Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Recherche Opérationnelle

Par

OULD MOUSSA Amin et OULD MOUSSA Rachid

Thème

LA DOMINATION ROMAINE DANS LES GRAPHES ORIENTÉS

Composition du Jury:

Mr.	Mohamed. BOUZEFRANE	M.A.A	UYF Médéa	Président
Mr.	Mohamed. ZAMIME	M.C.B	UYF Médéa	Examinateur
Mr.	Lyes. OULDRABAH	M.C.A	UYF Médéa	Promoteur

Date de soutenance: *21/06/2022*

Résumé

Pour un digraphe $D = (V, A)$, une fonction de domination romaine est une fonction $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ ayant la propriété que si $f(v) = 0$,est un successeur de certains sommets v pour lequel $f(v) = 2$. Le poids de f est la somme $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$, et le poids minimum de f sur D est le nombre de domination romaine de D, noté par $\gamma_R(D)$. Le présent mémoire traite du problème de domination romaine dans les digraphes. Dans ce mémoire, nous donnons des bornes supérieures pour le nombre de domination romaine $\gamma_R(D)$ pour quelques classes spéciales de produits cartésiens à savoir, les grilles, les prismes et les grilles toriques.

Abstract

Let $D = (V, A)$ be a digraph. A Roman dominating function of a digraph D is a function $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ such that every vertex u for which $f(u) = 0$ has an in-neighbor v for which $f(v) = 2$. The weight of a Roman dominating function is the value $\sum_{v \in V} f(v)$. The minimum weight of a Roman dominating function of a digraph D is called the Roman domination number of D, denoted by $\gamma_R(D)$. The study of this thesis is about the Roman domination. In this thesis, we present some upper bounds on $\gamma_R(D)$ for special classes of product cartesian, as grids, prisms and the toric grids.

Remerciements

Nous tenons, avant tout, à remercier chaleureusement notre promoteur Monsieur **Lyes OULDRABAH**, Maître de conférences à l'université YAHIA FARES de Médèa, pour avoir accepté d'encadrer notre mémoire. Ainsi de nous avoir orientés, aidés et conseillés.

Nous remercions également Monsieur **Mohamed.BOUZEFRANE** , Maître de Conférences à l'université Dr. YAHIA FARES de Médèa, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Nous remercions également Monsieurs **Zamime MOHAMED** , Maître de Conférences à l'université YAHIA FARES de Médèa pour avoir accepté d'être examinateur.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude à l'ensemble des enseignants du département M.I de l'université Dr. YAHIA FARES de Médèa.

Enfin, il est important pour nous de remercier les parents, d'avoir fait de leur mieux pour que nous puissions accomplir ce mémoire dans les meilleures conditions possibles et qui n'ont jamais cessé de nous encourager.

Nous remercions nos frères, sans oublier nos chers amis qui étaient toujours présents.

Table des matières

Résumé i

Abstrait ii

Remerciements iii

Introduction 1

1 NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES GRAPHES 3

1.1 Définitions et notations utilisées dans les digraphes . . . 3

1.1.1 Digraphe, sommet, arc . . . 3

1.1.2 Digraphe symétrique, digraphe asymétrique . . . 4

1.1.3 Graphe orienté, tournoi . . . 5

1.1.4 Sous-digraphe . . . 5

1.1.5 Digraphe partiel . . . 5

1.1.6 Voisinage . . . 5

1.1.7 Degré . . . 6

1.1.8 Graphe sous-jacent (ou graphe associé) . . . 7

1.1.9 Digraphe connexe . . . 8

1.1.10 Complément d'un digraphe . . . 9

1.1.11 Digraphe vide, digraphe complet . . . 9

1.1.12 Digraphe k-int-régulier, digraphe k-ext-régulier . . . 10

1.1.13 Chaîne orientée, cycle orienté . . . 10

1.1.14 Chemin, circuit 11
1.1.15 Arbre orienté 11
1.1.16 Digraphe biparti, digraphe complet biparti 11
1.1.17 Étoile orientée 12
1.1.18 Produit cartésien de deux digraphes, (la grille, la grille torique, le prisme) 12

2 DES RÉSULTATS EXISTANTS SUR LA DOMINATION ROMAINE 15

2.1 Introduction 15
2.2 Les fonctions de domination 15
2.2.1 Quelques résultats existants sur la domination dans les digraphes . . 17
2.3 Les fonctions de domination romaines 18
2.3.1 Quelques résultats existants sur la domination romaine dans les digraphes 18

3 LA DOMINATION ROMAINE DANS LES GRAPHES ORIENTÉS 22

3.1 Introduction 22
3.2 Valeurs exactes de $\gamma_R(\overrightarrow{P_n})$ et $\gamma_R(\overrightarrow{C_n})$ 22
3.3 Valeur exacte de $\gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2})$ 23
3.4 Borne supérieure pour $\gamma_R(D)$ 29
3.4.1 Pour les grilles $D = \overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m}$ 29
3.4.2 Valeur exacte de $\gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3})$ 33
3.4.3 Pour les prismes $D = \overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}$ 38
3.4.4 Pour les grilles toriques $D = \overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_m}$ 44

Conclusion et Perspectives 50

BIBLIOGRAPHY 51

Liste des Figures

1.1.1 Un digraphe simple D d'ordre $n = 8$ et de taille $m = 12$. 4
1.1.2 D' est un sous-digraphe induit par $X' = \{a, b, c\}$ 5
1.1.3 H est un digraphe partiel de D. 6
1.1.4 $d_D^+(x) = \mid N_D^+(x) \mid = 5$ et $d_D^-(x) = \mid N_D^-(x) \mid = 3$. 7
1.1.5 Le graphe G associé au digraphe D. 8
1.1.6 D connexe, H non connexe avec deux composantes connexes. 8
1.1.7 (a) Un digraphe D et (b) son complémentaire $\overline{D}$. 9
1.1.8 (1) Un digraphe complet $(\overrightarrow{K_4})$ et (2) le digraphe vide $(\overrightarrow{\overline{K_4}})$. 9
1.1.9 Un digraphe 2-int-régulier d'ordre 6. 10
1.1.10 (1) Un cycle orienté C_6 et (2) une chaine orientée P_5. 10
1.1.11 C_8 Un circuit et P_4 une chemin. 11
1.1.12 Un arbre $\overrightarrow{T} = (V, A)$. 11
1.1.13 (1) Digraphe complet biparti, (2) digraphe biparti. 12
1.1.14 Une étoile orientée $\overrightarrow{K_{1,6}}$ d'ordre 7. 12
1.1.15 $D = \overrightarrow{P_{10}} \square \overrightarrow{P_2}$. 13
1.1.16 $D_1 = \overrightarrow{P_5} \square \overrightarrow{C_3}$ et $D_2 = \overrightarrow{P_6} \square \overrightarrow{C_3}$. 13
1.1.17 $D_1 = \overrightarrow{C_5} \square \overrightarrow{C_3}$ et $D_2 = \overrightarrow{C_6} \square \overrightarrow{C_3}$. 14

2.2.1 $S = \{a, c\}$ un $\gamma(D)$-ensemble avec $\gamma(D)$=2. 16
2.2.2 Un digraphe D avec $\gamma(D) = \mid V_1 \mid = 2$. 16
2.2.3 Un digraphe D d'ordre 5 avec $\gamma(D) = 2$. 17
2.3.1 Un digraphe D avec $\gamma_R(D) = 5$. 18
2.3.2 Un digraphe D d'ordre $n = 4$ avec $\gamma_R = 3$. 19

2.3.3 Un digraphe D d'ordre $n = 4$ avec $\gamma_R = 3$. 19
2.3.4 Un arbre orienté T d'ordre $n = 8$ avec $\gamma_R(D) = 8$. 20
2.3.5 D est son complémentaire $\overline{D}$ avec $(\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D})) = 2 + 3 = 5 < n + 3 = 7$. 21

3.3.1 La grille $D = \overrightarrow{P_{10}} \square \overrightarrow{P_2}$ avec $\gamma_R = 15$. 23
3.3.2 La grille $D = \overrightarrow{P_{11}} \square \overrightarrow{P_2}$ avec $\gamma_R = 17$. 24
3.3.3 La grille $D = \overrightarrow{P_8} \square \overrightarrow{P_2}$ avec $\gamma_R = 12$. 25
3.3.4 La grille $D = \overrightarrow{P_n} \square \overrightarrow{P_2}$. 25
3.3.5 La grille $D = \overrightarrow{P_n} \square \overrightarrow{P_2}$. 26
3.3.6 La grille $D = \overrightarrow{P_n} \square \overrightarrow{P_2}$. 26
3.3.7 La grille $D = \overrightarrow{P_n} \square \overrightarrow{P_2}$. 27
3.3.8 La grille $D = \overrightarrow{P_n} \square \overrightarrow{P_2}$. 27
3.3.9 La grille $D = \overrightarrow{P_n} \square \overrightarrow{P_2}$. 28
3.3.10 La grille $D = \overrightarrow{P_n} \square \overrightarrow{P_2}$. 28
3.4.1 La grille $D_1 = \overrightarrow{P_4} \square \overrightarrow{P_3}$ et $D_2 = \overrightarrow{P_6} \square \overrightarrow{P_3}$. 33

Introduction

Historiquement, l'étude de la domination dans les graphes a été posé par Jaenisch [11] en 1862. Le problème est de trouver le nombre minimum des reines qui peuvent être placées sur un échiquier de sorte que chaque carré de l'échiquier est attaqué ou "dominé" par au moins l'une des reines. D'autres applications de la domination dans la théorie des graphes sont utilisées dans le domaine de la communication et la théorie des réseaux ainsi que le théorie du codage. De ce fait, l'étude de la domination dans les graphes a reçu beaucoup d'attention ces dernières années. La théorie de la domination dans les graphes a été formellement introduite par Berge [16] en 1958.

En 1962, Ore [12] a été le premier à publier sur la domination dans les graphes et donna l'appellation actuelle du nombre de domination. La domination a connu sa véritable expansion après les travaux de Cockayne et Hedetniemi en 1977 [13]. Les deux livres de Haynes, et Hedetniemi Slater [[14], [15]] témoignent de la pertinence et de l'intérêt accru de ce sujet dans les dernières années. En 1984, lors d'une conférence à Kalamazoo (USA), Fink et Jacobson [17] ont introduit la k-domination dans les graphes qui est une généralisation de la domination dans les graphes. En 1994, Lee [5] a introduit dans sa thèse de doctorat le concept de domination dans les digraphes, c'est une généralisation du concept de domination dans les graphes où chaque graphe ici est considéré comme étant un graphe associé (graphe sans orientations) à un digraphe symétrique. En 1998; Ghoshal, Lasker et Pillone, ont donné dans [1] quelques relations entre les paramètres de dominations et les invariants dans les digraphes. En 2002, Merz et D.J. Stewart [7] considèrent des relations de type Gallai. La notion de domination a gagné une grande popularité entre les chercheurs. Des résultats plus récents peuvent être trouvés dans [[14], [15]]. Le coté pratique et appliqué de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres et nouveaux paramètres de

domination. En effet, beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose à la domination une condition supplémentaire dans le graphe considéré. L'idée générale de la domination est de trouver dans un graphe G un sous ensemble S de V (appelé dominant) tel que tout sommet extérieur au sous ensembles S a au moins un voisin dans S. En 2004, Cokayne , Dreyer, S.M Hedetniemi, et S.T Hedetniemi ont introduit une nouvelle variante de la domination dans les graphes non orientés, appelée fonction de domination Romaine. En 2011, Kamaraj et Jakkammal ont généralisé la définition de la fonction dominante romaine pour les digraphes, et certains résultats ont été donnés dans leur article notamment la borne supérieure pour $\gamma_R(D)$ à savoir $\gamma_R(D) \leq n - \triangle^+(D) + 1$.

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés par cette nouvelle variante de domination, la domination romaine dans les digraphes. Le présent document est organisé comme suit :

Chapitre 1 : Définitions de base et Notations

Dans ce chapitre, on rappelle toutes les définitions de base sur les digraphes nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre lui même.

Chapitre 2 : État de l'art

Dans ce chapitre, on aborde le thème de domination et la domination romaine dans les digraphes. On donne ainsi un recueil des principaux résultats existants.

Chapitre 3 : Dans ce dernier chapitre, on étudie un autre type de domination, c'est la domination romaine dans les digraphes, nous donnons des bornes supérieures pour $\gamma_R(D)$ pour quelques classes spéciales de produits cartesian à savoir, les grilles, les prismes et les grilles torique. Enfin on termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives pour les travaux futurs dans ce domaine de recherche.

Chapitre 1

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES GRAPHES

Dans ce chapitre, on rappelle toutes les définitions de base sur les digraphes nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre lui même.

1.1 Définitions et notations utilisées dans les digraphes

1.1.1 Digraphe, sommet, arc

Un digraphe $D = (V(D), A(D))$ est défini par l'ensemble fini non vide $V(D)$ (ou V) dont les éléments sont appelés sommets, et une partie $A(D)$ (ou A) des paires ordonnées $V \times V$ dont les éléments sont appelés arcs (ou arêtes orientées). L'ordre de D, notée par $n(D)$ (ou n) est la cardinalité de $V(D)$, $n(D) =\mid V(D) \mid$ et la taille de D noté par $m(D)$ (ou m) est la cardinalité de $A(D)$, $m(D) =\mid A(D) \mid$.
Nous utilisons les notations suivantes. Étant donné un digraphe $D = (V(D), A(D))$, considérons deux sommets distincts, disant x et y de D :

• $x \longrightarrow y$ signifie que $(x, y) \in A(D)$,

• $x \longleftrightarrow y$ signifie que $(x, y) \in A(D)$ et $(y, x) \in A(D)$ et l'arc (x, y) est appelé arc symétrique et asymétrique,

- si $(x, y) \in A(D)$ et $(x, y) \notin A(D)$, alors, l'arc (x, y) est appelé arc asymétrique
- $x \longrightarrow x$ signifie que $(x, x) \in A(D)$ et l'arc $a = (x, x)$ est appelé boucle.

De plus, si $a = (x, y)$ est un arc de D, alors x et y sont appelés les "extrémités" de a. Ainsi,

- x est l'extrémité initiale de a,
- y est l'extrémité terminale de a,
- x est le prédécesseur de y,
- y est le successeur de a,
- x et y sont reliés par a (ils sont adjacent).

Ainsi, deux arcs distincts $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_2)$ sont appelés arcs multiples si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$ (ont les mêmes extrémités initiales et finales). Un digraphe $D = (V, A)$ est dit digraphe simple s'il ne contient ni boucles ni arcs multiples. Tout au long de ce document, seuls les digraphes finis et simples sont pris en compte.

Exemple 1.1.1 *Un digraphe simple D d'ordre $n = 8$ et de taille $m = 12$ représenté par la Figure 1.1.1.*

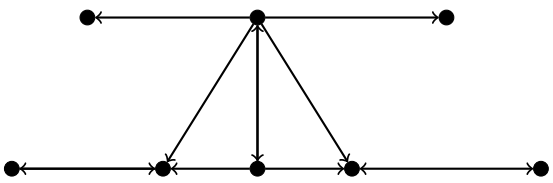


Figure 1.1.1 : Un digraphe simple D d'ordre $n = 8$ et de taille $m = 12$.

