République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Institut des Sciences et de la Technologie
Département Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

De fin d'études pour l'obtention

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse et Modélisation Mathématique

par

Souad KADIK

Titre :

DIFFÉRENTES NOTIONS DE CONVEXITÉ GÉNÉRALISÉE EN CALCUL DES VARIATIONS

Date de soutenance : juillet 2012

Composition du Jury :

Président :	Kh.SERIER-ABDALLAH	Maître Assistant (A)	Univ.Médéa
Rapporteur :	O.BOUSSAID	Maître de Conférences	Univ.Chlef
Co-Rapporteur :	M.L. LEGHMIZI	Maître de Conférences	Univ.Médéa
Examinateur :	M. BENCHAA	Maître Assistant (A)	Univ.Médéa
	M.MENAD	Maître de Conférences	Univ.Chlef
Invité :	N.IKHLEF-ESCHOUF	Maître de Conférences	Univ.Médéa

Année Universitaire : 2011/2012

DÉDICACE

A ma chère mère Naima et mon cher père Mahmoud

pour l'éducation et le grand amour dont ils m'ont entouré depuis ma naissance.

Et pour leurs patiences et leurs sacrifices.

A mes grand mères Rabiha et Ghania que dieu garde.

A Mohamed

A mon chère frère Rachid

A ma chère sœur Imene et son mari Yacoub

et ses enfants : Mohamed Islem et Meriem

A ma trés chère sœur : Selma

A mes très chères : Wissem, Manel, Selma, Samira

A tous mes amis du cursus

d'études sans exceptions depuis le primaire jusqu' à l'université,

A toutes les personnes qui m'aiment et qui pensent à moi.

Je dédie ce travail.

REMERCIMENT

Louange au seigneur "ALLAH" qui nous a doté de la merveilleuse faculté de raisonnement. Louange à notre créateur qui incite à acquérir le savoir.

C'est à lui que nous adressons toute notre gratitude en premier lieu.

En second lieu, je voudrais adresser mes vifs remerciements à tous nos professeurs du département de mathématique qui ont contribué à notre formation.

J'adresse de très sincères remerciements à mon encadreur Mr. M.LEGHMIZI pour son encouragement, son aide et son suivi pour terminer ce modeste travail. Ma gratitude va aussi à Mr. O.BOUSSAID qui a toujours été disponible malgré ses nombreuses occupations, et dont l'encouragement et les conseils judicieux m'ont été d'une grande utilité.

Mes vives remerciements à Mme.Kh.SERIER-ABDALLAH qui a accepter de preśider le jury de soutenance. Mes remerciements vont également à Mr. MENAD, Mr. BENCHAA et Mr. IKHLEF-ESCHOUF qui ont accepté de bien vouloir examiner ce modeste travail.

Enfin, je tiens à remercie tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin pour réaliser ce travail.

RÉSUMÉ

Dans ce travail on s'intéresse aux différentes notions de convexité généralisé, la plus importante de ces notions étant la quasi-convexité, elle a été introduite par C. B. Morrey en 1952 et elle garantit la semi-continuité inférieure faible de la fonctionnelle énergie, la polyconvexité a été introduite par J. Ball en 1977 dans ces travaux sur l'élasticité. Dans ce travail on donne un aperçu sur ces différentes notions ainsi que le lien existant avec la semi continuité inferieure faible ; des contres exemples à l'équivalence de ces notions seront également donnés.

Mots clés : convexité, quasiconvexité, polyconvexité, convexité de rang un, semicontinuité inferieur faible.

ABSTRACT

In this study we are interested in the different notions of generalized convexity, the most important of these notions is the quasi-convexity, it was introduced by C. B. Morrey in 1952 and it ensures the weak lower semi continuity of the energy function, the polyconvexity was introduced by J. Ball in 1977 while studying Elasticity problems. In this study we give an overview on these different concepts and the relationship with the weak lower semi continuity, we give also some counterexamples to the equivalence of this notions.

Key words : convexity, quasi-convexity, polyconvexity, convexity of rank one, weak lower semicontinuity.

NOTATION

On donne ci-dessous l'ensemble des diverses notations employèes tout au long de ce mémoire. Les notations les plus spécifiques sont rappelées là où elles apparaissent.

On dénote par $\mathbb{R}^{n\times m}$ l'espace des matrices réelles à m lignes et n colonnes.

- ❖ Ω : Ouvert borné de $\mathbb{R}^m$.
- ❖ $\partial\Omega$: frontière de Ω
- ❖ $|\Omega|$: La mesure de Lebesgue de Ω

Pour une matrice ξ donnée dans $\mathbb{R}^{n\times m}$ On dénote par :

- ❖ ξ^T :la matrice transposée de ξ ;
- ❖ adj_s : le vecteur de tous les mineurs $s \times s$ de ξ
- ❖ $T(\xi) = (\xi, adj_2, ..., adj_{n\wedge m})$;
- ❖ Si $x \in \mathbb{R}^n$, on désigne par x_i ses coordonnées : $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$
- ❖ On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel, défini par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x.y = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

- ❖ $a \otimes b$: Pour $a \in \mathbb{R}^m$ et $b \in R^n$ on dénote $a \times b$ la matrice de $\mathbb{R}^{m\times n}$ dont la composante (i, j) a la valeur $a_i b_j$.

Pour $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$

- ❖ $u = (u^1, u^2, ..., u^m)$, u^j sont les composants de u dans $\mathbb{R}^m$

❖ $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u^j}{\partial u_i}\right)_{1\leq i\leq n}^{1\leq j\leq m}$;

❖ p' : L'exposant conjugué de p : $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$;

❖ $C(\Omega)$: L'ensemble des fonctions réelles continues définies sur Ω ;

❖ $C^\infty(\Omega)$: Espace des fonctions indéfiniment différentiables définies sur Ω

❖ $\mathcal{D}(\Omega)$: l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω ;

❖ $\mathcal{D}'(\Omega)$: l'espace des distribution.

❖ $L^1_{loc}(\Omega)$: l' espace des fonction localement intégrables sur Ω.

❖ $L^1(\Omega)=\left\{f:\Omega\to\mathbb{R}\ intgrable\ tel\ que \int_\Omega |f(x)|dxdx<+\infty\right\}$.

❖ $L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)=\{u:\Omega\to\mathbb{R}^m, \int_\Omega ||u(x)||^p<+\infty\}$, pour tout $1\leq p\leq\infty$

❖ $L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)=\{u:\Omega\to\mathbb{R}^m, \exists C>0, ||u(x)||^p<Ca.e.x\in\Omega\}$,

❖ $L^{p'}(\Omega,\mathbb{R}^m)$: La topologie dual de $L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$;

❖ $L^p(\Omega)=L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)$ si $m=1$

❖ $L^\infty(\Omega)=L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)$ si $m=1$

❖ $W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)=\{u\in L^p(\Omega,\mathbb{R}^m), \nabla u\in L^p(\Omega,\mathbb{R}^m)\}$;

❖ $W^{1,\infty}(\Omega,\mathbb{R}^m)=\{u\in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m), \nabla u\in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m)\}$;

❖ $W^{1,p}(\Omega)=W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ *si* $m=1$;

❖ $W^{1,p}_0(\Omega,\mathbb{R}^m)=\{u\in W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m), u=0, \text{sur } \partial\Omega\}, \forall 1\leq p\leq\infty$;

❖ $W^{1,p}_0(\Omega)=W^{1,p}_0(\Omega,\mathbb{R}^m)$ si $m=1$;

❖ $W^{1,\infty}_{per}(C,\mathbb{R}^m)$: L'espace des fonctions périodiques dans $W^{1,\infty}(C,\mathbb{R}^m)$;

Pour $f:R^{m\times n}\to\mathbb{R}$ on note :

❖ Cf l'enveloppe convexe de f.

