République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université " Dr. Yahia Farès " de Médéa

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et de l'Informatique

Projet de fin d'étude

présenté en vue de l'obtention du

DILPÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialtité : Recherche Opérationnelle

Thème

L'EFFET DE L'AJOUT D'UNE CHAÎNE ÉLÉMENTAIRE Á UN GRAPHE SIMPLE SUR LE NOMBRE b-CHROMATIQUE.

Par :

- ❑ AGUEB Samiha
- ❑ MENAD Nawel

Devant le jury composé de :

M. ZAMIME Mohamed	Maître de Conférences	UYFM	Président
M. LEMDANI Rachid	Maître Assistant	UYFM	Examinateur
M. BOUZEFRANE Mohamed	Maître Assistant	UYFM	Examinateur
M. IKHLEF ESCHOUF Noureddine	Maître de Conférences	UYFM	Promoteur

Médéa, septembre 2020

RÉSUMÉ

Le but de ce mémoire est d'étudier l'effet de l'ajout d'une chaîne P_k, $k \geq 1$ sur le nombre b-chromatique. Étant donné un graphe $G = (V, E)$, une coloration propre de sommets de G est une affectation de couleurs aux sommets de sorte que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes.

Le nombre minimum de couleurs nécessaires à la coloration des sommets de G est appelé le nombre chromatique de G et noté $\chi(G)$. Une b-coloration d'un graphe G est une coloration propre de sommets de G telle que chaque classe de couleur contient au moins un sommet qui est adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur autre que la sienne. Le nombre b-chromatique $b(G)$ d'un graphe G est le plus grand entier k tel que G admet une b-coloration avec k couleurs.

Dans la première partie, nous nous intéressons à la b-coloration des sommets d'un graphe. La deuxième partie est consacrée à l'étude des graphes dits chaîne-1-b-critiques, c'est à dire les graphes G dont le nombre b-chromatique diminue lorsque G est modifié en ajoutant une chaîne d'ordre $k = 1$ entre deux sommets adjacents quelconques de G. Dans ce sens, nous sommes parvenus à établir quelques résultats et à montrer des propriétés de ces familles de graphes.

ABSTRACT

The purpose of this report is to study the effect of adding a path P_k, $k \geq 1$ on the b-chromatic number.

Given a graph $G = (V, E)$, a proper vertex coloring of a graph G is an assignment of colors to the vertices of G such that adjacent vertices have different colors. The minimum number of colors which is necessary for a proper vertex coloring of graph G is called the chromatic number $\chi(G)$. A b-coloring of a graph G is a proper coloring of the vertices of G such that each color class has at least one vertex which is adjacent to at least one vertex of every other color class. The b-chromatic number $b(G)$ of a graph G is the largest integer k such that G admits a b-coloring with k colors.

In the first part, we are interested of b-vertex coloring of a graph. The second part is devoted to the study of graphs called path-1-b-critical, that is the graphs G whose number b-chromatic decreased when G is modified by adding a path of $k = 1$ between any two adjacents vertices of G. In this sense, we managed to establish some results and show properties of these families of graphs.

ملخص

الغرض من هذه المذكرة هو دراسة تأثير إضافة سلسلة P_k بحيث $k \geq 1$ على العدد ب-تلوين.
ليكن $G = (V, E)$ بيان معين، التلوين الأجود لرؤوس البيان G هو توزيع الألوان على الرؤوس بحيث أن كل رأسين متجاورين لهما لونين مختلفين. يسمى الحد الأدنى لعدد الألوان المطلوبة لتلوين البيان G العدد اللوني ويرمز له $\chi(G)$.
التلوين ب-لوني لبيان G هو التلوين الأجود لرؤوس هذا البيان بحيث أن كل فئة لونية تحتوي على الأقل على رأس مجاور لرأس آخر على الأقل من جميع الفئات اللونية.
العدد ب-لوني $b(G)$ لبيان G هو أكبر عدد صحيح ك بحيث البيان G يقبل ب-تلوين بـــ : ك-لون.

في القسم الأول، نهتم بالـ ب-تلوين رؤوس بيان ما. يخصص القسم الثاني لدراسة البيانات المسمات سلسلة-1-ب-حرجة، أي البيانات G التي من أجلها ينخفض العدد ب-لوني عند تعديل البيان G بإضافة سلسلة من رتبة $k = 1$ بين أي رأسين متجاورين لـ G. في هذا الإطار، تمكنا من إنشاء بعض النتائج و إظهار خصائص هذه العائلات من الرسوم البيانية.

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, nous tenons à remercier en premier lieu « **Dieu** » qui nous a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

Nous remercions vivement notre promoteur **Monsieur IKHLEF ESCHOUF Noureddine**, Maître de conférences à l'université Dr. Yahia Fares de Médéa, d'avoir accepté d'encadrer notre mémoire, ainsi pour son orientation, son aide, sa disponibilité, sa patience et ces judicieux conseils durant notre travail.

Nous adressons notre sincères remerciements à notre co-promoteurs ZAMIME Mohamed, Maître de conférences à l'université Dr. Yahia Fares de Médéa, et mademoiselle BENDALI-BRAHAM Amel Maître de conférences à l'université Dr. Yahia Fares de Médéa, pour ces orientations et ces conseils durant ce travail.

Nous adressons également nos remerciements, à tous nos enseignants, qui nous ont donné les bases de la science.

Nous remercions du fond du cœur nos chers parents et frères de tout ce qu'ils ont faisaient pour nous.

Nous tenons également à remercier très sincèrement tous les membres de jury, qui nous font l'honneur de juger notre travail.

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents ❁ Ahmed et kheira ❁ qui m'ont comblés d'amour et d'affection, qui m'ont toujours encouragés pour achever mes études tout en espérant voir le fruit de leurs sacrifices, que Dieu les garde pour moi sains et saufs.

A notre grand frère LYES qui'est parti pour un long voyage, nous sommes séparés de lui, mais nous savons qu'il est toujours parmi nous, — Rabi yarhmou —.

A mon chèr frère Mohamed .

A mon chèr frère Brahim et ses enfants : Ahmed et Mohamed .

A ma rose de ma vie ma tante Fatiha .

A ma deuxième maman, ma chère sœur Khadidja est ses enfants : Rofaida, Mohamed Abdrahman et Issraa.

A ma chère sœur et ma fleur de mon cœur Nesrine, et ses enfants Abdelmoumen, Maram et Abdraouf et son époux Youcef.

A tous mes enseignants depuis le primaire jusqu'à l'université.

A toute la famille "AGUEB" et la famille "BASSOUR".

A tous mes amis de la section recherche opérationnelle et ma sœur Nawel.

A tous ceux que j'aime et m'aiment.

SAMIHA

DÉDICACE

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents ❁ Ben issa et Hnifa ❁ pour leur patience, leur amour, leur soutien et leur encouragements.

A mes chèrs frères Sihem, Liela, Hamza,Fateh, wissal et Imad .

A mes chères amies et mes sœurs Samiha, Hayet, Fayza.

A tous mes enseignants que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.

Nawel

TABLE DES MATIÈRES

Résumé **I**

Abstract **II**

ملخص **III**

Remerciements **IV**

Dédicace **V**

Table des matières **VIII**

Liste des figures **X**

Introduction **1**

1 NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES GRAPHES **4**

1.1 Définitions et notations 4

1.1.1 Graphes 4

1.1.2 Voisinages 5

1.1.3 Degré d'un sommet 5

1.1.4 Chaînes et cycles 6

1.1.5 Sous-graphes et graphes partiels 7

1.1.6 Graphes connexes 7

1.1.7 Graphes particuliers 8

1.1.8 Graphe milieu et graphe total 12

1.1.9 Ensemble minimal et maximal/minimum et maximum 13

1.1.10 Isomorphisme de graphes . . . 13
1.1.11 Cliques, stables et couplages . . . 14
1.1.12 Quelques opérations sur les graphes . . . 15
1.2 Aspects algorithmiques et notions de complexité . . . 16
1.2.1 Problème de décision . . . 16
1.2.2 Classe NP-complet . . . 17
1.3 La coloration des sommets d'un graphe . . . 17
1.3.1 Coloration des sommets . . . 17
1.3.2 Bornes sur le nombre chromatique . . . 18

2 LA b-COLORATION DANS LES GRAPHES 20
2.1 a-coloration et nombre a-chromatique . . . 20
2.1.1 Historique . . . 20
2.2 Coloration de Grundy et nombre de Grundy . . . 21
2.3 b-coloration et nombre b-chromatique . . . 21
2.3.1 Historique . . . 21
2.4 Le m-degré d'un graphe . . . 22
2.5 Quelques résultats sur le nombre b-chromatique . . . 22
2.5.1 Valeurs exactes du nombre b-chromatique pour des graphes simples . . . 23
2.5.2 Borne sur le nombre b-chromatique . . . 23
2.5.3 Le nombre b-chromatique dans les arbres . . . 26
2.5.4 Le nombre b-chromatique de $M(P_n)$ et $T(P_n)$ . . . 26
2.5.5 Le nombre b-chromatique de $M(C_n)$ et $T(C_n)$ . . . 26
2.5.6 Notions liées à la b-coloration . . . 26
2.6 Quelques applications de la b-coloration . . . 28

3 INFLUENCE DE L'AJOUT D'UNE CHAÎNE 30
3.1 Quelques définitions . . . 30
3.2 L'effet de l'ajout d'une chaîne d'ordre $k = 1$ sur le nombre b-chromatique . . . 32

Conclusion et perspectives 50

Bibliographie 51

TABLE DES FIGURES

1.1 Graphe simple G 5
1.2 Une chaîne P_4 et un cycle C_5 6
1.3 Un graphe simple G, un sous graphe et un graphe partiel. 7
1.4 G est connexe ; H est non connexe avec deux composantes connexes. 7
1.5 d, g ,h sont des sommets d'articulation. L'arête gh est un isthme. 8
1.6 Un graphe complet K_8. 8
1.7 Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$. 9
1.8 Le graphe de Petersen G_{10}. 9
1.9 Un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{3,2}$. 9
1.10 Une étoile $K_{1,8}$. 10
1.11 Une étoile double $S_{3,3}$. 10
1.12 La subdivision d'une étoile $K^*_{1,s}$. 10
1.13 Un arbre. 11
1.14 Une chenille $C(2, 1, 3)$. 11
1.15 Un graphe C_4 et sa couronne $C_4 \circ K_1$. 12
1.16 Le graphe milieu de C_4. 12
1.17 Le graphe total de C_4. 13
1.18 Exemple de deux graphes isomorphes. 13
1.19 Deux cliques $A = \{a, b, g\}$ et $B = \{d, e, h\}$. 14
1.20 Les sommets en gras représente un stable maximal 14
1.21 $M = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ est un couplage parfait dans G. 15
1.22 Exemple de la suppression d'un sommet v d'un graphe. 15
1.23 Exemple de la suppression d'une arête uv d'un graphe. 15

1.24 Le produit carré $P_3 \square P_3$. 16
1.25 $\chi(G) = 3$ 18

2.1 $\chi(G) \leq b(G) \leq \psi(G)$ 22
2.2 Un graphe non b-continu. 27
2.3 Un graphe non b-monotone, avec $b(G) = 3$ tandis que $b(2D) = 4(D = K_4 - e)$. . 28

3.1 Un graphe $G = C_3 \square C_3$ tel que $b(G) = 3$ et le graphe $G_{x,z\,,1}$. 31
3.2 Un graphe $G = \overline{C_6}$ tel que $b(G) = 3$ et $ePa_b(G) = 1$. 31
3.3 Un graphe G tel que $\overline{e}Pa_b = 1$ 32
3.4 La b-coloration de $G = M(P_3)$ telle que $b(G) = 3$. 36
3.5 La b-coloration de $G = M(P_4)$ telle que $b(G) = 3$. 37
3.6 La b-coloration de $G = M(P_5)$ telle que $b(G) = 4$. 37
3.7 La b-coloration de $G = M(P_6)$ telle que $b(G) = 4$. 38
3.8 La b-coloration de $G = M(P_7)$ telle que $b(G) = 4$. 39
3.9 La b-coloration de $G = T(P_3)$ telle que $b(G) = 3$. 40
3.10 La b-coloration de $G = T(P_4)$ telle que $b(G) = 4$. 41
3.11 La b-coloration de $G = T(P_5)$ telle que $b(G) = 5$. 42
3.12 La b-coloration de $G = M(C_3)$ telle que $b(G) = 3$. 43
3.13 La b-coloration de $G = M(C_4)$ telle que $b(G) = 4$. 43
3.14 La b-coloration de $G = M(C_5)$ telle que $b(G) = 5$. 44
3.15 La b-coloration de $G = M(C_6)$ telle que $b(G) = 5$. 45
3.16 La b-coloration de $G = T(C_3)$ telle que $b(G) = 3$. 46
3.17 La b-coloration de $G = T(C_4)$ telle que $b(G) = 4$. 47
3.18 La b-coloration de $G = T(C_5)$ telle que $b(G) = 5$. 47
3.19 La b-coloration de $G = T(C_6)$ telle que $b(G) = 5$. 48

INTRODUCTION

Lorsque nous sommes confrontés à un problème donné, nous avons souvent recours à dessiner un schéma sur un papier, car le schématisme d'un problème concert est nécessaire pour le clarifier et simplifier la compréhension, et on conséquence obtenir des solutions efficaces.
Ce schéma est constitué par un ensemble de points représentant les différents objets du problème dont certains sont reliés par des lignes symbolisant les relations existant entre eux, les mathématiciens ont convenu d'appeler ce schéma un graphe, les points sont appelées des sommets et les lignes sont dites des arêtes (les arcs si les lignes sont orientées).
Par conséquence un graphe est une manière de pensé qui permet la modélisation d'une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude des sommets et des arêtes. Ce type de problèmes fait le but d'un très vaste domaine qui s'appelle 'la théorie des graphes'.

Ce domaine s'est développé dans diverses disciplines telles que les sciences techniques (biologie, chimie, physique, informatique), les sciences humaines (géographique, histoire) et le monde économique (finance, logistique,...), cela explique pourquoi la théorie des graphes devient le domaine le plus populaire des mathématiques discrètes malgré son jeune âge.

Le début a été hésitant : l'histoire veut que la théorie des graphes ait commencé avec l'article du mathématicien suisse Leonhard Euler ($1707 - 1783$) à l'Académie de Saint Pétersbourg en 1735, puis publié en 1741, sur le problème des sept ponts de **Königsberg**. Le problème consistait à trouver une promenade qui, à partir d'un point donné, fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg.

La coloration des graphes est un thème central de la théorie des graphes du fait de ses nombreuses applications. En effet, de nombreux problèmes concrets se ramènent à la recherche d'une partition d'un ensemble d'objets suivant certaines règles.

Un des premiers problèmes de coloration des graphes est certainement le problèmes des

quatre couleurs posé par Francis Gauthier en 1852, qui stipule que toute carte géographique peut être coloriée avec quatre couleurs de telle sorte que toute paire de pays voisins aient des couleurs distinctes. En 1976, le problème des quatre couleurs est devenus le Théorème des quatre couleurs puisque Appel et Hakens [2], assistés d'un ordinateur, l'ont résolu.
Les problèmes de colorations sont au cœurs de la théorie des graphes et font l'objectif de plusieurs recherches. Ils apparaissent dans plusieurs domaines pour modéliser de nombreux problèmes pratique nous citons par exemple le problème d'ordonnancement, de planning de la vie de tous les jours, et dans le domaine des réseaux / télécom ... etc.
Il existe de nombreuses variantes des problèmes de colorations de graphes citons par exemple (coloration des sommets, colorations des arêtes, coloration totale, coloration par liste, ...). Pour plus de détails sur ce sujet, le lecteur peut se reporter aux livres de G.Chartared et P. Zhang [14] et de T.R. Jensen et B. Toft[36]. La coloration des sommets est certainement le concept le plus ancien et le plus étudie. Il s'agit d'affecter des couleurs (entiers positifs) aux sommets de telle sorte que deux sommets adjacents ne doivent pas porter la même couleur, une telle coloration est dite propre (classique). Plusieurs variantes de colorations sont dérivées de la coloration classique, la plupart de ces coloration cherchent à minimiser le nombre de couleurs. Toute fois, il existe d'autre colorations propre de sommets où l'objectif est de maximiser le nombre de couleurs utilisées, on cite par exemple la b-coloration qui fera l'objet de notre étude dans ce mémoire.

