

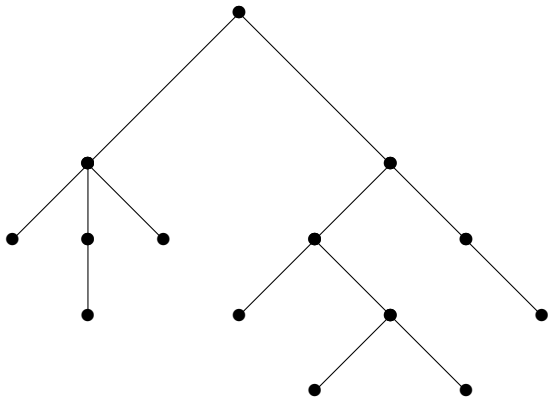


FIGURE 1.16 – Arbre.

1.2.11 Distance et diamètre

Dans un graphe connexe G :
• La distance entre deux sommets u et v, notée $d(u, v)$, est le nombre d'arêtes d'une plus courte chaîne entre u et v.
• Le diamètre du graphe G, noté $Diam(G)$, est $Diam(G) = \max_{uv \in V}(d(u, v))$

1.3 Graphe Hamiltonien

1.3.1 Chaîne Hamiltonienne et cycle Hamiltonien

• Une chaîne Hamiltonienne est une chaîne qui passe par tous les sommets de graphe une et une seule fois .
• Un cycle passant par tous les sommets une et une seule fois d'un graphe est appelé cycle Hamiltonien.

1.3.2 Graphe semi-Hamiltonien

Un graphe G est dit semi-Hamiltonien s'il contient une chaîne Hamiltonienne.

1.3.3 Graphe Hamiltonien

Un graphe G est dit Hamiltonien s'il contient un cycle hamiltonien.

1.3.4 Graphe hamiltonien connexe

Pour un graphe donné $G = (V, E)$, G est dit hamiltonien connexe s'il contient une chaîne hamiltonienne partant de tout sommet $x \in V$ vers tout sommet $y \in V - x$.

1.4 Graphe pancyclique

Hoseiny Farahabady et all., dans [16], ont donnés la définition qui suit :

Définition 1 *(Hoseiny Farahabady et all.) Un graphe G est appelé pancyclique s'il contient tous les cycles de longueur k pour tout $3 \leq k \leq |V(G)|$.*

1.5 Hypercube

L'hypercube, noté Q_n, est un graphe d'ordre 2^n tel que son ensemble de sommets est l'ensemble des n-uplets $\{0,1\}^n$ et deux sommets sont adjacents dans Q_n si et seulement s'ils se différent en exactement une seule composante.
Autre définition :
Un hypercube d'ordre n, aussi appelé n-cube, c'est le graphe de 2^n sommets qui peuvent être considérés comme étant tous les vecteurs booléens de $\{0,1\}^n$. On note les sommets $(x_1, x_2, ..., x_n)$, de Q_n par $x_1x_2...x_n$ avec $x_i \in \{0,1\}$.



FIGURE 1.17 – Q_1.

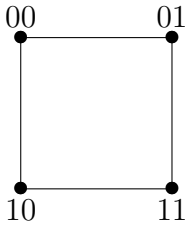


FIGURE 1.18 – Q_2.

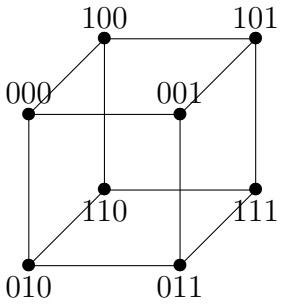


FIGURE 1.19 – Q_3.

Chapitre 2

Quelques résultats existants sur les graphes OTIS et la coloration propres

2.1 INTRODUCTION

Le système d'interconnexion à transposition optique (OTIS), qui a été proposé dans ([6], [11], [10]), génère une large classe de réseaux d'interconnexion évolutifs à hautes performances. Il offre une nouvelle architecture informatique optoélectronique qui tire parti à la fois des technologies optiques et électroniques. Dans cette architecture, les processeurs sont divisés en groupes où les interconnexions électroniques sont utilisées pour connecter les processeurs au sein de chaque groupe tandis que les interconnexions optiques sont utilisées pour la communication inter-groupe [6]. Dans un tel systéme OTIS, un ed optique relie le processeur p du groupe g au processeur g du groupe p. Il a été montré dans [16] que lorsque le nombre de processeurs dans un groupe est égal au nombre de groupes, la bande passante et la consommation d'énergie dans les réseaux OTIS sont optimisées et la zone et le volume du systéme sont minimisés.

Ainsi, dans un réseau OTIS à N^2 processeurs, les processeurs sont partitionnés en N groupes de N processeurs. Outre les connexions électroniques entre les processeurs de chaque groupe, le processeur i du groupe j est connecté optiquement au processeur j du groupe i.
L'OTIS-hypercube et l'OTIS-mesh sont deux des instances les plus étudiées de l'architecture OTIS ([17], [4]).
Un certain nombre d'algorithmes ont été développés pour ces réseaux, tels que le routage, la sélection et le tri ([17], [22] , [9]), le réarrangement des données [22], la multiplication matricielle [23] et la diffusion [1]. De nombreuses propriétés topologiques de ces systémes, telles que le degré de nœud, le diamétre, la coupe β et la largeur de la bissection, ont été abordées dans des etudes antérieures ([1], [22]). De plus, dans [12] , il a été prouvé que si G est un graphe Hamiltonien connexe, l'OTIS-G l'est aussi. De plus, la tolérance aux fautes d'OTIS-Networks a été abordée et le diamétre de faute d'OTIS-G est dérivé par rapport au diamétre de faute de G [12]. Dans ([4] , [6]), les mérites de performance de l'OTIS-hypercube et l'effet de différents paramétres structurels et de charge de travail sur la performance globale sont etudiés. Leur résultat révéle que les multicalculateurs OTIS sont de bons candidats pour les réseaux d'interconnexion des calculateurs paralléles de la future génération. Dans cet article, nous prouvons la conjecture proposée dans [1]. D'aprés cette conjecture si G contient un cycle de longueur L, alors il existe un cycle de longueur L2 dans OTIS-G. Nous genéralisons également ce résultat et démontrons que s'il existe un chemin hamiltonien entre tous les deux nœuds arbitraires du graphe G (ou si G est connexe à l'hamiltonien), alors tous les cycles de longueur $7, 8, ..., |VG|^2$ peutêtre construit dans OTIS-G. L'organisation du papier est la

suivante. Dans la section 2, le réseau OTIS est formellement défini et certaines propriétés de base de ce réseau sont rapportées. Dans la section 3, la propriété de pancyclicité de l'OTIS-G par rapport à la propriété hamiltonienne du réseau de base G est prouvée. Enfin, la section 4 conclut cet article.

2.2 Graphe OTIS

Le lecteur intéressé est référé à [11] pour un compte rendu approfondi des concepts et des propriétés de base des Graphes OTIS tels que la topologie, les algorithmes de routage, la diffusion, incorporation de graphe, etc.
K. Day et A.-E. AlAyyoub, dans [11], ont définis le graphe OTIS d'un graphe non orienté G comme suit :

Définition 2 *Pour un graphe non orienté $G = (V(G), E(G))$, on appelle graphe OTIS du graphe G, noté $OT_G = (V_{OT}, E_{OT})$ tel que :*

$$\begin{cases} V_{OT} = \{(x, y)\ ;\ x, y \in V(G)\} \\ et \\ E_{OT} = \{((x, y_1), (x, y_2))\ ;\ x \in V(G), y_1, y_2 \in V(G)\} \cup \{((x, y), (y, x))\ ;\ x, y \in V(G), x \neq y\} \end{cases}$$

Remarque 1 *On peut noter xy le sommet (x, y).*

exemple ;

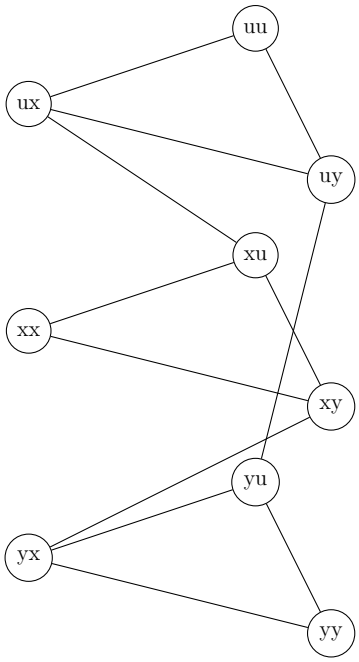


FIGURE 2.1 – OT_{C_3}

Day et AlAyyoub, en 2002 dans [11], ont prouvés la théorème suivant :

Théorème 1 *[11].*
Si G admet un L-Cycle, alors OT_G admet un $L^2 - L$-Cycle.

Théorème 2 *[11].*
Si G est h-connexe, alors OT_G est aussi h-connexe

En 2007, Hoseiny Farahabady et all. dans [16], ont donnés la résultat suivant :

Théorème 3 *[16].*
Si le graphe G contient un L-cycle, il existe un L^2-Cycle dans OT_G.

Dans [15],Malekimajd and all., ont donnés le résultat qui suit :

Théorème 4 *[15].*
Si un graphe de facteurs G a un cycle de longueur L, alors OT_G a tous les cycles de longueurs 7 à L^2-1

Dans [2],B. Parhami ., ont donnés le résultat qui suit :

Théorème 5 *[2].*
Si G est un graphe hamiltonien d'ordre pair $n=2h$, alors OT_G l'est aussi.
Si G est un graphe hamiltonien d'ordre inpair $n=2h+1$, alors OT_G l'est auss.

Théorème 6 *[16]*
Si G est hamiltonien, alors OT_G est aussi hamiltonien.

C.H. Yeh, en 1996 dans [5], ont prouvés la théorème suivant :

Théorème 7 *[5].*
Si G a un sommet u de degré d et est de diamètre D, alors le degré de (u,v) est $d+1$ pour tous $u \neq v$ et le diamètre de OT_G est $2D+1$,

2.3 k-ary n-cube

Le k-ary n-cube, noté Q_n^k, a $N = k^n$ sommet chacun de la forme $X = x_{n-1}x_{n-2}...x_0$, où $0 \leq x_i < K$, pour tous les $0 \leq i < n$. Deux sommet $X = x_{n-1}x_{n-2}...x_0$ et $Y = x_{n-1}y_{n-2}...y_0$ sont adjacent dans Q_n^k si et seulement s'il existe i, $0 \leq i < n$, tel que $x_i = y_i \pm 1$ (mod k) et $x_j = y_j$, pour $i \neq j$.