❖ Pf l'enveloppe polyconvexe de f.

❖ Qf l'enveloppe quasi-convexe de f.

❖ Rf l'enveloppe rang-1-convexe de f.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciment **ii**

Notation **1**

Introduction **1**

1 Rappels des outils de base **4**

1.1 Rappel sur les opérations vectorielles 4

1.1.1 Définitions 4

1.1.2 Principaux opérateurs différentiels 5

1.2 Topologie faible et topologie faible étoile 6

1.2.1 Topologie faible 6

1.2.2 Topologie faible-$*$ 6

1.3 Espaces réflexifs, Espaces séparables 7

1.3.1 Espaces réflexifs 7

1.3.2 Espaces séparables 7

1.4 Rappels sur les Distributions 8

1.4.1 Espace vectoriel $\mathcal{D}(\Omega)$ 9

1.4.2 Distributions 9

1.5 Espaces de Sobolev 10

1.5.1 Espaces L^p 10

1.5.2 Espaces de Sobolev 12
1.6 Semi-continuité inférieure 14

2 Notions de convexité généralisée **16**
2.1 Motivation 16
2.2 Notions de convexité généralisée 18
2.2.1 Fonction Convexe 18
2.2.2 Fonction Polyconvexe 19
2.2.3 Fonction Quasiconvexe 20
2.2.4 Fonction rang un convexe 23
2.2.5 Fonction séparément convexe 26
2.3 Lien entre les notions de convexité généralisé 26
2.4 Contre exemples 29

3 Les enveloppes convexes au sens généralisé **35**
3.1 Les différentes enveloppe 35
3.1.1 L'enveloppe convexe 36
3.1.2 L'enveloppe polyconvexe 36
3.1.3 L'enveloppe quasiconvexe 36
3.1.4 L'enveloppe rang un convexe 37
3.2 Théorème de relaxation 39

Bibliographie **40**

INTRODUCTION

Le calcul des variations est l'une des branches les plus anciennes des Mathématiques, elle a pour objet l'étude de l' existence d'une solution d'un problème de minimisations comme les problèmes d'élasticité non linéaire. Plus précisément si f représente la fonction énergie associée au système et Ω la position du solide au repos, on cherche une solution du problème :

$$\inf_{u\in X}\Big\{I(u)\Big\}, \quad I(u)=\int_{\Omega} f\big(\nabla u(x)\big)dx \tag{P}$$

$u:\ \Omega\to\mathbb{R}^m$ désignant le vecteur déplacement et infinimum étant pris sur un espace Sobolev appropriée, $\nabla u=\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)$, $1\le j\le n$, $1\le i\le m$ dénote la matrice Jacobienne de u, $f:\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ est une fonction définie sur l'espace des matrices et X un espace donné.

Une question cruciale, liée à l'existence de solutions, et de dégager de hypothèses convenables qui assurent la semi-continue inferieure faible de I dans $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Une telle condition est la quasi-convexité soi-disant mis en place par Morrey, en 1952,

$$f \textit{ est quasiconvexe } \Longleftrightarrow \textit{ } I \textit{ est semi continue inferieurement.}$$

Pour résoudre ce type de problème on dispose deux méthodes différentes à savoir les méthodes classiques et les méthodes directes.

Dans ce travail on s'intéresse aux cas vectoriel, c'est-à-dire le cas $n>1$ et $m>1$ et on ne considère que les méthodes directes.

L'idée de ces méthodes repose sur trois points :

Dans la première, on considère une suite minimisante du problème et on cherche à la borner uniformément c'est-à-dire une suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k\to\infty} I(v_k) = \inf I(u)$ qui soit compacte pour certaine topologie ; dans la deuxième étape, on extrait une sous suite faiblement convergente dans l'ensemble des fonctions admissibles, ceci assurant au moins $\inf\{I(u);\ u \in X,\ u = u_0\ \ sur\ \partial\Omega\} > -\infty$ et dans la troisième étape, on établit la semi-continuité inférieurement faible sur l'espace considéré de la fonctionnelle d'énergie .i.e. que si u_k converge vers u alors $\liminf I(u_k) \geq I(u)$.

Une condition nécessaire et suffisante de semi-continuité inférieure faible-étoile dans $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ est la quasi-convexité, notion due à Morrey. Puisque la notion de quasi-convexité n' est pas une condition ponctuelle, il est difficile de la vérifier dans la pratique.

Par conséquent, on est amené à introduire une condition nécessaire Un peu plus faible (mais pas suffisante) locale de semi-continuité inférieure faible connu sous le nom de rang un convexe qui est impliquée par la quasi-convexité, où l'on demande que la fonction f soit convexe sur les segments dont les extrémités différent par une matrice de rang-1. D'autre part, dans le cas où la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$, la rang-1-convexité est équivalente à la condition de Legendre-Hadamard.

On définit également une condition plus forte, appelé polyconvexité, qui se pose naturellement quand on essaye de généraliser les notions de dualité pour les fonctions convexes au contexte vectoriel. On peut raconter toutes ces définitions à travers le schéma ci-dessous :

$$f\ convexe \Rightarrow\ f\ polyconvexe\ \Rightarrow\ f\ quasiconvexe\ \Rightarrow\ f\ rang\ un\ convexe.$$

étant les contre-implications fausses, pour m, $n \geq 2$. est un problème reste encore un problème ouvert.

En général la fonctionnelle I n'est pas faiblement semi-continue inférieurement, de ce fait, on ne peut pas appliquer les méthodes directes. Pour contourner cette difficulté on considère le problème relaxé :

$$\inf\left\{\bar{I}(u) = \int_\Omega Qf\big(\nabla u(x)\big)dx\right\}, \qquad \text{(QP)}$$

où

$$Qf(\xi) = \inf \left\{ \frac{1}{mes(\Omega)} \int_{\Omega} f(\xi + \nabla u(x))dx, \quad u \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^n) \right\}$$

désigne l'enveloppe quasi-convexe de f, qui est la plus grande fonctions quasi- convexe majorée par f. Notons par ailleurs que f est quasi-convexe si et seulement si $Qf = f$.

Notre mémoire est composé essentiellement de trois chapitres liées, dans le premier chapitre on présente quelques généralités et notions de base concernant la convergence faible et faible $*$, les espaces de Sobolev et la semi continuité inférieure faible de la fonctionnelle énergie.

Le deuxième chapitre est consacré à l' étude des différentes notions de convexité généralisés qui intervienne dans l ' étude des problème de minimisation ainsi que le lien existant entre ses différentes notions et la semi-continuité inferieure faible de la fonctionnelle énergie.

Dans le dernier chapitre, on traite le cas où la fonction f n'est pas convexe (dans le cas scalaire $n = 1$ ou $m = 1$) ou pas quasi-convexe (dans le cas vectoriel $n \geq 2$ et $m \geq 2$) et on introduit le problème relaxé associé ainsi que les enveloppes correspondantes aux différentes notions de convexités généralisées.

CHAPITRE 1

RAPPELS DES OUTILS DE BASE

On va introduire des notions, définitions et des théorèmes qu'on utilisera plus tard.