Une b-coloration des sommets d'un graphe est une coloration propre telle que toute classe de couleur i contient au mois un sommet qui possède au mois un voisin dans chaque classe $j \neq i$, un tel sommet est appelé b-sommet. Le nombre b-chromatique noté $b(G)$, est le nombre maximum de classe de couleurs dans une b$-$coloration. Ce concept a été introduit en 1999 par Irving et Manlove [31, 41]. Il convient de mentionner que toutes les colorations considérées dans ce manuscrit sont propre, même si ce n'est pas toujours précise.

Ce mémoire se décompose en trois chapitre.

Le premier chapitre contient les définitions et les notations nécessaires de la théorie des graphes pour comprendre le contenu de ce mémoire et il contient également les définitions de la coloration classique (propre) et quelques résultats existants sur le nombre chromatique.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les définitions de la a-coloration, la coloration de Grundy et la b-coloration, et nous exposons un recueil des principaux résultats existant sur la b-coloration, bornes et valeurs exactes du nombre b-chromatique pour certaines classes de graphe. En outre, nous donnons quelques définitions et notations liées à la b-coloration, comme la b-continuité, la b-perfection, la b-monotonie et nous citons quelques applications de

la b-coloration.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des graphes chaîne -1-b-critiques, c'est à dire les graphes G dont l'ajout d'une chaîne d'ordre $k = 1$ entre deux sommets adjacents quelconques fait diminuer le nombre b-chromatique de G. En effet, nous donnons quelques propriétés fondamentales de ces graphes.

Ce mémoire s'achève par une conclusion et perspectives.

CHAPITRE 1

NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES GRAPHES

Dans ce chapitre, nous citons les notions et la terminologie utilisée dans ce mémoire. Dans la première partie, nous rappelons les définitions basiques de la théorie des graphes ainsi les concepts fondamentaux nécessaires utilisés tout au long de ce document. Ensuite, nous présentons quelques opérations sur les graphes qui nous seront utiles dans la suite. Dans la deuxième partie nous donnons un petit aperçu sur la théorie de la complexité algorithmique. Dans la dernière partie, nous exposons un aperçu de la coloration classique et quelques résultats sur le nombre chromatique.
Pour plus d'informations sur ces notions, le lecteur peut se référer aux ouvrages classiques de la théorie des graphes : C. Berge [5], et J. A, Bondy, U. S. R. Murty [11], R. Diestel [17].

1.1 Définitions et notations

Nous allons introduire les définitions et notations de la théorie des graphes nécessaires à la compréhension du contenu de cette section.

1.1.1 Graphes

- Un graphe $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles, un ensemble fini V de sommets et une famille E de paires de sommets de V, appelées arêtes.
- Les sommets sont notés usuellement par des lettres minuscules : u, v, x, y, a, b etc...
- les arêtes (les arcs, si les lignes sont orientées) sont des couples des sommets notées par : uv, xy, ab...etc
- Si u et v sont deux sommets reliés par une arête e, alors u et v sont dits adjacents ou voisins, et e est dite incidente à u et v, de plus u et v sont appelés les extrémités de e,

on écrit donc $e = uv$ ou $e = vu$.

- Deux arêtes distinctes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité commune.
- Un sommet u est dit isolé s'il n'existe aucune arête dans E incidente à u.
- Une arête reliant le même sommet est dite boucle c'est à dire une arête dont les extrémités sont confondues.
- Un ensemble d'arêtes est dit multiple s'ils ont les mêmes extrémités.
- Un graphe simple est un graphe sans boucles et sans arêtes multiples.
- Le nombre de sommets d'un graphe G est appelé l'ordre de G, noté par $n(G)$, la taille de G, notée $m(G)$ c'est le nombre de ses arêtes.

La Figure 1.1 montre un graphe simple $G = (V, E)$ avec $V(G) = \{x, y, z, u, v\}$ et $E(G) = \{xy, yz, zx, zu, uv, xu\}$.

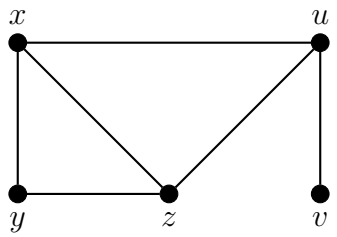


FIGURE 1.1: Graphe simple G

Notons que tous les graphes considérés dans ce mémoire sont non-orientés, finis, simples et sans sommets isolés.

1.1.2 Voisinages

- Le voisinage ouvert d'un sommet v d'un graphe $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble suivant $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$.
- Le voisinage fermé d'un sommet v d'un graphe $G = (V, E)$, noté $N_G[v]$, est défini par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.
- L'ensemble $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v)$ (resp.$N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G(v) \cup (S)$) est le voisinage ouvert (resp. fermé) du sous ensemble $S \subseteq V$.

1.1.3 Degré d'un sommet

- Le nombre de voisins d'un sommet v d'un graphe G est appelée degré de v, noté $d_G(v)$ (c'est à dire $d_G(v) =\mid N_G(v) \mid$).
- Un sommet de degré nul est dit sommet isolé.

- Les sommets pendants sont de degré 1, un sommet adjacent à un sommet pendant est dit sommet support.
- Le degré maximum d'un graphe G, noté $\Delta(G)$ est la quantité défini par :

$$\Delta(G) = max\{d_G(x) : x \in V\}.$$

- Le degré minimum d'un graphe G, noté $\delta(G)$ est la quantité défini par :

$$\delta(G) = min\{d_G(x) : x \in V\}.$$

1.1.4 Chaînes et cycles

- Une chaîne d'un graphe $G = (V, E)$ est une suite alternée de sommets et d'arêtes de G de la forme :

$$(v_0, e_1, v_1, ..., e_k, v_k)$$

où k est un entier positif ou nul, les v_i et v_{i+1} sont des sommets de G et les e_i sont des arêtes, tels que pour tout $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$, v_i et v_{i+1} sont des extrémités de l'arête e_i tel que les sommets v_0 et v_k sont les extrémités de la chaîne P, et les sommets $v_1, v_2...v_{k-1}$ sont les sommets intérieurs de P.
- La longueur de la chaîne est le nombre de ses arêtes donc c'est l'entier k.
- Une chaîne est dite simple si elle ne passe pas deux fois par la même arête.
- Elle est élémentaire si elle ne passe pas deux fois par le même sommet c'est à dire tous ses sommets sont distincts. Notons que toute chaîne élémentaire est simple.
- Une arête reliant deux sommets non successif dans une chaîne est dite une corde.
- Une chaîne sans corde est dite induite.
- Une chaîne minimale élémentaire induite par n sommets notée par P_n.
- Un cycle d'ordre k (avec $k \geq 3$), noté C_k est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues.
- Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts. Le nombre d'arêtes d'un cycle représente sa longueur.
- La maille d'un graphe G notée $g(G)$, est la longueur du plus petit cycle dans G.

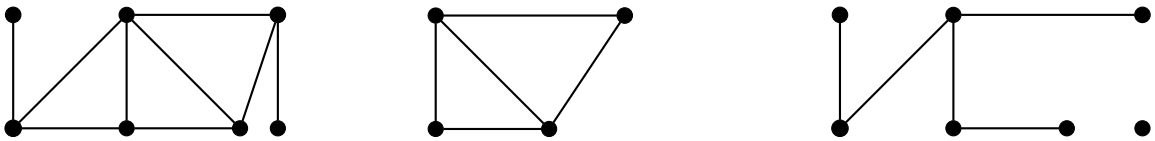
(Voir Figure 1.2).



FIGURE 1.2: Une chaîne P_4 et un cycle C_5

1.1.5 Sous-graphes et graphes partiels

- Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.
- $H = (V', E')$ est un graphe partiel de G si $V' = V$ et $E' \subseteq E$.
- $H = (V', E')$ est un sous-graphe de G si $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. En outre, si $E' = \{uv \in E : u, v \in V'\}$, c'est à dire les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans V' alors H est dit sous-graphe induit (ou engendré) par V', dans ce cas H est noté par $G[V']$.
  (Voir Figure 1.3 Un sous graphe et graphe partiel de G).

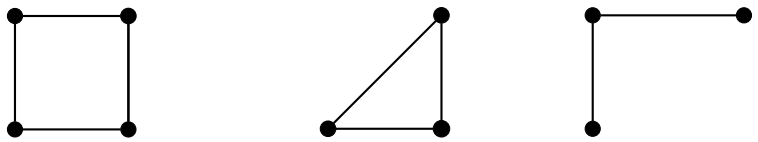


Graphe G Sous graphe de G Graphe partiel de G

FIGURE 1.3: Un graphe simple G, un sous graphe et un graphe partiel.

1.1.6 Graphes connexes

- Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe si pour toute paire de sommets x, y de V, il existe une chaîne reliant x à y.
- Une composante connexe de G est un sous-graphe de G qui est maximal pour la propriété d'être connexe (c'est à dire elle n'est pas contenue dans aucune autre composante connexe).
- Un graphe G est connexe s'il possède une seule composante connexe.
- Un graphe qui n'est pas connexe est dit non connexe.
  (Voir Figure 1.4).



G H

FIGURE 1.4: G est connexe ; H est non connexe avec deux composantes connexes.

- Un sommet $v \in V$ est dit sommet d'articulation si sa suppression de V augmente le nombre de composantes connexes de G. Une arête $e \in E$ s'appelle un isthme si sa

suppression de E augmente le nombre de composantes connexes de G. (Voir Figure 1.5).

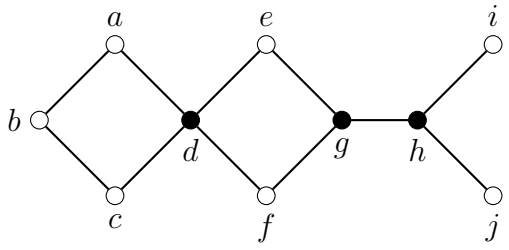


FIGURE 1.5: d, g ,h sont des sommets d'articulation. L'arête gh est un isthme.

1.1.7 Graphes particuliers

◄ Graphe complet d'ordre n, noté K_n est un graphe dont tous ses sommets sont deux à deux adjacents c'est à dire chaque sommet est un sommet universel de degré $(n-1)$, oû chaque sommet est reliée a tous les autres, il contient $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.
(Voir Figure 1.6).

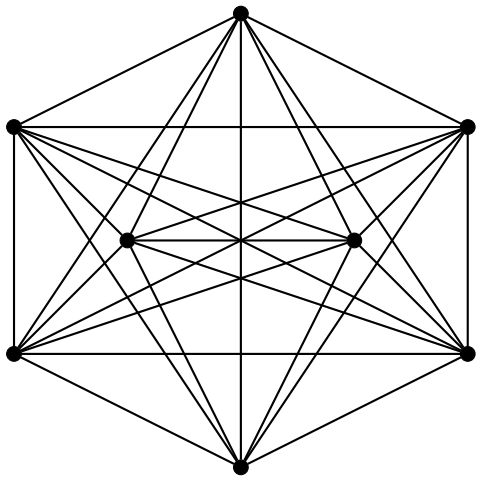


FIGURE 1.6: Un graphe complet K_8.

◄ Un graphe discret d'ordre n, noté D_n est un graphe sans arêtes.

◄ Un graphe est trivial s'il contient un seul sommet.

◄ Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe noté $\overline{G}$, défini par $V(\overline{G}) = V(G)$ *et* $E(\overline{G}) = \{uv : u \in V(G), v \in V(G)$ *et* $uv \notin E(G)\}$. Autrement dit, le complémentaire du graphe $G = (V, E)$, est un graphe avec le même ensemble de sommets V tel que deux sommets sont adjacents dans $\overline{G}$ si seulement s'ils ne le sont pas dans G. Par exemple dans la Figure 1.7 un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

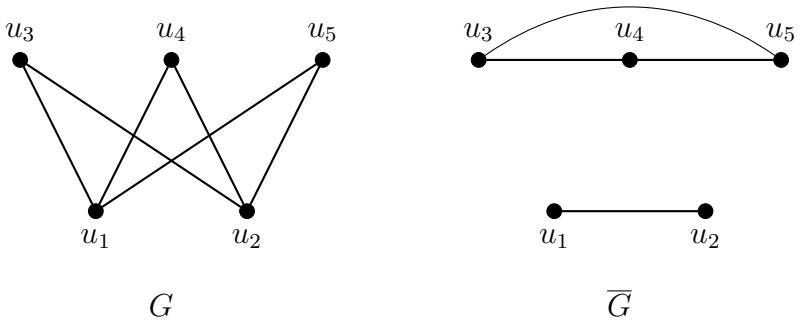


FIGURE 1.7: Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

◀ Un graphe est régulier si tous ses sommets ont le même degré.

◀ Un graphe est k -régulier ou régulier de degré k si tous ses sommets sont de degré k.

Prenons par exemple le graphe de Petersen G_{10} de la Figure 1.8. Le graphe G_{10} est un graphe **3-régulier.**

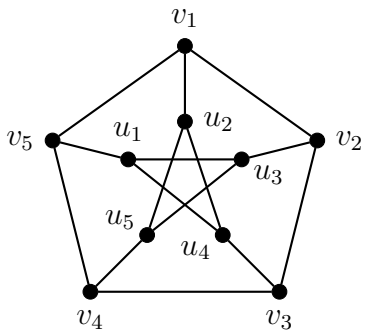


FIGURE 1.8: Le graphe de Petersen G_{10}.

◀ Un graphe est dit biparti si on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que les sous-graphes $G[V_1]$ et $G[V_2]$ sont indépendants.

◀ Un graphe biparti complet est un graphe biparti tel que tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ le graphe biparti complet est noté par $K_{p,q}$.

La Figure 1.9 représente un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{3,2}$.

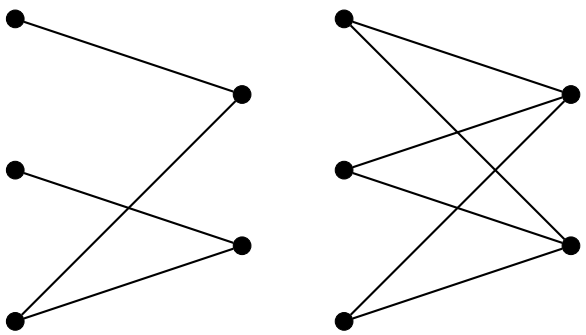


FIGURE 1.9: Un graphe biparti et un graphe biparti complet $K_{3,2}$.

◀ Un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = s$ est appelé une étoile et noté $K_{1,s}$. Le sommet de V_1 est appelé centre ou sommet central de l'étoile.

La Figure 1.10 représente une étoile $K_{1,8}$.

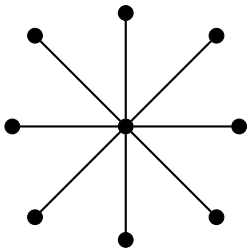


FIGURE 1.10: Une étoile $K_{1,8}$.

◀ Une étoile double, notée $S_{p,q}$, est le graphe obtenu en ajoutant une arête à partir des deux centres des étoiles $K_{1,p}$ et $K_{1,q}$.

La Figure 1.11 représente une étoile double $S_{3,3}$.



FIGURE 1.11: Une étoile double $S_{3,3}$.

◀ L'opération de subdivision d'une arête xy d'un graphe G consiste à introduire un nouveau sommet z tel que $V(G \cup \{z\}) = V(G) \cup \{z\}$ et $E(G \cup \{z\}) = ((E(G - \{xy\})) \cup \{xz, yz\}$.

◀ Une étoile subdivisée (ou araignée saine) est obtenue d'une étoile $K_{1,s}$ en subdivisant chaque arête une fois, elle est notée par $K^*_{1,s}$.

La Figure 1.12 représente une étoile subdivisée $K^*_{1,s}$ (ou araignée saine).