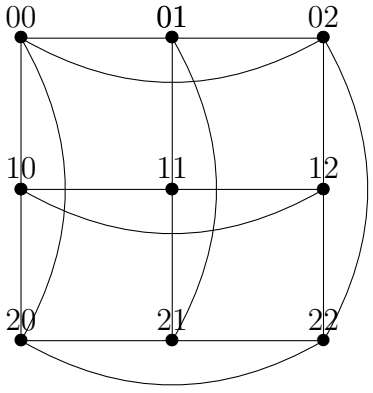


FIGURE 2.2 – Q_2^3

S. Chatterjee et all., dans [21],ont montrés que :

Théorème 8 *[21]*
Tout k-ary n-cube Q_n^k est de degré $2n$ et de diamètre $n\lfloor K/2 \rfloor$.

2.4 Graphes OTIS-Q_n^k

Les graphes OTIS-Q_n^k est une graphe non orienté notée par :

$V(OT) = \{(x, y)|x, y \in Q_n^k\}$
et
$E(OT) = \{((x, y_1), (x, y_2))|, (y_1, y_2)$ est une arête dans $Q_n^k\} \cup \{((x, y), (y, x))|x \neq y$ in Q_n^k $\}$.
Les $OTIS - Q_n^k$ est composé de $N = k^n$ sommet-disjoint sous-graphe $Q_n^{k(1)}$, $Q_n^{k(2)}, ..., Q_n^{k(N)}$ appelés groupes. Chacun de ces groupes est isomorphe à une K-ary n-cube Q_n^k.

2.5 Coloration dans les graphes

2.5.1 Coloration des sommets

On appelle coloration des sommets d'un graphe, toute attribution d'une couleur a chaque sommet (c'est à-dire une fonction c : V $\rightarrow \{1, 2, 3, ..., k\}$ (k$\in N$)) Une coloration est dite propre si chaque deux sommets voisins portent deux couleurs différentes.c'est à-dire $\forall v, w \in V$ si $vw \in E$, alors $c(v) \neq c(w)$.
G est k-colorable si G admet une coloration propre de k couleurs.
Étant donné un graphe G = (V ; E) d'ordre n. Une coloration triviale est une coloration propre de n couleurs. Ainsi, tout graphe à n sommets admet une n-coloration. Donc il est naturel de se demander quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer G. d'ou la défnition du nombre chromatique de G.

2.5.2 Le nombre chromatique

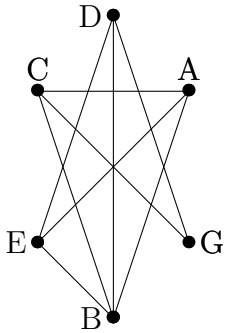
Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$ est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour une coloration propre de G. Autrement dit : le plus petit entier k d'une k-coloration de G.
Une classe de couleur i est un ensemble stable de sommets de V colorés avec la même couleur i.

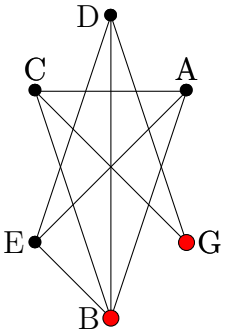
2.5.3 Algorithme de coloration de Welsh et Powell

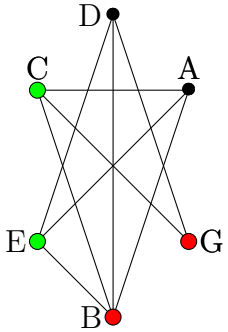
1. Classer les sommets suivant un ordre décroissant de leur degrés.
2. En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré, et non adjacent à un sommet de cette couleur.
3. S'il reste des sommets non encore colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2.

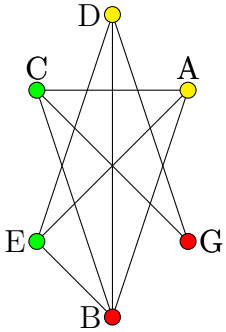
L'algorithme de Welsh et Powell couramment utilisé permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est-à-dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant, il n'assure pas que le nombre de couleurs utilisé soit minimum.
• Exemple :

sommet	degré
B	4
E	3
C	3
D	3
A	3
G	2









Dans l'exemple $\chi(G) = 3$

2.6 Résultats sur la coloration

Théorème 9 *[25]*
Pour tout graphe connexe G de degré maximum $\triangle(G)$, si G n'est ni un cycle d'ordre impair, ni un graphe complet, alors

$$\chi(G) \leq \triangle(G)$$

.
Dans [19],R.L. Brooks., ont donnés le résultat qui suit :

Théorème 10 *[19] Pour tout graphe G de degré maximum $\triangle(G)$,*

$$\chi(G) \leq \triangle(G) + 1$$

De plus, si G est un graphe complet ou un cycle impair, alors

$$\chi(G) = \triangle(G) + 1$$

Remarque 2 *Une k-coloration propre des sommets d'un graphe G est donc une partition de l'ensemble des sommets de G en k stables*

Théorème 11 *[18]*
Soit G un graphe de taille $m \geq 1$. Alors $\chi(G) = 2$ si et seulement si G est un graphe biparti.

Théorème 12 *[18]*
Si H est un sous graphe de G, alors

$$\chi(H) \leq \chi(G)$$

Théorème 13 *[18]*
Pour tout graphe G

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

Proposition 1 *[14]*

1. *Le nombre chromatique d'un graphe complet d'ordre n est n.*
2. *Le nombre chromatique d'un graphe discret d'ordre n est 1.*
3. *Le nombre chromatique d'un cycle d'ordre pair est 2.*
4. *Le nombre chromatique d'un cycle d'ordre impair* ≥ 3 *est 3.*
5. *Le nombre chromatique d'une chaîne d'ordre* ≥ 2 *est 2.*

Théorème 14 *[3]*
Tout graphe G d'ordre n, satisfait

$$\chi(G)\alpha(G) \geq n$$

et

$$\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$$

Théorème 15 *[7]*
Soit G un graphe d'ordre n et G son complémentaire. Alors

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$$

.

Chapitre 3

Coloration de certain graphes OTIS

3.1 Coloration de OT_{P_4}

Proposition 2 *Pour la chaîne P_4, on a*

$$\chi(OT_{P_4}) = \chi(P_4) + 1$$

Preuve. *:*
On a $\{x_1x_1, x_1x_3\}$ et $\{x_1x_2, x_1x_4\}$ sont deux stables dans G_1, donc

- *Affectons la couleur c_1 aux sommets x_1x_1 etx_1x_3*
- *Affectons la couleur c_2 aux sommets x_1x_2 et x_1x_4*

de même $\{x_2x_1, x_2x_3\}$ et $\{x_2x_2, x_2x_4\}$ sont deux stables dans G_2, donc

- *Affectons la couleur c_1 aux sommets x_2x_1 etx_2x_3*
- *Affectons la couleur c_2 aux sommets x_2x_2 et x_2x_4*

$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(x_1x_2), (x_2x_1)\}$

(b) $\{x_3x_1, x_3x_3\}$ et $\{x_3x_2, x_3x_4\}$ sont deux stables dans G_3

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = E(G_1 \cup G_2) \cup E(G_3) \cup \{(x_1x_3, x_3x_1), (x_2x_3, x_3x_2)\}$
comme $c(x_1x_3) = c(x_2x_3) = 1$ et $P = \{x_1x_3, x_3x_1, x_3x_2, x_2x_3\}$ est une chaîne dans OT_{P_4}, alors
$c(x_1x_3) \neq c(x_3x_1)$
$c(x_3x_1) \neq c(x_3x_2)$
$c(x_3x_2) \neq c(x_2x_3)$
donc $c(x_1x_3) \neq c(x_3x_1) \neq c(x_3x_2)$ alors $\chi(G_3) \geqslant 3$.

- *Affectons la couleur c_1 aux sommets x_3x_3*
- *Affectons la couleur c_2 aux sommets x_3x_2 et x_3x_4*
- *Affectons la couleur c_3 aux sommets x_3x_1*

(c) $\{x_4x_1, x_4x_3\}$ et $\{x_4x_2, x_4x_4\}$ sont deux stables dans G_4

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) \cup E(G_4) = E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup \{(x_1x_4, x_4x_1), (x_4x_2, x_2x_4), (x_3x_4, x_4x_3)\}$

comme $c(x_1x_4) = c(x_2x_4) = 2$ et on a $P = \{x_1x_4, x_4x_1, x_4x_2, x_2x_4\}$ est une chaîne dans OT_{P_4}, alors
$c(x_1x_4) \neq c(x_4x_1)$

$c(x_4x_1) \neq c(x_4x_2)$
$c(x_4x_2) \neq c(x_2x_4)$
donc $c(x_1x_4) \neq c(x_4x_1) \neq c(x_4x_2)$ *alors* $\chi(G_3) \geqslant 3$.

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_4x_1 *et* x_4x_3
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_4x_4
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_4x_2