1.1.2 Digraphe symétrique, digraphe asymétrique

Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Alors D est appelé digraphe symétrique si tous ses arcs sont symétriques i.e., $\forall x, y \in V : (x, y) \in A \Longrightarrow (y, x) \in A$, et est appelé digraphe asymétrique si tous ses arcs sont asymétriques i.e., $\forall x, y \in V : (x, y) \in A \Longrightarrow (y, x) \notin A$.

1.1.3 Graphe orienté, tournoi

Un graphe orienté est un digraphe asymétrique. Un tournoi $T_n = (V, A)$ et un graphe orienté complet, i.e., est un digraphe tel que pour toute paire de sommets x, $y \in V$, on a $(x, y) \in A$ si et seulement si $(y, x) \notin A$.

1.1.4 Sous-digraphe

Soit $D = (V, A)$ un digraphe simple. A chaque partie non vide $X \subseteq V$ est associé le sous-digraphe $D[X] = (X, (X \times X) \cap A)$ de D induit par X (voir la Figure 1.1.2).



$D = (V, A)$ $\qquad$ $D' = (V', A')$

Figure 1.1.2 : D' est un sous-digraphe induit par $X' = \{a, b, c\}$.

1.1.5 Digraphe partiel

Soit $D = (V, A)$ un digraphe simple. Si $X = V$ et $A' \subseteq A$, alors le digraphe $H = (V, A')$ est appelé digraphe partiel du digraphe D.

Exemple 1.1.2 *un digraphe D et son digraphe partiel est représenté par la Figure 1.1.3. ou $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ et $A' = \{a_1, a_3, a_5\}$*

1.1.6 Voisinage

Soit $D = (V, A)$ un digraphe et x un sommet de D et $S \subseteq V$. On désigne $N_D^+(x)$ (respectivement, $N_D^-(v)$) l'ensemble des successeurs ou voisinage extérieur (respectivement, l'ensemble des prédécesseurs ou voisinage intérieur) du sommet x, c'est-à-dire $N_D^+(v) =$



$D = (V, A)$ $H = (V, A')$

Figure 1.1.3 : H est un digraphe partiel de D.

$\{y \in V - \{x\} : x \longrightarrow y\}$ (respectivement, $N_D^-(x) = \{y \in V - \{x\} : y \longrightarrow x\}$). Le voisinage extérieur (respectivement, intérieur) fermé du sommet x est l'ensemble, $N_D^+[x] = N_D^+(x) \cup \{x\}$ (respectivement, $N_D^-[x] = N_D^-(x) \cup \{x\}$). Le voisinage extérieur (respectivement, intérieur) de S est l'ensemble, $N_D^+(S) = \cup_{s \in S} N_D^+(s)$ (respectivement, $N_D^-(S) = \cup_{s \in S} N_D^-(s)$), de même $N_D^+[S] = \cup_{s \in S} N_D^+[s]$ et $N_D^-[S] = \cup_{s \in S} N_D^-[s]$. L'ensemble des voisins de x, est l'ensemble, $N_D(x) = N_D^+(x) \cup N_D^-(x)$. Le voisinage fermé de x est l'ensemble, $N_D[x] = N_D(x) \cup \{x\}$. L'ensemble des prédécesseurs (respectivement, successeurs) de x dans $D[S]$, est l'ensemble, $N_{D[S]}^-(x) = N_D^-(x) \cap S$ (respectivement, $N_{D[S]}^+(x) = N_D^+(x) \cap S$).

1.1.7 Degré

Le demi-degré extérieur de x noté par $d_D^+(x)$, est le nombre d'arcs sortant de x, et on écrit $d_D^+(x) =\mid N_D^+(v) \mid$. Le demi-degré intérieur de x noté par $d_D^-(x)$, est le nombre d'arcs entrant dans x, et on écrit $d_D^-(v) =\mid N_D^-(v) \mid$.
On notera par $\Delta^+(D) = max\{d_D^+(v) : v \in V\}$ et $\Delta^-(D) = max\{d_D^-(v) : v \in V\}$ respectivement, le degré maximum extérieur et intérieur dans D. De même on notera par $\delta^+(D) = min\{d_D^+(v) : v \in V\}$ et $\delta^-(D) = min\{d_D^-(v) : v \in V\}$, respectivement, le degré minimum extérieur et intérieur dans D.

Exemple 1.1.3 *La Figure 1.1.4 . représente un sommet x avec ses voisins $N_D^-(x)$ et $N_D^+(x)$.*

On a $\mid N_D(x) \mid = \mid N_D^+(x) \mid + \mid N_D^-(x) \mid$ - $\mid N_D^+(x) \cap N_D^-(x) \mid$, le degré total $d_D(x)$ du sommet x est défini par $d_D(x) = d_D^+(x) + d_D^-(x) \geq \mid N_D(x) \mid$. Si D est un graphe orienté alors, $d_D(x) = \mid N_D(x) \mid$. Ainsi, un sommet x de D est isolé lorsque $d_D(x)$=0. Comme

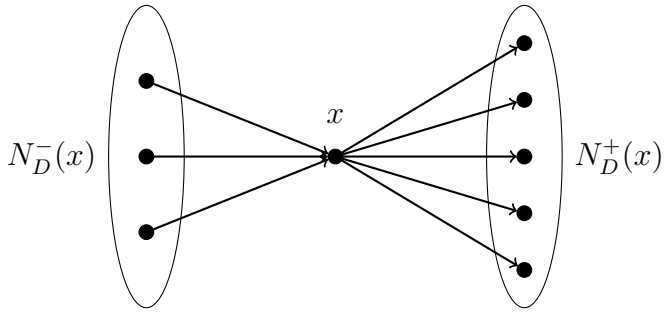


Figure 1.1.4 : $d_D^+(x) = \mid N_D^+(x) \mid = 5$ et $d_D^-(x) = \mid N_D^-(x) \mid = 3$.

chaque arc a exactement un sommet d'arrivée (respectivement, un sommet de départ) on a $\mid A \mid = \sum_{x \in V} d_D^+(x)$, (respectivement, $\mid A \mid = \sum_{x \in V} d_D^-(x)$). On obtient donc les deux identités :

$\sum_{x \in V} d_D^+(x) = \sum_{x \in V} d_D^-(x)$ et $\sum_{x \in V} d_D(x) = 2 \mid A \mid$.

1.1.8 Graphe sous-jacent (ou graphe associé)

Étant donné un digraphe simple $D = (V, A)$. Si on supprime l'orientation de ses arcs, on obtient un graphe non orienté $G = (V, E)$ telle que une arête $e = xy \in E$ reliant deux sommets x et y existe dans G si les deux sommets x et y sont adjacents dans D, i.e., au moins $(x, y) \in A$ ou (y, x) existe dans D (la disjonction "ou" n'est pas exclusive ici). De même un digraphe D peut être obtenu à partir d'un graphe simple G en assignant une direction (éventuellement les deux) à chaque arête de G. Nous disons que G est le graphe sous-jacent ou associé (Underlying graph en anglais) de D et que D est une orientation de G.

Remarque 1.1.1 *Le graphe G représenté par la Figure 1.1.5 est le graphe associé au digraphe D. Comme le graphe G de cet exemple a 4 arêtes et chacune d'elles peut avoir 3 orientations possibles, alors le graphe G a 3^4 orientations possibles et D est l'une de ses orientations.*

Remarque 1.1.2 *Un graphe (non orienté) $G = (V, E)$ est considéré comme étant un graphe associé à un digraphe symétrique $D = (V, A)$ où toute arête de G est remplacée par un arc symétrique, on peut constater que tous les résultats de recherche obtenus sur les*



$D = (V, A)$ $G = (V, E)$

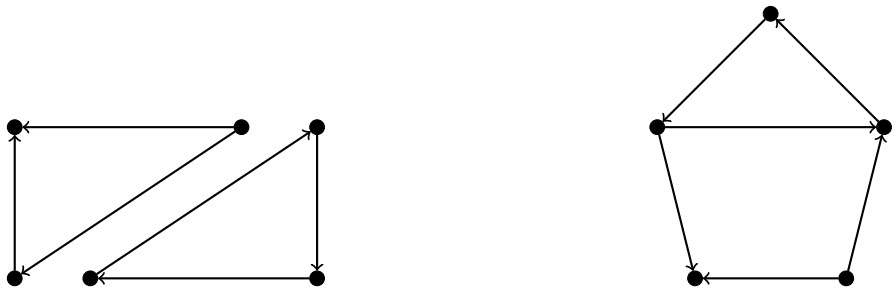
Figure 1.1.5 : Le graphe G associé au digraphe D.

graphes (non orientés) G sont également considérés comme des résultats particuliers pour les digraphes et par conséquent on peut déduire que la notion de digraphes est plus générale que la notion de graphes (non orientés).

1.1.9 Digraphe connexe

Soit $D = (V, A)$ un digraphe, on dit qui D est connexe, si pour tout paire de sommets x, y de V, il existe une chaîne reliante x à y ou y à x.

Exemple 1.1.4 *le digraphe D est connexe puisqu'il contient une seule composante connexe, et le digraphe H est non connexe car il contient deux composantes connexes, dans la Figure 1.1.6*



(H) (D)

Figure 1.1.6 : D connexe, H non connexe avec deux composantes connexes.

1.1.10 Complément d'un digraphe

Le digraphe complémentaire d'un digraphe simple $D = (V, A)$ est digraphe simple noté par $\overline{D} = (V, \overline{A})$ et tel que : $(u, v) \in \overline{A}$ si et seulement si $(u, v) \notin A$, $\forall u, v \in V$.

Exemple 1.1.5 *Un digraphe D et $\overline{D}$ son complémentaire par la Figure 1.1.7*



(a) (b)

Figure 1.1.7 : (a) Un digraphe D et (b) son complémentaire $\overline{D}$.

1.1.11 Digraphe vide, digraphe complet

Étant donné un digraphe $D = (V, A)$. Si $\Delta^+(D) = 0$ alors D est le digraphe vide. Tandis que si pour toute paire de sommets, disant, x et y de V avec $x \neq y$, $A \cap \{(x, y), (y, x)\} \neq \emptyset$ alors D est dit digraphe complet d'ordre n noté par $\overrightarrow{K_n}$, (voir la Figure 1.1.8).



(1) (2)

Figure 1.1.8 : (1) Un digraphe complet ($\overrightarrow{K_4}$) et (2) le digraphe vide ($\overrightarrow{\overrightarrow{K_4}}$).

1.1.12 Digraphe k-int-régulier, digraphe k-ext-régulier

Soit $k \in N^*$ et $D = (V, A)$. Si pour tout sommet $v \in V$, $d_D^-(v) = k$ (resp.,$d_D^+(v) = k$ alors D est appelé digraphe k-int-régulier (resp, k-ext-régulier).

Exemple 1.1.6 *Un digraphe* 2*-int-régulier d'ordre* 6 *par la Figure 1.1.9 .*

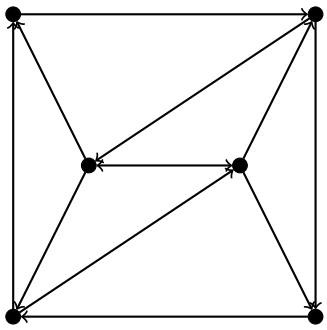


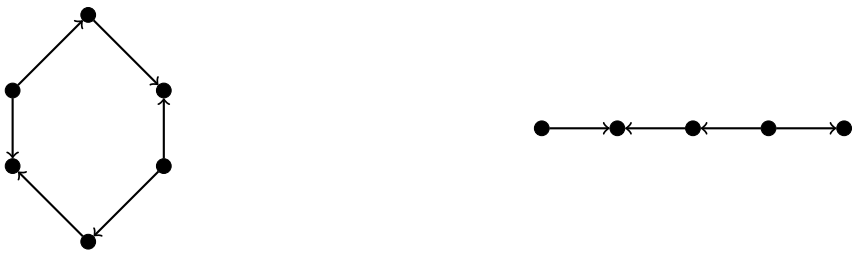
Figure 1.1.9 : Un digraphe 2-int-régulier d'ordre 6.

1.1.13 Chaîne orientée, cycle orienté

• Une chaîne orientée $P_n = (V, A)$ est une suite de sommets distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que pour tout $1 \leq i \leq n-1$, $\{(x_i, x_{i+1}), (x_{i+1}, x_i)\} \cap A \neq \emptyset$.

• Un cycle orienté C_n est une chaîne orientée fermée $C_n = P_n \cup \{(x_1, x_n), (x_n, x_1)\}$.

Exemple 1.1.7 *(1) Un cycle orienté* C_6 *et (2) une chaine orientée* P_5 *par la Figure 1.1.10 .*



(1) (2)

Figure 1.1.10 : (1) Un cycle orienté C_6 et (2) une chaine orientée P_5.

1.1.14 Chemin, circuit

• Un chemin $\overrightarrow{P_n} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ d'ordre n, est une suite de sommets reliés par des arcs consécutifs, i.e.,$(x_i, x_{i+1}) \in A(\overrightarrow{P_n})$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$.
• Un circuit $\overrightarrow{C_n} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_1)$ d'ordre n, est un chemin fermé ($\overrightarrow{C_n} = \overrightarrow{P_n} \cup (x_n, x_1)$).

Exemple 1.1.8 *(1) Un circuit d'ordre $n = 8$ et (2) une chemin d'ordre $n = 4$ par la Figure 1.1.11 .*

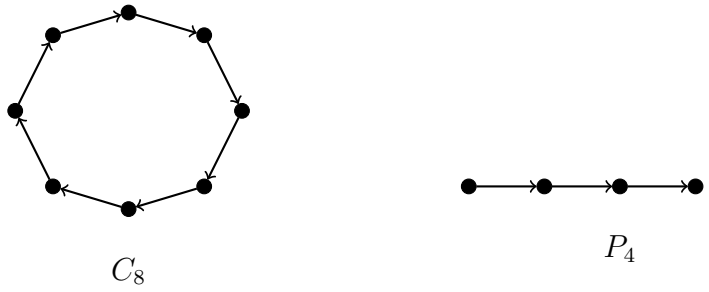


Figure 1.1.11 : C_8 Un circuit et P_4 une chemin.

1.1.15 Arbre orienté

Un arbre orienté $\overrightarrow{T} = (V, A)$ (Directed tree en anglaire) est un graphe orienté connexe sans cycle orienté. Il contient exactement $(n-1)$ arcs, (voir la Figure 1.1.12).

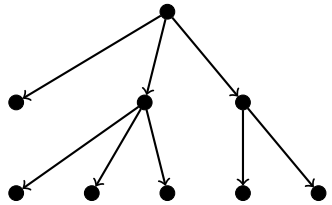
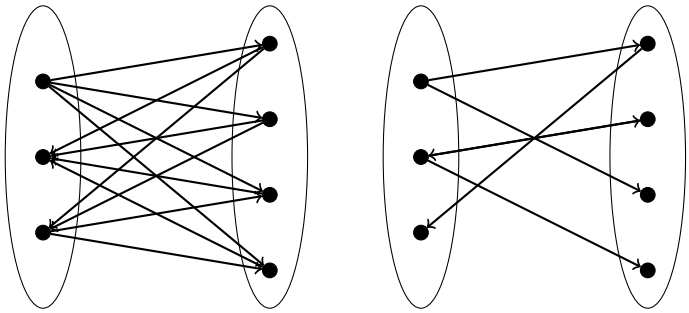


Figure 1.1.12 : Un arbre $\overrightarrow{T} = (V, A)$.