1.1 Rappel sur les opérations vectorielles

Dans ce tout qui suit, sauf mention contraire Ω désigne un ouvert bornée de $\mathbb{R}^n$

1.1.1 Définitions

Produit scalaire

Définition 1.1.1 *Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls est le réel, noté $u \cdot v$ (ou $< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >$) défini par :*

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||u|| \times ||v|| \times cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Rang d'une matrice

Définition 1.1.2 *On appelle rang d'une matrice A (carrée ou non), le nombre de colonnes et/ou de lignes linéairement indépendantes de cette matrice.*

1.1.2 Principaux opérateurs différentiels

L'analyse vectorielle fait intervenir à la fois des outils analytiques (dérivées partielles) et du calcul vectoriel. On donnera les trois operateurs d' analyse vectoriel qu' on utilisera par la suite.

Opérateur différentiel nabla :

L' espace étant rapporté à la base orthonormale directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on définit l 'opérateur aux dérivées partielles nabla par :

$$\overrightarrow{\nabla} = (\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k})$$

On notera que nabla est un opérateur aux dérivées partielles, et pas un vecteur. Il opère à gauche en utilisant les trois types de multiplication vectorielle.

Opérateur différentiel gradient :

Soit d 'abord $u = u(m)$ une fonction de trois variables (fonction scalaire) ; on définit le gradient de u par :

$$\overrightarrow{grad}\, u = \overrightarrow{\nabla} u = (\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k})u = \frac{\partial u}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overrightarrow{k}$$

Définition 1.1.3 *Soit Ω un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n$, les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ sont désignées par $x = (x_1, x_2, ...x_n)$.*
Pour $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la dérivée partielle de u par rapport à la variable x_j, $j = 1, 2, ..., n$ est notée par $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, et

$$\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)_{1 \leq j \leq n}$$

Opérateur différentiel divergence :

Soit maintenant $E = E(M) = E_x \overrightarrow{i} + E_y \overrightarrow{j} + E_z \overrightarrow{k}$ un champ de vecteurs ; on définit la divergence par :

$$\begin{cases} div\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} = (\frac{\partial}{\partial x}\overrightarrow{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overrightarrow{k}).(E_x \overrightarrow{i} + E_y \overrightarrow{j} + E_z \overrightarrow{k}) \quad \text{avec } E_{\cdot} = \frac{\partial E}{\partial .} \\ div\overrightarrow{E} = \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{cases}$$

1.2 Topologie faible et topologie faible étoile

1.2.1 Topologie faible

Soit E un espace de Banach et E' son dual topologique, muni de sa norme duale. La topologie faible sur E est alors définie de la manière suivante :

Définition 1.2.1 *La topologie faible sur E, notée $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine (i.e. ayant le moins d'ouverts) rendant continus les éléments de E'.*

Lemme 1.2.2 *Soit X un espace topologique et φ une application de X vers E, alors φ est continue pour la topologie $\sigma(E, E')$ si et seulement si pour tout $f \in E'$, $f \circ \varphi$ est continue sur X.*

Théorème 1.2.3 *Soit (x_n) une suite de E. On a $x_n \to x$ converge faiblement pour $\sigma(E, E') \Leftrightarrow \forall f \in E', \quad f(x_n) \to f(x)$ ou $< f, x_n > \longrightarrow < f, x >$.*

1.2.2 Topologie faible-$*$

Définition 1.2.4 *La topologie faible-$*$ sur E', notée $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine (i.e. ayant le moins d'ouverts) rendant continus les formes linèaires $f \mapsto f(x)$ pour tout $x \in E$.*

Théorème 1.2.5 *Soit (u_n) une suite de E'. On a*
$u_n \rightharpoonup u$ pour la topologie faible $*$ $(E', E) \Leftrightarrow \forall x \in E, \quad < u_n, x > \longrightarrow < u, x >$.

pour plus de détail (voir [5])

1.3 Espaces réflexifs, Espaces séparables

1.3.1 Espaces réflexifs

Etant donné un espace de Banach E, on rappelle que E s'injecte dans son bidual E'' via l'injection canonique $J : E \to E''$ définie par :

$$J(x)(f) := f(x), \ \ \forall x \in E, \ \forall f \in E'.$$

Il résulte que J est une isométrie de E sur E'', en particulier J est une injection continue.

Définition 1.3.1 *On dit que l'espace vectoriel normé E est réflexif si J est surjective.*

Autrement dit, dire que E est réflexif revient à dire qu'on peut identifier E'' à E. Evidemment tout espace de Hilbert est réfexif (ceci découle du théoréme de Riesz qui permet d'identifier un espace de Hilbert à son dual topologique). Pour tout $p \in]1, \infty]$ les espaces L^p *et* $W^{1,p}$ sont réflexifs. Par contre L^1, $W^{1,1}$, L^∞, $W^{1,\infty}, C^0,$ les espaces de mesures ne sont pas réflexifs.

Théorème 1.3.2 (Kakutani) *Soit E un espace de Banach alors E est réflexif si et seulement si $\mathcal{B}_E$ est compact pour $\sigma(E, E')$.*

Pour la démonstration du théorème de kakutani (voir [5])

Théorème 1.3.3 *Soit E un espace de Banach réflexif et $(x_n)_n$ une suite bornée de E alors $(x_n)_n$ possède une sous-suite qui converge faiblement. (voir [8])*

1.3.2 Espaces séparables

Définition 1.3.4 *On dit que l'espace de Banach E est séparable si et seulement si E possède une partie dénombrable dense.*

Proposition 1.3.5 *Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable alors E est séparable.*

Pour plus de détails (voir [5])

Soit X un espace de Banach, et $X^\star$ son dual. On désigne par $||\cdot||_X$ la norme dans X dans l'espace dual $X^\star$

Théorème 1.3.6 *On suppose que X est un espace de Banach réflexif.*
Si (u_n) est une suite dans X, et $C > 0$ tel que

$$\|u_n\|_X \leq C$$

alors on peut trouver un u_k sous-suite de (u_n) et $u \in X$, de telle sorte que

$$u_k \rightharpoonup u \ \ faiblement\ dans\ X$$

Théorème 1.3.7 *On suppose maintenant que X est un espace de Banach séparable.*
Si $u_n^\star \in X^\star$ et $K > 0$ tel que

$$||u_n^\star||_{X^\star} \leq K$$

alors il existe une sous-suite $u_k^\star$ de $u_n^\star$, et $u^\star$ tels que

$$u_k^\star \rightharpoonup^* u^\star\ converge\ faible\ *\ vers\ u\ dans\ X$$

1.4 Rappels sur les Distributions

La théorie des distributions permet, en se plaçant dans un cadre plus large que celui, classique, des équations différentielles ordinaires, de résoudre de nombreuses équations issues de la physique, de la mécanique des fluides ou du traitement du signal. Elle permet ainsi, par exemple, de dériver, même indéfiniment, en un certain sens, une fonction qui n'est dérivable au sens usuel, et des informations essentielles tels que les discontinuités des fonctions ne sont pas perdues par dérivation. Une des idées fondamentales de cette théorie consiste à définir les distributions au travers de leur action sur un espace de fonctions, dites fonctions testes.

1.4.1 Espace vectoriel $\mathcal{D}(\Omega)$

Définition 1.4.1 (Support d'une distribution) *Soit $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ on appelle support de f et l'on note $supp(f)$ le complémentaire dans Ω du plus grand ouvert sur lequel f est nulle. On définit par :*

$$supp(f) = \overline{\{x \ \ tel\ que\ \ f(x) \neq 0\}}$$

On dit que f est à support compact si son support est compact.