donc la coloration de graphe OT_{P_4}*=3* ■

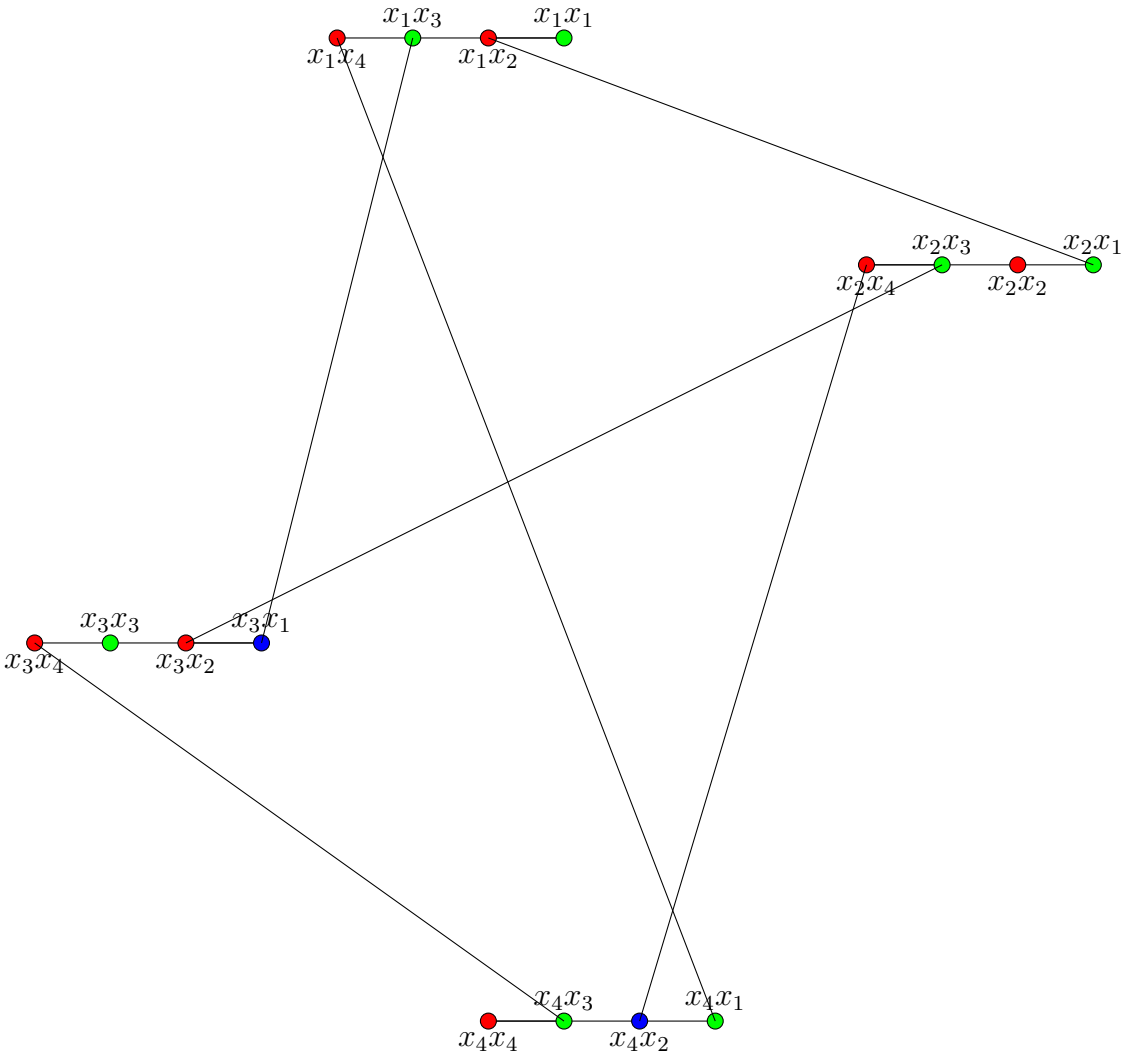


FIGURE 3.1 – OT_{P_4}

3.2 Coloration des OTIS cycles

Proposition 3 *Pour tout cycle* C_n

$$\chi(OT_{Cn}) = \begin{cases} \chi(C_n) + 1 & si\ n = 2k \\ et & \\ \chi(C_n) & si\ n = 2k+1 \end{cases}$$

Preuve. *:* • *Pour* OT_{C_4}

(a) Soit $C_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1)$ *et* $OT_{C_4} = (G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4)$ *avec*$\langle G_i \rangle = \langle x_i x_j ; j = 1, 2, 3, 4 \rangle$
$\{x_1x_1, x_1x_3\}$ *et* $\{x_1x_2, x_1x_4\}$ *sont deux stables dans* G_1 *,donc*

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_1x_1 *etx*$_1x_3$
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_1x_2 *et* x_1x_4

de même $\{x_2x_1, x_2x_3\}$ *et* $\{x_2x_2, x_2x_4\}$ *sont deux stables dans* G_2*, donc*

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_2x_1 *etx*$_2x_3$
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_2x_2 *et* x_2x_4

$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(x_1x_2), (x_2x_1)\}$

(c) $\{x_3x_1, x_3x_3\}$ *et* $\{x_3x_2, x_3x_4\}$ *sont deux stables dans* G_3

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = E(G_1 \cup G_2) \cup E(G_3) \cup \{(x_1x_3, x_3x_1), (x_2x_3, x_3x_2)\}$
comme $c(x_1x_3) = c(x_2x_3) = 1$ *et on a* $P = \{x_1x_3, x_3x_1, x_3x_2, x_2x_3\}$ *est une chaîne dans* OT_{C_4}*, alors*
$c(x_1x_3) \neq c(x_3x_1)$
$c(x_3x_1) \neq c(x_3x_2)$
$c(x_3x_2) \neq c(x_2x_3)$
donc $c(x_1x_3) \neq c(x_3x_1) \neq c(x_3x_2)$ *alors* $\chi(G_3) \geqslant 3$.

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_3x_4
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_3x_1 *et* x_3x_3
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_3x_2

(c) $\{x_4x_1, x_4x_3\}$ *et* $\{x_4x_2, x_4x_4\}$ *sont deux stables dans* G_4

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4) = E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) \cup E(G_4) \cup \{(x_1x_4, x_4x_1), (x_4x_2, x_2x_4), (x_3x_4, x_4x_3)\}$

comme $c(x_1x_4) = c(x_2x_4) = 1$ *et on a* $P = \{x_1x_4, x_4x_1, x_4x_2, x_2x_4\}$ *est une chaîne dans* OT_{C_4}*, alors*
$c(x_1x_4) \neq c(x_4x_1)$
$c(x_4x_1) \neq c(x_4x_2)$
$c(x_4x_2) \neq c(x_2x_4)$
donc $c(x_1x_4) \neq c(x_4x_1) \neq c(x_4x_2)$ *alors* $\chi(G_3) \geqslant 3$.

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_4x_2 *et* x_4x_4
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_4x_3
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_4x_1

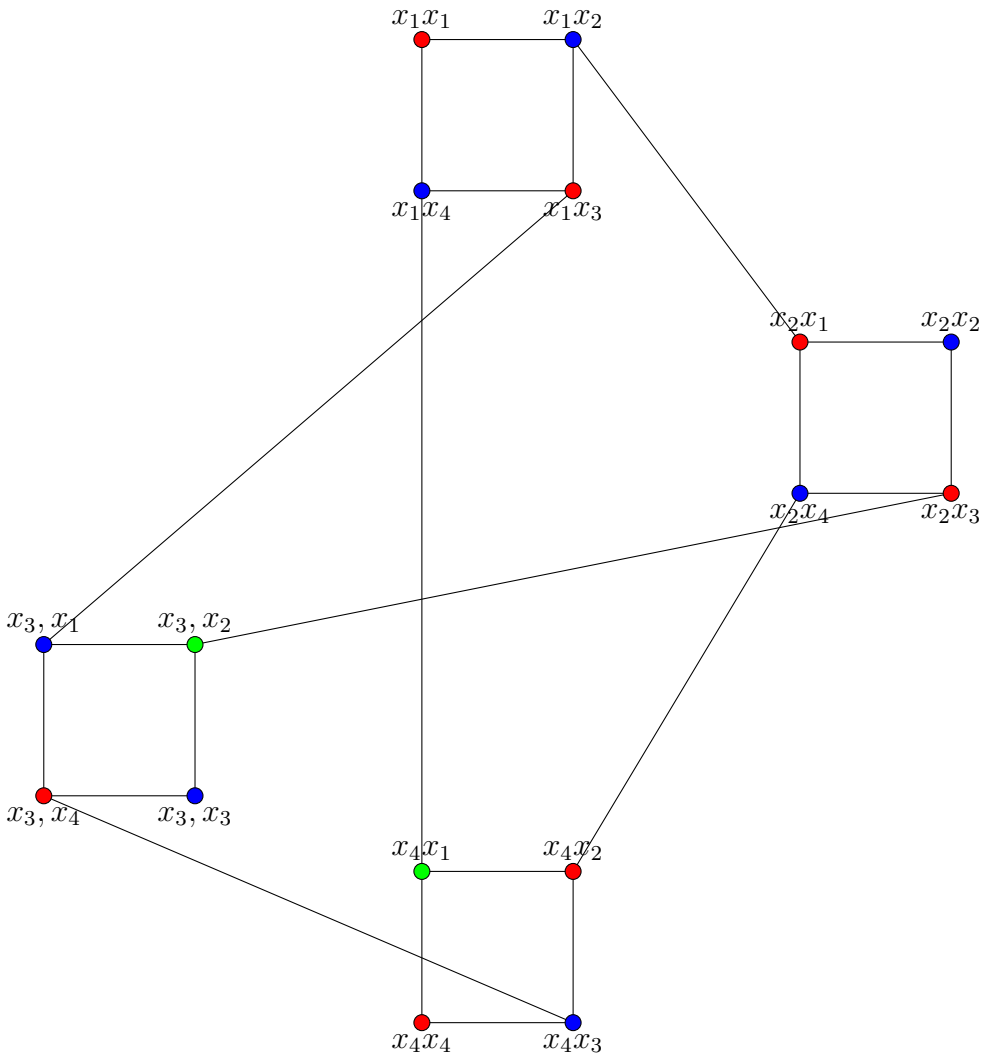


FIGURE 3.2 – OT_{C_4}

• *Pour* OT_{C_5}

(a) soit $C_5 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1)$ *et* $OT_{C_5} = (G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5)$ *avec*$\langle G_i \rangle = \langle x_i x_j ; j = 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$
$\{x_1x_1, x_1x_3\}$, $\{x_1x_2, x_1x_4\}$ *et* $\{x_1x_5\}$ *sont trois stables dans* G_1*, alors*
• *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_1x_1 *et* x_1x_3
• *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_1x_2 *et* x_1x_4
• *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_1x_5

$\{x_2x_1, x_2x_3\}$, $\{x_2x_2, x_2x_4\}$ *et* $\{x_2x_5\}$ *sont trois stables dans* G_2*, alors*
• *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_2x_1 *et* x_2x_3
• *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_2x_2 *et* x_2x_4
• *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_2x_5

$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{x_1x_2, x_2x_1\}$

$\{x_3x_1, x_3x_3\}$, $\{x_3x_2, x_3x_4\}$ *et* $\{x_3x_5\}$ *sont trois stables dans* G_3

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = E(G_1 \cup G_2) \cup E(G_3) \cup \{(x_1x_3, x_3x_1), (x_2x_3, x_3x_2)\}$

• *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_3x_3 *et* x_3x_5

- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_3x_1 *et* x_3x_4
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_3x_2

$\{x_4x_1, x_4x_3\}$, $\{x_4x_2, x_4x_4\}$ *et* $\{x_4x_5\}$ *sont trois stables dans* G_4

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4) = E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) \cup E(G_4) \cup \{(x_1x_4, x_4x_1), (x_4x_2, x_2x_4), (x_3x_4, x_4x_3)\}$
- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_4x_1 *et* x_4x_4
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_4x_3 *et* x_4x_5
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_4x_2

$\{x_5x_1, x_5x_3\}$, $\{x_5x_2, x_5x_4\}$ *et* $\{x_5x_5\}$ *sont trois stables dans* G_5

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5) = E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4) \cup E(G_5) \cup \{(x_1x_4, x_4x_1), (x_4x_2, x_2x_4), (x_3x_4, x_4x_3), (x_4x_5, x_5x_4)\}$

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_5x_1 *et* x_5x_3
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_5x_2 *et* x_5x_5
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_5x_4