1.1.16 Digraphe biparti, digraphe complet biparti

Soit $D = (V, A)$ un digraphe et S un sous-ensemble de V. S est dit stable (ou indépendant) si ses sommets ne sont pas deux à deux adjacents. D est dit biparti s'il existe une partition de V en deux sous-ensembles stables, (voir la Figure 1.1.13). Une digraphe

biparti complet d'ordre $n = p + q$, notée $\overrightarrow{K_{p,q}}$, est un digraphe dont son graphe associé est le graphe biparti complet $K_{p,q}$.



(1) (2)

Figure 1.1.13 : (1) Digraphe complet biparti, (2) digraphe biparti.

1.1.17 Étoile orientée

Une étoile orientée d'ordre n, notée $\overrightarrow{K_{1,n-1}}$, est un digraphe dont son graphe associé est l'étoile $K_{1,n-1}$. Dans la Figure 1.1.14 , voici un exemple d'une étoile orientée particulière d'ordre $n = 7$, $\overrightarrow{K_{1,6}}$).

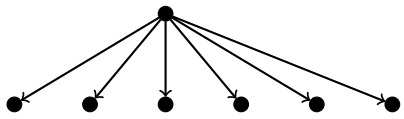


Figure 1.1.14 : Une étoile orientée $\overrightarrow{K_{1,6}}$ d'ordre 7.

1.1.18 Produit cartésien de deux digraphes, (la grille, la grille torique, le prisme)

Soient deux digraphes $D_1(V_1, A_1)$ et $D_2(V_2, A_2)$. Le produit cartésien $D = D_1 \square D_2$ est un digraphe avec l'ensemble de sommets $V(D) = V(D_1) \times V(D_2)$ et $((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \in A(D_1 \square D_2)$ si et seulement si $u_1 = v_1$ et $(u_2, v_2) \in A(D_2)$ ou $u_2 = v_2$ et $(u_1, v_1) \in A(D_1)$.

• La grille $M(n, m) = (\overrightarrow{P}_n \square \overrightarrow{P}_m)$ est obtenue par le produit cartésien de deux chemins $\overrightarrow{P}_n$ et $\overrightarrow{P}_m$

Exemple 1.1.9 *La grille* $D = \overrightarrow{P_{10}}\Box\overrightarrow{P_2}$ *représenté par la Figure 1.1.15 .*

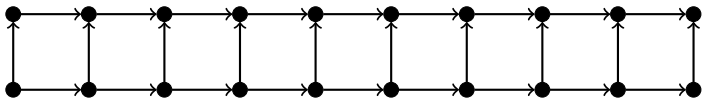
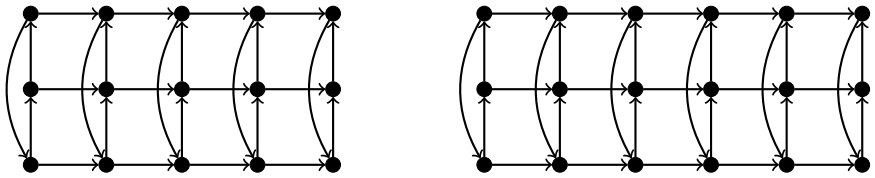


Figure 1.1.15 : $D = \overrightarrow{P_{10}}\Box\overrightarrow{P_2}$.

• Le prisme $Y(n,m) = (\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{C}_m)$ est obtenue par le produit cartésien entre un chemin $\overrightarrow{P}$ et un circuit $\overrightarrow{C}_m$.

Exemple 1.1.10 *Le prisme* $D_1 = \overrightarrow{P_5}\Box\overrightarrow{C_3}$ *et* $D_2 = \overrightarrow{P_6}\Box\overrightarrow{C_3}$ *représenté par la Figure 1.1.16)*

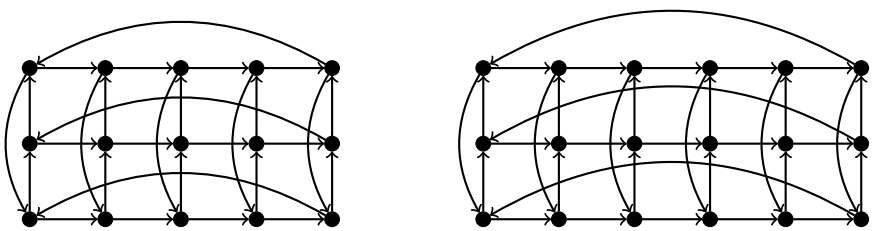


D_1 D_2

Figure 1.1.16 : $D_1 = \overrightarrow{P_5}\Box\overrightarrow{C_3}$ et $D_2 = \overrightarrow{P_6}\Box\overrightarrow{C_3}$.

• La grille torique $MT(n,m) = (\overrightarrow{C}_n\Box\overrightarrow{C}_m)$ est obtenue par le produit cartésien de deux circuits $\overrightarrow{C}_n$ et $\overrightarrow{C}_m$.

Exemple 1.1.11 *La grille torique* $D_1 = \overrightarrow{C_5}\Box\overrightarrow{C_3}$ *et* $D_2 = \overrightarrow{C_6}\Box\overrightarrow{C_3}$ *représenté par la Figure 1.1.17 .*



D_1 D_2

Figure 1.1.17 : $D_1 = \overrightarrow{C_5} \square \overrightarrow{C_3}$ et $D_2 = \overrightarrow{C_6} \square \overrightarrow{C_3}$.

Chapitre 2

DES RÉSULTATS EXISTANTS SUR LA DOMINATION ROMAINE

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on aborde le thème de domination et la domination romaine dans les digraphes. On donne ainsi un recueil des principaux résultats existants.

2.2 Les fonctions de domination

Définition 2.2.1 [5] *Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est appelé dominant dans D, s'il existe pour chaque sommet $v \in V - S$ un sommet $u \in S$ pour lequel $(u, v) \in A$. La cardinalité minimale d'un ensemble dominant dans D s'appelle le nombre de domination de D, noté $\gamma(D)$. Un $\gamma(D)$-ensemble est un ensemble dominant de D de cardinalité $\gamma(D)$.*

Exemple 2.2.1 *Pour le digraphe D représenté par la Figure 2.2.1, l'ensemble $S = \{a, c\}$ et un $\gamma(D)$-ensemble .*

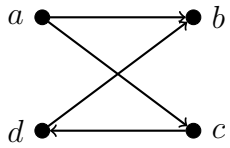


Figure 2.2.1 : $S = \{a, c\}$ un $\gamma(D)$-ensemble avec $\gamma(D)$=2.

Définition 2.2.2 *Une fonction de domination(FD) sur un digraphe $D = (V, A)$ est une fonction $f : V \to \{0, 1\}$ telle que chaque sommet u pour lequel $f(u) = 0$ est un successeur de certains sommets v pour lequel $f(v) = 1$. Le poids d'une fonction dominante est la valeur $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. Le poids minimum d'une fonction de domination sur un digraphe D est appelé le nombre de domination de D, noté $\gamma_(D)$. Soit (V_0, V_1) la partition ordonnée de V induite par f, où $V_i = \{v \in V : f(v) = i$, pour $i = 0, 1$. Notons qu'il existe une correspondance 1-1 entre la fonction $f : V \to \{0, 1\}$ et la partition ordonnée (V_0, V_1) de V. Ainsi, nous allons écrire $f = (V_0, V_1)$. Le poids de f est*

$$f(V) = \sum_{v \in V} f(v) =\mid V_1 \mid$$

et on dit qu'une fonction $f = (V_0, V_1)$ est une γ -fonction s'il s'agit d'une FD avec $f(V) = \gamma(D)$.

Exemple 2.2.2 *Pour le digraphe D représenté par la Figure 2.2.2.*

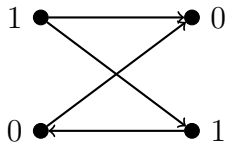


Figure 2.2.2 : Un digraphe D avec $\gamma(D) =\mid V_1 \mid= 2$.

2.2.1 Quelques résultats existants sur la domination dans les digraphes

Nous citons quelques bornes et formules de Gallai-type en fonction de quelques invariants dans les digraphes.

Théorème 2.2.1 [6] *Pour tout digraphe D avec n sommets, on a:*

$$\frac{n}{1+\Delta^+(D)} \leq \gamma(D) \leq n - \Delta^+(D).$$

Exemple 2.2.3 *Un digraphe D d'ordre 5 avec $\Delta^+ = 3$*

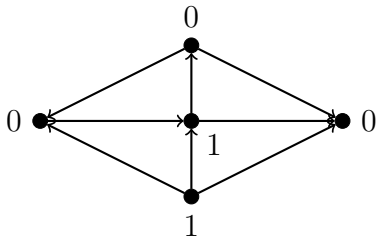


Figure 2.2.3 : Un digraphe D d'ordre 5 avec $\gamma(D) = 2$.

En 1994, Lee *[5]* a établi, dans la classe de digraphes fortement connexes, une borne supérieure pour le nombre de domination orienté $\gamma(D)$.

Théorème 2.2.2 [5] *Pour un digraphe D fortement connexe avec n sommets, on a:*

$$\gamma(D) \leq \lceil \tfrac{n}{2} \rceil.$$

En 2002, Merz et Stewart*[7]* ont établi des bornes supérieures pour le paramètre $\gamma(D)$, à savoir $\gamma(D)+\Delta^+(D) \leq n$, ils ont donné aussi les classes des graphes orientés pour lesquelles la formule de Gallai-type $\gamma(D) + \Delta^+(D) = n$ est vérifiée.

Théorème 2.2.3 [7] *Si D est un digraphe avec n sommets, alors*

$$\gamma(D) + \Delta^+(D) \leq n.$$

2.3 Les fonctions de domination romaines

Définition 2.3.1 [4] *Une fonction de domination romaine (FDR) sur un digraphe* $D = (V, A)$ *est une fonction* $f : V \to \{0, 1, 2\}$ *telle que chaque sommet* u *pour lequel* $f(u) = 0$ *est un successeur de certains sommets* v *pour lequel* $f(v) = 2$. *Le poids d'une fonction dominante romaine est la valeur* $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. *Le poids minimum d'une fonction de domination romaine sur un digraphe* D *est appelé le nombre de domination romaine de* D, *noté* $\gamma_R(D)$. *Soit* (V_0, V_1, V_2) *la partition ordonnée de* V *induite par* f, *où* $V_i = \{v \in V : f(v) = i$, *pour* $i = 0, 1, 2$. *Notons qu'il existe une correspondance 1-1 entre la fonction* $f : V \to \{0, 1, 2\}$ *et la partition ordonnée* (V_0, V_1, V_2) *de* V. *Ainsi, nous allons écrire* $f = (V_0, V_1, V_2)$. *Le poids de* f *est*

$$f(V) = \sum_{v \in V} f(v) = \mid V_1 \mid +2 \mid V_2 \mid$$

et on dit qu'une fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ *est une* γ_R *-fonction s'il s'agit d'une FDR avec* $f(V) = \gamma_R(D)$.

Exemple 2.3.1 *La fonction de domination romaine* $f : V \to \{0, 1, 2\}$ *donnée par la Figure 2.3.1 est de poids* 4.

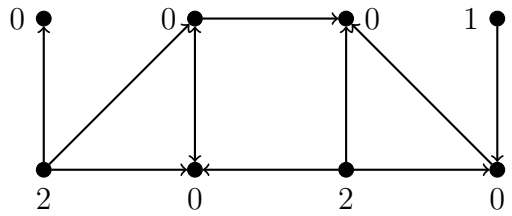


Figure 2.3.1 : Un digraphe D avec $\gamma_R(D) = 5$.

2.3.1 Quelques résultats existants sur la domination romaine dans les digra

Les résultats suivants sont dûs à Kamaraj et Jakkammal *[4]*.

Proposition 2.3.1 [4] *Si* D *est un digraphe d'ordre* n, *avec ext-degré maximum* $\Delta^+(D)$, *alors* $\gamma_R(D) \leq n - \Delta^+(D) + 1$.

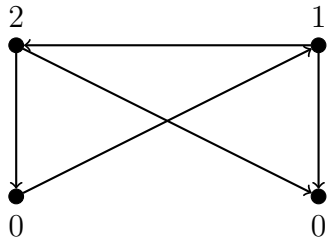


Figure 2.3.2 : Un digraphe D d'ordre $n = 4$ avec $\gamma_R = 3$.

Exemple 2.3.2 *Un digraphe d'ordre* 4 *avec* $\gamma_R = 3$.

Proposition 2.3.2 [18] *Si* D *est un digraphe d'ordre* n, *alors* $\gamma_R(D) \leq n-1$ *si et seulement si* $\Delta^+(D) \geq 2$.

Exemple 2.3.3 *Un digraphe d'ordre* 4, *avec* $\gamma_R = 3$.

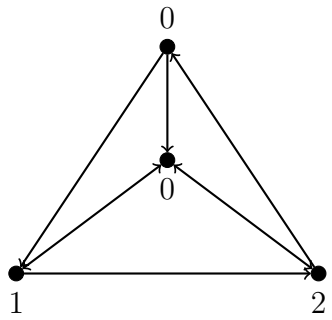


Figure 2.3.3 : Un digraphe D d'ordre $n = 4$ avec $\gamma_R = 3$.

Proposition 2.3.3 [18] *Si T est un arbre orienté d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_R(D) = n$ si et seulement si $\Delta^+(D) = 1$.*

Exemple 2.3.4 *Un arbre orienté T d'ordre $n = 8$ avec $\gamma_R(D) = 8$.*

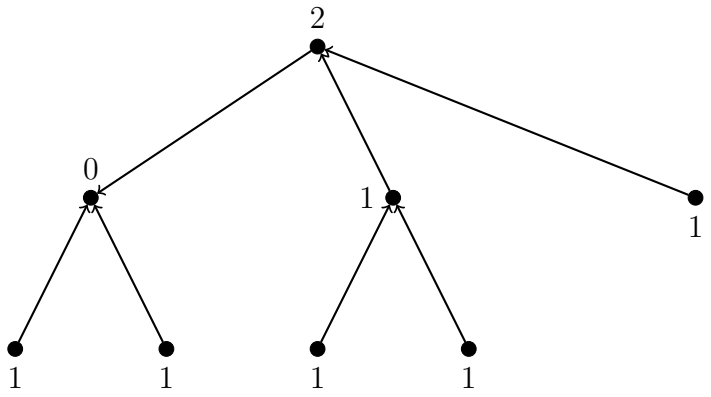


Figure 2.3.4 : Un arbre orienté T d'ordre $n = 8$ avec $\gamma_R(D) = 8$.

Chen, Hao and Xie *[8]* ont donné la relation de type Nordhaus-Gaddum suivante.