Définition 1.4.2 (Espace des fonctions tests) *Soit Ω ouvert de $\mathbb{R}$.*
L'espace des foncions testes noté par $\mathcal{D}(\Omega)$ (par fois $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$) est l'espace des fonctions indéfiniment dérivable a supports compacts

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) / \ \ supp(\varphi) \ \ est\ compact\}.$$

1.4.2 Distributions

Définition 1.4.3 *Une distribution sur Ω est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Les distributions forment un espace vectoriel noté $\mathcal{D}'(\Omega)$, c'est le dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$*

Une distribution T est donc un application de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ ou $(\mathbb{C})$ faisant correspondre à une fonction test φ un nombre complexe noté $< T(t), \varphi(t) >$, ou plus simplement $< T, \varphi >$. Les propriétés de linéarité et de continuité se traduisent respectivement par

$$\begin{cases} \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega) : & < T, \varphi_1 + \varphi_2 >=< T, \varphi_1 > + < T, \varphi_2 > \\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \mathbb{C}, & < T, \lambda\varphi >= \lambda < T, \varphi > \end{cases}$$

et pour la continuité par : Si φ_k converge dans $\mathcal{D}$ vers φ, la suite $< T, \varphi_k >$ converge au sens usuel vers $< T, \varphi >$, c'est à dire :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon), \qquad k \geq N \qquad | < T, \varphi > - < T, \varphi_k > | \leq \epsilon$$

La Dérivation Dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Il sagit de définir la dériveé de tout ordre d'une distribution quelconque ; donc distribution régulier associe aux fonction intégrable à partir des notion uselle.

Définition 1.4.4 *Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$*

On définit La dérivée de T au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$ par :

$$< \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi >= - < T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} >, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

1.5 Espaces de Sobolev

1.5.1 Espaces L^p

On présente ici quelques définitions et propriétés des espaces L^p (voir [10], [4])

Définition 1.5.1 *(**Espace** $L^1(\Omega)$)*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$. L'espace $L^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables intégrables (pour la mesure de Lebesgue[1]) sur Ω. On note :

$$||u||_{L^1(\Omega)} := \int_\Omega \Big|u(x)\Big| dx.$$

Définition 1.5.2 *(**L'espace** $L^p(\Omega)$)*

On note $L^p(\Omega)$ l'ensemble des fonctions définit par :

$\diamondsuit$ *Si $1 \leq p < \infty$ on a*

$$L^p(\Omega) := \Big\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \ \ u \text{ mesurable et } |u|^p \in L^1(\Omega) \Big\}.$$

$$L^p(\Omega) = \big\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \big\}$$

que l'on munit de la norme :

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

1. Henri Léon Lebesgue (28 juin 1875 à Beauvais - 26 juillet 1941 à Paris) est un mathématicien français. Il est reconnu pour sa théorie d'intégration publiée originalement dans sa dissertation Intégrale, longueur, aire à **l'Université de Nancy** en 1902.

♢ *Si* $p = \infty$ *on a*

$$L^{\infty}\big(\Omega\big) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ \ u \text{ mesurable et } \exists\, C > 0, \text{ telle que } |u(x)| \leq C \ \ pp^{2} \text{ sur } \Omega\}$$

dont la norme est :

$$\|u\|_{L^{\infty}} = \inf_{x\in\Omega} \Big\{C, \ \ \big|u(x)\big| \leq C \ \ p\cdot p.\Big\}.$$

Proposition 1.5.3 ***(Inégalité de Hölder**[3]**)***

Pour tout $f \in L^{p}(\Omega)$ *et* $g \in L^{p'}(\Omega)$, $|fg| \in L^{1}(\Omega)$ *et on a l'inégalité :*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq ||f||_{L^{p}}||g||_{L^{p'}}$$

Définition 1.5.4 *une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est dite convexe lorsque :*

$$\forall (x, y) \in I \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Proposition 1.5.5 ***(Inégalité de Jensen**[4]**)***

Soit $\rho \in L^{1}(\Omega)$ *une fonction positive telle* $\int_{\Omega} \rho(x)dx = 1$. *Alors, pour toute fonction* f *mesurable telle que* $f\rho \in L^{1}(\Omega)$ *et pour toute fonction* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mesurable convexe, on a :*

$$\varphi\bigg(\int_{\Omega} f(x)\rho(x)\bigg) \leq \int_{\Omega} \varphi\big(f(x)\big)\rho(x)dx.$$

Pour plus détails (voir [8])

Notions de Convergences dans L^{p}

Définition 1.5.6 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^{m}$.

Soit $1 \leq p \leq +\infty$. *On dit qu'une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge fortement vers* u *dans* L^{p} *si* u_n, $u \in L^{p}$ *et on note* $u_n \longrightarrow u$ *dans* $L^{p}(\Omega)$. *Si*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^{p}} = 0$$

2. presque partout, c'est à dire partout sauf éventuellement sur un ensemble de mesure nulle.
3. Otto Ludwig Hölder (22 décembre 1859 - 29 août 1937) est un mathématicien allemand né á Stuttgart.
4. Johan Jensen est un mathématicien danois (8 mai 1859 (Naksov) - 5 mars 1925 (Copenhague)).

Définition 1.5.7 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$.*

$\Diamond$ *Si $1 < p < +\infty$, on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in N}$ converge faiblement vers u dans L^p, et on note $u_n \rightharpoonup u$, si u_n, $u \in L^p$ et si*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_\Omega u_n\varphi = \int_\Omega u\ \varphi, \quad \forall\varphi \in L^{p'}$$

$\Diamond$ *Si $p = +\infty$, on dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $(*)$-faiblement vers u dans L^∞, et on note $u_n \rightharpoonup^* u$ dans L^∞, si $u_n, u \in L^\infty$ et si*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_\Omega u_n\varphi = \int_\Omega u\ \varphi, \quad \forall\varphi \in L^1$$

1.5.2 Espaces de Sobolev

Les espaces de Sobolev ont été introduits au début du siècle et ont permis de résoudre bon nombre de problèmes concernant les équations aux dérivées partielles restés sans réponse jusque là. Nous nous limiterons aux espaces les plus utiles en gardant bien à l'esprit que la théorie sous-jacente est beaucoup plus vaste. Dans ce qui suit, sauf mention explicite du contraire, on suppose l'ouvert Ω borné. Pour plus détail (voir [4])

Définition 1.5.8 *(**Espace** H^1)*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$. On définit l'espace vectoriel par $H^1(\Omega)$

$$H^1(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : \partial u/\partial x \in L^2(\Omega)\}.$$

Muni de la norme :

$$\|u\|_{H^1} := \left(\sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^2 dx + \int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

La norme de $H^1(\Omega)$ est issue d'un produit scalaire notée $\langle u, v\rangle_{H^1}$ et définie par :

$$< u, v >_{H^1} := \sum_{i=1}^N \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \sum_{i=1}^N \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

$$= \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx + \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Dans cette définition la dérivée partielle D^α u est sous-entendue prise au sens des distributions.