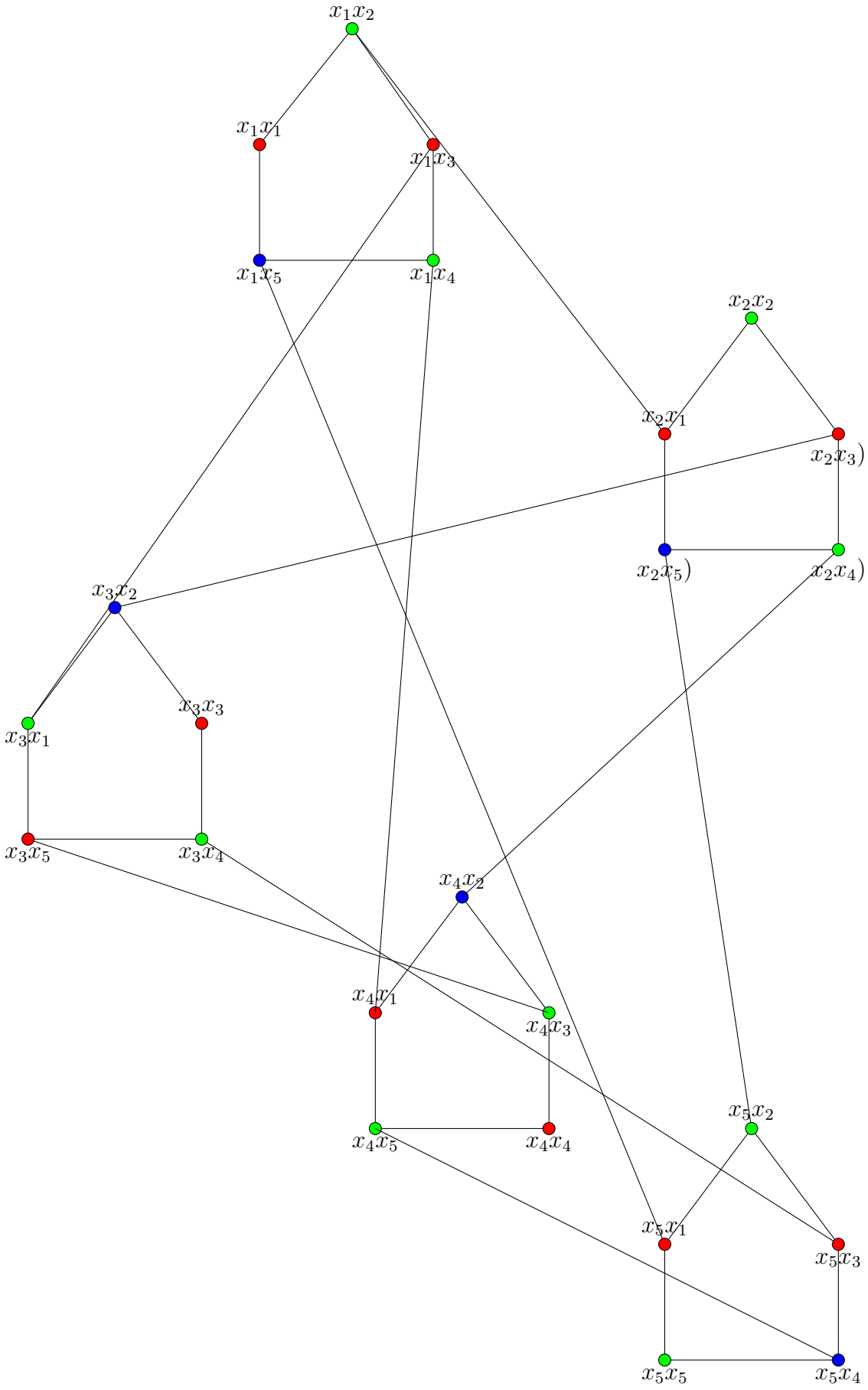


FIGURE 3.3 – OT_{C_5}

Cas 1 *:Pour G=*C_{2k}

$C_{2k} = (x_1, x_2, ..., x_{2k}, x_1)$ *et*
$OT_{C_{2k}} = G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_{2k}$
Dans G_1 *on a* $A_1 = \{x_1x_{2j+1}, 0 \leq j \leq k-1\}$ *et* $B_1 = \{x_1x_{2j}, 1 \leq j \leq k\}$ *sont deux ensembles stables Dans* G_1*, alors*
• *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets dans ensemble* A_1
• *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets dans ensemble* B_1

Dans G_2 *on a* $A_2 = \{x_2x_{2j+1}, 0 \leq j \leq k-1\}$ *et* $B_2 = \{x_2x_{2j}, 1 \leq j \leq k\}$ *sont deux ensembles stables don* G_2*, alors*
• *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets dans ensemble* A_2
• *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets dans ensemble* B_2
$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{x_1x_2, x_2x_1\}$

Dans G_3 *on a* $A_3 = \{x_3x_{2j+1}, 0 \leq j \leq k-1\}$ *et* $B_3 = \{x_3x_{2j}, 1 \leq j \leq k\}$ *sont deux ensembles stables dans* G_3*.*
$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = E(G_1 \cup G_2) \cup E(G_3) \cup \{(x_1x_3, x_3x_1), (x_2x_3, x_3x_2)\}$
comme $c(x_1x_3) = c(x_2x_3) = c_1$ *et* $P = \{x_1x_3, x_3x_1, x_3x_2, x_2x_3\}$ *est une chaîne dans* $OT_{C_{2k}}$*, alors*
$c(x_1x_3) \neq c(x_3x_1)$
$c(x_3x_1) \neq c(x_3x_2)$
$c(x_3x_2) \neq c(x_2x_3)$
donc $c(x_1x_3) \neq c(x_3x_1) \neq c(x_3x_2)$ *alors* $\chi G_3 \geqslant 3$*.*
• *Affectons la couleur 1 aux sommets Dans ensemble* $A_3 - (x_3x_1)$
• *Affectons la couleur 2 aux sommets Dans ensemble* B_3
• *Affectons la couleur 3 aux sommets* (x_3x_1)
et de même pour $G_4, G_5, ..., G_{2k}$ *alors* $\chi(OT_{C_{2K}}) = 3$

Cas 2 *: Pour G=*C_{2k+1}*.*

Soit $C_{2k+1} = (x_1, x_2, ...x_{2k+1}, x_1)$ *et* $OT_{C_{2k+1}} = G_1 \cup G_2 \cup ... \cup G_{2k+1}$
Dans G_1 *on a* $A_1 = \{x_1x_{2j+1}, 0 \leq j \leq k-1\}$ *et* $B_1 = \{x_1x_{2j}, 1 \leq j \leq k\}$ *et* $C_1 = \{x_1x_{2k+1}\}$ *,sont 3 ensembles stables Dans* G_1*, alors*
• *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets dans ensemble* A_1
• *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets dans ensemble* B_1
• *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets dans ensemble* C_1

Dans G_2 *on a* $A_2 = \{x_2x_{2j+1}, 0 \leq j \leq k-1\}$ *et* $B_2 = \{x_2x_{2j}, 1 \leq j \leq k\}$ *et* $C_2 = \{x_2x_{2k+1}\}$ *,sont trois stables , alors*
• *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets dans ensemble* A_2
• *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets dans ensemble* B_2
• *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets dans ensemble* C_2

$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(x_1x_2, x_2x_1)\}$
Dans G_3 *on a* $A_3 = \{x_3x_{2j+1}, 0 \leq j \leq k-1\}$ *et* $B_3 = \{x_3x_{2j}, 1 \leq j \leq k\}$ *et* $C_3 = \{x_3x_{2k+1}\}$ *,sont trois stables , alors*
• *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets dans ensemble* A_3
• *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets dans ensemble* B_3
• *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets dans ensemble* C_3

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = E(G_1 \cup G_2) \cup E(G_3) \cup \{(x_1x_3, x_3x_1), (x_2x_3, x_3x_2)\}$
et de même pour $G_4, G_5, ..., G_{2k+1}$.
Comme on a trois couleurs et trois stables donc le problème du cas pair ne se pose alors $\chi(OT_{C_{2k+1}}) = 3$
■

3.3 Coloration du graphe $OT_{K_{1,3}}$

Proposition 4 *Pour griffe* $K_{1,3}$*, on a*

$$\chi(OT_{K_{1,3}}) = 3$$

Preuve. *:*
(a) soit $K_{1,3}$=(x_1, x_2, x_3, x_4) *de centre* x_1 *et* $OT_{K_{1,3}} = (G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4)$ *avec* $\langle G_i \rangle = \langle x_i x_j; j = (1, 2, 3, 4) \rangle$ *avec* $i = (1, 2, 3, 4)$

Dans G_1 $\{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4\}$ *et* $\{x_1x_1\}$ *sont deux stables, donc*
• *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_1x_1
• *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_1x_2,x_1x_3 *et* x_1x_4

(b) $\{x_2x_2, x_2x_3, x_2x_4\}$ *et* $\{x_2x_1\}$ *sont deux stables Dans* G_2*, donc*
• *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_2x_1
• *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_2x_2,x_2x_3 *et* x_2x_4
$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(x_1x_2, x_2x_1)\}$

(c) $\{x_3x_2, x_3x_3, x_3x_4\}$ *et* $\{x_3x_1\}$ *sont deux stables Dans* G_3
$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = E(G_1 \cup G_2) \cup E(G_3) \cup \{(x_1x_3, x_3x_1), (x_2x_3, x_3x_2)\}$
comme $c(x_1x_3) = c(x_2x_3) = 2$ *et on a* $P = \{x_1x_3, x_3x_1, x_3x_2, x_2x_3\}$ *est une chaîne dans* $OT_{K_{1,3}}$*, alors*
$c(x_1x_3) \neq c(x_3x_1)$
$c(x_3x_1) \neq c(x_3x_2)$
$c(x_3x_2) \neq c(x_2x_3)$
donc $c(x_1x_3) \neq c(x_3x_1) \neq c(x_3x_2)$ *alors* $\chi G_3 \geqslant 3$.
• *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_3x_1
• *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_3x_3 *et* x_3x_4
• *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_3x_2

(d) $\{x_4x_2, x_4x_3, x_4x_4\}$ *et* $\{x_4x_1\}$ *sont deux stables Dans* G_4

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4) = E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) \cup E(G_4) \cup \{(x_1x_4, x_4x_1), (x_4x_2, x_2x_4), (x_3x_4, x_4x_3))\}$
comme $c(x_1x_4) = c(x_2x_4) = 2$ *et on a*$P = \{(x_1x_4), (x_4x_1), (x_4x_2), (x_2x_4)\}$ *est une chaîne dans* $OT_{K_{1,3}}$*, alors*
$c(x_1x_4) \neq c(x_4x_1)$
$c(x_4x_1) \neq c(x_4x_2)$
$c(x_4x_2) \neq c(x_2x_4)$
donc $c(x_1x_4) \neq c(x_4x_1) \neq c(x_4x_2)$ *alors* $\chi(G_3) \geqslant 3$.
• *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_4x_1
• *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_4x_4
• *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_4x_2 *et* x_4x_3
alors $\chi(OT_{K_{1,3}}) = 3$ ■