Théorème 2.3.1 (*[8]*, *[10]*) *Soit D un digraphe d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$4 \leq \gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) \leq n + 3.$$

De plus la borne inférieure est atteinte si et seulement si chacun de D et $\overline{D}$ a un sommet d'ext-degré $n-1$ et la borne supérieure est atteinte si et seulement si D est un digraphe k-ext-régulier avec $1 \leq k \leq n-2$, pour chaque sommet $x \in V, \triangle^+(D[\overline{N_D^+[x]}]) \leq 1$ et $\triangle^+(D[\overline{N_{\overline{D}}^+[x]}]) \leq 1$.

Exemple 2.3.5 *Le nombre de domination romaine de D est $\gamma_R(D) = 2$, et le nombre de domination romaine de $\overline{D}$ est $\gamma_R(\overline{D}) = 3$. (vair la Figure 2.3.5)*



Figure 2.3.5 : D est son complémentaire $\overline{D}$ avec
$(\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D})) = 2 + 3 = 5 < n + 3 = 7$.

Chapitre 3

LA DOMINATION ROMAINE DANS LES GRAPHES ORIENTÉS

3.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, on étudie un autre type de domination , c'est la domination romaine dans les graphes orientés. Nous donnons des bornes supérieures pour $\gamma_R(D)$ pour quelque classes speciales de produits cartesian à savoir, les grilles, les prismes et les grilles torique.

Proposition 3.1.1 [18] *Si D est un digraphe d'ordre n, alors $\gamma_R(D) \leq n-1$ si et seulement si $\Delta^+(D) \geq 2$.*

Proposition 3.1.2 [18] *Si T est un arbre orienté d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_R(D) = n$ si et seulement si $\Delta^+(D) = 1$.*

3.2 Valeurs exactes de $\gamma_R(\overrightarrow{P_n})$ et $\gamma_R(\overrightarrow{C_n})$

Corollaire 3.2.1 *Pour tout nombre entier positif n,*

$$\gamma_R(\overrightarrow{P_n}) = n \text{ et } \gamma_R(\overrightarrow{C_n}) = n$$

3.3 Valeur exacte de $\gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2})$

Lemme 3.3.1 *Pour tout nombre entier n positif*

$$\gamma_R(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_2) = \begin{cases} \frac{3n}{2} & si\ n \equiv 0(mod2), \\ \frac{3n+1}{2} & si\ n \equiv 1(mod2). \end{cases}$$

Preuve. Montrons que:

$$\gamma_R(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_2) \leq \begin{cases} \frac{3n}{2} & \text{si } n \equiv 0(mod2), \\ \frac{3n+1}{2} & \text{si } n \equiv 1(mod2). \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P_j} = (v_{1,j}, v_{2,j}, \cdots, v_{n,j})\quad j = 1, 2$ une grille d'ordre $r = 2n$. On définit la fonction f: $V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}) \to \{0, 1, 2\}$,

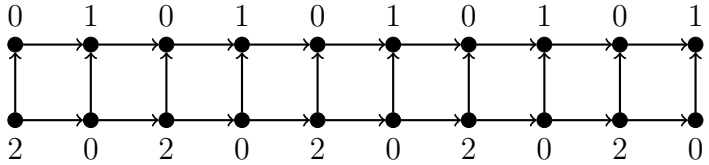


Figure 3.3.1 : La grille $D = \overrightarrow{P_{10}}\Box\overrightarrow{P_2}$ avec $\gamma_R = 15$.

$$\text{Pour } n \equiv 0(mod2) \begin{cases} f(v_{2i+1,1}) = 2 & \text{si } 0 \leq i \leq \frac{n-2}{2}, \\ f(v_{2i+2,1}) = f(v_{2i+1,2}) = 0 & \text{si } 0 \leq i \leq \frac{n-2}{2}, \\ f(v_{2i+2,2}) = 1 & \text{si } 0 \leq i \leq \frac{n-2}{2}. \end{cases}$$

$w(f) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n} f(v_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} f(v_{i,1}) + \sum_{i=1}^{n} f(v_{i,2}) = 2|V_2| + 1|V_1| =$
$2(\frac{n-2}{2} + 1) + (\frac{n-2}{2} + 1) = \frac{3n}{2}$.

$$\text{Pour } n \equiv 1(mod2) \begin{cases} f(v_{2i+1,1}) = 2 & \text{si } 0 \leq i \leq \frac{n-1}{2}, \\ f(v_{2i+2,2}) = 1 & \text{si } 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}, \\ f(v_{2i+1,2}) = 0 & \text{si } 0 \leq i \leq \frac{n-1}{2}, \\ (v_{2i+2,1}) = 0 & \text{si } 0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}. \end{cases}$$

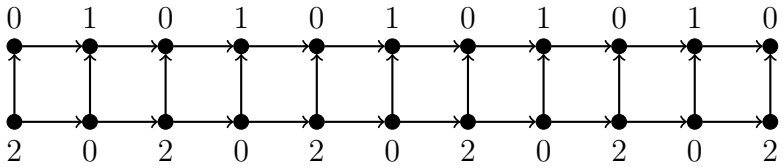


Figure 3.3.2 : La grille $D = \overrightarrow{P_{11}}\Box\overrightarrow{P_2}$ avec $\gamma_R = 17$.

$w(f) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n} f(v_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} f(v_{i,1}) + \sum_{i=1}^{n} f(v_{i,2}) = 2|V_2| + 1|V_1| = 2(\frac{n-1}{2}+1) + 1(\frac{n-3}{2}+1) = \frac{3n+1}{2}$.

II est facile de vérifier que si $n \equiv 0(mod2)$, alors f est une FDR de $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f) = \frac{3n}{2}$ et si $n \equiv 1(mod2)$ alors f est une FDR de $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f) = \frac{3n+1}{2}$.
Alors

$$\gamma_R(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_2) \leq \begin{cases} \frac{3n}{2} & \text{si } n \equiv 0(mod2), \\ \frac{3n+1}{2} & \text{si } n \equiv 1(mod2). \end{cases}$$

■

Proposition 3.3.1 *Pour tout nombre entier positif* $n \geq 2$

$$\gamma_R(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_2) = \begin{cases} \frac{3n}{2} & si\ n \equiv 0(mod2), \\ \frac{3n+1}{2} & si\ n \equiv 1(mod2). \end{cases}$$

Preuve. Soit $\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_2$ une grille d'ordre $r = 2n$ II découle du Lemme 3.3.1 que

$$\gamma_R(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_2) \leq \begin{cases} \frac{3n}{2} & \text{si } n \equiv 0(mod2), \\ \frac{3n+1}{2} & \text{si } n \equiv 1(mod2). \end{cases}$$

Maintenant, nous prouvons l'inégalité inverse. On procède par induction sur n. La propriété est triviale pour toutes les grilles d'ordre $2 \leq n \leq 8$. Supposons que $n \geq 9$ et que l'hypothèse est vraie pour toute grille d'ordre n' inférieur à n, i. e,

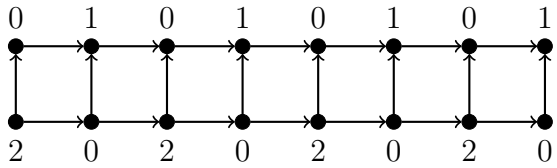


Figure 3.3.3 : La grille $D = \overrightarrow{P_8}\Box\overrightarrow{P_2}$ avec $\gamma_R = 12$.

$$\gamma_R(\overrightarrow{P}_{n'}\Box\overrightarrow{P}_2) \geq \begin{cases} \frac{3n'}{2} & \text{si } n \equiv 0(mod2), \\ \frac{3n'+1}{2} & \text{si } n \equiv 1(mod2). \end{cases}$$

Soit $f = (V_0, V_1, V_2)$ une γ_R-fonction de $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}$. Nous distinguons deux cas :

Case 1. $n \equiv 0(mod2)$. On va montrer que $f(v_{n,1}) = 0$, supposons que $f(v_{n,1}) \in \{1, 2\}$.

Si $f(v_{n,1}) = 2$ alors $f(v_{n,2}) = 0$.

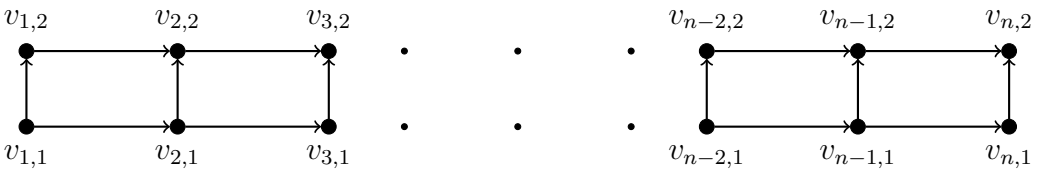


Figure 3.3.4 : La grille $D = \overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}$.

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2} - \{v_{n,2}, v_{n,1}\}$ une grille d'ordre $r' = 2n' = r - 2 = 2n - 2$, avec $n' = n - 1 \equiv 1(mod2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \geq \frac{3n'}{2}$. On définit la fonction
$g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \to \{0, 1, 2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n'$ et $j = 1, 2$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f) - 2$. D'après le Lemme 3.3.1.
$\frac{3n}{2} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}) = w(f) = w(g) + 2 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) + 2 = \frac{3(n')+1}{2} + 2 = \frac{3n}{2} + 1$ tq $n' = n - 1$ d'où on a une contradiction.

Si $f(v_{n,1}) = f(v_{n-1,1}) = 1$ et $f(v_{n-1,2}) = 2$ alors $f(v_{n,2}) = 0$.

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,1}\}$ une grille d'ordre $r' = 2n' = r - 4$
$= 2n - 4 = 2n'$, avec $n' = n - 2 \equiv 0(mod2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \geq \frac{3n'}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \to \{0, 1, 2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$

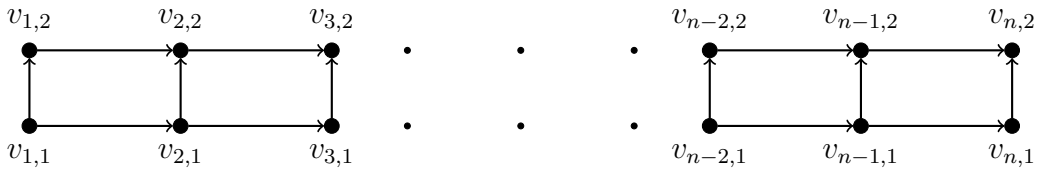


Figure 3.3.5 : La grille $D = \overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}$.

pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1, 2$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f) - 4$. D'après le Lemme 3.3.1.
$\frac{3n}{2} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}) = w(f) = w(g) + 4 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{P_2}) + 4 = \frac{3n^{'}}{2} + 4 = \frac{3n}{2} + 1$ tq $n^{'} = n - 2$ d'où on a une contradiction.

$$\text{Si } f(v_{n,1}) = 1 \text{ et } f(v_{n-1,2}) = 2 \text{ et } f(v_{n-1,1}) = 0 \text{ alors } \begin{cases} f(v_{n,2}) = 0, \\ f(v_{n-2,1}) = 2, \\ f(v_{n-2,2}) = 0. \end{cases}$$

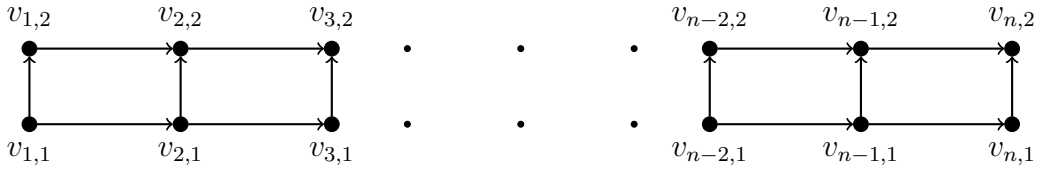


Figure 3.3.6 : La grille $D = \overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}$.

Soit $\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{P_2}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,1}, v_{n-2,1}, v_{n-2,2}\}$ une grille d'ordre $r^{'} = 2n^{'}$ $= r - 6 = 2n - 6 = 2n^{'}$, avec $n^{'} = n - 3 \equiv 1(mod 2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{P_2}) \geq \frac{3n^{'}}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{P_2}) \to \{0, 1, 2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1, 2$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f) - 5$. D'après le Lemme 3.3.1.
$\frac{3n}{2} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}) = w(f) = w(g) + 5 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{P_2}) + 5 = \frac{3n^{'}+1}{2} + 5 = \frac{3n}{2} + 1$ tq $n^{'} = n - 3$ d'où on a une contradiction.

$$\text{si } f(v_{n,1}) = f(v_{n-1,2}) = 0 \text{ et } f(v_{n,2}) = 1 \text{ alors } f(v_{n-1,1}) = 2.$$

Soit $\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{P_2}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,1}\}$ une grille d'ordre $r^{'} = 2n^{'}$ $= r - 4 = 2n - 4 = 2n^{'}$, avec $n^{'} = n - 2 \equiv 0(mod 2)$. II découle de l'hypothèse d'induction

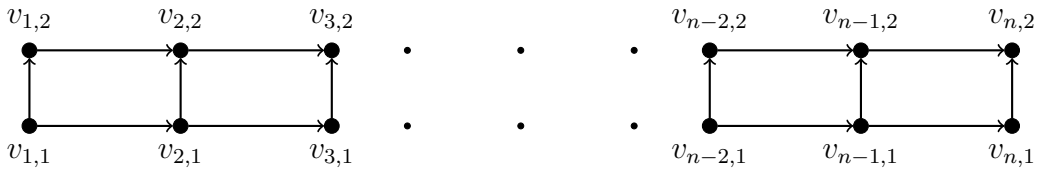


Figure 3.3.7 : La grille $D = \overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}$.

que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \geq \frac{3n'+1}{2}$. On définit la fonction
$g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \to \{0,1,2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n'$ et $j = 1,2$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f) - 3$. D'après le Lemme 3.3.1.
$\frac{3n}{2} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}) = w(f) = w(g) + 3 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{P_2}) + 3 = \frac{3(n')}{2} + 3 = \frac{3n}{2}$. tq $n' = n - 2$

Case 2. $n \equiv 1(mod2)$. on va montrer que $f(v_{n,1}) = 2$,supposons que $f(v_{n,1}) \in \{1,0\}$.

Si $f(v_{n,1}) = f(v_{n-1,2}) = 0$ et $f(v_{n,2}) = 1$ alors $f(v_{n-1,1}) = 2$.

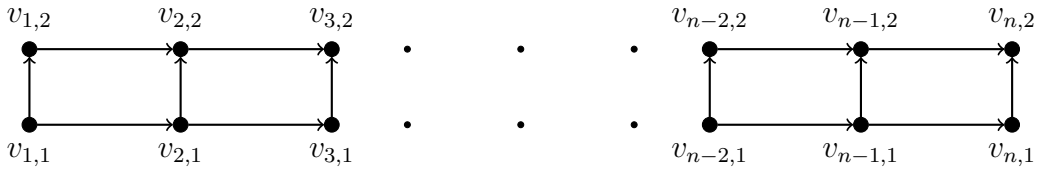


Figure 3.3.8 : La grille $D = \overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}$.