Définition 1.5.9 ***(Espace** H^m**)***
De la même façon que dans la définition 1.5.7, on définit les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ où m est un entier strictement positif par :

$$H^m(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^m, |\alpha| \leq m\}.$$

On le munit de la norme naturelle :

$$\|u\|_{H^m} := \left(\sum_{\alpha:|\alpha|^2 \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u| dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.5.10 ***(L'espace de Sobolev** $W^{1,p}(\Omega)$**)***
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m$, pour tout $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par :

$$W^{1,p}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \ \ u \in L^p(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{u}_{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \ \ \forall 1 \leq i \leq n\}$$

$\diamondsuit$ *Si $1 \leq p < \infty$, alors on définit la norme :*

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \left(\|u\|_{L^p}^p + \|\nabla u\|_{L^p}^p\right)^{1/p}$$

$\diamondsuit$ *Si $p = \infty$, alors on définit la norme :*

$$\|u\|_{W^{1,\infty}} = \max\left\{\|u\|_{L^p}, \|\nabla u\|_{L^p}\right\}$$

Notions de Convergences dans les espaces $W^{1,p}$

Définition 1.5.11 *Une suite $(u_n)_{n\in N}$ converge fortement vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$, si et seulement si*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|u_n - u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = 0$$

Définition 1.5.12 $\diamondsuit$ *Soit $1 \leq p \leq \infty$. Une suite $(u_n)_{n\in N}$ converge faiblement vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$, si $u_n, u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u_n \rightharpoonup u$ dans L^p et $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ dans L^p. On note alors $u_n \rightharpoonup u$ dans $W^{1,p}$*

$\Diamond$ *On dit que* u_n *converge faible* $*$ *vers* u *dans* $W^{1,\infty}(\Omega)$ *si* $u_n, u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $u_n \rightharpoonup^* u$ *dans* L^∞ *et* $\nabla u \rightharpoonup^* \nabla u$ *dans* L^∞. *On note alors* $u \rightharpoonup^* u$ *dans* $W^{1,\infty}$.

Définition 1.5.13 *(**Espaces de Sobolev** $W^{m,p}(\Omega)$)*
pour tout $1 \leq p \leq \infty$ *et pour tout* $m \leq \mathbb{N}$, $m \geq 1$, *on peut définir les espaces de Sobolev*[5]

$$W^{m,p}(\Omega) := \Big\{ u \in L^p(\Omega) : \ \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \ \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N; |\alpha| \leq m \Big\},$$

que l'on munit de la norme :

$$\| u \|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \| D^\alpha u \|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} .$$

Proposition 1.5.14 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^N$. *On définit*

$$H^1(\Omega) := \{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad \forall i = 1, ..., N \}.$$

$$\| u \|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_{L^\infty(\Omega)}$$

est une norme sur l'espace vectoriel $W^{m,p}(\Omega)$.

Définition 1.5.15 *Pour* $\Omega := (0,1)^n$, *on définit*

$$W^{1,\infty}_{per}(\Omega, \mathbb{R}) := \{ u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : u(x + e_i) = u(x), i = 1, ..., n \}$$

Où $\{e_1, ..., e_n\}$ *la base orthogonal standard*

1.6 Semi-continuité inférieure

Dans ce paragraphe on donne la définition et les propriétés de la semi continue infére iure faible, pour plus des détails [voir [3]]

Définition 1.6.1 *On dit que* f *est semi-continue inférieurement en* x_0 *si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

5. Sergueé Lvovitch Sobolev,(6 octobre 1908-3 janvier 1989) est un mathématicien et physicien russe de l'époque soviètique.

1. *pour tout* $\epsilon > 0$, *il existe un voisinage* U *de* x_0 *tel que pour tout* $x \in U$: $f(x) \geq f(x_0) - \epsilon$
2. $$\lim_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

Définition 1.6.2 *La fonctionnelle* I *est dite sequentiellement failbelement semi-continue inférieurement (on écrit s.c.i. faiblement séquentiellement) si et seulement si pour toute suite* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *d'éléments de* X :

$$x_n \rightharpoonup x \ \ faiblement \ \Rightarrow I(x) \leq \lim_{n \to +\infty} \inf I(x_n)$$

On dit aussi s.c.i. pour la convergence faible.

CHAPITRE 2

NOTIONS DE CONVEXITÉ GÉNÉRALISÉE

2.1 Motivation

Le calcul des variations est l'un des sujets classiques des mathématiques. Il a attiré un grand nombre de mathématiciens célèbres. En mathématiques, en physique, dans les sciences de l'ingénieur ou même en économie ou en écologie, les modèles sont souvent exprimés en termes d'un principe de minimalité ou de maximalité. C'est précisément la question centrale du calcul des variations.

Avant d'entamer le cas générale on commence par l'étude des minimums sur les espaces de dimension finie, on considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ semi continue inférieurement et coercive. (i.e. $|f(x)| \geq c|x|^p \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ avec\ c > 0\ et\ p \geq 1.$), alors la fonction f admet au moins un minimum.

En effet :

Soit (x_n) une suite minimisante de f c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \inf f = \mu$$

Il résulte de l'hypothèse de coercivité que la suite (x_n) est borné, on peut alors extraire une sous-suite (x_{n_k}), de (x_n) qui converge vers un élément x de $\mathbb{R}^n$.

Clairement on a,

$$f(x) \geq \mu, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

Comme f est semi-continue inférierement alors

$$f(x) \leq \liminf f(x_{n_k}) = \mu$$

Et par conséquent,

$$f(x) = \mu$$

Et donc x est un point minimum de f.

On ne peut pas adapter cette technique au cas d'espace de dimension infinie car ses espaces ne possèdent pas des propriétés de compacité comme c'est le cas dans les espaces de dimension finie. Néanmoins une telle propriété est valable relativement à la topologie faible. Ainsi on considère le problème de minimisation (P) suivant qui est le problème modèle du calcul des variations.

$$\inf \left\{ I(u) = \int_\Omega f\big(\nabla u(x)\big) dx \right\}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{P}$$

Soit u_k une suite minimsante du problème est sous des hypothèses de coercivité nécessairement bornée dans $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, Elle admet donc une sous suite faiblement convergente

$$u_k \rightarrow \bar{u} \; dans \; W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) - faible. \tag{2.1}$$

Pour démontrer enfin que $\bar{u}$ est un minimum de (P), il suffit de montrer que (2.1) entrâine que

$$I(\bar{u}) \leq \lim_{n \to +\infty} \inf I(u_k)$$

Ce qui revient à supposer que la fonctionnelle I est faiblement semi-continue inférieurement dans $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. Le raisonnement précédent nous conduit alors au résultat d'existence suivant :

Théorème 2.1.1 *Si X est reflixif, $I : X \rightarrow \mathbb{R}$ coercive et faiblement sci alors I admet une minimisation.*

On donne maintenant une condition nécessaire et suffisante sur f qui garantit la semi continuité inférieur faible de la fonctionnelle énergie.

Théorème 2.1.2 *Soit $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ une fonction quasi-convexe, telle que*

$$-\alpha(1 + ||\xi||^q) \leq f(\xi) \leq (1 + ||F||_p)$$

où $a \geq 0$,$1 \leq q < p$. Alors la fonctionnelle

$$I(u) = \int_\Omega f(\nabla u(x))dx$$

est faiblement semi-continue inférieurement dans $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$

Pour la demonstration du théorème voir [9])

Théorème 2.1.3 *Soient $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ et*

$$I(u) = \int_\Omega f(\nabla u(x))dx.$$

Si I est faible étoile semi-continue inférieurement dans $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, alors f est quasi-convexe.

pour plus détails voir [9]

Remarque : La semi-continuité inférieure faible dans $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ entrâine la semi-continuité inférieure faible étoile dans $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, ainsi la quasi-convexité est aussi une condition nécessaire pour la semi-continuité inférieure $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$-faible.
C'est ce qui a conduit Morrey à introduire en 1952 une notion nouvelle, celle de quasi-convexité, qui caractérise en fait la semi-continue inférieure faible dans $W^{1,p}$. La notion de quasi-convexité est une condition non locale ; de ce fait il est difficile de la vérifier dans la pratique. Ainsi d'autre notions de convexité ont été introduite, c'est l'objet du paragraphe suivant (voir [6], [11]).