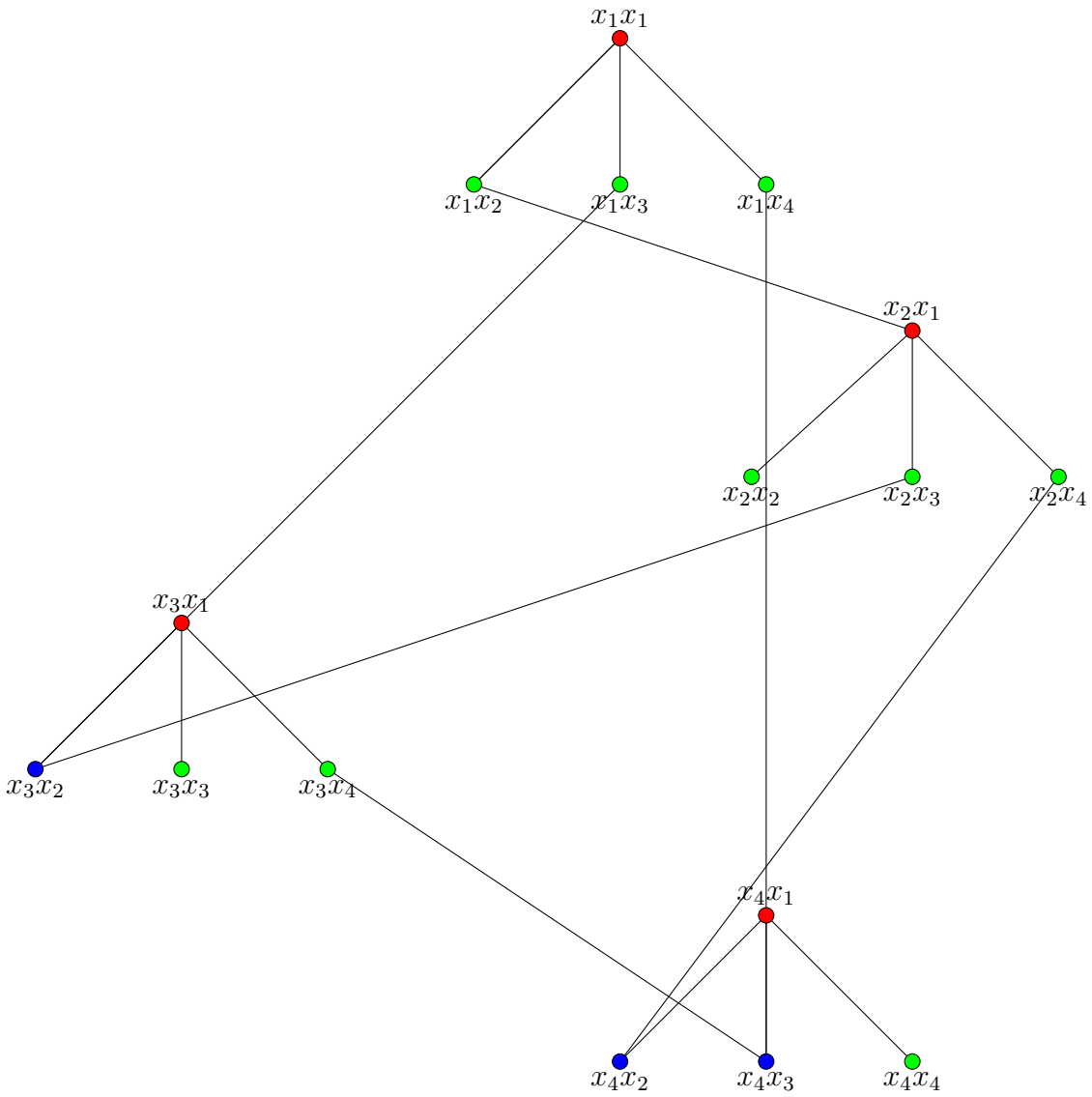


FIGURE 3.4 – $OT_{K_{1,3}}$

3.4 Coloration du graphe OTIS d'un graphe biparti $OT_{K_{2,3}}$

Proposition 5 *:*
Soit $G=(V_1, V_2, E)$ *avec* $V_1=\{x_1, x_2\}, V_2=\{x_3, x_4, x_5\}$ *et* $E=\{(x_1, x_3), (x_1, x_5)\}, \{(x_2, x_4), (x_2, x_5)\}$ *un graphe biparti, on a*

$$\chi(OT_G) = 3$$

Preuve. *:*
(a) Soit $G = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ *et* $OT_{K_{2,3}} = (G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5)$
$\{x_1x_1, x_1x_2, x_1x_3\}$ *et* $\{x_1x_4, x_1x_5\}$ *sont deux stables dans* G_1 *,donc*
- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_1x_1 *,* x_1x_2 *et* x_1x_3
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_1x_4 *et* x_1x_5

(b) $\{x_2x_1, x_2x_2, x_2x_3\}$ *et* $\{x_2x_4, x_2x_5\}$ *sont deux stables dans* G_2*,donc*
- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_2x_4 *et* x_2x_5
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_2x_1 *,* x_2x_2 *et* x_2x_3

$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(x_1x_2, x_2x_1)\}$

(c) $\{x_3x_1, x_3x_2, x_3x_3\}$ *et* $\{x_3x_4, x_3x_5\}$ *sont deux stables dans* G_3
$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = E(G_1 \cup G_2) \cup E(G_3) \cup \{(x_1x_3, x_3x_1), (x_2x_3, x_3x_2)\}$

comme $c(x_3x_1) = c(x_2x_3) = c_2$ *et* $P = \{x_3x_1, x_3x_5, x_3x_2, x_2x_3\}$ *est une chaîne dans* $OT_{K_{2,3}}$, *alors*
$c(x_3x_1) \neq c(x_3x_5)$
$c(x_3x_5) \neq c(x_3x_2)$
$c(x_3x_2) \neq c(x_2x_3)$
donc $c(x_3x_1) \neq c(x_3x_5) \neq c(x_3x_2)$ *alors* $\chi G_3 \geqslant 3$.
- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_3x_1 *et* x_3x_4
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_3x_2 *et* x_3x_3
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_3x_5

(d) $\{x_4x_1, x_4x_2, x_4x_3\}$ *et* $\{x_4x_4, x_4x_5\}$ *sont deux stables Dans* G_4

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4) = E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) \cup E(G_4) \cup \{(x_1x_4, x_4x_1), (x_4x_2, x_2x_4), (x_3x_4, x_4x_3)\}$

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_4x_1 *et* x_4x_4
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_4x_3 *et* x_4x_2
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_4x_5

(e) $\{x_5x_1, x_5x_2, x_5x_3\}$ *et* $\{x_5x_4, x_5x_5\}$ *sont deux stables Dans* G_5

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5) = E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4) \cup E(G_5) \cup \{(x_1x_5, x_5x_1), (x_5x_2, x_2x_5), (x_3x_5, x_5x_3), (x_4x_5, x_5x_4)\}$

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_5x_1 *et* x_5x_4
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_5x_2 *et* x_5x_3
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_5x_5

alors $\chi(OT_{K_{2,3}}) = 3$ ■

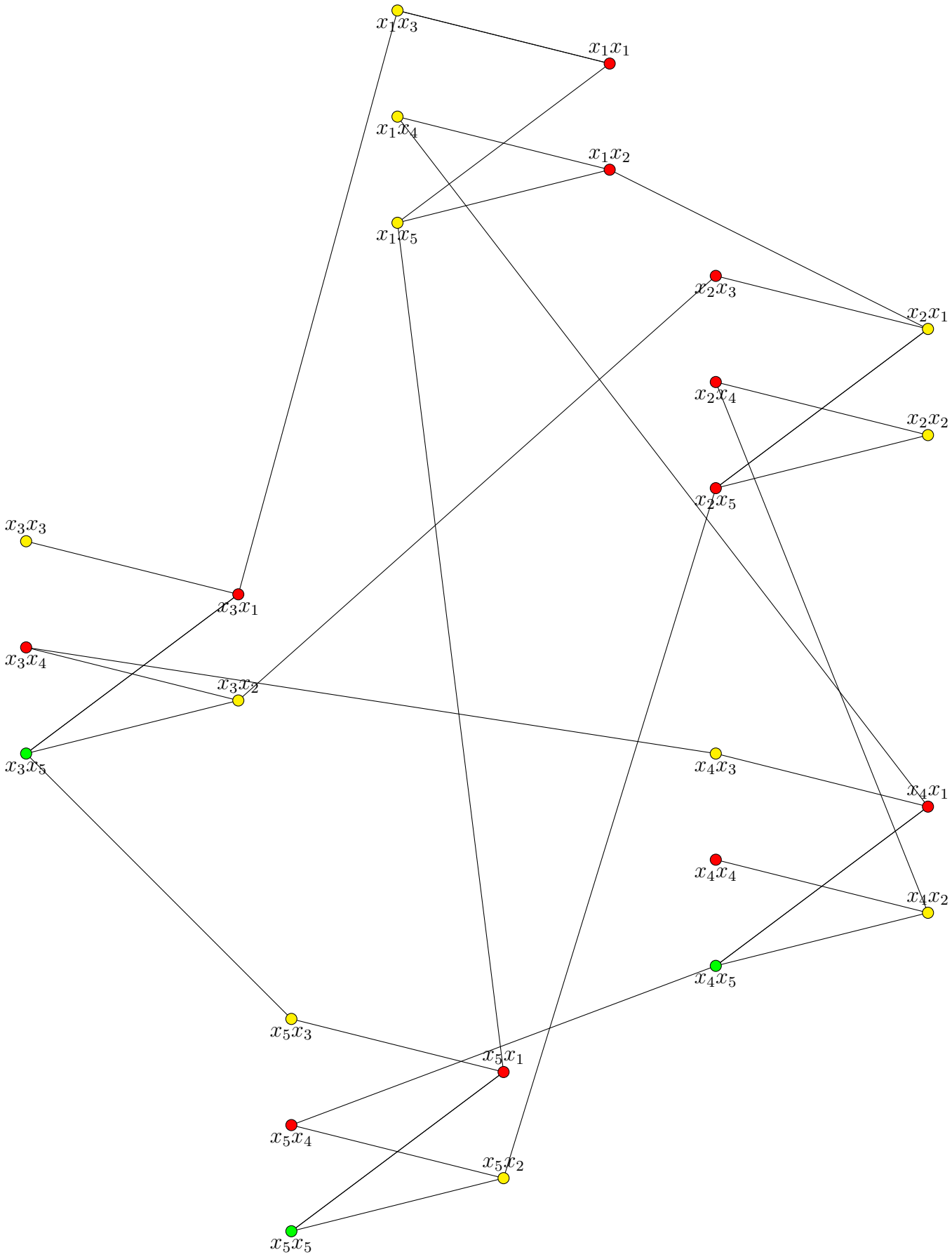


FIGURE 3.5 – $OT_{K_{2,3}}$

3.5 Coloration du graphe $OT_{K_{2,3}}$

Proposition 6 *Pour le graphe biparti complet $k_{2,3}$, on a*

$$\chi(OT_{k_{2,3}}) = 3$$

Preuve. *:*
(a) soit $k_{2,3} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ et $OT_{bi} = (G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5)$ avec $\langle G_i \rangle = \langle x_i x_j ; j = 1, 2, 3, 4, 5 \rangle$
$\{x_1x_1, x_1x_2\}$ et $\{x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5\}$ sont deux stables dans G_1, donc
- *Affectons la couleur c_1 aux sommets x_1x_1 ,x_1x_2*
- *Affectons la couleur c_2 aux sommets x_1x_3 et x_1x_4 et x_1x_5*