Si $q < s$ les arêtes de l'étoile sont subdivisées, on appelle le graphe obtenu une **araignée blessée**.

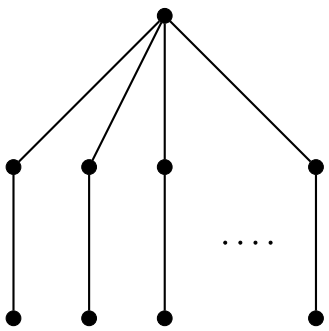


FIGURE 1.12: La subdivision d'une étoile $K^*_{1,s}$.

◀ Un arbre est un graphe connexe sans cycles. Il comporte exactement $(n-1)$ arêtes, et il est noté généralement T. (Voir Figure 1.13).

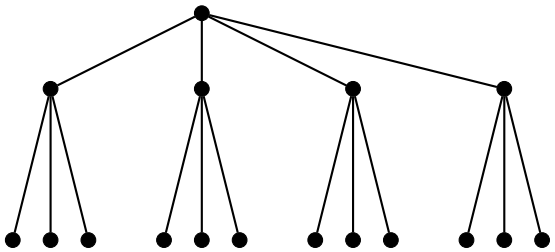


FIGURE 1.13: Un arbre.

◀ Une forêt est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des arbres.

◀ Une chenille $C(t_1, t_2, ..., t_s)$ est un arbre dont la suppression de ses sommets pendants donne une chaîne $u_1, u_2, ..., u_s$ où t_i est le nombre de sommets pendants adjacents à u_i. (Voir la Figure 1.14).

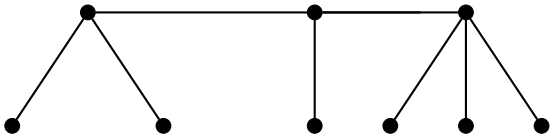


FIGURE 1.14: Une chenille $C(2, 1, 3)$.

◀ Une galaxie est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des étoiles.

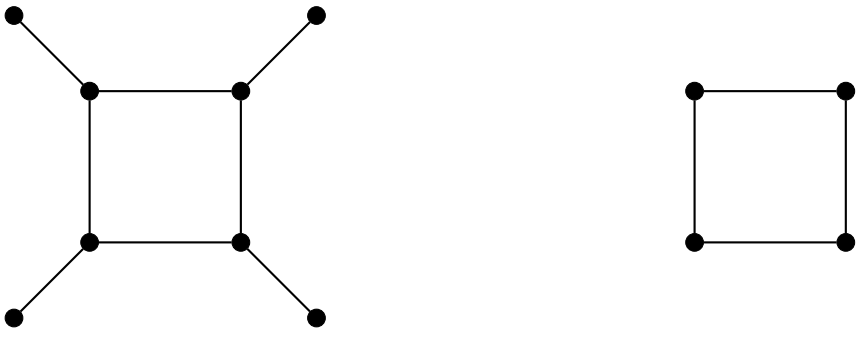
◀ Une griffe d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets de G qui engendre une étoile $K_{1,3}$.

◀ Un graphe est dit sans griffe (ou sans $K_{1,3}$) s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit.

◀ Un cactus est un graphe où chaque arête appartient à au plus un cycle, de plus un cactus qui contient un seul cycle est dit unicycle.

◀ La couronne de H notée $G = H \circ K_1$ est le graphe obtenu d'une copie de H et pour tout sommet v de $V(H)$, on relie un sommet pendant. Il est évident que l'ordre de G est égal à $2n$ si celui de H est n.

La Figure 1.15 représente un graphe C_4 et sa couronne $C_4 \circ K_1$.



$C_4 \circ K_1$ C_4

FIGURE 1.15: Un graphe C_4 et sa couronne $C_4 \circ K_1$.

◀ Le graphe adjoint de G (le graphe de ligne) obtenu en associant un sommet à chaque arête de G et en reliant deux sommets par une arête si les arêtes de G correspondant à ces deux sommets sont adjacentes.

1.1.8 Graphe milieu et graphe total

Définition 1.1.1 (Hamada et Yoshimura) *[25], Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe simple. Le graphe milieu de G, noté $M(G)$ est défini comme suit : L'ensemble des sommets de $M(G)$ est $V(G) \cup E(G)$, et deux sommets x, y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- *$x, y \in E(G)$ et x est adjacent à y dans G.*
- *$x \in V(G), y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.*

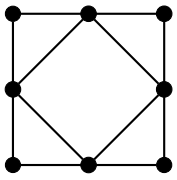


FIGURE 1.16: Le graphe milieu de C_4.

Définition 1.1.2 (Behzad) *[4] Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe simple. Le graphe total de G, noté $T(G)$ est défini comme suit : L'ensemble des sommets de $T(G)$ est $V(G) \cup E(G)$, et deux sommets x, y de $T(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- *$x, y \in V(G)$ et x, y sont adjacents dans G.*
- *$x, y \in E(G)$ et x est adjacent à y dans G.*
- *$x \in V(G), y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.*

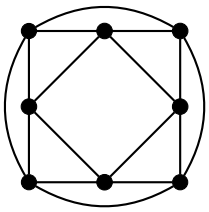


FIGURE 1.17: Le graphe total de C_4.

1.1.9 Ensemble minimal et maximal/minimum et maximum

- Nous dirons qu'un sous-ensemble A de V est minimal (resp. maximal) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq A$ (resp. $B \supseteq A$) tel que $G[B]$ vérifie $\mathcal{P}$.
- Nous dirons qu'un sous-ensemble A de V est minimum ou de taille minimale (resp. maximum ou de taille maximale) par rapport à une propriété $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$ vérifie $\mathcal{P}$ et $\mid A \mid > \mid B \mid$ (resp. $\mid B \mid > \mid A \mid$) où $\mid A \mid$ est le cardinal de l'ensemble A, c'est-à-dire le nombre de ses éléments.

1.1.10 Isomorphisme de graphes

- Les graphes G et H sont dits isomorphes et on écrit $G \cong H$ s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes, $f : V(G) \to V(H)$ tel que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs images par la fonction bijective sont adjacentes dans l'autre graphe, pour tous $u, v \in V(G)$ on a $uv \in E(G)$ si et seulement si $f(u)f(v) \in E(H)$.
- Si deux graphes sont isomorphes, alors ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées invariants de graphes.

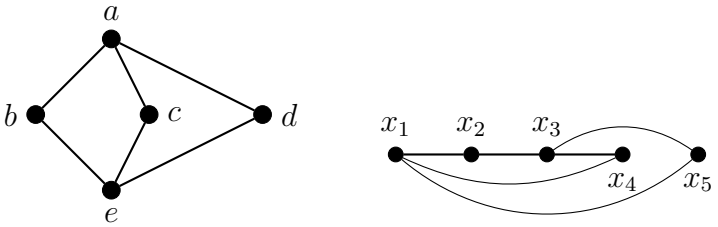


FIGURE 1.18: Exemple de deux graphes isomorphes.

1.1.11 Cliques, stables et couplages

Nous définissons ci-après quelques invariants de graphes intervenant dans la suite.

- Une clique d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets de G qui engendre un graphe complet.
- Une clique maximum de G est une clique de cardinalité maximale. La cardinalité d'une clique maximum est appelée nombre de clique. On la désigne par $w(G)$.

  Dans le graphe G de la Figure 1.19, les ensembles $A = \{a, b, g\}$ et $B = \{h, d, e\}$ représentent deux cliques de cardinalité maximales de G, avec $w(G) = 3$.

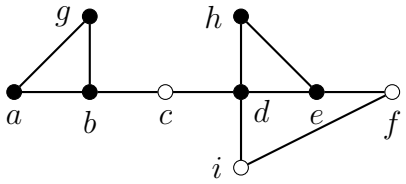
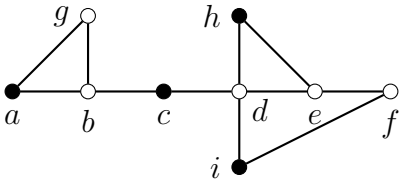


FIGURE 1.19: Deux cliques $A = \{a, b, g\}$ et $B = \{d, e, h\}$.

- Un stable S (appelé aussi ensemble indépendant) dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de V deux à deux non adjacents.
- Un stable maximum de G est un stable de cardinalité maximale. La cardinalité d'un stable maximum est appelée nombre de stabilité (ou nombre d'indépendance). On la désigne par $\alpha(G)$, $(\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ est un stable de } G\})$.

  Dans le graphe G de la Figure 1.20, l'ensemble $S = \{a, c, h, i\}$ représente un stable maximum de G, d'où $\alpha(G) = 4$.



.

FIGURE 1.20: Les sommets en gras représente un stable maximal

- Un couplage dans un graphe G est un sous ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes.
- Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. On désigne par $\beta(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G.
- Un sommet d'un graphe est saturé par un couplage de ce graphe lorsqu'il est extrémité d'une arête de ce couplage. Autrement, il est insaturé par ce couplage.
- Un couplage qui sature tous les sommets de G est dit parfait.

Dans la Figure 1.21 l'ensemble des arêtes $M = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ représente un couplage parfait dans le graphe G.

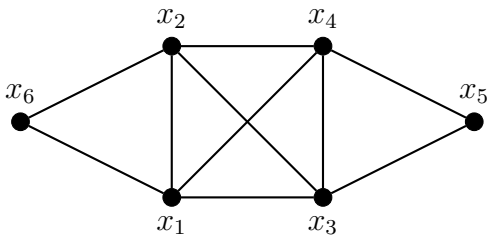


FIGURE 1.21: $M = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ est un couplage parfait dans G.

1.1.12 Quelques opérations sur les graphes

Nous donnons, ci-après, les différentes opérations de base sur les graphes.

◄ Soit v un sommet d'un graphe $G = (V, E)$. Le graphe $G/\{v\}$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant le sommet v et tout les arêtes incidentes à v (voir la Figure 1.22). Pour un sous ensemble de sommets $S \subseteq V$. On note $G/\{S\}$ le sous-graphe engendré par V/S.



G $\qquad$ $G/\{v\}$

FIGURE 1.22: Exemple de la suppression d'un sommet v d'un graphe.

◄ Soit $e = uv$ une arête de G . Le graphe $G/\{e\}$ est le graphe obtenu à partir de G en supprimant l'arête e (les extrémités de e ne sont pas supprimées). Voir la Figure 1.23



G $\qquad$ $G/\{uv\}$

FIGURE 1.23: Exemple de la suppression d'une arête uv d'un graphe.

◄ Étant donnés deux graphes disjoints $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$.

- L'union de G_1 et G_2 est le graphe $G_1 + G_2$ dont l'ensemble des sommets est $V_1 \cup V_2$ et l'ensemble des arêtes est $E_1 \cup E_2$. Pour un entier k donné, l'union de K copies de G notées par kG.
- Leur joint noté $G_1 \vee G_2$ est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ et ensemble d'arêtes $E_1 \cup E_2 \cup E_{1,2}$ où $E_{1,2} = \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$ Autrement dit, $G_1 \vee G_2$ est le graphe

obtenu à partir de $G_1 + G_2$ en ajoutons toutes les arêtes entre tous les sommets de G_1 et G_2.

◀ Le produit cartésien (ou somme cartésienne) de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \square G_2$, est le graphe $G = (V, E)$ tel que $V = \{(u, v) : u \in V_1, v \in V_2\}$ et deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si $u_1 = u_2$ et $v_1 v_2 \in E_2$ ou $v_1 = v_2$ et $u_1 u_2 \in E_1$. (voir Figure 1.24).

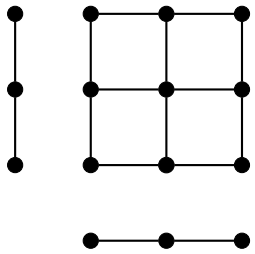


FIGURE 1.24: Le produit carré $P_3 \square P_3$.

1.2 Aspects algorithmiques et notions de complexité

La théorie de la complexité s'intéresse à l'étude formelle de la difficulté des problèmes en théorie des graphes et plus précisément à leur résolution de façon efficace, nous introduisons quelques éléments de base sur la complexité algorithmique.

Un algorithme est une procédure de résolution composée d'une suite finie d'opérations élémentaires.

On appelle complexité d'un algorithme le nombre asymptotique d'opérations élémentaires ($+$, $*$, $-$, $/$, $=$, *test*) qu'il doit effectuer en fonction de la taille d'entrée qu'il à traiter.

On dit que un algorithme est efficace si le nombre d'opérations élémentaires est polynomial (c'est à dire borné par un polynôme).

1.2.1 Problème de décision

Un problème de décision est un problème dont la réponse attendue est de type *oui* ou *non*.

La théorie de la complexité fournit une classification des problèmes de décision selon leur niveau de difficulté.

Classe P

Un problème de décision est dans la classe P s'il existe un algorithme déterministe pour le résoudre en temps polynomial par rapport à la taille des données, le problème de cette classe est dit facile.

Classe NP

La classe NP (non déterministe polynomial) réunit les problèmes de décision qui peuvent être résolus en temps polynomial par un algorithme non déterministe, un problème de cette classe est dit difficile, nous retrouvons dans cette classe tous les problèmes classiques en théorie des graphes tels : l'indépendance, la coloration, la domination,....etc.
On constate immédiatement, que $P \subseteq NP$. Mais la classe NP contient des problèmes pour lesquels on ne connait pas d'algorithme polynomial de résolution. De ce fait, une question majeure reste posée à ce jour : Est-ce que $P = NP$?.
Plusieurs classes de complexité sont définies à l'aide de réductions. Une réduction est une transformation d'un problème P_1 à un autre problème P_2, s'il existe un algorithme pour P_1 qui fait appel à un algorithme de résolution de P_2. On dit que P_2 est au mois aussi difficile que P_1. La plus réduction utilisée est la réduction polynomiale.

1.2.2 Classe NP-complet

Un problème de décision de la classe NP est dit NP-complet, si tout problème dans NP peut lui être réduit en temps polynomial. En d'autre termes, parmi l'ensemble des problèmes appartenant à la classe NP, il existe un sous ensemble qui contient les problèmes les plus difficile, le problème de cette classe est dit NP-difficile.

1.3 La coloration des sommets d'un graphe

Dans cette section, on s'intéresse à la coloration des sommets d'un graphe.

1.3.1 Coloration des sommets

Définition 1.3.1 *On appelle coloration des sommets d'un graphe toute attribution d'une couleur à chaque sommet. Une coloration utilisant k couleur est appelée $k-coloration$.*

Définition 1.3.2 *Une coloration de sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est dite propre si chaque deux sommets voisins portent des couleurs différentes.*

- *Une k-coloration propre des sommets de G peut être vue comme une partition de V en k stables.*
- *Une classe de couleur est un sous-ensemble stable de sommets de V qui ont la même couleur.*

Définition 1.3.3 *Une coloration triviale de G consiste à attribuer à chaque sommet une couleur différente. Ainsi, tout graphe à n sommets admet une $n-$coloration.*

- Donc il est naturel de chercher quel est le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorer G.

Définition 1.3.4 *Le nombre chromatique d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le plus petit nombre de couleurs nécessaire à une coloration propre des sommets de G. On définit aussi, le plus petit entier k tel que G soit k-colorable.*
Une $\chi(G)$-coloration d'un graphe G est dite coloration optimale (minimal) de G, il est dit aussi que G est $\chi(G)$-chromatique.

(Voir Figure 1.25)

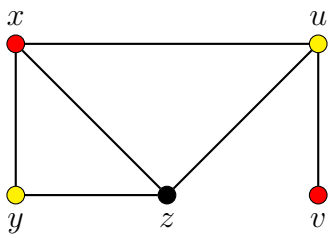


FIGURE 1.25: $\chi(G) = 3$

Proposition 1.3.1 *[5] Soit G un cycle d'ordre n alors*

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & si \quad n \ est \ pair \\ 3 & si \quad n \ est \ impair \end{cases}$$

Remarque 1.3.1 *Soit G un graphe d'ordre n. Il est clair que $1 \leq \chi(G) \leq n$.*

- *$\chi(G) = 1$ si et selement si $G \cong \overline{K_n}$.*
- *$\chi(G) = n$ si et seulment si $G \cong K_n$.*

Théorème 1.3.1 *Berge [5] Soit G un graphe non nul. Alors $\chi(G) = 2$ si et seulement si G est biparti.*

1.3.2 Bornes sur le nombre chromatique

Le problème de décision lié à ce paramètre dans le cas général est NP-complet. Pour cette raison, beaucoup de travaux ont été consacrés à la recherche des bornes du nombre chromatique en fonction d'autres paramètres de graphe. Un des résultats classiques établi en termes de borne du nombre chromatique est celui de R.books [13].