2.2 Notions de convexité généralisée

2.2.1 Fonction Convexe

Définition 2.2.1 *Une fonction $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe si*

$$f\big(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta\big) \leq \lambda f(\xi) + (1-\lambda)f(\eta)$$

pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et tous ξ et $\eta \in \mathbb{R}^m$

Exemple 2.2.2 *$x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$. en effet, pour tous ξ, η de I pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a les équivalences :*

$$[\lambda\xi + (1-\lambda)\eta]^2 \leq \lambda\xi^2 + (1-\lambda)\eta^2$$

En effet,

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda(1-\lambda)\xi\eta + (1-\lambda)^2\eta^2 - \lambda\xi^2 - (1-\lambda)\eta^2 &= \lambda(1-\lambda[-\xi^2 + 2\xi\eta - \eta^2]) \\ &= -\lambda(1-\lambda)(\xi-\eta)^2) \leq 0. \end{aligned}$$

2.2.2 Fonction Polyconvexe

Définition 2.2.3 *une fonction $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est polyconvexe s'il existe une fonction convexe $F : \mathbb{R}^{\tau(n,m)} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, telle que*

$$f(\xi) = F(T(\xi)),$$

où $T : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{\tau(n,m)}$ est définie par :

$$T(\xi) := (\xi, adj_2\xi, ..., adj_{n\wedge m}\xi).$$

On note par $adj_s\xi$ la matrice de tous les mineurs $s \times s$ de la matrice $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$, avec $2 \leq s \leq n \wedge m = min\{n, m\}$ et

$$\tau(n,m) := \sum_{s=1}^{n\wedge m} \sigma(s),$$

où

$$\sigma(s) := C_m^s C_n^s = \frac{m!n!}{(s!)^2(m-s)!(n-s)!}$$

Remarque :

1. Dans le cas $n = m = 2$ alors $T(\xi) = (\xi, \det\xi)$. Une fonction $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ est alors polyconvexe s'il existe une fonction convexe F définie de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(\xi) = F(\xi, \det\xi)$.
2. Si $n = m = 3$, alors $T(\xi) = (\xi, adj_2\xi, det\xi)$, où $adj_2\,\xi$ désigne le vecteur de $\mathbb{R}^9$ constitué de tous les mineurs 2×2 de ξ. Une fonction $f : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ est alors polyconvexe s'il existe une fonction $F : \mathbb{R}^{19} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\xi) = g(\xi, adj_2\xi, \det\xi)$

Exemple 2.2.4 *Les fonctions $F(\xi) = det\xi$ et $F(\xi) = |det\xi|$ sont polyconvexes.*

Théorème 2.2.5 *Soit $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ une fonction polyconvexe.*

(i) *S'il existe $\alpha \geq 0$ et $0 \leq p < 2$ telle que*

$$f(\xi) \leq \alpha(1 + |\xi|^p) \qquad pour \quad tout \quad \xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

alors f convexe.

(ii) *Il existe $\gamma \geq 0$ telle que*

$$f(\xi) \geq -\gamma(1 + |\xi|^{n\wedge m}), \quad pour \quad tout \quad \xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

pour plus détails (voir [2], [6])

2.2.3 Fonction Quasiconvexe

Définition 2.2.6 *une fonction $f : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ borélienne localement intégrable, est quasiconvexe si*

$$f(\xi) \leq \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega f(\xi + \nabla\varphi(x))dx$$

pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domaine borné, pour tout, $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ (on dénote par mes(Ω) la mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω).

Proposition 2.2.7 *une fonction $f : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ Borel mesurable et localement intégrable. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bornée ouvert. on a l'inégalité suivante :*

$$f(\xi) \leq \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega f(\xi + \nabla\varphi(x))dx \tag{2.2}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et pour tout $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$. alors on a

$$f(\xi) \leq \frac{1}{mes(\Theta)} \int_\Theta f(\xi + \nabla\psi(x))dx \tag{2.3}$$

pour tout $\Theta \subset \mathbb{R}^n$ domaine borné, pour tout, $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\psi \in W_0^{1,\infty}(\Theta, \mathbb{R}^m)$.

DÉMONSTRATION :

D'aprés (2.2) supposons que (2.3) est vérifiée. Donc on a $\psi \in W^0_{1,\infty}(\Theta, \mathbb{R}^m)$ est donnée aprés que $a > 0$ soit choisi suffisament grand

$$\Theta \subset Q_a := (-a, a)^n$$

On défini par :

$$v(x) = \begin{cases} \psi(x), & \text{si} \quad x \in \Theta; \\ 0, & \text{si} \quad x \in Q_a - \Theta. \end{cases}$$

Alors on a $v \in W^{1,\infty}_0(Q_a, \mathbb{R}^m)$.

Soit $x_0 \in \Omega$ et choisissons ν suffisamment grand alors

$$x_0 + \frac{1}{\nu} Q_a = x_0 + \Big(-\frac{a}{\nu}, \frac{a}{\nu} \Big)^n \subset \Omega$$

Définissons :

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{1}{\nu} v(\nu(x - x_0)), & \text{si} \quad x \in x_0 + \dfrac{1}{\nu} Q_a \\ 0, & \text{si} \quad x \in \Omega - [x_0 + \dfrac{1}{\nu} Q_a] \end{cases}$$

Observe que $\varphi \in W^{1,\infty}_0(\Omega, \mathbb{R}^m)$ et

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(\xi + \nabla\varphi(x))dx &= f(\xi) mes(\Omega - [x_0 + \frac{1}{\nu} Q_a]) + \int_{[x_0 + \frac{1}{\nu} Q_a]} f\Big(\xi + \nabla v\big(\nu(x - x_0)\big)\Big) dx \\ &= f(\xi)\Big[mes(\Omega) - \frac{mes(Q_a)}{\nu^n}\Big] + \frac{1}{\nu^n} \int_{Q_a} f(\xi + \nabla v(y)) dy \\ &= f(\xi)\Big[mes(\Omega) - \frac{mes(Q_a)}{\nu^n} + \frac{mes(Q_a - \Theta)}{\nu^n}\Big] + \frac{1}{\nu^n} \int_\Theta f(\xi + \nabla\psi(y)) dy \end{aligned}$$

Appliquant, dans (2.2). Donc on déduit que

$$f(\xi) mes(\Omega) \leq f(\xi)\Big[mes(\Omega) - \frac{mes(\Theta)}{\nu^n}\Big] + \frac{1}{\nu^n} \int_\Theta f(\xi + \nabla\psi(y)) dy$$

Ce qui est équivalent à (2.3).

Proposition 2.2.8 *Soit $f : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction Borel mesurable et localement intégrable les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *f est quasiconvexe*

(ii) *pour* $\Omega = (0,1)^n$, *On a*

$$f(\xi) \leq \int_\Omega f(\xi + \nabla\psi(x))dx \tag{2.4}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *et pour tout* $\psi \in W^{1,\infty}_{per}(\Omega, \mathbb{R})$.

Démonstration :

$(ii) \Rightarrow (i)$. D'aprés la proposition (2.2.7) et le fait qu'on a

$$W^{1,\infty}_0(\Omega, \mathbb{R}^m) \subset W^{1,\infty}_{per}(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

On trouve l'implication

$(i) \Rightarrow (ii)$. Soit d'abord $\psi \in W^{1,\infty}_{per}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ et on observe que $\nu \in \mathbb{N}$ et si

$$\psi_\nu(x) := \frac{1}{\nu}\psi(\nu x)$$

alors, d'aprés la périodécité de ψ, on a

$$\int_\Omega f(\xi + \nabla\psi_\nu(x))dx = \frac{1}{\nu^n}\int_{\Omega_\nu} f(\xi + \nabla\psi_(y))dy = \int_\Omega f(\xi + \nabla\psi(x))dx \tag{2.5}$$

choisissons $\eta_\nu \in C^\infty_0(\Omega)$ telle que $0 \leq \eta_\nu \leq 1$ de Ω,

$$\eta_\nu \equiv 1 \ \ sur \ \ \Omega_\nu := \Big(\frac{1}{\nu}, 1 - \frac{1}{\nu}\Big)^n \ et \ \|\nabla\eta_\nu\|_{L^\infty} \leq c_1\nu$$

où $c_1 > 0$ est une constante indépendente de ν.