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,1}\}$ une grille d'ordre $r' = 2n'$
$= r-4 = 2n-4 = 2n'$, avec $n' = n-2 \equiv 1(mod2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \geq \frac{3n'+1}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \to \{0,1,2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n'$ et $j = 1,2$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f) - 3$. D'après le Lemme 3.3.1.
$\frac{3n+1}{2} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}) = w(f) = w(g) + 3 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{P_2}) + 3 = \frac{3(n')+1}{2} + 3 = \frac{3n+1}{2}$.

Si $f(v_{n,1}) = f(v_{n-1,1}) = 1$ et $f(v_{n-1,2}) = 2$ alors $f(v_{n,2}) = 0$.
Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,1}\}$ une grille d'ordre $r' = 2n'$
=r-4=2n-4=2n', avec $n' = n-2 \equiv 1(mod2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \geq \frac{3n'+1}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \to \{0,1,2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n'$ et $j = 1,2$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f) - 4$.
D'après le Lemme 3.3.1.

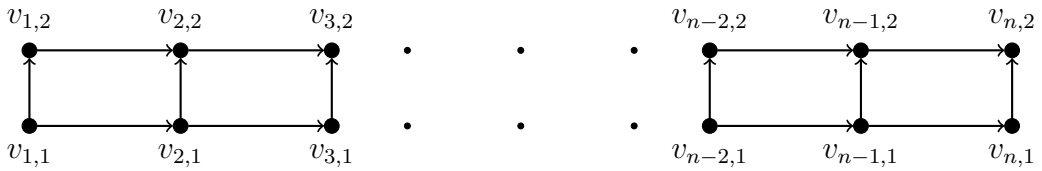


Figure 3.3.9 : La grille $D = \overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}$.

$$\frac{3n+1}{2} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}) = w(f) = w(g) + 4 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) + 5 = \frac{3(n')+1}{2} + 4 = \frac{3n+3}{2}.$$

d'où on a une contradiction.

Si $f(v_{n,1}) = 2$ alors $f(v_{n,2}) = 0$.

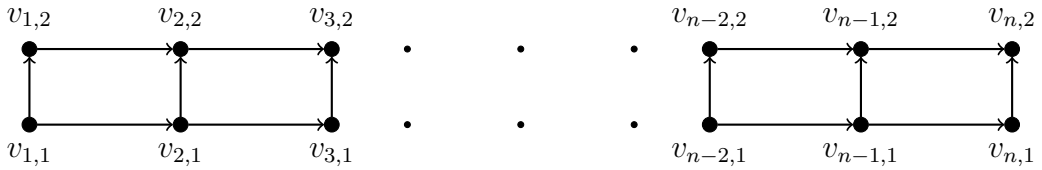


Figure 3.3.10 : La grille $D = \overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}$.

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,1}\}$ une grille d'ordre $r' = 2n'$
$= r - 2 = 2n - 2 = 2n'$, avec $n' = n - 1 \equiv 0(mod 2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \geq \frac{3n'}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \to \{0, 1, 2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n'$ et $j = 1, 2$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f) - 2$. D'après le Lemme 3.3.1.
$\frac{3n+1}{2} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}) = w(f) = w(g) + 2 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) + 2 = \frac{3n'}{2} + 2 = \frac{3n+1}{2}$. tq $n' = n - 1$
Par conséquent

$$\gamma_R(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_2) \geq \begin{cases} \frac{3n}{2} & \text{si } n \equiv 0(mod 2), \\ \frac{3n+1}{2} & \text{si } n \equiv 1(mod 2). \end{cases}$$

■

3.4 Borne supérieure pour $\gamma_R(D)$

3.4.1 Pour les grilles $D = \overrightarrow{P_n} \Box \overrightarrow{P_m}$

Proposition 3.4.1 *Pour tout nombre entier positif* $(n, m) \in N * N - (2, 2)$

$$\gamma_R(\overrightarrow{P}_n \Box \overrightarrow{P}_m) \leq \begin{cases} \frac{(2m+1)n+m-3}{3} & si\ n \equiv a(mod3), m \equiv b(mod3), \\ & (a,b) \in \{(0,0),(2,2)\}, \\ \frac{(2m+1)n+m-1}{3} & si\ n \equiv a(mod3), m \equiv b(mod3), \\ & (a,b) \in \{(0,1),(1,0),(1,1),(1,2),(2,1)\}, \\ \frac{(2m+1)n+m-2}{3} & si\ n \equiv a(mod3), m \equiv b(mod3), \\ & (a,b) \in \{(0,2),(2,0)\}. \end{cases}$$

Preuve. *Soit* $\overrightarrow{P_n} \Box \overrightarrow{P_m}$ *une grille d'ordre* nm *avec* $n \geq 3$ *et* $m \geq 3$.

Soit $V(\overrightarrow{P_n} \Box \overrightarrow{P_m}) = f(\bigcup_{1 \leq j \leq m} \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{v_{i,j}\})$. *On distingue six cas:*

Case 1. $m \equiv 0(mod3)$ *et* $n \equiv 0(mod3)$.

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n} \Box \overrightarrow{P_m}) \to \{0, 1, 2\}$ *par*

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & si\ j = 3t+1, i = 3k+1, avec\ 0 \leq k \leq \frac{n-3}{3}, et\ 0 \leq t \leq \frac{m-3}{3}, \\ 2 & si\ j = 3t'+2, i = 3k'+2, avec\ 0 \leq k' \leq \frac{n-3}{3}, et\ 0 \leq t' \leq \frac{m-3}{3}, \\ 2 & si\ j = 3y, i = 3r, avec\ 1 \leq r \leq \frac{n-3}{3}, et\ 1 \leq y \leq \frac{m}{3}, \\ 2 & si\ j = m, i = 3y', avec\ 1 \leq y' \leq \frac{n-3}{3}, \\ 1 & si\ i = 3l, j = 1, avec\ 1 \leq l \leq \frac{n}{3}, \\ 1 & si\ j = 3s, i = 1, avec\ 1 \leq s \leq \frac{m}{3}, \\ 1 & si\ j = m, i = n, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f *est une FDR de poids*

$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1 \leq j \leq m} \bigcup_{1 \leq i \leq n} \{v_{i,j}\})$

$= \sum_{1 \leq j \leq m} \sum_{1 \leq i \leq n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-3}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1) + (\frac{n-3}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1)$

$+ (\frac{n-3}{3}+1-1)(\frac{m-3}{3}+1-1) + (\frac{n-3}{3}+1-1)] + 1[(\frac{n}{3}+1-1) + (\frac{m}{3}+1-1)] + 1$

$= 2[\frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} - \frac{3m}{9} + \frac{m-3}{3}] + \frac{n}{3} + \frac{m}{3} + \frac{3}{3} = [\frac{2nm}{3} + \frac{2m}{3} - \frac{2m}{3} - \frac{6}{3}] + \frac{n}{3} + \frac{m}{3} + \frac{3}{3} =$

$\frac{(2m+1)n+m-3}{3}$.

Case 2. *$m \equiv 0(mod3)$ et $n \equiv 1(mod3)$,par symétrique.*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & si\ j = 3t+1, i = 3k+1, avec\ 0 \le k \le \frac{n-1}{3}, et\ 0 \le t \le \frac{m-3}{3}, \\ 2 & si\ j = 3t'+2, i = 3k'+2, avec\ 0 \le k' \le \frac{n-4}{3}, et\ 0 \le t' \le \frac{m-3}{3}, \\ 2 & si\ j = 3y, i = 3r, avec\ 1 \le r \le \frac{n-1}{3}, et\ 1 \le y \le \frac{m}{3}, \\ 1 & si\ i = 3l, j = 1, avec\ 1 \le l \le \frac{n-1}{3}, \\ 1 & si\ j = 3s, i = 1, avec\ 1 \le s \le \frac{m}{3}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\le j\le m}\bigcup_{1\le i\le n}\{v_{i,j}\})$

$= \sum_{1\le j\le m}\sum_{1\le i\le n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-1}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1) + (\frac{n-4}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1)$

$+ (\frac{n-1}{3}+1-1)(\frac{m}{3}+1-1)] + 1[(\frac{n-1}{3}+1-1) + (\frac{m}{3}+1-1)]$

$= 2[\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}-\frac{2m}{9}+\frac{2m}{9}]+\frac{n}{3}+\frac{m}{3}-\frac{1}{3} = [\frac{2nm}{3}+\frac{m}{3}+\frac{n}{3}-\frac{1}{3}] = \frac{(2m+1)n+m-1}{3}$.

Case 3. *$m \equiv 1(mod3)$ et $n \equiv 1(mod3)$.*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & si\ j = 3t+1, i = 3k+1, avec\ 0 \le k \le \frac{n-1}{3}, et\ 0 \le t \le \frac{m-4}{3}, \\ 2 & si\ j = 3t'+2, i = 3k'+2, avec\ 0 \le k' \le \frac{n-4}{3}, et\ 0 \le t' \le \frac{m-4}{3}, \\ 2 & si\ j = 3y, i = 3r, avec\ 1 \le r \le \frac{n-1}{3}, et\ 1 \le y \le \frac{m-1}{3}, \\ 2 & si\ i = 3y'+1, j = m, avec\ 1 \le y' \le \frac{m-4}{3}, \\ 1 & si\ i = 3l, j = 1, avec\ 1 \le l \le \frac{n-1}{3}, \\ 1 & si\ j = 3s, i = 1, avec\ 1 \le s \le \frac{m-1}{3}, \\ 1 & si\ j = m, i = n, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\le j\le m}\bigcup_{1\le i\le n}\{v_{i,j}\})$

$$= \sum_{1\le j\le m}\sum_{1\le i\le n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-1}{3}+1)(\frac{m-4}{3}+1)+(\frac{n-4}{3}+1)(\frac{m-4}{3}+1)$$
$$+(\frac{n-1}{3}+1-1)(\frac{m-1}{3}+1-1)+(\frac{n-4}{3}+1)]+1[(\frac{n-1}{3}+1-1)+(\frac{m-1}{3}+1-1)]+1$$
$$= 2[\frac{(n+2)(m-1)+(n-1)(m-1)+(n-1)(m-1)}{9}+\frac{n-1}{3}]+\frac{n-1}{3}+\frac{m-1}{3}+\frac{3}{3} =$$
$$\frac{2mn+4m+2mn+2mn-4m-6n}{9}+\frac{2n-4+m+n+3}{3} = \frac{2nm-2n+m+3n-1}{3} =$$
$$\frac{(2m+1)n+m-1}{3}.$$

Case 4. *$m \equiv 2(mod3)$ et $n \equiv 2(mod3)$.*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & si\ j = 3t+1, i = 3k+1, avec\ 0 \le k \le \frac{n-2}{3}, et\ 0 \le t \le \frac{m-2}{3}, \\ 2 & si\ j = 3t'+2, i = 3k'+2, avec\ 0 \le k' \le \frac{n-2}{3}, et\ 0 \le t' \le \frac{m-5}{3}, \\ 2 & si\ j = 3y, i = 3r, avec\ 1 \le r \le \frac{n-2}{3}, et\ 1 \le y \le \frac{m-2}{3}, \\ 2 & si\ i = 3y'+2, j = m, avec\ 1 \le y' \le \frac{m-5}{3}, \\ 1 & si\ i = 3l, j = 1, avec\ 1 \le l \le \frac{n-2}{3}, \\ 1 & si\ j = 3s, i = 1, avec\ 1 \le s \le \frac{m-2}{3}, \\ 1 & si\ j = m, i = n, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\le j\le m}\bigcup_{1\le i\le n}\{v_{i,j}\})$

$$= \sum_{1\le j\le m}\sum_{1\le i\le n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-2}{3}+1)+(\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-5}{3}+1)$$
$$+(\frac{n-2}{3}+1-1)(\frac{m-2}{3}+1-1)+(\frac{n-5}{3}+1)]+1[(\frac{n-2}{3}+1-1)+(\frac{m-2}{3}+1-1)]+1$$
$$= 2[\frac{(n+1)(m-1)+(n+1)(m-2)+(n-2)(m-2)}{9}+\frac{n-2}{3}]+\frac{n-2}{3}+\frac{m-2}{3}+\frac{3}{3} =$$
$$\frac{2mn+2m+2mn+2mn-2m-6n-6}{9}+\frac{2n-4+m+n+3}{3} = \frac{2nm-2n+m+3n-3}{3} =$$
$$\frac{(2m+1)n+m-3}{3}.$$

Case 5. *$m \equiv 0(mod3)$ et $n \equiv 2(mod3)$,par symétrique.*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & si\ j = 3t+1, i = 3k+1, avec\ 0 \le k \le \frac{n-2}{3}, et\ 0 \le t \le \frac{m-3}{3}, \\ 2 & si\ j = 3t'+2, i = 3k'+2, avec\ 0 \le k' \le \frac{n-2}{3}, et\ 0 \le t' \le \frac{m-3}{3}, \\ 2 & si\ j = 3y, i = 3r, avec\ 1 \le r \le \frac{n-2}{3}, et\ 1 \le y \le \frac{m}{3}, \\ 1 & si\ i = 3l, j = 1, avec\ 1 \le l \le \frac{n-2}{3}, \\ 1 & si\ j = 3s, i = 1, avec\ 1 \le s \le \frac{m}{3}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\le j\le m}\bigcup_{1\le i\le n}\{v_{i,j}\})$

$= \sum_{1\le j\le m}\sum_{1\le i\le n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1) + (\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1)$

$+ (\frac{n-2}{3}+1-1)(\frac{m}{3}+1-1)] + 1[(\frac{n-2}{3}+1-1) + (\frac{m}{3}+1-1)]$

$= 2[\frac{(n+1)m + (n+1)m + (n-2)m}{9}] + \frac{n+m-2}{3} = 2[\frac{nm+m+nm+m+nm-2m}{9}] +$

$\frac{n+m-2}{3} = \frac{2nm+n+m-2}{3} = \frac{(2m+1)n+m-2}{3}.$

Case 6. *$m \equiv 1(mod3)$ et $n \equiv 2(mod3)$,par symétrique.*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & si\ j = 3t+1, i = 3k+1, avec\ 0 \le k \le \frac{n-2}{3}, et\ 0 \le t \le \frac{m-1}{3}, \\ 2 & si\ j = 3t'+2, i = 3k'+2, avec\ 0 \le k' \le \frac{n-2}{3}, et\ 0 \le t' \le \frac{m-4}{3}, \\ 2 & si\ j = 3y, i = 3r, avec\ 1 \le r \le \frac{n-2}{3}, et\ 1 \le y \le \frac{m-1}{3}, \\ 1 & si\ i = 3l, j = 1, avec\ 1 \le l \le \frac{n-2}{3}, \\ 1 & si\ j = 3s, i = 1, avec\ 1 \le s \le \frac{m-1}{3}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\le j\le m}\bigcup_{1\le i\le n}\{v_{i,j}\})$

$= \sum_{1\le j\le m}\sum_{1\le i\le n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-1}{3}+1) + (\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-4}{3}+1)$

$+ (\frac{n-2}{3}+1-1)(\frac{m-1}{3}+1-1)] + 1[(\frac{n-2}{3}+1-1) + (\frac{m-1}{3}+1-1)]$

$= 2[\frac{(n+1)(m+2) + (n+1)(m-1) + (n-2)(m-1)}{9}] + \frac{n+m-3}{3}$

$$= 2[\frac{nm+2n+m+nm-n+m+nm-n-2m+3}{9}] + \frac{n+m-3}{3}$$
$$= \frac{2nm+2+n+m-3}{3} = \frac{(2m+1)n+m-1}{3}.$$

■

3.4.2 Valeur exacte de $\gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3})$

Lemme 3.4.1 *Pour tout nombre entier positif $n \geq 3$(voir la proposition 3.4.1).*

$$\gamma_R(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_3) \leq \begin{cases} \frac{7n}{3} & si\ n \equiv 0(mod3), \\ \frac{7n+2}{3} & si\ n \equiv 1(mod3), \\ \frac{7n+1}{3} & si\ n \equiv 2(mod3). \end{cases}$$

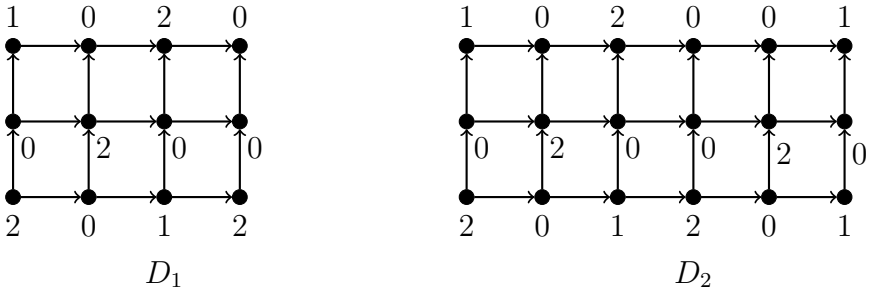


Figure 3.4.1 : La grille $D_1 = \overrightarrow{P_4}\Box\overrightarrow{P_3}$ et $D_2 = \overrightarrow{P_6}\Box\overrightarrow{P_3}$.