Proposition 1.3.2 *[5] Si H est un sous-graphe de G, alors $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Proposition 1.3.3 *[5] Pour tout graphe G, Où $w(G)$ le nombre maximal de clique de G. On a :*

$$\chi(G) \geq w(G).$$

Proposition 1.3.4 *Berge [5] Soit G un graphe non connexe de composantes connexes $C_1, C_2, ..., C_p$. Alors*

$$\chi(G) = max\{\chi(C_i) : 1 \leq i \leq p\}.$$

Proposition 1.3.5 *Berge 1973 [5] Pour tout graphe G d'ordre n,*

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq \chi(G) \leq n - \alpha(G) + 1.$$

où $\alpha(G)$ est le nombre de stabilité de G.

Théorème 1.3.2 *[13] Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Avec égalité si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :

1. *Soit $\Delta(G) \neq 2$ et G admet $K_{\Delta(G)+1}$ comme composante connexe.*
2. *Soit $\Delta(G) = 2$, et G admet un cycle d'ordre impair comme composante connexe.*

Brooks a amélioré cette borne

Théorème 1.3.3 *[13] Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Si G n'est ni un cycle d'ordre impaire, ni un graphe complet, alors*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Théorème 1.3.4 *[5] Soit G un graphe d'ordre n. Alors,*

- $\chi(G)\alpha(G) \geq n$.
- $\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1$.

Théorème 1.3.5 *[42] Soit G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire. Alors,*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

CHAPITRE 2

LA B-COLORATION DANS LES GRAPHES

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons quelques types de coloration de graphes et leurs paramètres associées. Dans ce contexte, nous rappelons les définitions de la a-coloration et la coloration de Grundy ensuite nous focalisons essentiellement sur la notion de la b-coloration et le nombre b-chromatique. Dans la deuxième partie de, nous présentons quelques résultats obtenu sur la b-coloration, bornes et valeurs exactes du nombre b-chromatique pour certaines classes de graphes. Dans la troisième partie, nous exposons brièvement quelques applications de la b-coloration de graphes. Dans la dernière partie, nous donnons la définition de quelques notions liées à la b-coloration, comme la b-continuité, la b-perfection, la b-monotonie.

2.1 a-coloration et nombre a-chromatique

2.1.1 Historique

En 1967, et dans le but d'obtenir une bonne coloration d'un graphe, Harrary, Hedetniemi et Prins [26] ont réussi à trouver une technique qui consiste à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleur utilisées dans la coloration initiale en unifiant ou en jumelant des classes de couleur différentes, d'où l'introduction de la a-coloration et du nombre a-chromatique.

Définition 2.1.1 *Une a-coloration d'un graphe G dite aussi coloration complète est une coloration propre de sommets de G telle que pour toute paire de couleurs différentes i et j, le sous graphe engendré par les deux classes de couleurs i et j, contient au mois une arête.*
Le nombre a-chromatique est le nombre maximum de classes de couleur dans une a-coloration noté par $\psi(G)$.

Remarque 2.1.1 *Le problème de décider si $\psi(G) \geq k$, pour un graphe G et un entier k donné est NP-complet en général [24].*

Pour plus de détail sur le nombre a-chromatique, le lecteur peut se référer aux ouvrages : F. Huges, G. MacGillivay [30].

2.2 Coloration de Grundy et nombre de Grundy

Définition 2.2.1 *Une k-coloration de Grundy d'un graphe G est une coloration propre utilisant k couleurs vérifiant la propriété suivante :*
chaque sommet v, coloré par une couleur i, $1 \leqslant i \leqslant k$, doit être adjacent à au moins $i-1$ sommets colorés par chacune des couleurs j telles que $1 \leqslant j \leqslant i-1$. Le nombre de Grundy d'un graphe G, noté $\gamma(G)$, est le nombre maximum de couleurs nécessaires pour une coloration de Grundy de G.

2.3 b-coloration et nombre b-chromatique

2.3.1 Historique

En 1999, Irving et Manlove [31, 41], ont donné une autre technique qui cherche à améliorer la coloration d'un graphe. Cette dernière consiste à partir d'une coloration propre donnée du graphe de réduire le nombre de classes de couleur en transférant les sommets d'une même classe de couleur dans les autres classes de couleur. D'où, la définition de la b-coloration.

Définition 2.3.1 *Une coloration b-dominante est une coloration propre telle que toute classe de couleur i contient un sommet adjacent à au moins un sommet de chaque classe de couleur $j \neq i$. Un tel sommet est dit sommet b-dominant pour la couleur i (ou b-sommet de couleur dominante i). On note $b(G)$ le nombre b-chromatique est le nombre maximum de classes de couleurs dans une coloration dominante.*
Une coloration dominante avec $b(G)$ couleurs est dite b-coloration.

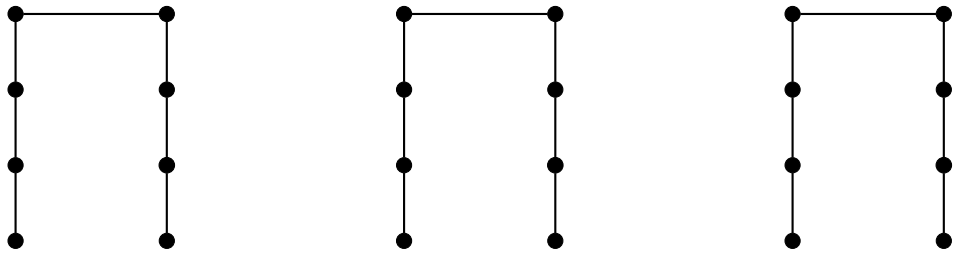
Définition 2.3.2 *On appelle système b-dominant S d'un graphe G, l'ensemble des sommets b-sommets dans une b-coloration tel que $|S| = b(G)$.*

Proposition 2.3.1 *Toute χ-coloration est une b-coloration, et cette dernière satisfait la définition de la a-coloration, par conséquent le résultat suivant est immédiat.*

$$\chi(G) \leq b(G) \leq \psi(G)$$

.

Voir Figure 2.1



$\chi(G) = 2$ $b(G) = 3$ $\psi(G) = 4$

FIGURE 2.1: $\chi(G) \leq b(G) \leq \psi(G)$

2.4 Le m-degré d'un graphe

Pour qu'un graphe G admette une coloration dominante avec k couleurs, il doit avoir nécessairement au moins k sommets de degré au moins $k-1$.
De cette observation, Irving et Manlove [31] ont défini le m-degré d'un graphe G, noté $m(G)$.

Définition 2.4.1 *Soit les sommets $v_1, v_2, ..., v_n$ d'un graphe G ordonnés tels que : $d(v_1) \geq d(v_2) \geq .... \geq d(v_n)$ où $d(v_i)$ est le degré de v_i.*
Le m-degré de G, noté $m(G)$ est défini par : $m(G) = max\{i : d(v_i) \geq i-1\}$.
Un sommet v vérifiant $d(v) \geq m(G)-1$ est dit sommet dense.

2.5 Quelques résultats sur le nombre b-chromatique

En 1999, le premier article s'intéressant à différents concepts liés à la b-coloration est dû à Irving et Manlove [31] qui ont montré que la détermination du nombre b-chromatique est un problème NP-complet en général.
Par contre, ce problème devient polynomial pour les arbres [14, 15], pour les cactus dont le m-degré est au moins 7 [15], pour les graphes planaires extérieurs dont la maille est au moins 8 [43].

2.5.1 Valeurs exactes du nombre b-chromatique pour des graphes simples

Certaines études ont été réalisées pour donner la valeur exacte du nombre b-chromatique pour des classes particulières de graphes.

Proposition 2.5.1 *[38] Soient P_n et C_n respectivement une chaîne et un cycle d'ordre n avec $n \geq 5$. Alors $b(P_n) = b(C_n) = 3$.*

Proposition 2.5.2 *[38] Soit S_n et K_n respectivement un graphe discret et un graphe complet. Alors $b(S_n) = 1$, $b(K_n) = n$.*

Proposition 2.5.3 *[38] Pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, $b(K_{n,p}) = 2$ ou $K_{n,p}$ est un graphe biparti complet.*

Théorème 2.5.1 *[20] Soit G un graphe d-régulier sans cycle d'ordre 6 et de maille au moins 5. Alors $b(G) = d + 1$.*

Les mêmes auteurs de [20] ont conjecturé que tout graphe d-régulier de maille au moins 5 satisfait $b(G) = d+1$. Dans [9], Blidia et al. ont réfuté cette conjecture, oú ils ont pris le graphe de Petersen comme un contre exemple. De ce fait, les même auteurs de [20] ont reformulé ce problème de la façon suivante :

Conjucture 2.5.1 *[9] Soit G un graphe d-régulier de maille au moins cinq différent du graphe de Petersen. Alors le nombre b-chromatique de G est $d + 1$.*

Ils ont également montré que la conjecture présentée dans [9] est vraie pour les petites valeurs de d ($d \leq 6$).
Dans [27], Kouider et Mahéo ont déterminé la valeur exacte du nombre b-chromatique du joint de deux graphes.

Théorème 2.5.2 *[27] Soient G_1,G_2 deux graphes de sommets disjoints et $G = G_1 \vee G_2$. Alors, $b(G) = b(G_1) + b(G_2)$.*

2.5.2 Borne sur le nombre b-chromatique

L'absence d'algorithme polynomial pour la détermination de $b(G)$ dans le cas général a incité les chercheurs à établir des bornes qui encadrent ce paramètre.

- La définition du m-degré d'un graphe G implique que $m(G)$ est une borne supérieur de $b(G)$ car c'est le plus grand entier.

Proposition 2.5.4 *[31] Soit $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ un ensemble de sommets d'un graphe G ordonnés dans l'ordre décroissant de leur degrés. Alors $b(G) \leq m(G)$.*

Remarque 2.5.1 *On va donner les remarques suivantes :*

- *Si G est le graphe complet K_n ou le graphe biparti complet moins un couplage parfait $K^*_{n,n}$, alors $b(G) = m(G)$.*
- *La différence entre le m-degré et le nombre b-chromatique peut être large. En effet, Irving et Manlove [31] ont remarqué que le m-degré d'un graphe biparti complet est $m(K_{n,n}) = n + 1$, tandis que $b(K_{n,n}) = 2$.*
- *L'un des premiers résultats impliquant le m-degré est celui de Kratochvil et al. [40], ils ont montré que la décision que si $b(G) = m(G)$ est un problème NP-complet, même si G est un graphe biparti connexe avec $m(G) = \Delta(G) + 1$.*

◄ Irving et Manlove ont remarqué que toute coloration minimale de G est une b-coloration de G et le voisinage de tout sommet de degré $\Delta(G)$ peut avoir au plus $\Delta(G)$ couleurs et prend pour lui la couleur $\Delta(G) + 1$.

Proposition 2.5.5 *[31, 41] Soit G un graphe et $\chi(G)$ son nombre chromatique. Alors :*

$$\chi(G) \leq b(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

◄ Dans [38], Kouider et Mahéo ont borné le nombre b-chromatique d'un graphe en fonction de son nombre de stabilité.

Théorème 2.5.3 *[38] Soient G un graphe connexe d'ordre n et $\alpha(G)$ stable maximum de G. Alors,*

$$b(G) \leq n - \alpha(G) + 1.$$

◄ Par analogie avec les résultats obtenus dans la coloration classique, M. Kouider et M. Mahéo [38] ont fourni d'autres bornes supérieures pour le nombre b-chromatique.

Proposition 2.5.6 *[38] Pour tout graphe $G = (V, E)$ d'ordre n, ona :*

$$\frac{n}{\alpha(G)} \leq b(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2m}.$$

où $\alpha(G)$ le nombre de stabilité de G.

Proposition 2.5.7 *[38] Si G est un graphe non connexe avec des composantes connexes $C_1, C_2, ..., C_p, p \geq 2$. Alors,*

$$b(G) \geq max\{b(C_i), 1 \leq i \leq p\}.$$

◄ Dans [39], M. Kouider et M. Zaker ont fait un article sur la borne supérieure de $b(G)$ dans le cas d'un graphe sans griffes généralisés (sans $K_{1,t}$).

Théorème 2.5.4 *[39] Si G est un graphe sans $K_{1,t}$ avec $t \geq 3$, alors*

$$b(G) \leq (t-1)(\chi(G)-1)+1.$$

Ils ont également montré que cette borne est atteinte.

Proposition 2.5.8 *[39] Pour tout entier $t \geq 3$ et k, il existe un graphe sans $K_{1,t}$ tel que*

$$\chi(G) = k \text{ et } b(G) = (t-1)(k-1)+1.$$

Remarque 2.5.2 *Si $t = 3$ alors G est dit sans griffe.*

Un corollaire immédiat de cette proposition est le suivant :

Corollaire 2.5.1 *[39] Si G est sans griffe, alors $b(G) \leq 2\chi(G) - 1$.*

◄ Dans [39], M. Kouider et M. Zaker ont borné ce paramètre pour le graphe complémentaire d'un graphe biparti.

Théorème 2.5.5 *[39] Si G est le complémentaire d'un graphe biparti et $w(G)$ est clique maximum de G, alors :*

$$b(G) \leq \frac{4w(G)}{3}.$$

◄ Alkhateeb et Kohl [1] ont donné une borne du nombre b-chromatique d'un graphe G en fonction de son ordre, son degré maximum et son degré minimum.

Théorème 2.5.6 *[1] Soit G un graphe d'ordre n, de degré maximum $\Delta(G)$ et de degré minimum $\delta(G)$. Alors :*

$$b(G) \leq \lfloor \frac{2n - \Delta(G) - \delta(G) - 3}{3n - 2\Delta(G) - \delta(G) - 4} n \rfloor.$$

◄ Une autre borne supérieure du nombre b-chromatique a été établie par Blidia et al. [7], mais cette fois dans le cas d'un graphe différent du graphe complet.

Théorème 2.5.7 *[25] Soient G un graphe d'ordre n différent du graphe complet et $w(G)$ la taille de sa clique maximum. Alors :*

$$b(G) \leq \lfloor \frac{n + w(G) - 1}{2} \rfloor.$$

◄ D'autres résultats de type Nordhauss−Gaddhum ont été obtenu [38].

Théorème 2.5.8 *[38] Soient G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire. Alors :*

- $b(G) + b(\overline{G}) \leq n + 1$.
- $b(G)b(\overline{G}) \leq n$.

2.5.3 Le nombre b-chromatique dans les arbres

◄ Irving et Manlove ont introduit la notion d'un arbre pivoté dans [31, 41] de la manière suivante :

Définition 2.5.1 *[31, 41] Un arbre T est dit pivoté si T admet exactement $m(T)$ sommets denses et contient un sommet v spécial et unique appelé pivot, tel que :*

- *v n'est pas dense.*
- *tout sommet dense de T est adjacent à v ou à un sommet dense adjacent à v.*
- *tout sommet dense de T adjacent à v et à un autre sommet dense est de degré $m(T) - 1$.*

◄ Irving et Manlove ont prouvé que le nombre b-chromatique d'un arbre T est toujours compris entre $m(T)$ et $m(T) - 1$.

Théorème 2.5.9 *[31] Si T est un arbre pivoté, alors $b(T) = m(T) - 1$;*
sinon $b(T) = m(T)$.