Soit maintenant,

$$\varphi_\nu(x) := \eta_\nu(x)\psi_\nu(x).$$

et observons que $\varphi_\nu \in W^{1,\infty}_0(\Omega, \mathbb{R}^m)$ et

$$\begin{aligned} \|\nabla\varphi_\nu - \nabla\psi_\nu\|_{L^\infty} &= \|(\eta_\nu - 1)\nabla\psi_\nu + \nabla\eta_\nu \otimes \psi_\nu\|_{L^\infty} \\ &\leq c_2\|\psi\|_{W^{1,\infty}} \end{aligned}$$

Où c_2 une constante indépendente de ν. et comme f une fonction localement intégrable, on peut trouver une constante c_3 indépendente de ν, alors

$$\|f(\xi\nabla\psi_\nu) - f(\xi\nabla\varphi_\nu)\|_{L^\infty} \leq c_3$$

D'aprés (2.5) et par la quasiconvexité de f, on trouve

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(\xi+\nabla\psi(x))dx &= \int_\Omega f(\xi+\nabla_\nu(x))dx+\int_\Omega\Big[f(\xi+\nabla\psi_\nu(x))-f(\xi+\nabla\varphi_\nu(x))\Big]dx\\ &= \int_\Omega f(\xi+\nabla_\nu(x))dx+\int_{\Omega-\Omega_\nu}\Big[f(\xi+\nabla\psi_\nu(x))-f(\xi+\nabla\varphi_\nu(x))\Big]dx\\ &\geq f(\xi)-c_3\,mes(\Omega-\Omega_\nu)\end{aligned}$$

Et comme $\nu\to\infty$ on vas obtenir (2.4)

2.2.4 Fonction rang un convexe

Définition 2.2.9 *une fonction $f:\mathbb{R}^{m\times n}\longrightarrow\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est rang un convexe si*

$$f(\lambda\xi+(1-\lambda)\eta)\leq\lambda f(\xi)+(1-\lambda)f(\eta)$$

Pour tout $\lambda\in[0,1]$, $\xi,\eta\in\mathbb{R}^{m\times n}$ tels que $rang\{\xi-\eta\}\leq 1$

Exemple 2.2.10 *La fonction $f:x\mapsto det(x)$ est rang un convexe.*
On va montrer que f est rang un convexe. Soient $\xi,\eta\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$det(\lambda\xi+(1-\lambda)\eta) \leq \lambda\,det\xi+(1-\lambda)\,det\eta,\qquad \lambda\in[0,1]$$

Avec le rang $\{\xi-\eta\}\leq 1$, ce qui verifiée la définition de la convexité de rang un

Théorème 2.2.11 *Si $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{m\times n})$ alors la convexsité de rang un est equivalente à la condition de Legendre-Hadamard (ou la condition d'ellipticité)*

$$\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial\xi_i^\alpha\partial\xi_j^\beta}\lambda^i\lambda^j\mu_\alpha\mu_\beta\ \geq 0$$

pour tout $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)\in\mathbb{R}^m$, $\mu=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_m)\in\mathbb{R}^n$.
En effet, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^m$, $\mu\in\mathbb{R}^n$, la matrice $\lambda\otimes\mu=(\lambda_i\mu_j)_{1\leq i\leq m,\,1\leq j\leq n}$ est une matrice de rang un et la fonction $t\in\mathbb{R}\mapsto\varphi(t)=f(\xi+t\lambda\otimes\mu)$ est de classe $\mathcal{C}^2$.
La rang un convexité de f est équivalente à la convexité de φ,or

$$\varphi''(0)=\sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2 f(\xi)}{\partial\xi_i^\alpha\partial\xi_j^\beta}\lambda^i\lambda^j\mu_\alpha\mu_\beta$$

d'où le résultat. pour plus détails (voir [3])

Caractérisation des fonctions rang-1-convexes

Définition 2.2.12 *Soit I un entier quelconque et $\lambda \in \Lambda_I$ telle que*

$$\Lambda_I = \Big\{\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_I) : \lambda_i \geq 0 \quad et \quad \sum_{i=1}^{I} \lambda_i = 1\Big\}.$$

Soit $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}, 1 \leq i \leq I$. On dit que $(\lambda_i, \xi_i)_{1\leq i\leq I}$ satisfont $\big(H_I\big)$ si

1. *Si $I = 2$, alors rang $\{\xi_1 - \xi_2\} \leq 1$*
2. *Si $I > 2$, on a, à une permutation prés, rang $\{\xi_1 - \xi_2\} \leq 1$ et pour tout $2 \leq i \leq I-1$, si l'on pose*
$$\begin{cases} \mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2, & \eta_1 = \dfrac{\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ \mu_i = \lambda_{i+1}, & \eta_i = \xi_{i+1}. \end{cases}$$
alors $(\mu_i, \eta_i)_{1\leq i\leq I-1}$ satisfont (H_{I-1})

Pour plus détail (voir [7])

Exemples

1. Si I=2, $\lambda \in \Lambda_2$, alors $(\lambda_1, \xi_1), (\lambda_2, \xi_2)$ satisfont H_2, si et seulement si,
$$rang\{\xi_1 - \xi_2\} \leq 1$$
2. Si $I = 3$, $\lambda \in \Lambda_3$, alors $(\lambda_i, \xi_i)_{1\leq i\leq 3}$ satisfont (H_3) si, à une permutation près on a
$$\begin{cases} rang\{\xi_1 - \xi_2\} \leq 1 \\ rang\big\{\xi_3 - \dfrac{\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\big\} \end{cases}$$
3. Si $I = 4$, $\lambda \in \Lambda_4$, alors $(\lambda_i, \xi_i)_{1\leq i\leq 3}$ satisfont (H_4) si, à une permutation près l'une des deux condition suivantes est satisfaite :

   (a)
$$\begin{cases} rang\{\xi_1 - \xi_2\} \leq 1 \\ rang\Big\{\xi_3 - \dfrac{\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\Big\} \leq 1 \\ rang\Big\{\xi_4 - \dfrac{\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}\Big\} \leq 1 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} rang\{\xi_1 - \xi_2\} \leq 1, \;\; rang\{\xi_4 - \xi_3\} \leq 1 \\ rang\left\{ \dfrac{\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2}{\lambda_1 + \lambda_2} + \dfrac{\lambda_3\xi_3 + \lambda_4\xi_4}{\lambda_3 + \lambda_4} \right\} \leq 1 \end{cases}$$

Une condition nécessaire pour que $\big(\lambda_\nu, \xi_\nu\big)_{1\leq\nu\leq I}$ satisfont (H_I) est la suivante :

Proposition 2.2.13 *Si $(\lambda_i, \xi_i)_{1\leq i\leq I}$ satisfont H_I alors :*

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq I} \lambda_i\lambda_j \det(\xi_i - \xi_j) = 0.$$

On donne mainetenant une autre caractérésation des fonction rang un convexes.