(b) $\{x_2x_1, x_2x_2\}$ et $\{x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5\}$ sont deux stables dans G_2, donc
- *Affectons la couleur c_1 aux sommets x_2x_3 et x_2x_4 et x_2x_5*
- *Affectons la couleur c_2 aux sommets x_2x_1 et x_2x_2*

$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(x_1x_2, x_2x_1)\}$

(c) $\{x_3x_1, x_3x_2\}$ et $\{x_3x_3, x_3x_4, x_3x_5\}$ sont deux stables dans G_3
$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = E(G_1 \cup G_2) \cup E(G_3) \cup \{(x_1x_3, x_3x_1), (x_2x_3, x_3x_2)\}$

comme $c(x_3x_1) = c(x_2x_3) = 1$ et on a $P = \{x_3x_1, x_3x_5, x_3x_2, x_2x_3\}$ est une chaîne dans $OT_{K_{2,3}}$, alors
$c(x_3x_1) \neq c(x_3x_5)$
$c(x_3x_5) \neq c(x_3x_2)$
$c(x_3x_2) \neq c(x_2x_3)$
donc $c(x_3x_1) \neq c(x_3x_5) \neq c(x_3x_2)$ alors $\chi G_3 \geqslant 3$.
- *Affectons la couleur c_1 aux sommets x_3x_1*
- *Affectons la couleur c_2 aux sommets x_3x_2*
- *Affectons la couleur c_3 aux sommets x_3x_3 ,x_3x_4 et x_3x_5*

(d) $\{x_4x_1, x_4x_2\}$ et $\{x_4x_3, x_4x_4, x_4x_5\}$ sont deux stables dans G_4
$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4) = E(G_1 \cup G_2 \cup (G_3) \cup E(G_4) \cup \{(x_1x_4, x_4x_1), (x_4x_2, x_2x_4), (x_3x_4, x_4x_3)\}$

- *Affectons la couleur c_1 aux sommets x_4x_3 et x_4x_4 et x_4x_5*
- *Affectons la couleur c_2 aux sommets et x_4x_2*
- *Affectons la couleur c_3 aux sommets x_4x_1*

(e) $\{x_5x_1, x_5x_2\}$ et $\{x_5x_3, x_5x_4, x_5x_5\}$ sont deux stables dans G_5

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5) = E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4) \cup E(G_5) \cup \{(x_1x_5, x_5x_1), (x_5x_2, x_2x_5), (x_3x_5, x_5x_3), (x_4x_5, x_5x_4)\}$
- *Affectons la couleur c_1 aux sommets x_5x_1*
- *Affectons la couleur c_2 aux sommets x_5x_3 et x_5x_4 et x_5x_5*
- *Affectons la couleur c_3 aux sommets x_5x_2*

■

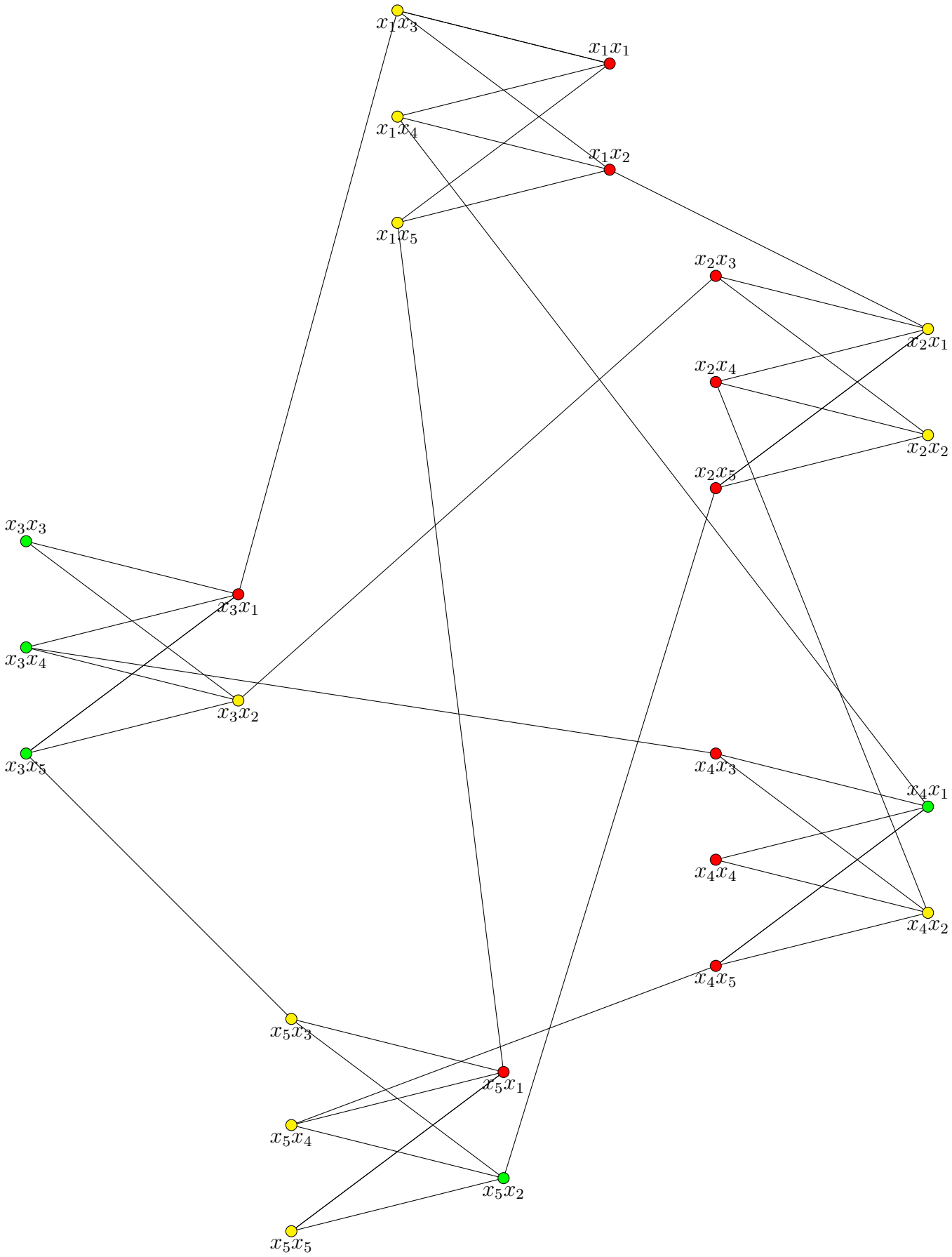


FIGURE 3.6 – OTIS-biparti complet $OT_{k_{2,3}}$

3.6 Coloration du graphe OT_{W_4}

Proposition 7 *Pour le graphe roue* W_4

$$\chi(OT_{W_4}) = 4$$

Preuve. *:*
$\{x_1x_1\}, \{x_1x_3\}, \{x_1x_2\}, \{x_1x_4\}$ *sont quatre stables dans* G_1*, donc*

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_1x_1
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_1x_2
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_1x_3
- *Affectons la couleur* c_4 *aux sommets* x_1x_4

de méme $\{x_1x_1\}, \{x_1x_3\}, \{x_1x_2\}, \{x_1x_4\}$ *sont quatre stables dans* G_2*, donc*

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_2x_2
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_2x_4
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_2x_1
- *Affectons la couleur* c_4 *aux sommets* x_2x_3

$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(x_1x_2), (x_2x_1)\}$

(c)$\{x_1x_1\}, \{x_1x_3\}, \{x_1x_2\}, \{x_1x_4\}$ *sont quatre stables dans* G_3
$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = E(G_1 \cup G_2) \cup E(G_3) \cup \{(x_1x_3, x_3x_1), (x_2x_3, x_3x_2)\}$

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_3x_2
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_3x_4
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_3x_1
- *Affectons la couleur* c_4 *aux sommets* x_3x_3

(c) $\{x_1x_1\}, \{x_1x_3\}, \{x_1x_2\}, \{x_1x_4\}$ *sont quatre stables dans* G_4
$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4) = E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) \cup E(G_4) \cup \{(x_1x_4, x_4x_1), (x_4x_2, x_2x_4), (x_3x_4, x_4x_3)\}$

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_4x_2
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_4x_4
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_4x_1
- *Affectons la couleur* c_4 *aux sommets* x_4x_3