Proposition 3.4.2 *Pour tout nombre entier positif $n \geq 3$*

$$\gamma_R(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_3) = \begin{cases} \frac{7n}{3} & si\ n \equiv 0(mod3), \\ \frac{7n+2}{3} & si\ n \equiv 1(mod3), \\ \frac{7n+1}{3} & si\ n \equiv 2(mod3). \end{cases}$$

Preuve. Il découle du Lemme 3.4.1 que $\gamma_R(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_3) \leq \begin{cases} \frac{7n}{3} & \text{si } n \equiv 0(mod3), \\ \frac{7n+2}{3} & \text{si } n \equiv 1(mod3), \\ \frac{7n+1}{3} & \text{si } n \equiv 2(mod3). \end{cases}$

Maintenant, nous prouvons l'inégalité inverse. On procède par induction sur n. La propriété est triviale pour tous les chemins d'ordre $3 \leq n \leq 4$, Supposons que $n \geq 5$ et que l'hypothèse

est vraie pour tout les grilles d'ordre $n^{'}$ inférieur à n, i.e,

$$\gamma_R(\overrightarrow{P}_{n'}\Box\overrightarrow{P}_3) \geq \begin{cases} \frac{7n^{'}}{3} & \text{si } n^{'} \equiv 0(mod3), \\ \frac{7n^{'}+2}{3} & \text{si } n^{'} \equiv 1(mod3), \\ \frac{7n^{'}+1}{3} & \text{si } n^{'} \equiv 2(mod3). \end{cases}$$

Soit $f = (V_0, V_1, V_2)$ une γ_R-fonction de $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}$. Clairement $f(v_{n,j}) \neq 2$ $j = 3$ alors $f(v_{n,3}) \in 0, 1$. Nous distinguons trois cas :

Case 1. $n \equiv 0(mod3)$. Alors nous devons avoir $f(v_{n,3}) = 0$, sinon nous avons $f(v_{n,3}) = 1$.

Case 1.1.

$$\text{Si } f(v_{n,3}) = 1 \text{ alors}$$
$$(f(v_{n,1}), f(v_{n,2})) \in \{(1,1),(2,0)\}.$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n,3}\}$ une grille d'ordre $r^{'} = 3n^{'} = r - 3 = 3n - 3$, $n^{'} = n - 1 \equiv 2(mod3)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}}{2}$. On définit la fonction g :
$V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \to \{0,1,2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1, 2, 3$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f) - 3$. D'après le Lemme 3.4.1
$\frac{7n}{3} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) = w(f) = w(g) + 3 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n-1}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 3 = \frac{7(n-1)+1}{3} + 3 = \frac{7n}{3} + 1$
d'où on a une contradiction.

$$\text{Si } f(v_{n,3}) = 1 \text{ alors } (f(v_{n,1}), f(v_{n,2})) \in \{(0,1),(1,0)\}.$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n,3}\}$ une grille d'ordre $r^{'} = 3n^{'}$, $n^{'} = n - 1 \equiv 2(mod3)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}}{3}$. On définit la fonction g :
$V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \to \{0,1,2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1, 2, 3$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f) - 2$. D'après le Lemme 3.4.1
$\frac{7n}{3} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) = w(f) = w(g) + 2 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n-1}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 2 = \frac{7(n-1)+1}{3} + 2 = \frac{7n}{3}$

Case 1.2.

$$\text{Si } f(v_{n,3}) = 0 \text{ alors } f(v_{n,1}) = 1, f(v_{n,2}) = 2.$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n,3}\}$une grille d'ordre $r^{'} = 3n^{'} = r - 3 = 3n - 3$, $n^{'} = n - 1 \equiv 2(mod3)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}}{3}$. On définit la fonction g :
$V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \to \{0,1,2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1,2,3$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f) - 3$. D'après le Lemme 3.4.1
$\frac{7n}{3} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) = w(f) = w(g) + 3 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n-1}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 2 = \frac{7(n-1)+1}{3} + 3 = \frac{7n}{3} + 1$
d'où on a une contradiction.

$$\text{Si } f(v_{n,3}) = 0 \text{ alors } (f(v_{n,1}), f(v_{n,2})) \in \{(0,2),(2,0),(1,1)\}.$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n,3}\}$une grille d'ordre $r^{'} = 3n^{'} = r - 3 = 3n - 3$, $n^{'} = n - 1 \equiv 2(mod3)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}}{3}$. On définit la fonction g :
$V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \to \{0,1,2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1,2,3$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f) - 2$. D'après le Lemme 3.4.1
$\frac{7n}{3} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) = w(f) = w(g) + 2 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n-1}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 2 = \frac{7(n-1)+1}{3} + 2 = \frac{7n}{3}$

Case 2. $n \equiv 1(mod3)$. Alors nous devons avoir $f(v_{n,1}) = 0$ sinon nous avons $f(v_{n,3}) = 2$

Case 2.1.

$$\text{Si } f(v_{n,3}) = 1 \text{ alors} \begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,3}) = 0, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,1}) = 2, \\ f(v_{n-1,1}) = 1. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n,3}\}$ une grille d'ordre $r^{'} = 3n^{'} = r - 6 = 3n - 6$, $n^{'} = n - 2 \equiv 2(mod3)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}+1}{3}$. On définit la fonction g :
$V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \to \{0,1,2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1,2,3$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f) - 6$. D'après le Lemme 3.4.1
$\frac{7n+2}{3} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) = w(f) = w(g) + 6 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 3 = \frac{7(n-2)+1}{3} + 6 = \frac{7n+5}{3}$

d'où on a une contradiction.

$$\text{Si } f(v_{n,3}) = 1 \text{ alors} \begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,3}) = 1, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,1}) = 0, \\ f(v_{n-1,1}) = 2. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n,3}\}$ une grille d'ordre $r^{'} = 3n^{'} = r - 6 = 3n - 6$, $n^{'} = n - 2 \equiv 2(mod 3)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}+1}{3}$. On définit la fonction g :
$V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \to \{0, 1, 2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1, 2, 3$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f) - 5$. D'après le Lemme 3.4.1
$\frac{7n+2}{3} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) = w(f) = w(g) + 5 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 3 = \frac{7(n-2)+1}{3} + 5 = \frac{7n+2}{3}$.

Case 2.2.

$$\text{Si } f(v_{n,3}) = 0 \text{ alors} \begin{cases} f(v_{n-1,1}) = f(v_{n-1,2}) = 1, \\ f(v_{n-1,3}) = f(v_{n,1}) = 2, \\ f(v_{n,2}) = 0. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n,3}\}$ une grille d'ordre $r^{'} = 3n^{'} = r - 6 = 3n - 6$, $n^{'} = n - 2 \equiv 2(mod 3)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}+1}{3}$. On définit la fonction g :
$V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \to \{0, 1, 2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1, 2, 3$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f) - 6$. D'après le Lemme 3.4.1
$\frac{7n+2}{3} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) = w(f) = w(g) + 6 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 3 = \frac{7(n-2)+1}{3} + 6 = \frac{7n+5}{3}$
d'où on a une contradiction.

$$\text{Si } f(v_{n,3}) = 0 \text{ alors} \begin{cases} f(v_{n-1,1}) = f(v_{n-1,3}) = 2, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,1}) = 0, \\ f(v_{n,2}) = 1. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n,3}\}$ une grille d'ordre $r^{'} = 3n^{'} = r - 6 = 3n - 6$, $n^{'} = n - 2 \equiv 2(mod3)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}+1}{3}$. On définit la fonction g :
$V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \to \{0,1,2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1,2,3$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f) - 5$. D'après le Lemme 3.4.1
$\frac{7n+2}{3} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) = w(f) = w(g) + 5 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 3 = \frac{7(n-2)+1}{3} + 5 = \frac{7n+2}{3}$.
Case 3. $n \equiv 2(mod3)$. Alors nous devons avoir $f(v_{n,3}) = 0$, sinon nous avons $f(v_{n,3}) = 1$.

Case 3.1.

$$\text{Si } f(v_{n,3}) = 1 \text{ alors}$$
$$(f(v_{n,1}), f(v_{n,2})) \in \{(1,1),(2,0)\}.$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n,3}\}$ une grille d'ordre $r^{'} = 3n^{'} = r - 3 = 3n - 3$, $n^{'} = n - 1 \equiv 1(mod3)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}+2}{2}$. On définit la fonction g :
$V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \to \{0,1,2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1,2,3$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f) - 3$. D'après le Lemme 3.4.1
$\frac{7n+1}{3} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) = w(f) = w(g) + 3 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n-1}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 3 = \frac{7(n-1)+2}{3} + 3 = \frac{7n+4}{3}$
d'où on a une contradiction.

$$\text{Si } f(v_{n,3}) = 1 \text{ alors}$$
$$(f(v_{n,1}), f(v_{n,2})) \in \{(1,0),(0,1)\}.$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n,3}\}$ une grille d'ordre $r^{'} = 3n^{'} = r - 3 = 3n - 3$, $n^{'} = n-1 \equiv 1(mod3)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}+2}{2}$. On définit la fonction g :
$V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \to \{0,1,2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1,2,3$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f) - 2$. D'après le Lemme 3.4.1
$\frac{7n+1}{3} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) = w(f) = w(g) + 2 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n-1}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 3 = \frac{7(n-1)+2}{3} + 2 = \frac{7n+1}{3}$
Case 3.2.

$$\text{Si } f(v_{n,3}) = 0 \text{ et } f(v_{n,1}) = 1 \text{ alors } f(v_{n,2}) = 2.$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n,3}\}$ une grille d'ordre $r^{'} = 3n^{'} = r - 3 = 3n - 3$, $n^{'} = n - 1 \equiv 1(mod3)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}+2}{3}$.
On définit la fonction g :
$V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \to \{0,1,2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1,2,3$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f) - 3$. D'après le Lemme 3.4.1
$\frac{7n+1}{3} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) = w(f) = w(g) + 3 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n-1}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 3 = \frac{7(n-1)+2}{3} + 3 = \frac{7n+4}{3}$
d'où on a une contradiction.

Si $f(v_{n,3}) = 0$ alors $(f(v_{n,1}), f(v_{n,2})) \in \{(0,2),(2,0),(1,1)\}$.

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n,3}\}$ une grille d'ordre $r^{'} = 3n^{'} = r - 3 = 3n - 3$, $n^{'} = n - 1 \equiv 1(mod3)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_R(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}+2}{3}$.
On définit la fonction g :
$V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \to \{0,1,2\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1,2,3$. II est clair que g est une FDR de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f) - 2$. D'après le Lemme 3.4.1
$\frac{7n+1}{3} \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) = w(f) = w(g) + 2 \geq \gamma_R(\overrightarrow{P_{n-1}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 2 = \frac{7(n-1)+2}{3} + 2 = \frac{7n+1}{3}$

■

3.4.3 Pour les prismes $D = \overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}$

Proposition 3.4.3 *Pour tout nombre entier positif $n \geq 2$ et $m \geq 3$*

$$\gamma_R(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{C}_m) \leq \begin{cases} \frac{2mn+m}{3} & si\ n \equiv a(mod3), m \equiv b(mod3), \\ & (a,b) \in \{(0,0),(2,0),(1,0)\} \\ \frac{(2m+1)n+m-1}{3} & si\ n \equiv a(mod3), m \equiv b(mod3), \\ & (a,b) \in \{(0,1),(1,1),(1,2),(2,1)\} \\ \frac{(2m+1)n+m-2}{3} & si\ n \equiv 0(mod3), m \equiv 2(mod3), \\ \frac{(2m+1)n+m-3}{3} & si\ n \equiv 2(mod3), m \equiv 2(mod3) \end{cases}$$

Preuve. *Soit $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}$ un prisme d'ordre nm avec $n \geq 2$ et $m \geq 3$.*
Soit $V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}) = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\})$. On distingue huit cas:

Case 1. *$m \equiv 0(mod3)$ et $n \equiv 0(mod3)$.*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_m}\Box\overrightarrow{C_n}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & si\ j = 3t+1, i = 3k+1, avec\ 0 \le k \le \frac{n-3}{3}, et\ 0 \le t \le \frac{m-3}{3}, \\ 2 & si\ j = 3t'+2, i = 3k'+2, avec\ 0 \le k' \le \frac{n-3}{3}, et\ 0 \le t' \le \frac{m-3}{3}, \\ 2 & si\ j = 3y, i = 3r, avec\ 1 \le r \le \frac{n}{3}, et\ 1 \le y \le \frac{m-3}{3}, \\ 2 & si\ j = m, i = 3y', avec\ 1 \le y' \le \frac{n-3}{3}, \\ 1 & si\ i = n, j = 1, \\ 1 & si\ j = 3s, i = 1, avec\ 1 \le s \le \frac{m}{3}, \\ 1 & si\ j = m, i = n, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\le j\le m}\bigcup_{1\le i\le n}\{v_{i,j}\})$

$= \sum_{1\le j\le m}\sum_{1\le i\le n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-3}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1) + (\frac{n-3}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1)$

$+ (\frac{n}{3}+1-1)(\frac{m-3}{3}+1-1) + (\frac{n-3}{3}+1-1)] + 1[(\frac{n}{3}+1-1)+2$

$= 2[\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}-\frac{3n}{9}+\frac{n-3}{3}]+\frac{m+6}{3} = [\frac{2nm}{3}+\frac{2n}{3}-\frac{2n}{3}-\frac{6}{3}]+\frac{m}{3}-\frac{6}{3}+\frac{3}{3} = \frac{2mn+m}{3}.$

Case 2. *$m \equiv 0(mod3)$ et $n \equiv 1(mod3)$.*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & si\ j = 3t+1, i = 3k+1, avec\ 0 \le k \le \frac{n-1}{3}, et\ 0 \le t \le \frac{m-3}{3}, \\ 2 & si\ j = 3t'+2, i = 3k'+2, avec\ 0 \le k' \le \frac{n-4}{3}, et\ 0 \le t' \le \frac{m-3}{3}, \\ 2 & si\ j = 3y, i = 3r, avec\ 1 \le r \le \frac{n-1}{3}, et\ 1 \le y \le \frac{m}{3}, \\ 1 & si\ j = 3s, i = 1, avec\ 1 \le s \le \frac{m}{3}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\le j\le m}\bigcup_{1\le i\le n}\{v_{i,j}\})$

$= \sum_{1\le j\le m}\sum_{1\le i\le n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-1}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1) + (\frac{n-4}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1)$

$+ (\frac{n-1}{3}+1-1)(\frac{m}{3}+1-1)] + 1[(\frac{m}{3}+1-1)$

$= 2[\frac{m(n-2)+(n-1)m+(n-1)m}{9}] + \frac{m}{3} = 2[\frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} - \frac{2m}{9} + \frac{2m}{9}] + \frac{m}{3}$
$= \frac{2nm}{3} + \frac{m}{3} = \frac{2mn+m}{3}$.