2.5.4 Le nombre b-chromatique de $M(P_n)$ et $T(P_n)$

Théorème 2.5.10 *[32] Pour toute chaîne P_n d'ordre $n \geq 2$, on a :*

$$i) \quad b(M(P_n)) = \begin{cases} 2 & si \quad n = 2 \\ 3 & si \quad n = 3, 4 \\ 4 & si \quad n = 5, 6, 7 \\ 5 & si \quad n \geq 8 \end{cases} \quad , \quad ii) \quad b(T(P_n)) = \begin{cases} 3 & si \quad n = 2, 3 \\ 4 & si \quad n = 4 \\ 5 & si \quad n \geq 5 \end{cases}$$

2.5.5 Le nombre b-chromatique de $M(C_n)$ et $T(C_n)$

Théorème 2.5.11 *[32] Pour tout cycle C_n d'ordre $n \geq 3$, on a :*

$$b(M(C_n)) = b(T(C_n)) = \begin{cases} n & si \quad n = 3, 4 \\ 5 & si \quad n \geq 5 \end{cases}$$

2.5.6 Notions liées à la b-coloration

Nous donnons un aperçu sur les travaux existants à propos des notions liées à la b-coloration comme les graphes b-continus, les graphes b-parfaits et les graphes b-monotones.

Graphes b-continus

Définition 2.5.2 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.*

- *Un grapheG est dit b-continu s'il admet une b-coloration en k couleurs pour tout $\chi(G) \leq k \leq b(G)$.*
- *L'intervalle $[\chi(G), b(G)]$ est dit le b-spectre du graphe G.*

Remarque 2.5.3 *On remarque que :*

- *Le problème de décision lié à la b-continuité d'un graphe G est NP-complet en général, même si $\chi(G)$ et $b(G)$ sont connus, et même si G est biparti [3, 22].*
- *On cite les classes de graphes b-continus comme les graphes triangulés [22, 21, 37] et certains graphes planaires [37].*
- *Il existe des graphes qui ne sont pas b-continus, l'exemple de la Figure 2.2 est un graphe qui admet une b-coloration avec 2 couleurs et avec 4 couleurs mais il est non b-colorable avec 3 couleurs.*

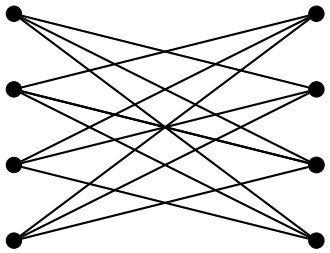


FIGURE 2.2: Un graphe non b-continu.

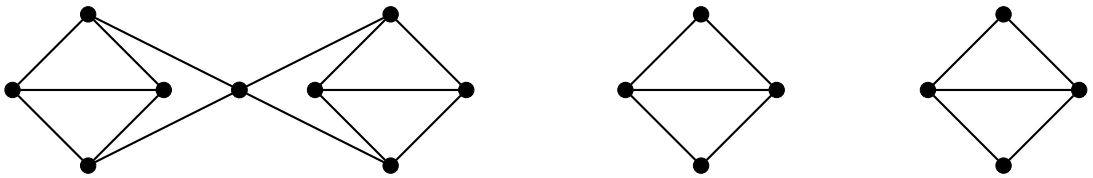
Graphes b-monotones

Dans [12], Bonomo et al. ont donné la définition d'un graphe b-monotone comme suit :

Définition 2.5.3 *Un graphe G est dit b-monotone si pour tout sous-graphe H_1 induit de G et tout sous-graphe H_2 de H_1 vérifie $b(H_1) \geq b(H_2)$.*

Remarque 2.5.4 *On a :*

- *Dans [12] les auteurs ont montré que les cographes et les graphes P_4-sparses sont b-monotones.*
- *Il est à noter qu'il existe des graphes qui ne sont pas b-monotone, (Voir Figure 2.3).*



$b(G) = 3$ $b(2D) = 4(D = K_4 - e)$

FIGURE 2.3: Un graphe non b-monotone, avec $b(G) = 3$ tandis que $b(2D) = 4(D = K_4 - e)$.

Graphes b-parfaits

Définition 2.5.4 *Un graphe G est dit b-parfait si tout sous-graphe H de G induit vérifie $b(H) = \chi(H)$.*

Remarque 2.5.5 *On remarque :*

- *Dans [27] Hoàng et Kouider ont introduit ce concept, ils ont caractérisé les graphes bipartis qui sont b-parfaits.*
- *Un résultat plus général a été obtenu dans [28, 29] par C.T. Hoàng et al, où ils ont prouvé qu'un graphe est b-parfait si et seulement s'il ne contient pas un membre d'une certaine liste de vingt-deux graphes comme sous-graphe induit.*

Graphes b-critiques

Lorsqu'on modifie un graphe par certaines opérations telles que la suppression ou l'ajout des sommets ou d'arêtes ou l'ajout d'une chaîne, il convient de regarder l'effet de ces modifications sur les différents invariants ou paramètres du graphe.

2.6 Quelques applications de la b-coloration

De nombreux problèmes réels peuvent être modélisés comme des problème de coloration de graphes. Nous pouvons citer par exemple les problèmes d'ordonnancement et de planning de la vie de tous les jours.

La b-coloration a été utilisée dans les problèmes de Clustering. Un tel problème consiste à regrouper les éléments d'un ensemble de données en classes (ou clusters) de façon que chaque classe comporte des éléments qui sont le plus similaires possible, et chaque deux éléments de chaque deux classes disjointes sont le plus dissemblables possible.

L'un des premiers résultats impliquant la b-coloration est celui de Effantin et Kheddouci [18] qui ont donné un algorithme distribué pour calculer le nombre b-chromatique d'un graphe, et afin d'illustrer leur algorithme, ils ont proposé une application au problème de routage dans les réseaux.

El Ghazel et al. [19] ont également proposé une méthode de clustering avec une application dans le domaine médical. La b-coloration a été appliquée dans certains problèmes de classification des documents [23] et des services web [16].

- ◀ Pour plus d'informations sur les résultats liés à la b-coloration, le lecteur est invité à lire l'article de Jakovac et Peterin [33].

CHAPITRE 3

INFLUENCE DE L'AJOUT D'UNE CHAÎNE SUR LE NOMBRE B-CHROMATIQUE

Dans ce chapitre, nous proposons d'étudier l'effet de l'ajout d'une chaîne sur le nombre b-chromatique $b(G)$. Un graphe G est appelé chaîne-1-b-critique si l'ajout d'une chaîne entre deux sommets quelconques et adjacents de G fait diminuer son nombre b-chromatique. Nous étudions ci-après les propriétés d'un tel graphe, ensuite nous donnons quelques résultats.

3.1 Quelques définitions

Dans cette partie, nous citons les notions et les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce chapitre.

Définition 3.1.1 *Soit G est un graphe simple, et $u, v \in V$.*
un graphe G' noté $G_{u,v\ ,k}$ est défini comme suit :
$G_{u,v\ ,k}$ est obtenu à partir de G en ajoutant une chaîne induite quelconque de la forme (P_k : $x_0, x_1, ..., x_{k-1}, k \geq 2$) entre deux sommets u et v adjacents.

Remarque 3.1.1 *Dans cette section, nous allons étudier la notion de graphe $G_{u,v\ ,1}$.*

Exemple 3.1.1 *La Figure 3.1 représente un graphe $G = C_3 \square C_3$ et le graphe $G_{x,z\,,1}$ qui est obtenu à partir de G en ajoutant la chaîne (x, y, z).*

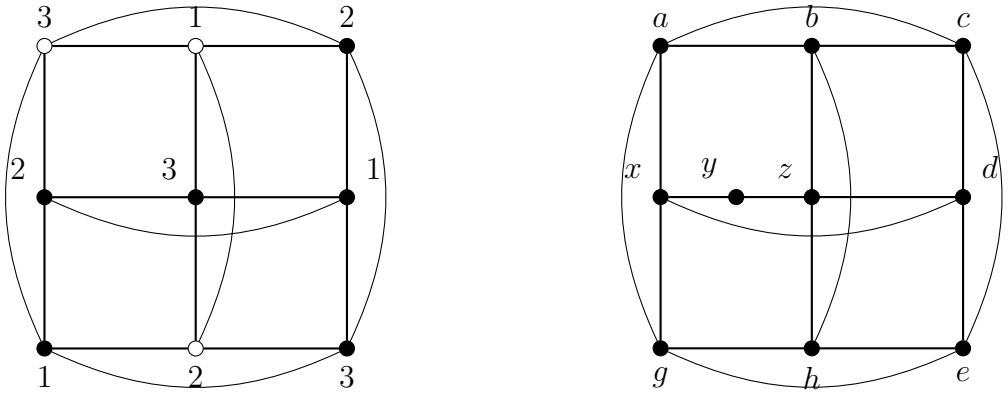
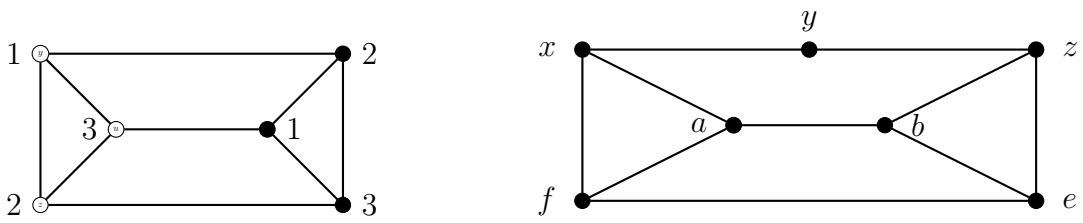


FIGURE 3.1: Un graphe $G = C_3 \square C_3$ tel que $b(G) = 3$ et le graphe $G_{x,z\,,1}$.

Définition 3.1.2 *On va définir les notions suivantes :*

- $Pa_b(u, v)$ *: le nombre minimum de sommets intérieurs de la chaîne.*
- $ePa_b(G) = min\{Pa_b(u, v) \setminus u, v \in V(G), uv \in E(G)\}$.
- $\overline{e}Pa_b(G) = min\{Pa_b(u, v) \setminus u, v \in V(G), uv \notin E(G)\}$.
- $EPa_b(G) = max\{Pa_b(u, v) \setminus u, v \in V(G), uv \in E(G)\}$.
- $\overline{E}Pa_b(G) = max\{Pa_b(u, v) \setminus u, v \in V(G), uv \notin E(G)\}$.

Exemple 3.1.2 *Le graphe $G = \overline{C_6}$ tel que $b(G) = 3$ et $ePa_b(G) = 1$.*
(Voir la Figure 3.2).



Graphe $G = \overline{C_6}$ *Le graphe $G_{x,z,1}$*

FIGURE 3.2: Un graphe $G = \overline{C_6}$ tel que $b(G) = 3$ et $ePa_b(G) = 1$.

Exemple 3.1.3 *La Figure 3.3 répresente un graphe G tel que $\overline{e}Pa_b = 1$.*



FIGURE 3.3: Un graphe G tel que $\overline{e}Pa_b = 1$.

Remarque 3.1.2 *Nous remarquons que :*

- *Si G est un graphe complet $G = K_n$, alors $\overline{e}Pa_b(G) = \overline{E}Pa_b(G) = \infty$.*
- *Si G est un graphe discret $G = \overline{K_n}$, alors $ePa_b(G) = EPa_b(G) = \infty$.*

Définition 3.1.3 *Soit G un graphe simple.*

- *Un graphe G est dit chaîne- k-b-critique si pour toute chaîne ajoutée entre deux sommets quelconques adjacents u, v. On a : $b(G_{u,v\,,k}) < b(G)$.*
- *Un graphe G est dit chaîne- k-b-stable si pour toute chaîne ajoutée entre deux sommets quelconques adjacents u, v. On a : $b(G_{u,v\,,k}) = b(G)$.*
- *Un graphe G est dit chaîne- k-b-super-critique si pour toute chaîne ajoutée entre deux sommets quelconques adjacents u, v. On a : $b(G_{u,v\,,k}) > b(G)$.*

3.2 L'effet de l'ajout d'une chaîne d'ordre $k = 1$ sur le nombre b-chromatique

Nous commençons par étudier l'effet de l'ajout d'une chaîne entre deux sommets adjacents où $k = 1$ sur le nombre b-chromatique, plus précisément sur la diminution du nombre b-chromatique. Avant de citer quelques résultats, nous donnons la remarque suivante :

Remarque 3.2.1 *L'opération de l'ajout d'une chaîne dans un graphe G entre deux sommets adjacents est définie uniquement pour les graphes qui contient au moins une arête.*

Nous commençons notre étude par le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe chaîne-1-b-critique et soit c une b-coloration de G avec $b(G)$ couleurs et B l'ensemble de tous les b-sommets de c. Alors :*

- *$b(G) \geqslant 3$.*
- *Il n'existe pas deux b-sommets de c de même couleurs. C'est à dire $|B| = b(G)$.*

- $V \setminus B$ *est un ensemble stable.*
- *Tout sommet* $x \in V \setminus B$ *satisfait* $d_G(x) \leqslant |B| - 2$.
- $b(G) = \Delta(G) + 1$.
- $\forall v \in V$, $\delta(G) \geqslant 2$.

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe chaîne-1-b-critique et soit c une b-coloration de G avec $b(G)$ couleurs.

- Comme G n'est pas un graphe discret, alors $b(G) \geq 2$. Supposons que $b(G) = 2$. Comme G un graphe chaîne-1-b-critique, ceci implique que $b(G_{u,v\,,1}) = 1$, donc $G_{u,v\,,1} = D_n$ c'est à dire $G_{u,v\,,1}$ est sans arête, contradiction avec la Remarque 3.2.1.
- Supposons qu'il existe deux b-sommets de c, disons u_1 et u_2 de même couleur. Ceci implique que tous les voisins de u_i, $(i = 1, 2)$ sont des b-sommets. En effet, s'il existe un non b-sommet $x \in N_{V\setminus B}(u_i)$, $(i = 1, 2)$, alors $b(G_{u_1,x\,,1}) \geqslant b(G)$, contradiction.

  Ceci peut être expliqué comme suit, on considère un graphe $G_{u_1,x\,,1}$ qui est obtenu à partir de G en ajoutant une chaîne induite quelconque de la forme (u_1, y, x), et on définit une coloration π de $G_{u_1,x\,,1}$ qui est obtenue à partir de la coloration c de la façon suivante, tous les sommets de $G_{u_1,x\,,1}$ gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec une couleur manquante dans le voisinage de x, alors $b(G_{u_1,x\,,1}) \geqslant b(G)$, puisque u_2 reste un b-sommet, contradiction.

  Supposons maintenant que $x \in B$. Si x est un sommet voisin commun entre u_1 et u_2, on fait la coloration π de $G_{u_1,x\,,1}$ qui est définit de la manière suivante, tous les sommets de $G_{u_1,x\,,1}$ gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec une couleur dans le voisinage de x sauf la couleur de u_i, $(i = 1, 2)$, ceci implique que $b(G_{u_1,x\,,1}) \geqslant b(G)$, contradiction.

  L'autre cas, si $x \in B$ et x est un voisin de l'un des deux sommets disons u_1, on fait une coloration π sur $G_{u_1,x\,,1}$, on trouve $b(G_{u_1,x\,,1}) \geqslant b(G)$, contradiction.
- Supposons que $V \setminus B$ n'est pas un ensemble stable c'est à dire il existe deux sommets x et y qui sont adjacents dans $V \setminus B$.

  Considérons un graphe $G_{x,y\,,1}$ qui est obtenu à partir de G en ajoutant une chaîne induite quelconque de la forme (x, z, y), soit une coloration π de $G_{x,y\,,1}$ qui est obtenue à partir de la coloration c de la façon suivante, tous les sommets de $G_{x,y\,,1}$ gardent leurs couleurs initiales sauf z qui est coloré avec une couleur manquante dans le voisinage de x ou y et différente de la couleur de ces deux sommets, ceci implique que $b(G_{x,y\,,1}) \geqslant b(G)$, contradiction.

- Supposons qu'il existe $x \in V \setminus B$ tel que $d_G(x) \geqslant |B| - 1$, alors x est adjacent à $b-1$ sommet de couleur distinct, ceci implique que x est un b-sommet, contradiction.
- On a $\forall x \in B$, $d_G(x) \geq b(G) - 1$, si $d_G(x) > b(G) - 1$, alors il existe deux sommets v_1 et v_2 dans le voisinage de x qui possède la même couleur. L'un des deux sommets disons v_1 n'est pas un b-sommet.