■

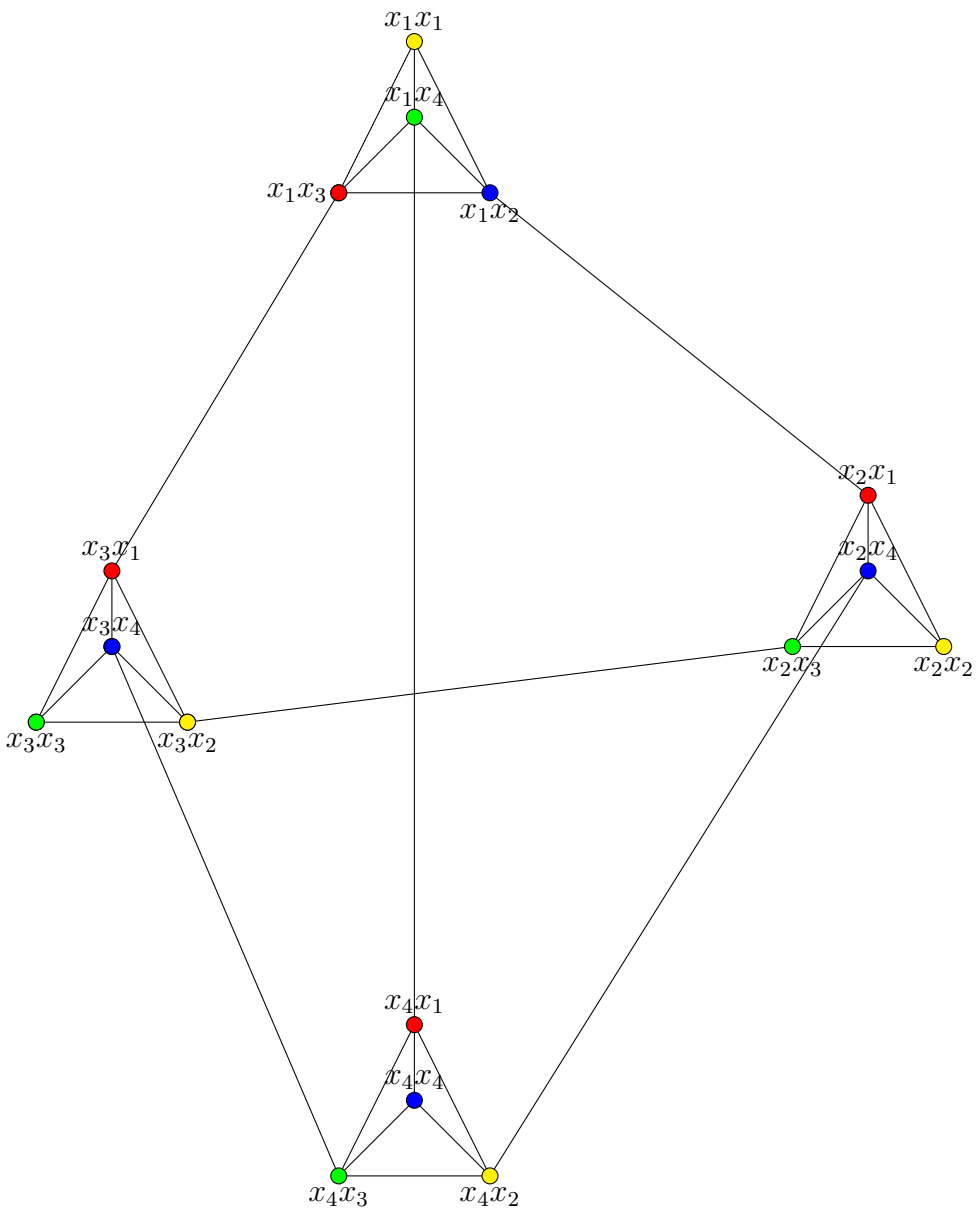


FIGURE 3.7 – OT_{W_4}

3.7 Coloration du graphe OT_{W_5}

Proposition 8 *Pour le graphe roue W_5, on a*

$$\chi(OT_{W_5}) = 3$$

Preuve. *: W_5 est un cycle C_4 et un sommet V adjacent a tous les sommet de cycle C_4 et comme $\chi(C_4) = 2$ et $N_G(v) = V(C_4)$alors $\chi(W_5) = 3$*
$\{x_1x_1, x_1x_3\}, \{x_1x_2, x_1x_4\}$ et $\{x_1x_5\}$ sont trois stables dans G_1, donc

- *Affectons la couleur c_1 aux sommets x_1x_1 et x_1x_3*
- *Affectons la couleur c_2 aux sommets x_1x_2 ,x_1x_4*
- *Affectons la couleur c_3 aux sommets x_1x_5*

de même $\{x_2x_1, x_2x_3\}, \{x_2x_2, x_1x_4\}$ et $\{x_2x_5\}$ sont trois stables dans G_2, donc

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_2x_1 *et* x_2x_3
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_2x_2 *,*x_2x_4
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_1x_5

$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(x_1x_2), (x_2x_1)\}$

(c)$\{x_3x_1, x_3x_3\}, \{x_3x_2, x_3x_4\}$ *et* $\{x_3x_5\}$ *sont trois stables dans* G_3

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = E(G_1 \cup G_2) \cup E(G_3) \cup \{(x_1x_3, x_3x_1), (x_2x_3, x_3x_2)\}$

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_3x_5
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_3x_2 *et* $\{x_3x_4\}$
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_3x_1*,*x_3x_3

(c) $\{x_4x_1, x_4x_3\}, \{x_4x_2, x_4x_4\}$ *et* $\{x_4x_5\}$ *sont trois stables dans* G_4

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4)$=$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) \cup E(G_4) \cup \{(x_1x_4, x_4x_1), (x_4x_2, x_2x_4), (x_3x_4, x_4x_3)\}$

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_4x_1 *et* x_4x_3
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_4x_5
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_4x_2 *,* x_4x_4

(e) $\{x_5x_1, x_5x_3\}, \{x_5x_2, x_5x_4\}$ *et* $\{x_5x_5\}$ *sont trois stables dans* G_5

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5)$=$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4) \cup E(G_5) \cup \{(x_1x_5, x_5x_1), (x_5x_2, x_2x_5), (x_3x_5, x_5x_3), (x_4x_5, x_5x_4)\}$

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets* x_5x_2 *et* x_5x_4
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets* x_5x_1 *et* x_5x_3
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets* x_5x_5

■

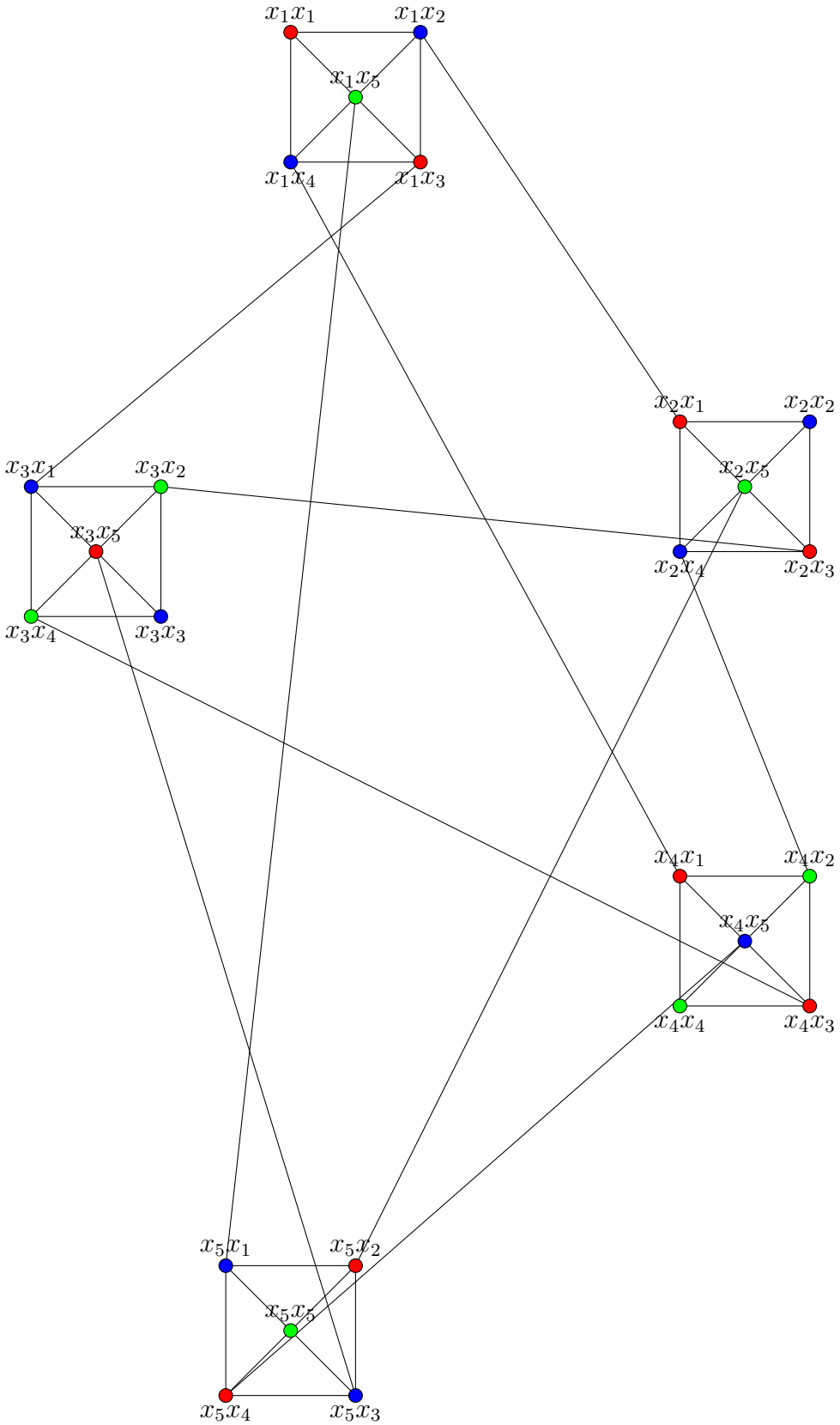


FIGURE 3.8 – OT_{W_5}

3.8 Coloration du graphe OT_{Q_3}

Proposition 9 *Pour le graphe hypercube Q_3, on a*

$$\chi(OT_{Q_3}) = 3$$

Preuve. *:*
(a) Soit $\{(000,000),(000,101),(000,110),(000,011),\}$ *et* $\{(000,100),(000,001),(000,010),(000,111)\}$ *sont deux stables dans G_1, donc*

- *Affectons la couleur c_1 aux sommets (000,000),(000,101),(000,110)et(000,011)*
- *Affectons la couleur c_2 aux sommets (000,100),(000,001),(000,010)et(000,111)*

(b) de même $\{(000,000),(000,101),(000,110),(000,011)\}$ *et* *{(000,100),(000,001),(000,010),(000,111)} sont deux stables dans G_2, donc*

- *Affectons la couleur c_1 aux sommets (001,000),(001,101),(001,110) et (001,011)*
- *Affectons la couleur c_2 aux sommets (001,100),(001,001),(001,010) et (001,111)*

$E(G_1 \cup G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{(000,001),(001,000)\}$

(c) $\{(101,000),(101,101),(101,110),(101,011)\}$ *et* $\{(101,100),(101,001),(101,010),(101,111)\}$ *sont deux stables dans G_3*

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) = E(G_1 \cup G_2) \cup E(G_3) \cup \{((000,101),(101,000)),((001,101),(101,001))\}$

comme $c(000,101) = c(001,101) = c_1$ *et on a* $P = \{(000,101),(101,000),(101,001),(001,101)\}$ *est une chaîne dans OT_{Q_3}, alors*
$c(000,101) \neq c(101,000)$
$c(101,000) \neq c(101,001)$
$c(101,001) \neq c(001,101)$
donc $c(000,101) \neq c(101,000) \neq c(101,001)$ *alors* $\chi(G_3) \geqslant 3$.

- *Affectons la couleur c_1 aux sommets (101,101), (101,110) et (101,011)*
- *Affectons la couleur c_2 aux sommets (101,001),(101,100),(101,010) et (101,111)*
- *Affectons la couleur c_3 aux sommets (101,000)*

(d) $\{(100,000),(100,101),(100,110),(100,011)\}$ *et* $\{(100,100),(100,001),(100,010),(100,111)\}$ *sont deux stables dans G_4*

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4) = E(G_1 \cup G_2 \cup G_3) \cup E(G_4) \cup \{((000,100),(100,000)),((001,100),(100,001)),((101,100),(100,101))\}$

comme $c(000,100) = c(001,100) = c_2$ *et on a* $P = \{(000,100),(100,000),(100,001),(001,100)\}$ *est une chaîne dans OT_{Q_3}, alors*
$c(000,100) \neq c(100,000)$
$c(100,000) \neq c(100,001)$
$c(100,001) \neq c(001,100)$
donc $c(000,100) \neq c(100,000) \neq c(100,001)$ *alors* $\chi(G_4) \geqslant 3$.