Case 3. *$m \equiv 0(mod3)$ et $n \equiv 2(mod3)$.*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\square\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & si\ j = 3t+1, i = 3k+1, avec\ 0 \leq k \leq \frac{n-2}{3}, et\ 0 \leq t \leq \frac{m-3}{3}, \\ 2 & si\ j = 3t'+2, i = 3k'+2, avec\ 0 \leq k' \leq \frac{n-2}{3}, et\ 0 \leq t' \leq \frac{m-3}{3}, \\ 2 & si\ j = 3y, i = 3r, avec\ 1 \leq r \leq \frac{n-2}{3}, et\ 1 \leq y \leq \frac{m}{3}, \\ 1 & si\ j = 3s, i = 1, avec\ 1 \leq s \leq \frac{m}{3}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids
$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\})$
$= \sum_{1\leq j\leq m}\sum_{1\leq i\leq n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1) + (\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1)$
$+ (\frac{n-2}{3}+1-1)(\frac{m}{3}+1-1)] + 1[(\frac{m}{3}+1-1)$
$= 2[\frac{m(n+1)+(n+1)m+(n-2)m}{9}] + \frac{m}{3} = 2[\frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} - \frac{2m}{9} + \frac{2m}{9}] + \frac{m}{3}$
$= \frac{2nm}{3} + \frac{m}{3} = \frac{2mn+m}{3}$.

Case 4. *$m \equiv 1(mod3)$ et $n \equiv 1(mod3)$.*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\square\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & si\ j = 3t+1, i = 3k+1, avec\ 0 \leq k \leq \frac{n-1}{3}, et\ 0 \leq t \leq \frac{m-4}{3}, \\ 2 & si\ j = 3t'+2, i = 3k'+2, avec\ 0 \leq k' \leq \frac{n-4}{3}, et\ 0 \leq t' \leq \frac{m-4}{3}, \\ 2 & si\ j = 3y, i = 3r, avec\ 1 \leq r \leq \frac{n-1}{3}, et\ 1 \leq y \leq \frac{m-1}{3}, \\ 2 & si\ j = m, i = 3y'+1, avec\ 0 \leq y' \leq \frac{n-4}{3}, \\ 1 & si\ j = 1, i = 3l, avec\ 1 \leq l \leq \frac{n-1}{3}, \\ 1 & si\ j = 3s, i = 1, avec\ 1 \leq s \leq \frac{m-1}{3}, \\ 1 & si\ j = m, i = n, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\le j\le m}\bigcup_{1\le i\le n}\{v_{i,j}\})$$
$$= \sum_{1\le j\le m}\sum_{1\le i\le n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-1}{3}+1)(\frac{m-4}{3}+1)+(\frac{n-4}{3}+1)(\frac{m-4}{3}+1)$$
$$+(\frac{n-1}{3}+1-1)(\frac{m-1}{3}+1-1)+(\frac{n-4}{3}+1)]+1[(\frac{n-1}{3}+1-1)+(\frac{m-1}{3}+1-1)+1$$
$$= 2[\frac{(m-1)(n+2)+(n-1)(m-1)+(n-1)(m-1)}{9}+\frac{n-1}{3}]+\frac{n+m+1}{3}$$
$$= 2[\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}-\frac{3n-2}{9}-\frac{2m}{9}+\frac{2m+2}{9}+\frac{n-1}{3}]+\frac{m+n+1}{3}$$
$$= \frac{2nm}{3}+\frac{2n}{3}-\frac{2n}{3}+\frac{m+n+1}{3} = \frac{2mn+m+n-1}{3} = \frac{(2m+1)n+m-1}{3}.$$

Case 5. *$m \equiv 1(mod3)$ et $n \equiv 0(mod3)$.*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\square\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & si\ j = 3t+1, i = 3k+1, avec\ 0 \le k \le \frac{n-3}{3}, et\ 0 \le t \le \frac{m-1}{3}, \\ 2 & si\ j = 3t'+2, i = 3k'+2, avec\ 0 \le k' \le \frac{n-3}{3}, et\ 0 \le t' \le \frac{m-4}{3}, \\ 2 & si\ j = 3y, i = 3r, avec\ 1 \le r \le \frac{n}{3}, et\ 1 \le y \le \frac{m-1}{3}, \\ 1 & si\ j = 3s, i = 1, avec\ 1 \le s \le \frac{m-1}{3}, \\ 1 & si\ i = 3l, j = 1, avec\ 1 \le l \le \frac{n}{3}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\le j\le m}\bigcup_{1\le i\le n}\{v_{i,j}\})$$
$$= \sum_{1\le j\le m}\sum_{1\le i\le n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-3}{3}+1)(\frac{m-1}{3}+1)+(\frac{n-3}{3}+1)(\frac{m-4}{3}+1)$$
$$+(\frac{n}{3}+1-1)(\frac{m-1}{3}+1-1)]+1[(\frac{n+m-1}{3})$$
$$= 2[\frac{n(m+2)+(m-1)n+n(m-1)}{9}]+\frac{m+n-1}{3}$$
$$= 2[\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}-\frac{2n}{9}+\frac{2n}{9}]+\frac{n+m-1}{3}$$
$$= \frac{2nm}{3}+\frac{n+m-1}{3} = \frac{2mn+n+m-1}{3} = \frac{(2m+1)n+m-1}{3}.$$

Case 6. *$m \equiv 1(mod3)$ et $n \equiv 2(mod3)$,par symétrique.*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\square\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & si\ j = 3t+1, i = 3k+1, avec\ 0 \le k \le \frac{n-2}{3}, et\ 0 \le t \le \frac{m-1}{3}, \\ 2 & si\ j = 3t'+2, i = 3k'+2, avec\ 0 \le k' \le \frac{n-2}{3}, et\ 0 \le t' \le \frac{m-4}{3}, \\ 2 & si\ j = 3y, i = 3r, avec\ 1 \le r \le \frac{n-2}{3}, et\ 1 \le y \le \frac{m-1}{3}, \\ 1 & si\ j = 3s, i = 1, avec\ 1 \le s \le \frac{m-1}{3}, \\ 1 & si\ i = 3l, j = 1, avec\ 1 \le l \le \frac{n-2}{3}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\le j\le m}\bigcup_{1\le i\le n}\{v_{i,j}\})$

$= \sum_{1\le j\le m}\sum_{1\le i\le n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-1}{3}+1) + (\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-4}{3}+1)$

$+ (\frac{n-2}{3}+1-1)(\frac{m-1}{3}+1-1)] + 1[(\frac{n+m-3}{3})$

$= 2[\frac{(n+1)(m+2)+(n+1)(m-1)+(n-2)(m-1)}{9}] + \frac{m+n-3}{3}$

$= 2[\frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} - \frac{2n}{9} + \frac{2n-1}{9} - \frac{2m}{9} + \frac{2m+4}{9}] + \frac{n+m-1}{3}$

$= \frac{2nm+2}{3} + \frac{n+m-3}{3} = \frac{2mn+n+m-1}{3} = \frac{(2m+1)n+m-1}{3}.$

Case 7. *$m \equiv 2(mod 3)$ et $n \equiv 2(mod 3)$.*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & si\ j = 3t+1, i = 3k+1, avec\ 0 \le k \le \frac{n-2}{3}, et\ 0 \le t \le \frac{m-2}{3}, \\ 2 & si\ j = 3t'+2, i = 3k'+2, avec\ 0 \le k' \le \frac{n-2}{3}, et\ 0 \le t' \le \frac{m-5}{3}, \\ 2 & si\ j = 3y, i = 3r, avec\ 1 \le r \le \frac{n-2}{3}, et\ 1 \le y \le \frac{m-2}{3}, \\ 2 & si\ j = m, i = 3y'+2, avec\ 0 \le y' \le \frac{n-5}{3}, \\ 1 & si\ j = 1, i = 3l, avec\ 1 \le l \le \frac{n-2}{3}, \\ 1 & si\ j = 3s, i = 1, avec\ 1 \le s \le \frac{m-2}{3}, \\ 1 & si\ j = m, i = n, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\le j\le m}\bigcup_{1\le i\le n}\{v_{i,j}\})$

$= \sum_{1\le j\le m}\sum_{1\le i\le n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-2}{3}+1) + (\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-5}{3}+1)$

$$+(\frac{n-2}{3}+1-1)(\frac{m-2}{3}+1-1)+(\frac{n-5}{3}+1)]+1[(\frac{n-2}{3}+1-1)+(\frac{m-2}{3}+1-1)+1$$
$$=2[\frac{(m+1)(n+1)+(n+1)(m-2)+(n-2)(m-2)}{9}+\frac{n-2}{3}]+\frac{n+m-1}{3}$$
$$=2[\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}-\frac{3n-2}{9}-\frac{2m+4}{9}+\frac{2m}{9}+\frac{n-2}{3}]+\frac{m+n-1}{3}$$
$$=\frac{2nm}{3}+\frac{2n+2}{3}-\frac{2n}{3}+\frac{m+n-5}{3}=\frac{2mn+m+n-3}{3}=\frac{(2m+1)n+m-3}{3}.$$

Case 8. *$m \equiv 2(mod3)$ et $n \equiv 0(mod3)$.*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\square\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & si\ j=3t+1, i=3k+1, avec\ 0\le k\le \frac{n-3}{3}, et\ 0\le t\le \frac{m-2}{3}, \\ 2 & si\ j=3t'+2, i=3k'+2, avec\ 0\le k'\le \frac{n-3}{3}, et\ 0\le t'\le \frac{m-2}{3}, \\ 2 & si\ j=3y, i=3r, avec\ 1\le r\le \frac{n}{3}, et\ 1\le y\le \frac{m-2}{3}, \\ 1 & si\ j=3s, i=1, avec\ 1\le s\le \frac{m-2}{3}, \\ 1 & si\ i=3l, j=1, avec\ 1\le l\le \frac{n}{3}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$$w(f)=1|V_1|+2|V_2|=f(\bigcup_{1\le j\le m}\bigcup_{1\le i\le n}\{v_{i,j}\})$$
$$=\sum_{1\le j\le m}\sum_{1\le i\le n}f(v_{i,j})=2[(\frac{n-3}{3}+1)(\frac{m-2}{3}+1)+(\frac{n-3}{3}+1)(\frac{m-2}{3}+1)$$
$$+(\frac{n}{3}+1-1)(\frac{m-2}{3}+1-1)]+1[(\frac{n+m-2}{3})$$
$$=2[\frac{n(m+1)+n(m+1)+n(m-2)}{9}]+\frac{m+n-2}{3}$$
$$=2[\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}-\frac{2n}{9}+\frac{2n}{9}]+\frac{n+m-2}{3}=\frac{2nm}{3}+\frac{n+m-2}{3}$$
$$=\frac{2mn+n+m-2}{3}=\frac{(2m+1)n+m-2}{3}.$$

■

3.4.4 Pour les grilles toriques $D = \overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_m}$

Proposition 3.4.4 *Pour tout nombre entier positif $n \geq 3$ et $m \geq 3$*

$$\gamma_R(\overrightarrow{C}_n\Box\overrightarrow{C}_m) \leq \begin{cases} \frac{2mn+3}{3} & si\ n \equiv 0(mod3), m \equiv 0(mod3), \\ \frac{2mn+m}{3} & si\ n \equiv a(mod3), m \equiv b(mod3), \\ & (a,b) \in \{(1,0),(2,0)\} \\ \frac{2mn+n}{3} & si\ n \equiv a(mod3), m \equiv b(mod3), \\ & (a,b) \in \{(0,1),(0,2)\} \\ \frac{2mn+n+m-4}{3} & si\ n \equiv a(mod3), m \equiv b(mod3), \\ & (a,b) \in \{(1,2),(2,1)\} \\ \frac{2mn+n+m-1}{3} & si\ n \equiv 1(mod3), m \equiv 1(mod3), \\ \frac{2mn+n+m-3}{3} & si\ n \equiv 2(mod3), m \equiv 2(mod3). \end{cases}$$

Preuve. Soit $\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_m}$ une grille torique d'ordre nm avec.$m \geq 3$ et $n \geq 3$

Soit $V(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_m}) = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\})$. On distingue huit cas.

Case 1. $m \equiv 0(mod3)$ et $n \equiv 0(mod3)$.

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & \text{si } j = 3t+1, i = 3k+1, \text{avec } 0 \leq k \leq \frac{n-3}{3}, \text{et } 0 \leq t \leq \frac{m-3}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3t'+2, i = 3k'+2, \text{avec } 0 \leq k' \leq \frac{n-3}{3}, \text{et } 0 \leq t' \leq \frac{m-3}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3y, i = 3r, \text{avec } 1 \leq r \leq \frac{n}{3}, \text{et } 1 \leq y \leq \frac{m-3}{3}, \\ 2 & \text{si } j = m, i = 3y', \text{avec } 1 \leq y' \leq \frac{n-3}{3}, \\ 1 & \text{si } j = 1, i = n, \\ 1 & \text{si } j = m, i = 1, \\ 1 & \text{si } j = m, i = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\})$

$= \sum_{1\leq j\leq m}\sum_{1\leq i\leq n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-3}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1) + (\frac{n-3}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1)$

$+ (\frac{n}{3}+1-1)(\frac{m-3}{3}+1-1) + (\frac{n-3}{3}+1-1)] + 3 = 2[\frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} - \frac{3n}{9} - \frac{n-3}{3}] + 3$

$= 2[\frac{3nm-3n}{9} + \frac{3n-3}{3}] + 3$
$= \frac{2mn-2n+2n-6}{3} + 3 = \frac{2mn+3}{3}$.