  Considérons un graphe $G_{x,v_1},_1$ qui est obtenu à partir de G en ajoutant une chaîne induite quelconque de la forme (x, y, v_1), soit une coloration π de $G_{x,v_1},_1$ qui est obtenue à partir de la coloration c de la façon suivante, tous les sommets de $G_{x,v_1},_1$ gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec une couleur manquante dans le voisinage de v_1. Ceci implique que $b(G_{x,v_1},_1) \geqslant b(G)$, contradiction. Donc $d_G(x) = b(G) - 1$, $\forall x \in B$. D'autre part on a $\forall z \in V \setminus B$, $d_G(z) \leqslant |B| - 2$, donc les sommets de B sont de degré $\Delta(G)$, c'est à dire $\forall x \in B$, $d_G(x) = \Delta(G)$, d'où $\Delta(G) = b(G) - 1$, ceci implique $b(G) = \Delta(G) + 1$.
- Supposons que G possède une feuille v et u le support adjacent à v, considérons un graphe $G_{v,u},_1$ qui est obtenu à partir de G en ajoutant une chaîne induite quelconque de la forme (v, y, u), soit une coloration π de $G_{v,u},_1$ qui est obtenue à partir de la coloration c de la façon suivante, tous les sommets de $G_{v,u},_1$ gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de v et on colorons v par une couleur différente de y, ceci implique que $b(G_{v,u},_1) \geqslant b(G)$, contradiction.

■

Nous allons maintenant établir le résultat suivant.

Théorème 3.2.2 *Un graphe d-régulier est chaîne-1-b-critique si et seulement si G est un graphe complet.*

Preuve. On va montrer la condition nécessaire.

Posons $k = b(G)$. Soit G un graphe d-régulier et chaîne-1-b-critique. D'après le Théorème 3.2.1 $b(G) = \Delta(G) + 1 = d + 1$. Considérons c une b-coloration de G avec k couleurs, on a B le b-système de c. La définition de B implique que $|B| = k$. Supposons que B n'est pas une clique et comme G est d-régulier et $V \setminus B$ est un stable, alors $V \setminus B$ contient au moins un sommet v adjacent à d sommets de B, dans ce cas v serait un b-sommet de couleur répétée ce qui contredit le Théorème 3.2.1, donc B est une clique d'ordre $d+1$ et par conséquence $V \setminus B$ est un ensemble vide, d'où G est un graphe complet.

Montrons maintenant la condition suffisante.

Il est facile de vérifier que les graphes complets sont chaîne-1-b-critiques.

■

Maintenant on va donner quelques résultats sur les graphes chaîne-1-b-critiques.

Corollaire 3.2.1 *Si T un arbre alors T n'est pas chaîne-1-b-critique.*

Corollaire 3.2.2 *Les chaînes P_n ne sont pas chaîne-1-b-critiques, pour $n \geq 2$.*

Proposition 3.2.1 *Si G un graphe biparti complet $K_{n,m}$ alors G n'est pas chaîne-1-b-critique.*

Preuve. Soit G un graphe biparti complet tel que $V = X \cup Y$, où X et Y sont des stables et chaque sommet de X est adjacent à tout sommet de Y et inversement. Considérons un graphe H qui est obtenu à partir de G en ajoutant une chaîne induite quelconque de la forme (x, z, y), car toutes les arêtes de G jouent le même rôle. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de la coloration c de la façon suivante. Tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec une nouvelle couleur 3 , on trouve que y est un b-sommet ceci implique que $b(H) > b(G)$ car $b(G) = 2$ contradiction, d'où $K_{n,m}$ n'est pas chaîne-1-b-critique.

■

Proposition 3.2.2 *Les cycles C_n ne sont pas des chaîne-1-b-critiques, pour $n \geq 4$.*

Preuve.

Posons $G = C_n$, $n \geq 4$. Considérons un graphe H qui est obtenu à partir de G en ajoutant une chaîne induite quelconque de la forme (x, z, y) entre deux sommets x, y de G.

On distingue deux cas :

- Pour $n = 4$. Dans ce cas $H = C_5$ et par suite $b(H) = b(C_5) = 3 > b(G) = b(C_4) = 2$, donc G n'est pas une chaîne-1-b-critique.
- Pour $n \geq 5$. Dans ce cas $H = C_{n+1}$ et par suite on trouve que $b(H) = 3 \geq b(G) = 3$, donc G n'est pas une chaîne-1-b-critique.

■

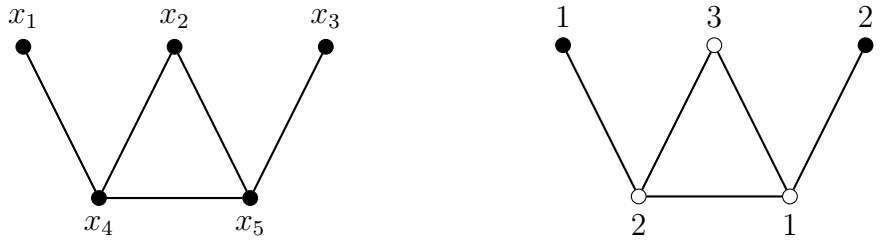
Proposition 3.2.3 *$M(P_n)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique, pour $n \geq 2$.*

Preuve.

Posons $G = M(P_n)$, $n \geq 2$. Considérons un graphe H qui est obtenu à partir de G en ajoutant une chaîne induite quelconque de la forme (x_i, y, x_j) entre deux sommets x_i, x_j de G, nous rappelons que y est le sommet inséré sur l'arête $x_i x_j$.

On distingue les cas suivants :

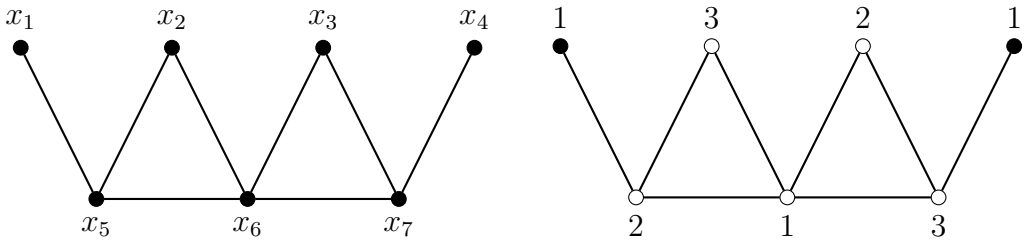
- Pour $n = 2$. Dans ce cas $H = P_4$. Sachant que $b(P_4) = 2$ alors $b(H) = b(P_4) \geqslant b(G) = b(P_3)$, donc $M(P_2)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.
- Pour $n = 3$. Soit c une b-coloration de $G = M(P_3)$ avec $b(G) = 3$. La Figure 3.4 présente une b-coloration de G avec $b(G) = 3$. Dans ce cas $H = G_{x_1,x_4,1}$. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_1 et nous colorons x_1 par une couleur différente de y, ceci implique que $b(H) \geqslant b(G)$, car x_4 reste un b-sommet.
  On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_2,x_4,1}$. Soit une coloration π de H' qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H' gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_2 et nous colorons x_2 par une couleur différente de leur voisinage x_5 et y, donc x_2 n'est pas un b-sommet, ceci implique que $b(H') < b(G)$.
  l'étude de deux graphes H et H' fait la contradiction avec la définition 3.1.3,
  donc $M(P_3)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.



Un graphe milieu de P_3 La b-coloration de $G = M(P_3)$

FIGURE 3.4: La b-coloration de $G = M(P_3)$ telle que $b(G) = 3$.

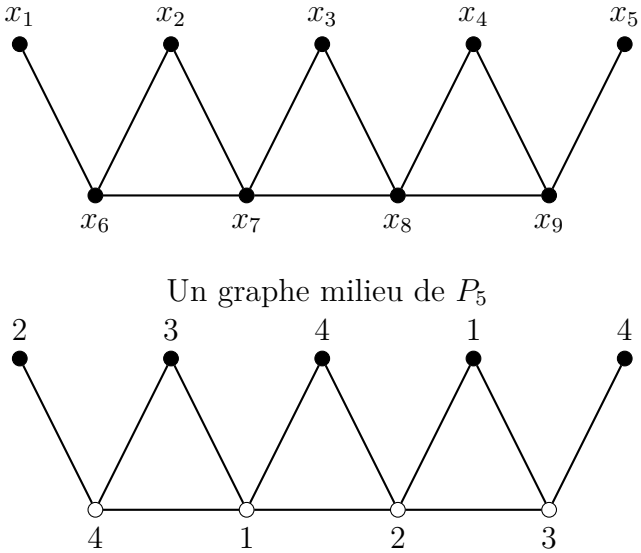
- Pour $n = 4$, soit c une b-coloration de $G = M(P_4)$ avec $b(G) = 3$. La Figure 3.5 présente la b-coloration de G avec $b(G) = 3$. Dans ce cas $H = G_{x_1,x_5,1}$. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_1 et nous colorons x_1 par une couleur différente de y, ceci implique que $b(H) \geqslant b(G)$, car x_5 reste un b-sommet.
  On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_2,x_5,1}$. Soit une coloration π de H' qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H' gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_2 et nous colorons x_2 par une couleur différente de leur voisinage x_6 et y, donc x_2 n'est pas un b-sommet, ceci implique que $b(H) \leq b(G)$.
  L'étude de deux graphes H et H' fait la contradiction avec la définition 3.1.3, donc $M(P_4)$ est n'est pas une chaîne-1-b-critique.



Un graphe milieu de P_4 La b-coloration de $G = M(P_4)$

FIGURE 3.5: La b-coloration de $G = M(P_4)$ telle que $b(G) = 3$.

- Pour $n = 5$, soit c une b-coloration de $G = M(P_5)$ avec $b(G) = 4$. La Figure 3.6 présente une b-coloration de G avec $b(G) = 4$. Dans ce cas $H = G_{x_1,x_6,1}$. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_1 et nous colorons x_1 par une couleur différente de y, ceci implique que $b(H) \geqslant b(G)$, car x_6 reste un b-sommet. On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_2,x_7,1}$. Soit une coloration π de H' qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H' gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_2 et nous colorons x_2 par une couleur différente de leur voisinage x_6 et y, donc x_6 n'est pas un b-sommet ceci implique que $b(H') < b(G)$. L'étude de deux graphes H et H' fait la contradiction avec la définition 3.1.3, donc $M(P_5)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.



Un graphe milieu de P_5

La b-coloration de $G = M(P_5)$

FIGURE 3.6: La b-coloration de $G = M(P_5)$ telle que $b(G) = 4$.

- Pour $n = 6$, soit c une b-coloration de $G = M(P_6)$ avec $b(G) = 4$. La Figure 3.7 présente

la b-coloration de G avec $b(G) = 4$. Dans ce cas $H = G_{x_1,x_7,1}$. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec une couleur manquante dans le voisinage de x_1 ou x_7, ceci implique que $b(H) \geqslant b(G)$, car le nombre de b-sommet reste stable.
On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_3,x_8,1}$. Soit une coloration π de H' qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H' gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_3 et nous colorons x_3 par une couleur différente de leur voisinage x_9 et y, donc x_9 n'est pas un b-sommet, ceci implique que $b(H) < b(G)$.
L'étude de deux graphes H et H' fait la contradiction avec la définition 3.1.3, donc $M(P_6)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.

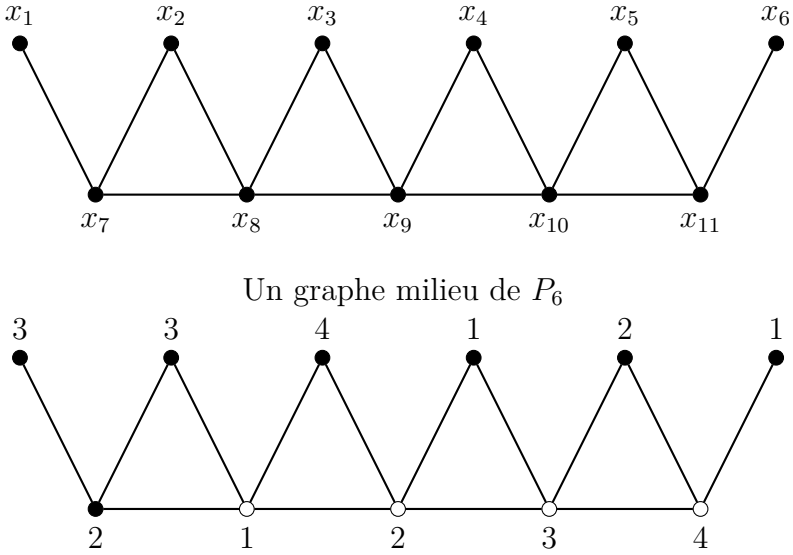


FIGURE 3.7: La b-coloration de $G = M(P_6)$ telle que $b(G) = 4$.

- Pour $n = 7$, soit c une b-coloration de $G = M(P_7)$ avec $b(G) = 4$. La Figure 3.8 présente la b-coloration de G avec $b(G) = 4$. Dans ce cas $H = G_{x_1,x_8,1}$, on fait la coloration π de la manière précédente, on trouve que $b(H) \geqslant b(G)$. On fait l'étude avec le graphe $H' = G_{x_2,x_8,1}$, on fait une coloration π de la manière précédente, on trouve que $b(H) < b(G)$.
  L'étude de deux graphes H et H' fait la contradiction avec la définition 3.1.3, donc $M(P_7)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.

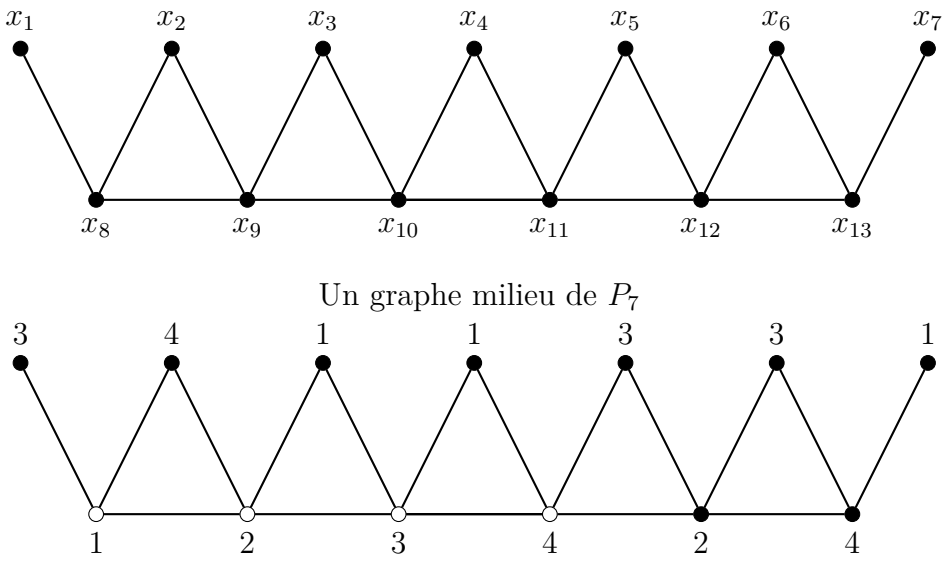


FIGURE 3.8: La b-coloration de $G = M(P_7)$ telle que $b(G) = 4$.

- Pour $G = M(P_n)$ et $n \geq 8$, soit c une b-coloration de G avec $b(G) = 5$. Dans ce cas $H = G_{x_1,x_{n+1},1}$, tel que x_1 et x_{n+1} n'est pas deux b-sommets, soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré par une couleur différente de x_1 et x_{n+1}, ceci implique que $b(H) \geqslant b(G)$. On pose que x_i et x_j deux b-sommets adjacents de G et x_t un sommet en commun entre eux.

  On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_i,x_t,1}$. Soit une coloration π de H' qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H' gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_t et nous colorons x_t par une couleur différente de x_j et y, donc x_j n'est pas un b-sommet, ceci implique que $b(H) < b(G)$.

  L'étude de deux graphes H et H' fait la contradiction avec la définition 3.1.3,

  donc $M(P_n)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.