- *Affectons la couleur c_1 aux sommets (100,000),(100,101), (100,110) et (100,011)*
- *Affectons la couleur c_2 aux sommets (100,100),(100,010) et (100,111)*
- *Affectons la couleur c_3 aux sommets (100,001)*

(e) $\{(010,000),(010,101),(010,110),(010,011)\}$ *et* $\{(010,100),(010,001),(010,010),(010,111)\}$ *sont deux stables dans* G_5

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5) = E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4) \cup E(G_5) \cup \{((000,010),(010,000)),((010,001),(001,010)),((100,010),(010,100)),((101,010),(010,101))\}$

comme $c(000,010) = c(001,010) = c_2$ *et on a* $P = \{(000,010),(010,000),(010,001),(001,010)\}$ *est une chaîne dans* OT_{Q_3}*, alors*
$c(000,010) \neq c(010,000)$
$c(010,000) \neq c(010,001)$
$c(010,001) \neq c(001,010)$
donc $c(000,010) \neq c(010,000) \neq c(010,001)$ *alors* $\chi(G_5) \geqslant 3$.
- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets (010,100),(010,001), (010,010) et (010,111)*
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets (010,011)*
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets (010,000),(010,110)et (101,101)*

(f) $\{(011,000),(011,101),(011,110),(011,011)\}$ *et* $\{(011,100),(011,001),(011,010),(011,111)\}$ *sont deux stables dans* G_6

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5 \cup G_6) = E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5 \cup E(G_6) \cup \{((000,011),(011,000)),((011,001),(001,011)),((101,011),(011,101)),((100,011),(011,100)),((010,011),(011,010))\}$

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets (011,010) et (011,111)*
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets (011,001) et (011,100)*
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets (011,000),(011,101),(011,011) et (011,110)*

(g) $\{(111,000),(111,101),(111,110),(111,011)\}$ *et* $\{(111,100),(111,001),(111,010),(111,111)\}$ *sont deux stables dans* G_7

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5 \cup G_6 \cup G_7) = E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5 \cup G_6) \cup E(G_7) \cup \{((000,111),(111,000)),((111,001),(001,111)),((101,111),(111,101)),((100,111),(111,100)),((010,111),(111,010)),((011,111),(111,011))\}$

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets (111,000),(111,101) et (111,110)*
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets (111,101) et (111,011)*
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets (111,001),(111,100) et (111,111)*

(k) $\{(110,000),(110,101),(110,110),(110,011)\}$ *et* $\{(110,100),(110,001),(110,010),(110,111)\}$ *sont deux stables dans* G_8

$E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5 \cup G_6 \cup G_7 \cup G_8) = E(G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup G_4 \cup G_5 \cup G_6) \cup G_7 \cup E(G_8) \cup \{((000,110),(110,000)),((110,001),(001,110)),((101,110),(110,101)),((100,110),(110,100)),((010,110),(110,010)),((011,110),(110,011)),((111,110),(110,111))\}$

- *Affectons la couleur* c_1 *aux sommets (110,011)*
- *Affectons la couleur* c_2 *aux sommets (110,001), (110,100),(110,011) et (110,111)*
- *Affectons la couleur* c_3 *aux sommets (110,000),(110,101) et (110,110)* ■

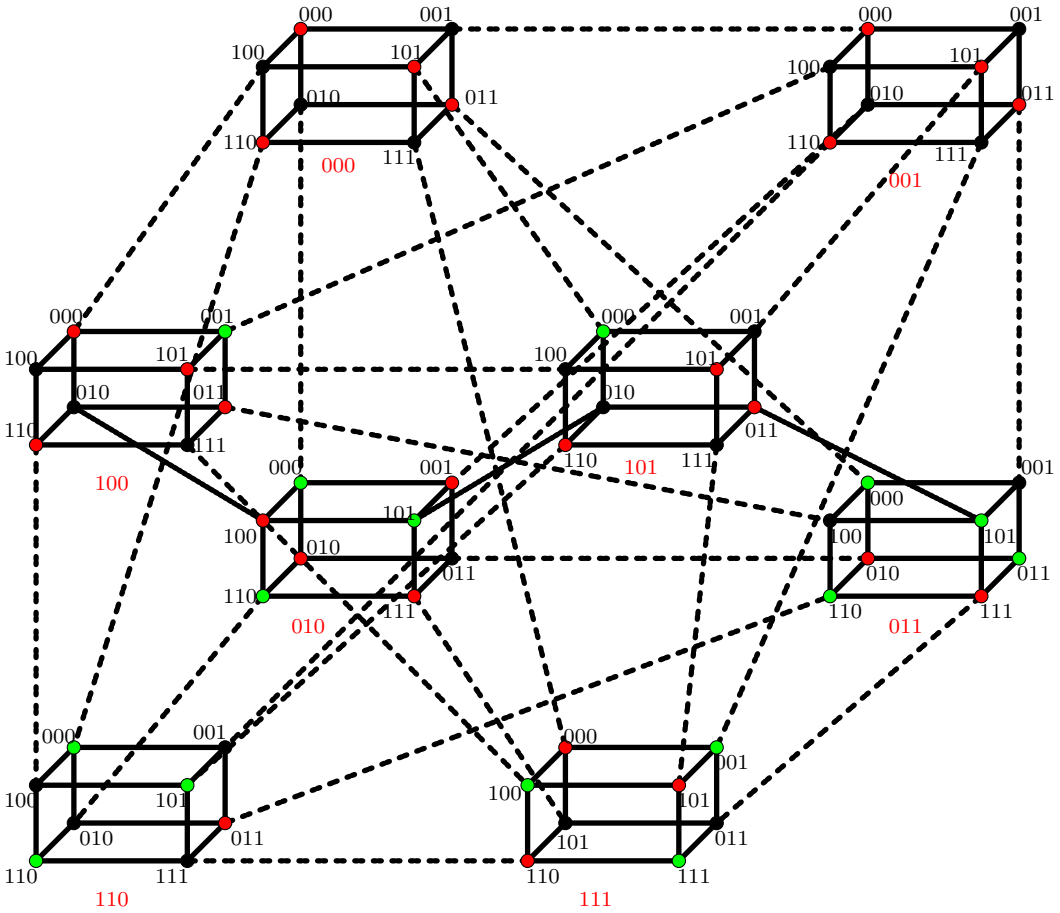


FIGURE 3.9 – OT_{Q_3}

Conclusion

Tout au long de ce travail, nous nous sommes principalement intéressés à l'étude des graphes OTIS, tels que les chaînes , les cycles, la griffe $k_{1,3}$, les graphe bipartis et graphe biparti complet $k_{2,3}$, ainsi que les roues W_4 et W_5. Nous avons déterminé le nombre de la coloration des graphes présidents On conclut que la détermination de ce nombre en général n'est pas facile pour certains types de graphes OTIS. Comme perspective est de :

- *Trouver d'autres bornes de $\chi(OT_G)$.*
- *l'étude de la coloration des graphes OTIS d'autre classes des graphes*

Bibliographie

[1] *A.V. Krishnamoorthy, P.J. Marchand, F.E. Kiamilev, S.C. Esener, Grainsize considerations for optoelectronic multistage interconnection networks, Appl. Opt. 31 (26) (September 1992) 5480–5507.*

[2] *B. Parhami,The Hamiltonicity of swapped (OTIS) networks built of Hamiltonian component networks, Information Processing Letters 95 (2005) 441–445*

[3] *C. Berge. Graphs. North Holland, 1985*

[4] *C.F. Wang, S. Sahni, Basic operations on the otis-mesh optoelectronic computer, IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst. 9 (12) (1998) 1226–1236.*

[5] *C.H. Yeh, B. Parhami, Swapped networks : unifying the architectures and algorithms of a wide class of hierarchical parallel processors, in : International Conference on Parallel and Distributed Systems, 1996,pp. 230–237.*

[6] *C. Wang, S. Sahni, Matrix multiplication on the otis-mesh optoelec- tronic computer, IEEE Trans. Comput. 50 (July 2001) 635–646.*

[7] *E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly,63, 175-177,1956.*

[8] *F.T. Leighton, Introduction to Parallel Algorithms and Architectures :Arrays, Trees, Hypercubes, Morgan Kaufmann Publishers, 1991.*

[9] *G.C. Marsden, P.J. Marchand, P. Harvey, S.C. Esener, Optical transpose interconnection system architectures, Opt. Lett. 18 (13) (July 1993) 1083–1085.*

[10] *J. Bondy, Pancyclic graphs, J. Combin. Theory Ser. B 11 (1971) 80–84.*

[11] *K. Day, A.-E. AlAyyoub, Topological properties of otis-networks, IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst. 13 (4) (2002) 356–366.*

[12] *K. Lucas, P. Jana, Parallel algorithms for finding polynomial roots on otis-torus, J. Supercomput. 54 (2010) 139–153*

[13] *H.H. Najafabadi, H. Sarbazi Azad, Multicast communication in otis-hypercube multicomputer systems, Int. J. High Perform. Comput. Netw. 4 (August 2006) 161–173.*

[14] *L. Foissy, Cours théorie des graphes. 2010.*

[15] *M. Malekimajd and all.,Pancyclicity of OTIS (swapped) networks based on properties of the factor graph,Information Processing Letters 111 (2011) 1114-1119.*

[16] *M.R. Hoseiny Farahabady, H. Sarbazi Azad, On pancyclicity properties of otis networks, in : High Performance Computing and Communications, in : Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 4782, Springer, Berlin/Heidelberg, 2007, pp. 545–553.*

[17] *P.K. Jana, Polynomial interpolation and polynomial root finding on otis-mesh, Parallel Comput. 32 (April 2006) 301–312*

[18] *P. Zhang. Graphs and digraphs. 6 edition, 2006. (Cité en page 15)*

[19] *R.L. Brooks. On colouring the nodes of a netwok. Proc.Cambridge Phil. Soc ; 37 :194*

[20] S. A. v. Aardt et al., Global cycle properties in locally connected, locally traceable, Discrete Applied Mathematics ***205*** *(2016) 171-179*

[21] S. Chatterjee et all.,All optical networks,communication of the ACM ,1999.

[22] S. Lin, S. Wang, C. Li, Panconnectivity and edge-pancyclicity of k- ary n-cubes with faulty elements, Discrete Appl. Math. 159 (February 2011) 212–223.

[23] S. Rajasekaran, S. Sahni, Randomized routing, selection, and sorting on the otis-mesh, IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst. 9 (9) (1998) 833–840.

[24] T. Shafiei, M. Hoseiny Farahabady, A. Movaghar, H. Sarbazi-Azad, On pancyclicity properties of otis-mesh, Inform. Process. Lett. 111 (8) (2011) 353–359.

[25] V. Voloshin. Introduction to graph theory. Nova Science Publ., 2009. (Cité en pages 4 et 15)