Case 2. $m \equiv 0(mod3)$ et $n \equiv 1(mod3)$.

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & \text{si } j = 3t+1, i = 3k+1, \text{avec } 0 \leq k \leq \frac{n-1}{3}, \text{et } 0 \leq t \leq \frac{m-3}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3t'+2, i = 3k'+2, \text{avec } 0 \leq k' \leq \frac{n-4}{3}, \text{et } 0 \leq t' \leq \frac{m-3}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3y, i = 3r, \text{avec } 1 \leq r \leq \frac{n-1}{3}, \text{et } 1 \leq y \leq \frac{m}{3}, \\ 1 & \text{si } j = 3s, i = 1, \text{avec } 1 \leq s \leq \frac{m}{3}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids
$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\})$
$= \sum_{1\leq j\leq m}\sum_{1\leq i\leq n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-1}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1) + (\frac{n-4}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1)$
$+ (\frac{n-1}{3}+1-1)(\frac{m}{3}+1-1)] + (\frac{m}{3}) = 2[\frac{(n+2)m+(n-1)m+(n-1)m}{9}] + \frac{m}{3}$
$= 2[\frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} - \frac{2m}{9} + \frac{2m}{9}] + \frac{m}{3} = \frac{2nm+m}{3}$.

Case 3. $m \equiv 0(mod3)$ et $n \equiv 2(mod3)$.

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & \text{si } j = 3t+1, i = 3k+1, \text{avec } 0 \leq k \leq \frac{n-2}{3}, \text{et } 0 \leq t \leq \frac{m-3}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3t'+2, i = 3k'+2, \text{avec } 0 \leq k' \leq \frac{n-2}{3}, \text{et } 0 \leq t' \leq \frac{m-3}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3y, i = 3r, \text{avec } 1 \leq r \leq \frac{n-2}{3}, \text{et } 1 \leq y \leq \frac{m}{3}, \\ 1 & \text{si } j = 3s, i = 1, \text{avec } 1 \leq s \leq \frac{m}{3}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids
$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\})$
$= \sum_{1\leq j\leq m}\sum_{1\leq i\leq n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1) + (\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-3}{3}+1)$
$+ (\frac{n-2}{3}+1-1)(\frac{m}{3}+1-1)] + (\frac{m}{3})$

$= 2[\frac{(n+1)m+(n+1)m+(n-2)m}{9}] + \frac{m}{3} = 2[\frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} - \frac{2m}{9} + \frac{2m}{9}] + \frac{m}{3}$
$= \frac{2nm+m}{3}$.

Case 4. $m \equiv 1(mod3)$ et $n \equiv 0(mod3)$.

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & \text{si } j = 3t+1, i = 3k+1, \text{avec } 0 \leq k \leq \frac{n-3}{3}, \text{et } 0 \leq t \leq \frac{m-1}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3t'+2, i = 3k'+2, \text{avec } 0 \leq k' \leq \frac{n-3}{3}, \text{et } 0 \leq t' \leq \frac{m-4}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3y, i = 3r, \text{avec } 1 \leq r \leq \frac{n}{3}, \text{et } 1 \leq y \leq \frac{m-1}{3}, \\ 1 & \text{si } j = 3s, i = 1, \text{avec } 1 \leq s \leq \frac{n}{3}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids
$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\})$
$= \sum_{1\leq j\leq m}\sum_{1\leq i\leq n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-3}{3}+1)(\frac{m-1}{3}+1) + (\frac{n-3}{3}+1)(\frac{m-4}{3}+1)$
$+ (\frac{n}{3}+1-1)(\frac{m-1}{3}+1-1)] + (\frac{n}{3})$
$= 2[\frac{(m+2)n+(m-1)n+n(m-1)}{9}] + \frac{n}{3} = 2[\frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} - \frac{2n}{9} + \frac{2n}{9}] + \frac{n}{3} = \frac{2nm+n}{3}$.

Case 5. $m \equiv 1(mod3)$ et $n \equiv 0(mod3)$.

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & \text{si } j = 3t+1, i = 3k+1, \text{avec } 0 \leq k \leq \frac{n-3}{3}, \text{et } 0 \leq t \leq \frac{m-2}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3t'+2, i = 3k'+2, \text{avec } 0 \leq k' \leq \frac{n-3}{3}, \text{et } 0 \leq t' \leq \frac{m-2}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3y, i = 3r, \text{avec } 1 \leq r \leq \frac{n}{3}, \text{et } 1 \leq y \leq \frac{m-2}{3}, \\ 1 & \text{si } j = 3s, i = 1, \text{avec } 1 \leq s \leq \frac{n}{3}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids
$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\})$
$= \sum_{1\leq j\leq m}\sum_{1\leq i\leq n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-3}{3}+1)(\frac{m-2}{3}+1) + (\frac{n-3}{3}+1)(\frac{m-2}{3}+1)$
$+ (\frac{n}{3}+1-1)(\frac{m-2}{3}+1-1)] + (\frac{n}{3})$

$$= 2[\frac{(m+1)n+(m+1)n+n(m-2)}{9}]+\frac{n}{3} = 2[\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}-\frac{2n}{9}+\frac{2n}{9}]+\frac{n}{3} = \frac{2nm+n}{3}.$$

Case 6. $m \equiv 1(mod3)$ et $n \equiv 2(mod3)$,par symétrique .

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & \text{si } j = 3t+1, i = 3k+1, \text{avec } 1 \le k \le \frac{n-2}{3}, \text{et } 0 \le t \le \frac{m-1}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3t'+2, i = 3k'+2, \text{avec } 0 \le k' \le \frac{n-2}{3}, \text{et } 0 \le t' \le \frac{m-4}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3y, i = 3r, \text{avec } 1 \le r \le \frac{n-2}{3}, \text{et } 1 \le y \le \frac{m-1}{3}, \\ 2 & \text{si } i = 1, j = 3y'+1, \text{avec } 1 \le y' \le \frac{m-1}{3}, \\ 1 & \text{si } j = 1, i = 3l, \text{avec } 1 \le l \le \frac{n-2}{3}, \\ 1 & \text{si } j = 3s, i = 1, \text{avec } 1 \le s \le \frac{m-1}{3}, \\ 1 & \text{si } j = 1, i = 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\le j\le m}\bigcup_{1\le i\le n}\{v_{i,j}\})$

$= \sum_{1\le j\le m}\sum_{1\le i\le n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-1}{3}+1)+(\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-4}{3}+1)$

$+(\frac{n-2}{3}+1-1)(\frac{m-1}{3}+1-1)+(\frac{m-1}{3}+1)] + 1[(\frac{n-2}{3}+1-1)+(\frac{m-1}{3}+1-1)+1$

$= 2[\frac{(n-2)(m+2)+(n+1)(m-1)+(n-2)(m-1)}{9}+\frac{m-1}{3}]+\frac{n+m}{3}$

$= 2[\frac{nm+2n-2n-4m+nm+m-5+2+nm}{9}+\frac{m-1}{3}]+\frac{n+m}{3}$

$= 2[\frac{3nm}{9}-\frac{3}{9}-\frac{3m}{9}+\frac{m-1}{3}]+\frac{n+m}{3} = \frac{2nm}{3}-\frac{2m}{3}-\frac{4}{3}+\frac{2m}{3}+\frac{n+m}{3}$

$= \frac{2mn+m+n-4}{3}.$

Case 7. $m \equiv 1(mod3)$ et $n \equiv 1(mod3)$.

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & \text{si } j = 3t+1, i = 3k+1, \text{avec } 0 \leq k \leq \frac{n-1}{3}, \text{et } 0 \leq t \leq \frac{m-4}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3t'+2, i = 3k'+2, \text{avec } 0 \leq k' \leq \frac{n-4}{3}, \text{et } 0 \leq t' \leq \frac{m-4}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3y, i = 3r, \text{avec } 1 \leq r \leq \frac{n-1}{3}, \text{et } 1 \leq y \leq \frac{m-1}{3}, \\ 2 & \text{si } j = m, i = 3y'+1, \text{avec } 0 \leq y' \leq \frac{n-4}{3}, \\ 1 & \text{si } j = 1, i = 3l, \text{avec } 1 \leq l \leq \frac{n-1}{3}, \\ 1 & \text{si } j = 3s, i = 1, \text{avec } 1 \leq s \leq \frac{m-1}{3}, \\ 1 & \text{si } j = m, i = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\})$

$= \sum_{1\leq j\leq m}\sum_{1\leq i\leq n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-1}{3}+1)(\frac{m-4}{3}+1) + (\frac{n-4}{3}+1)(\frac{m-4}{3}+1)$

$+ (\frac{n-1}{3}+1-1)(\frac{m-1}{3}+1-1) + (\frac{n-4}{3}+1)] + 1[(\frac{n-1}{3}+1-1) + (\frac{m-1}{3}+1-1) + 1$

$= 2[\frac{(m-1)(n+2)+(n-1)(m-1)+(n-1)(m-1)}{9} + \frac{n-1}{3}] + \frac{n+m+1}{3}$

$= 2[\frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} + \frac{nm}{9} - \frac{3n-2}{9} - \frac{2m}{9} + \frac{2m+2}{9} + \frac{n-1}{3}] + \frac{m+n+1}{3}$

$= \frac{2nm}{3} + \frac{2n}{3} - \frac{2n}{3} + \frac{m+n+1}{3} = \frac{2mn+m+n-1}{3} = \frac{(2m+1)n+m-1}{3}.$

Case 8. $m \equiv 2(mod3)$ et $n \equiv 2(mod3)$.

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & \text{si } j = 3t+1, i = 3k+1, \text{avec } 0 \leq k \leq \frac{n-2}{3}, \text{et } 0 \leq t \leq \frac{m-2}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3t'+2, i = 3k'+2, \text{avec } 0 \leq k' \leq \frac{n-2}{3}, \text{et } 0 \leq t' \leq \frac{m-5}{3}, \\ 2 & \text{si } j = 3y, i = 3r, \text{avec } 1 \leq r \leq \frac{n-2}{3}, \text{et } 1 \leq y \leq \frac{m-2}{3}, \\ 2 & \text{si } j = m, i = 3y'+2, \text{avec } 0 \leq y' \leq \frac{n-5}{3}, \\ 1 & \text{si } j = 1, i = 3l, \text{avec } 1 \leq l \leq \frac{n-2}{3}, \\ 1 & \text{si } j = 3s, i = 1, \text{avec } 1 \leq s \leq \frac{m-2}{3}, \\ 1 & \text{si } j = m, i = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDR de poids

$w(f) = 1|V_1| + 2|V_2| = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\})$

$$= \sum_{1\le j\le m}\sum_{1\le i\le n} f(v_{i,j}) = 2[(\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-2}{3}+1)+(\frac{n-2}{3}+1)(\frac{m-5}{3}+1)$$
$$+(\frac{n-2}{3}+1-1)(\frac{m-2}{3}+1-1)+(\frac{n-5}{3}+1)]+1[(\frac{n-2}{3}+1-1)+(\frac{m-2}{3}+1-1)+1$$
$$= 2[\frac{(m+1)(n+1)+(n+1)(m-2)+(n-2)(m-2)}{9}+\frac{n-2}{3}]+\frac{n+m-1}{3}$$
$$= 2[\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}+\frac{nm}{9}-\frac{3n-2}{9}-\frac{2m+4}{9}+\frac{2m}{9}+\frac{n-2}{3}]+\frac{m+n-1}{3}$$
$$= \frac{2nm}{3}+\frac{2n+2}{3}-\frac{2n}{3}+\frac{m+n-5}{3}=\frac{2mn+m+n-3}{3}.$$

■

Conclusion et Perspectives

Dans ce mémoire, on a abordé le thème de recherche, à savoir la domination romaine dans les digraphes.On a donné des bornes supérieures pour le nombre de domination $\gamma_R(D)$ à savoir, les grilles, les prismes et les grilles torique. Les travaux réalisés durant ce mémoire, ouvrent plusieurs perspectives, et nous proposons quelques problèmes.

- Montrer que Pour tout nombre entier positif $n \geq 3$

$$\gamma_R(\overrightarrow{P}_n \Box \overrightarrow{P}_4) = 3n + 1.$$

- Montrer que Pour tout nombre entier positif $n \geq 3$

$$\gamma_R(\overrightarrow{P}_n \Box \overrightarrow{C}_3) = 2n + 1.$$

- Montrer que Pour tout nombre entier positif $n \geq 3$

$$\gamma_R(\overrightarrow{C}_n \Box \overrightarrow{C}_3) = 2n + 1.$$

Bibliographie

[1] J. Ghoshal, R. Laskar, and D. Pillone, "Topics on dominationin directed graphs ","
In Domination in Graphs ". Haynes, T.W., Hedetniemi. S. T. Slater and P.J., editors.
Marcel Dekker, Inc. New York, (1998), pp 401

[2] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater (eds),"Domination in Graphs: Advanced Topics ", Marcel Dekker, New York, (1998)

[3] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater," Fundamentals of Domination in Graphs ", Marcel Dekker, New York, (1998).

[4] M. Kamaraj, P. Jakkammal, "Roman domination in Digraphs,"submitted. .

[5] C. Lee, On the domination number of a digraph . Ph.D. Dissertation, Michigan State University (1994).

[6] J. Ghosal, R. Laskar, and D. Pillone, Topics on dominationin directed graphs , In DominationinGraphs . Haynes, T.W.,Hedetniemi. S. T. Slater and P.J., editors. Marcel Dekker, Inc. New York, 401 - 437 (1998).

[7] S. K. Merz and D.J. Stewart, Gallai-type theorems and domination in Digraphs and tournaments . Congressus Numerantium, (15), 431-41 (2002).

[8] X. Chen, G. Hao and Z. Xie, A note on Roman domination of Digraphs . Discussiones Mathematicae Graph Theory (39) 13-21 (2019) doi:10.7151/dmgt.2067.

[9] L. Ouldrabah M. Blidia A.Bouchou "Roman domination in oriented trees." Electronic Journal of Graph Theory and Applications (9) 95ñ103 (2021).

[10] L. Ouldrabah, M. Blidia A.Bouchou. "Extremal digraphs for an upper bound on the Roman domination number." Journal of Combinatorial Optimization (38) 667ñ679 (2019)

[11] C. F. Jaenisch, Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs, Petrograde (1862).

[12] O. Ore," Theory of graphs ". Amer. Soc. Colloq. Pub 38, Providence, R.I. (1962).

[13] E.J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, Towards a theory of domation in graphs, Networks (7),247-261 (1977).

[14] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater," Fundamentals of domination in graphs ". Marcel Dekker, New York, (1998).

[15] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater," domination in graphs: Avanced topics ". Marcel Dekker, New York, (1998).

[16] C. Berge, " The Theory of Graphs and Its Applications ". John Wiley et Sons, New York, NY (1962).

[17] J. F. Fink, M.S. Jacobson, " n-domination in graphs ". In Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science,. New York, 283-300 (1985).

[18] S.M.Sheikholeslami and L.Volkmann," The Roman Domination Number of a digraph ".Acta Universitatis Apulenisis(27),77-86 (2011)