■

Proposition 3.2.4 *$T(P_n)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique, pour $n \geq 3$.*

Preuve. Posons que $G = T(P_n)$ pour $n \geq 3$. Considérons un graphe H qui est obtenu à partir de G en ajoutant une chaîne induite quelconque de la forme (x_i, y, x_j) entre deux sommets x_i, x_j de G, nous rappelons que y est le sommet inséré sur l'arête x_ix_j.

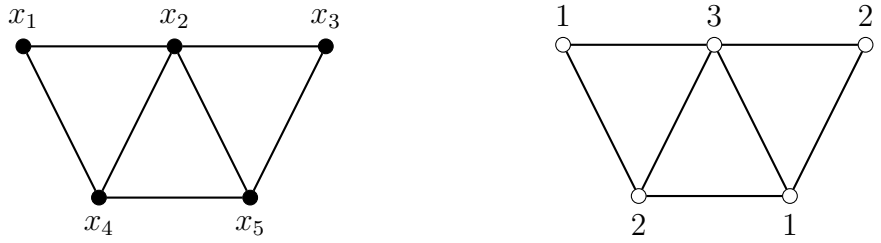
On distingue les cas suivants :

- Pour $n = 3$, soit c une b-coloration de $G = T(P_3)$ avec $b(G) = 3$. La Figure 3.9 présente une b-coloration de $G = T(P_3)$ avec $b(G) = 3$. Considérons un graphe$H = G_{x_1,x_4,1}$.

Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_1 et nous colorons x_1 avec une couleur différente de leur voisinage x_2 et y, ceci implique que $b(H) \geqslant b(G)$.

On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_2,x_5,1}$. Soit une coloration π de H' qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_4, on trouve que x_5 n'est pas un b-sommet, ceci implique $b(H') \geq b(G)$.

Dans les deux graphes H et H' le nombre b-chromatique reste stable donc $T(P_3)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.



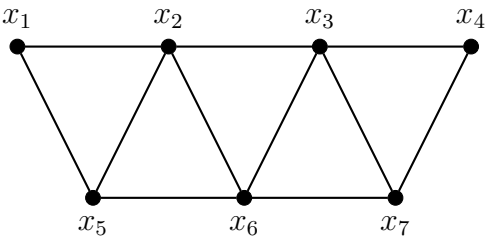
Un graphe total de P_3 La b-coloration de $G = T(P_3)$

FIGURE 3.9: La b-coloration de $G = T(P_3)$ telle que $b(G) = 3$.

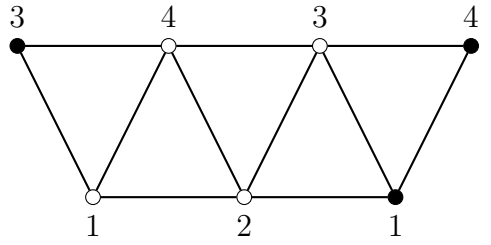
- Pour $n = 4$, soit c une b-coloration de $G = T(P_4)$ avec $b(G) = 4$. La Figure 3.10 présente une b-coloration de $G = T(P_4)$ avec $b(G) = 4$. Considérons un graphe $H = G_{x_1,x_5,1}$. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_1 et nous colorons x_1 avec une couleur différente de leur voisinage y et x_2, ceci implique que $b(H) \geqslant b(G)$.

  On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_2,x_6,1}$. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H' gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_2, et nous colorons x_2 par une couleur différente de leur voisinage y et x_3, on trouve que x_2 n'est pas un b-sommet, ceci implique que $b(H) < b(G)$.

  L'étude de deux graphes H et H' fait la contradiction avec la définition 3.1.3, donc $T(P_4)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.



Un graphe total de P_4



La b-coloration de $G = T(P_4)$

FIGURE 3.10: La b-coloration de $G = T(P_4)$ telle que $b(G) = 4$.

- Pour $n = 5$, soit c une b-coloration de $G = T(P_5)$ avec $b(G) = 5$. La Figure 3.11 présente une b-coloration de $G = T(P_5)$ avec $b(G) = 5$. Considérons un graphe $H = G_{x_1,x_6,1}$. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec une couleur différente de leur voisinage x_1 et x_6, ceci implique que $b(H) \geqslant b(G)$.

  On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_2,x_7,1}$. Soit une coloration π de H' qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_2 et nous colorons x_2 par une couleur différente de leur voisinage y et x_3, on trouve que x_2 n'est pas un b-sommet, ceci implique que $b(H) < b(G)$.

  L'étude de deux graphes H et H' fait la contradiction avec la définition 3.1.3, donc $T(P_5)$ est une chaîne-1-b-critique.

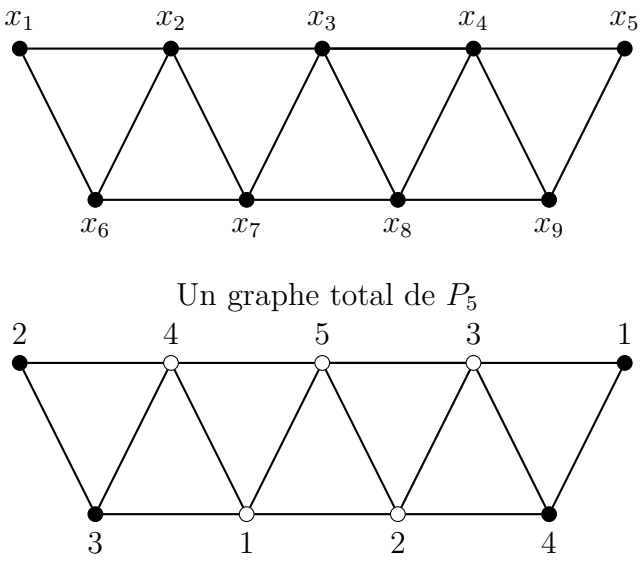


FIGURE 3.11: La b-coloration de $G = T(P_5)$ telle que $b(G) = 5$.

- Pour $G = T(P_n)$ et $n \geq 6$, soit c une b-coloration de G avec $b(G) = 5$. Considérons un graphe $H = G_{x_1,x_{n+1},1}$ tel que x_1 et x_{n+1} n'est pas un deux b-sommet. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y est coloré par une couleur différente de leur voisinage x_1 et x_{n+1}, ceci implique que $b(H) \geqslant b(G)$.

  On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_i,x_j,1}$, tel que x_i et x_j deux b-sommet de G. Soit une coloration π de H' qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_i et nous colorons x_i par une couleur différente de leur voisinage, on trouve que x_i n'est pas un b-sommet, ceci implique que $b(H) < b(G)$.

  L'étude de deux graphes H et H' fait la contradiction avec la définition 3.1.3, donc $T(P_n)$ pour $n \geq 6$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.

■

Proposition 3.2.5 *$M(C_n)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique, pour $n \geq 3$ et $n \neq 5$.*

Preuve. Posons $G = M(C_n)$, pour $n \geq 3$ et $n \neq 5$. Considérons un graphe H qui est obtenu à partir de G en ajoutant une chaîne induite quelconque de la forme (x_i, y, x_j) entre deux sommets x_i, x_j de G, nous rappelons que y est le sommet inséré sur l'arête x_ix_j.

On distingue les cas suivants :

- Pour $n = 3$, soit c une b-coloration de $G = M(C_3)$ avec $b(G) = 3$. La Figure 3.12 présente une b-coloration de $G = M(C_3)$ avec $b(G) = 3$. Considérons un graphe

$H = G_{x_1,x_2,1}$. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_6, ceci implique que x_1 n'est pas un b-sommet mais x_4 un b-sommet de même couleur de x_1 donc $b(H) \geqslant b(G)$.

On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_i,x_j,1}$, on trouve la même résultat car tous les sommet de G sont des b-sommets.

Dans les graphes H et H' le nombre b-chromatique reste stable donc $M(C_3)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.



Un graphe milieu de C_3 La b-coloration de $G = M(C_3)$

FIGURE 3.12: La b-coloration de $G = M(C_3)$ telle que $b(G) = 3$.

- Pour $n = 4$, soit c une b-coloration de $G = M(C_4)$ avec $b(G) = 4$. La Figure 3.13 présente une b-coloration de G avec $b(G) = 4$. Considérons un graphe $H = G_{x_1,x_2,1}$. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_1 et nous colorons x_1 par une couleur différente de leur voisinage y et x_8, ceci implique que $b(H) \geq b(G)$, donc $M(C_4)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.



Un graphe milieu de C_4 La b-coloration de $G = M(C_4)$

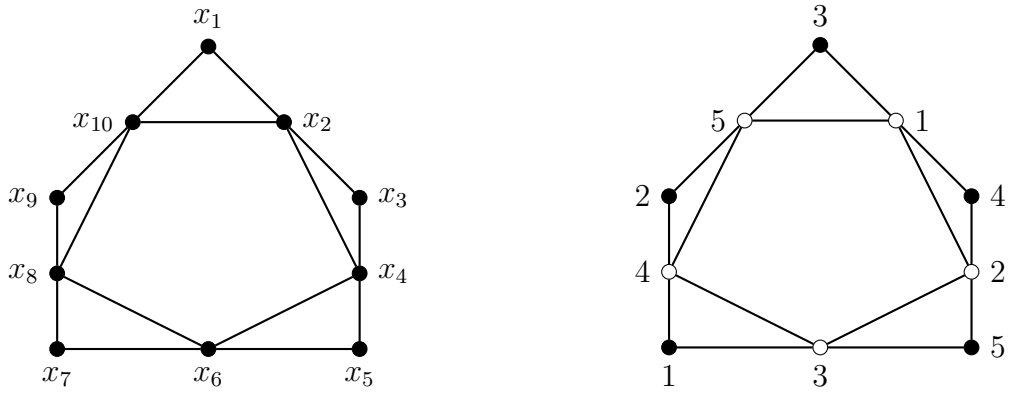
FIGURE 3.13: La b-coloration de $G = M(C_4)$ telle que $b(G) = 4$.

- Pour $n = 5$, soit c une b-coloration de $G = M(C_5)$ avec $b(G) = 5$. La Figure 3.14 présente une b-coloration de G avec $b(G) = 5$. Considérons un graphe $H = G_{x_2,x_4,1}$. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets

de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_4 et nous colorons x_4 par une couleur différente de leur voisinage, on trouve que x_4 n'est pas un b-sommet, ceci implique que le nombre de b-chromatique est déminé $b(H) < b(G)$.

On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_1,x_2,1}$. Soit une coloration π de H' qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H' gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_1 et nous colorons x_1 par une couleur différente de leur voisinage, on trouve que x_{10} n'est pas un b-sommet, ceci implique que le nombre de b-chromatique est déminé $b(H) < b(G)$.

Si on ajoute une chaîne induite quelconque entre les autres sommets alors, on trouve même résultat de H et H', donc $M(C_5)$ est une chaîne-1-b-critique.



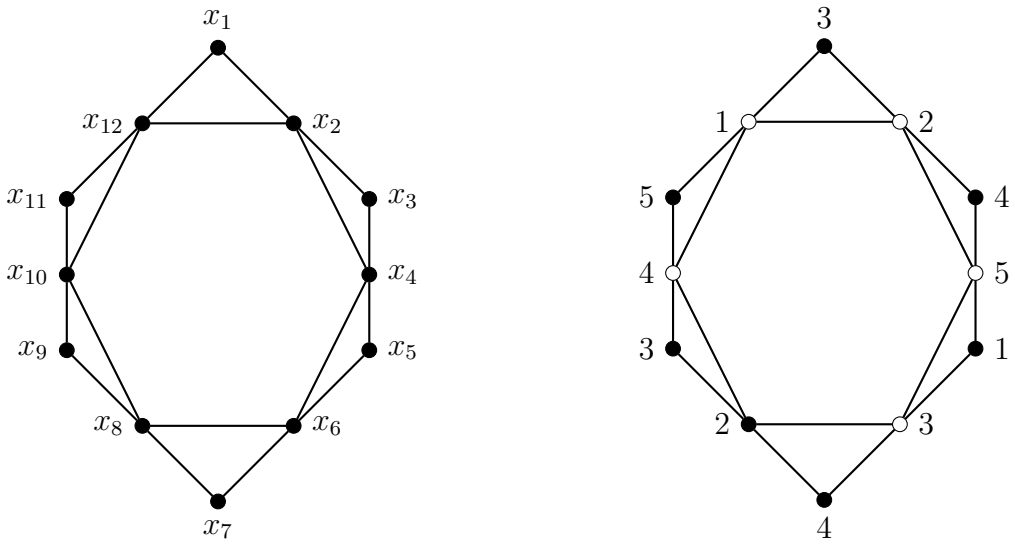
Un graphe milieu de C_5 La b-coloration de $G = M(C_5)$

FIGURE 3.14: La b-coloration de $G = M(C_5)$ telle que $b(G) = 5$.

- Pour $n = 6$, soit c une b-coloration de $G = M(C_6)$ avec $b(G) = 5$. La Figure 3.15 présente une b-coloration de G avec $b(G) = 5$. Considérons un graphe $H = G_{x_4,x_6,1}$. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_4 et nous colorons x_4 par une couleur différente de leur voisinage, on trouve que x_4 n'est pas un b-sommet, ceci implique que $b(H) < b(G)$.

  On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_7,x_8,1}$. Soit une coloration πde H' qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec une couleur différente de leur voisinage x_7 et x_8, ceci implique que $b(H) \geq b(G)$.

  L'étude de deux graphes H et H' fait la contradiction avec la définition 3.1.3, donc $M(C_6)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.



Un graphe milieu de C_6 La b-coloration de $G = M(C_6)$

FIGURE 3.15: La b-coloration de $G = M(C_6)$ telle que $b(G) = 5$.

- Pour $G = M(C_n)$ tel que $n \geq 7$, soit c une b-coloration de G avec $b(G) = 5$. Considérons un graphe $H = G_{x_i,x_j}$,1, tel que x_i et x_j deux b-sommet de G. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_i et nous colorons x_i par une couleur différente de leur voisinage y et x_j, on trouve que x_j n'est pas un b-sommet, ceci implique que $b(H) < b(G)$.

  On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_u,x_v}$,1, tel que x_u et x_v non deux b-sommet de G. Soit une coloration π de H' qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec couleur différente de leur voisinage x_u et x_v, ceci implique que $b(H) \geq b(G)$.

  L'étude de deux graphes H et H' fait la contradiction avec la définition 3.1.3 donc $M(C_n)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.

■

Proposition 3.2.6 *$T(C_n)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique, pour $n \geq 3$.*

Preuve. Posons $G = T(C_n)$, $n \geq 3$. Considérons un graphe H qui est obtenu à partir de G en ajoutant une chaîne induite quelconque de la forme (x_i, y, x_j) entre deux sommets x_i, x_j de G, nous rappelons que y est le sommet inséré sur l'arête x_ix_j.

On distingue les cas suivants :

- Pour $n = 3$, soit c une b-coloration de $G = T(C_3)$ avec $b(G) = 3$. La Figure 3.16 présente une b-coloration de G avec $b(G) = 3$. Considérons un graphe $H = G_{x_1,x_2}$,1.

Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_6, ceci implique que x_1 n'est pas un b-sommet mais x_4 un b-sommet de même couleur de x_1 donc $b(H) \geqslant b(G)$.

On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_i,x_j},1$, on trouve même résultat car tous les sommet de G sont des b-sommets.

Dans les graphes H et H' le nombre b-chromatique reste stable, donc $T(C_3)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.



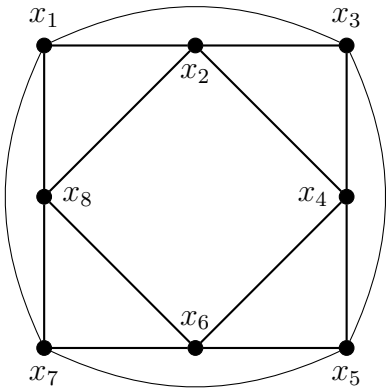
Un graphe total de C_3 La b-coloration de $G = T(C_3)$

FIGURE 3.16: La b-coloration de $G = T(C_3)$ telle que $b(G) = 3$.

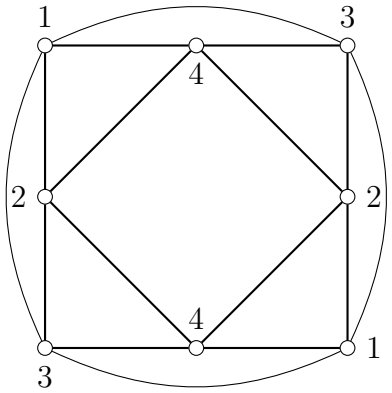
- Pour $n = 4$, soit c une b-coloration de $G = T(C_4)$ avec $b(G) = 4$. La Figure 3.17 présente une b-coloration de G avec $b(G) = 4$. Considérons un graphe $H = G_{x_2,x_3},1$. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_1, ceci implique que x_2 et x_3 n'est pas des b-sommets mais x_6 et x_7 des b-sommets de même couleur de x_2 et x_3 respectivement donc $b(H) \geqslant b(G)$.

  On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_i,x_j},1$, on trouve même résultat car tous les sommet de G sont des b-sommets.

  Dans les graphes H et H' le nombre b-chromatique reste stable. Donc $T(C_4)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.



Un graphe total de C_4



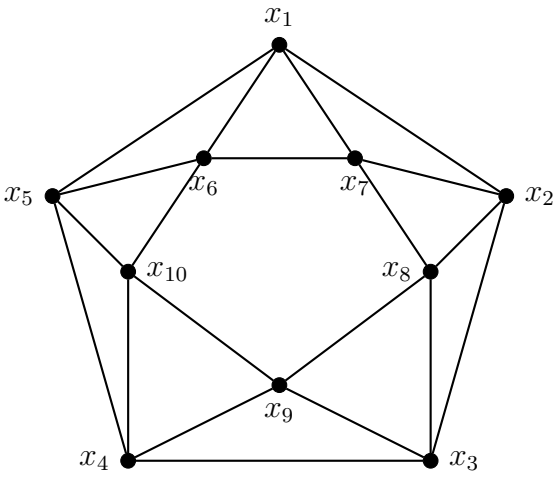
La b-coloration de $G = T(C_4)$

FIGURE 3.17: La b-coloration de $G = T(C_4)$ telle que $b(G) = 4$.

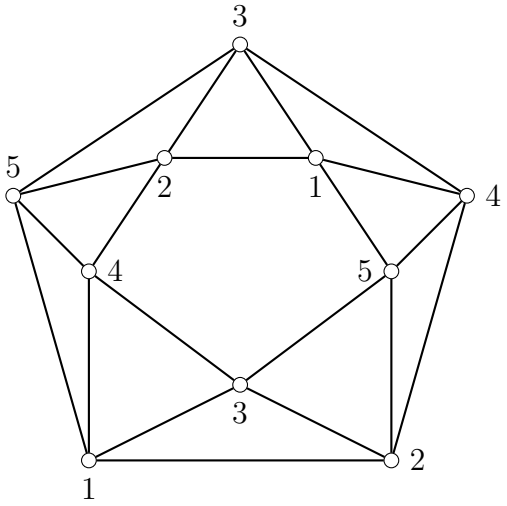
- Pour $n = 5$, soit c une b-coloration de $G = T(C_5)$ avec $b(G) = 5$. La Figure 3.18 présente une b-coloration de G avec $b(G) = 5$. Considérons un graphe $H = G_{x_2,x_8,1}$. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_1, ceci implique que x_2 et x_8 n'est pas des b-sommets mais x_{10} et x_5 des b-sommets de même couleur de x_2 et x_8 respectivement donc $b(H) \geqslant b(G)$.

  On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_i,x_j,1}$, on trouve même résultat car tous les sommet de G sont des b-sommets.

  Dans les graphes H et H' le nombre b-chromatique reste stable. Donc $T(C_5)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.



Un graphe total de C_5



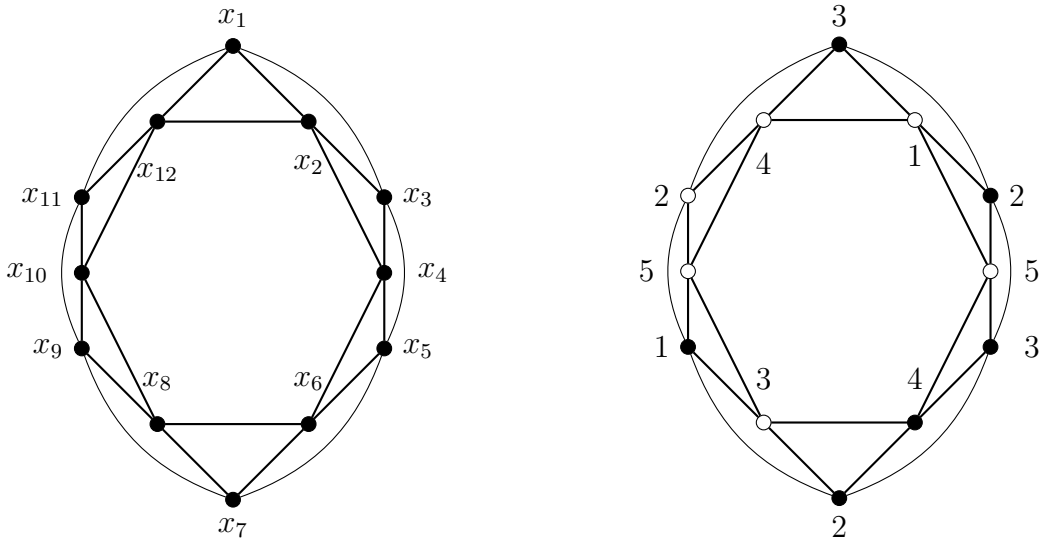
La b-coloration de $G = T(C_5)$

FIGURE 3.18: La b-coloration de $G = T(C_5)$ telle que $b(G) = 5$.

- Pour $n = 6$, soit c une b-coloration de $G = M(C_6)$ avec $b(G) = 5$. La Figure 3.19 présente une b-coloration de G avec $b(G) = 5$. Considérons un graphe $H = G_{x_2,x_{12},1}$. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec la couleur de x_2 et nous colorons x_2 par une couleur différente de leur voisinage, on trouve que x_2 n'est pas un b-sommet, ceci implique que $b(H) < b(G)$.

  On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_6,x_7,1}$. Soit une coloration π de H' qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec couleur différente de leur voisinage x_6 et x_7, ceci implique que $b(H) \geq b(G)$.

  L'étude de deux graphes H et H' fait la contradiction avec la définition 3.1.3, donc $T(C_6)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.



Un graphe total de C_6 La b-coloration de $G = T(C_6)$

FIGURE 3.19: La b-coloration de $G = T(C_6)$ telle que $b(G) = 5$.

- Pour $G = T(C_n)$, tel que $n \geq 7$, soit c une b-coloration de G avec $b(G) = 5$. Considérons un graphe $H = G_{x_i,x_j,1}$, tel que x_i et x_j deux b-sommets. Soit une coloration π de H qui est obtenue à partir de c de la façon suivante, tous les sommets de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré par la couleur de x_i et nous colorons x_i par une couleur différente de leurs voisinage, on trouve que x_2 n'est pas un b-sommet, ceci implique que $b(H) < b(G)$.

  On fait l'étude avec un graphe $H' = G_{x_u,x_v,1}$, tel que x_u et x_v deux non b-sommets. Soit une coloration π de H' qui est obtenue à partir de la façon suivante, tous les sommets

de H gardent leurs couleurs initiales sauf y qui est coloré avec couleur différente de leur voisinage x_u et x_v, ceci implique que $b(H) \geq b(G)$.

L'étude de deux graphes H et H' fait la contradiction avec la définition 3.1.3. Donc $T(C_n)$ n'est pas une chaîne-1-b-critique.

■

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au cours de ce mémoire, nous nous sommes intéressés principalement à la notion de la b-coloration dans les graphes et le nombre b-chromatique. Plus précisément, nous nous sommes focalisés sur les points importants : détermination des valeurs exactes du nombre b-chromatique pour des classes particulières de graphes comme le graphe milieu et le graphe total d'un cycle, détermination des bornes sur le nombre b-chromatique.

Nous avons structuré notre travail en deux parties. Dans la première partie nous avons présenté le nouveau concept suivant : le graphe $G_{u,v\ ,k}$ qui est obtenu à partir d'un graphe G en ajoutant une chaîne induite quelconque P_k entre deux sommets adjacents u, v de G, tel que $k = 1$.

Dans la deuxième partie, nous avons abordé la notion des graphes dits chaîne-1-b-critiques, c'est à dire les graphes G dont l'ajout d'une chaîne induite quelconque entre deux sommets adjacents de G fait diminuer le nombre b-chromatique de G. En effet, après avoir donné quelques propriétés fondamentales de ces graphes, nous avons étudié quelques graphes particuliers comme le graphe milieu et le graphe total d'une chaîne, le graphe milieu et le graphe total d'un cycle.

Les travaux réalisés durant ce mémoire ouvrent plusieurs perspectives les travaux future. En effet, au vu des résultats obtenus sur les graphes chaîne-1-b-critiques, il est naturel de poursuivre l'étude de ce problème sur des différents graphes. Il est possible également de prolonger le concept de graphe $G_{u,v\ ,k}$ où $k \geqslant 2$. Il serait intéressant aussi d'étudier les graphes chaîne-k-b-critiques où $k \geqslant 2$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Alkhateeb, A. Kohl, Upper bounds on the b-chromatic number and results for res-tricted graph classes, Discucciones Math. Graph Theory 31 (2011) 709-735.

[2] K. Appel, W. Haken. Every planar map is four colorable : Part1, discharging. Illinios. J. Maths, 21(1977)429-490.

[3] D. Barth, J. Cohen and T. Faik. Complexity of determining the b-continuity property of graphs, PRiSM Technical Report, 2003.

[4] M. Behzad : A criterion for the total graph of a graph. proc. Camb. Philos. Soc. 63 : 679-681, 1967.

[5] C. Berge. Graphs. North Holland, 1985.

[6] L. W. Beineke : Characterizations of derived graphs. Journal of Combinatorial The-ory, 9(2)(1970)129-135.

[7] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf F. Maffray. b-coloring of some bipartite graphs, Aus-tralasian J. Combin 53(2012)67-76.

[8] M. Blidia, N. Ikhlef Eschouf, F. Maffray. On vertex b-critical trees. Opuscula Math-ematica 33(1)(2013) 19-28.

[9] M. Blidia, F.Maffray, Z. Zemir. On b-colorings in regular graphs. Discrete Applied Mathematics 157 : 1787-1793, 2009.

[10] M. Blidia, N.Iklef Eschouf, F. Maffray. On graphs vertex critical with respect b-chromatic number colleque sur l'optimisation et les systémes d'informatique COSI 2011, 24 28 Avril, Guelma, Algérie.

[11] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. Graph theory with applications, North-Holland, NewYork, 1979.

[12] F. Bonomo, G. Duràn, F. Maffray, J. Marenco, M. Valencia-Pabon. On the b-coloring of cographs and P -sparse graphs. Graphs and Combinatorics 25 : 153 167, 2009.

[13] R. Brooks On coloring the nodes of a network Math Proc Cambridge Philos. Soc,37(1941)194-197.

[14] G. Chartrand and P. Zhang. Chromatic graph theoery. Discrete Mathematics and its Applications, Series Editor KENNETH H. ROSEN, CRC Press, 2009.

[15] V. Compos, C. Linhares, F. Maffray, A. Sliva. b-chromatic number of Cacti. Electronic Notes In Discrete Mathematics, 35 : 281-286, 2009.

[16] L. Dekar, H. Kheddouci. A Graph b-Coloring Based Method for Composition -Oriented Web services classification. A. An et al. (Eds.) : ISMIS, LNAI 4994, pp. 599 604, 2008.

[17] R. Diestel. Graph theory. Electronic Edition 2005, Springer-Verlag, NewYork 1997, 2000, 2005.

[18] B. Effantin, H. Kheddouci. A distributed algorithm for a b-coloring of a graph. In : Guo, M., Yang, L.T., Di Martino, B., Zima, H.P., Dongarra, J., Tang, F. (eds.) ISPA. LNCS, vol. 4330, pp. 430 438, 2006.

[19] H. Elghazel, V. Deslandres, M. S. Hacid, A. Dussauchoy, H. Kheddouci. A New Clus-tering Approach for Symbolic Data and Its Validation : Application to the Healthcare Data. F. Esposito et al. (Eds.) : ISMIS, LNAI 4203, pp. 473 482, 2006.

[20] A. El Sahili, M. Kouider. About b-colorings of regular graphs, Res. Rep.1432, LRI, Univ. Orsay, France, 2006.

[21] T. Faik. About the b-continuity of graphs, Elect. Notes in Discrete Mathematics 17 : 151 156, 2004.

[22] T. Faik. La b-continuité des b-colorations : complexité, propriétés structurelles et algorithmes. Thèse de Doctorat, Université Paris XI Orsay, 2005.

[23] D. Gaceb, V. Eglin, F. Lebourgeois, H. Emptoz. Graph b-coloring for automatic re- cognition of documents. Dans International Conference on Analysis and Recognition (2009) 261-265.

[24] F. Gavril, M. Yannakakis, Edge dominating sets in graphs, SIAM Journal of Applied Mathematics, 38(3)(1980), 364-372.

[25] T. Hamada, I. Yoshimura : Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. Discrete Math. 14 : 247-256 ; 1976.

[26] F. Harary, S. Hedetniemi and G. Prins. An Interpolation theorem for graphical homomorphisms, Port. Math. 26 : 453-462, 1967.

[27] C. T. Hoàng, M. Kouider. On the b-domining coloring of graphs. Discrete Appl. Math 152 : 176-186, 2005.

[28] C.T. Hoàng, F. Maffray, M. Mechebbek. A characterization of b-perfect graphs. CoRR, Vol. abs/1004.5306, 2010.

[29] C.T. Hoàng, F. Maffray, M. Mechebbek. A characterization of b-perfect graphs. Journal of Graph Theory 71 (2012) 95-122.

[30] F. Huges, G. MacGillivay. The achromatique of graphs : a survey and some new results. Bulletin of the Instute of Combinatorics and its Applications 19(1997)27-56.

[31] R. W. Irving, D .F. Manlove. The b-chromatic number of graphs. Discrete Appl. Math 91, 127-141, 1999.

[32] N.Ikhlef Eschouf, thèse de doctorat. Étude de la b-coloration dans les graphes, graphes extrémaux et graphes critiques, Blida, 2012.

[33] M. Jakovac, S. Klavzar. The b-chromatic Number of Cubic Graphs. Graphs and Combinatorics 26 : 107-118, 2010.

[34] M. Jakovac, I. Peterin. The b-chromatic number and related topics-a survey. Priprint.

[35] R. Javadi, B. Omoomi. On b-coloring of cartesian product of graphs. A paraître dans Ars Conbinatoria.

[36] T.R Jensen and B. Toft. Graph Coloring Problems. John Wiley et Sons, New York, 1994.

[37] J. Kara, J. Kratochvil, M. Voigt. b-continuity. Technical Report M 14/04, Technical University Ilmenau, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, 2004.

[38] M.Kouider, M. Mahéo. Some bounds for the b-chromatic number of a graph .Discrete Math.256 :267-277, 2002.

[39] M. Kouider, M.Zaker.Bounds for the b-chromatic number of some families of graphs Discrete mathematics, vol.306,no7, pp.617-623, 2006.

[40] J. Kratochvil, Z. Tuza, M. Voigt. On the b-chromatic number of graphs. Lecture Notes in Computer Science (Graph-Theoretic Concepts in Computer Science : 28th International Workshop, WG2002)2573, 310-320, 2002.

[41] D. F. Manalove. Minimaximal and maximinimale optimization problems : a partial order-based approach phD thesis, thechnical report tr-1998-27 of the computing Science Department of Glasgow University, 1998.

[42] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly, 63 : 175-177, 1956.

[43] A. Silva, Maffray. b-colouring outerplanar graphs with large girth. Soumis à Discrete Mathematics.