Théorème 2.2.14 *Soit $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f est une fonction rang un convexe

(ii) On a l 'expression

$$f\Big(\sum_{i=1}^{I} \lambda_i\xi_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{I} \lambda_i f(\xi_i) \tag{2.6}$$

Pour chaque famille $(\lambda_i, \xi_i)_i$ qui satisfait la condition (H_I)

Démonstration :

On montre ce résultat par récurrence sur I. Par définition de la rang une convexité (2.6) est vrai pour $I = 2$. Ensuite, on suppose que l'on a à l'ordre $I - 1$. On obtient

$$\sum_{i=1}^{I} \lambda_i f(\xi_i) = (\lambda_1 + \lambda_2)\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} f(\xi_1) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} f(\xi_2)\Big) + \sum_{i=3}^{I} \lambda_i f(\xi_i)$$

D'où en utilisant la rang un convexité de f, et l'hypothése H_I, il vient

$$(\lambda_1 + \lambda_2) f\Big(\frac{\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\Big) + \sum_{i=3}^{I} \lambda_i f(\xi_i) \leq \sum_{i=1}^{I} \lambda_i f(\xi_i)$$

2.2.5 Fonction séparément convexe

Définition 2.2.15 *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est séparément convexe si*

$$f(\lambda\xi + (1-\lambda)\xi) \leq \lambda f(\xi) + (1-\lambda) f(\xi)$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$ et tous $\xi, \eta \in \mathbb{R}^m$ tels que $\xi - \eta = se_i$, pour certains $s \in \mathbb{R}$ et $i = \{1, ..., m\}$ (e_i dénote le ième-vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$

Définition 2.2.16 *Une fonction f est dite polyaffine, un quasiaffine ou rang-1 affine si et seulement si f et $-f$:*
sont, respectivement, polyconvexes, quasiconvexe ou rang un convexe.

2.3 Lien entre les notions de convexité généralisé

On donne un résultat qui nous permet de comparer les diverses notions de convexitè introduites (voir [6]) :

Théorème 2.3.1 *(i) soit $f : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors*

$$f \text{ convexe} \;\Rightarrow\; f \text{ polyconvexe} \;\Rightarrow\; f \text{ quasiconvexe} \;\Rightarrow\; f \text{ rang un convexe.}$$

(ii) Si $m = 1$ ou $n = 1$, alors toutes ces notions sont équivalentes.

Remarque 2.3.2 *Toutes les implications réciproques sont fausses et pour la dernière (f quasiconvexe $\Rightarrow$ $f$rang un convexe) c'est le cas lorsque $n \geq 2, m \geq 3$ en effet, il existe un célèbre contre-exemple.*

On aura besoin du lemme suivant pour démontrer le théorème :

Lemme 2.3.3 *Soit $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et $T(\xi)$ est définie par :*
(i) Pour tout $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ avec le rang de $\{\xi - \eta\} \leq 1$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$ l'identité suivante est vérifiée :

$$T(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) = \lambda T(\xi) + (1-\lambda) T(\eta).$$

(ii) Pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ domaine bornée, pour tout, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{m\times n}$ et, $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ le résultat suivant est valable :

$$T(\xi) = \frac{1}{mes(\Omega)} \int_\Omega T(\xi + \nabla\varphi(x))dx.$$

Démonstration :

On considère le cas $m = n = 2$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 \end{pmatrix}$$

et

$$T(\xi) = (\xi, det\xi) = (\xi_1^1, \xi_2^1, \xi_1^2, \xi_2^2, \xi_1^1\xi_2^2 - \xi_2^1\xi_1^2).$$

(i) Comme le rang $\{\xi - \eta\} \leq 1$, il existe $a, b \in \mathbb{R}^2$ telle que

$$\eta = \xi + a \otimes b = \begin{pmatrix} \xi_1^1 + a^1b_1 & \xi_2^1 + a^1b_2 \\ \xi_1^2 + a^2b_1 & \xi_2^2 + a^2b_2 \end{pmatrix}.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} det(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) &= det(\xi + (1-\lambda)a \otimes b) \\ &= \lambda\, det\xi + (1-\lambda)\, det\eta. \end{aligned}$$

On déduit que rang$\{\lambda - \eta\} \leq 1$ alors

$$T\Big(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta\Big) = \Big(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta, det\big(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta\big)\Big) = \lambda\, T(\xi) + (1-\lambda)\, T(\eta).$$

(ii) La preuve est similaire à la précédente. Si $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, alors

$$det\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi^1}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi^2}{\partial x_2} - \frac{\partial\varphi^1}{\partial x_2}\frac{\partial\varphi^2}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\varphi^1\frac{\partial\varphi^2}{\partial x_2}\Big) - \frac{\partial}{\partial x_2}\Big(\varphi^1\frac{\partial\varphi^2}{\partial x_1}\Big)$$

On intègre par partie on a si $\varphi \in \mathcal{C}_0^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ alors :

$$\begin{aligned} mes(\Omega)\, det\xi &= \int_\Omega \Big[det\xi + \xi_1^1\frac{\partial\varphi^2}{x_2} + \xi_2^2\frac{\partial\varphi^1}{x_1} - \xi_1^2\frac{\partial\varphi^2}{x_1} - \xi_2^1\frac{\partial\varphi^1}{x_2} + det\nabla\varphi\Big]dx \\ &= \int_\Omega (\xi + \nabla\varphi(x))dx \end{aligned}$$

Par densité, si $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$, On déduit alors que, pour chaque $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$, on doit avoir

$$\begin{aligned} mes(\Omega)T(\xi) &= \Big(\int_\Omega (\xi + \nabla\varphi(x))dx, \int_\Omega det(\xi + \nabla\varphi(x))dx\Big) \\ &= \int_\Omega T(\xi + \nabla\varphi(x))dx. \end{aligned}$$

On passe maintenant à la démonstration du théorème principale de cette section.

DÉMONSTRATION :

Partie 1. *f est convexe $\Rightarrow$ f est polyconvexe.* (évident)

Partie 2. *f est polyconvexe $\Rightarrow$ f est quasiconvexe.* Comme f est polyconvexes, il existe $F \in \mathbb{R}^{\tau(n,m)} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, telle que

$$f(\xi) = F(T(\xi))$$

En utilisant le lemme (2.3.3) et l'inégalité de Jensen on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{mes(\Omega)}\Big(\int_\Omega f(\xi + \nabla\varphi(x)\Big)dx &= \frac{1}{mes(\Omega)}\int_\Omega F\big(T(\xi + \nabla\varphi(x))\big)dx \\ &\geq F\Big(\frac{1}{mes(\Omega)}\int_\Omega T(\xi + \nabla\varphi(x))\Big)dx = F(T(\xi)) = f(\xi), \end{aligned}$$

Cet inègalité est la définition de quasiconvexité. Pour tout ouvert $\Omega \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$ et pour tout $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$.

Partie 3. *f est quasiconvexe $\Rightarrow$ f rang un convexe.* Rappelons qu'on veut montrer que

$$f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \leq \lambda f(\xi) + (1-\lambda)f(\eta)$$

pour tout $\lambda \in [0,1]$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{m\times n}$ avec le rang de $\{\xi - \eta\} \leq 1$.

Soient $\epsilon > 0$,$\Omega_\xi, \Omega_\eta \subset \Omega$ et $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ telle que

$$\begin{cases} |mes\Omega_\xi - \lambda mes\Omega| \leq \epsilon, |mes\Omega_\eta - (1-\lambda)mes\Omega| \leq \epsilon \\ \nabla\varphi(x) = \begin{cases} (1-\lambda)(\xi-\eta), & si \quad x \in \Omega_\xi \\ -\lambda(\xi-\eta), & si \quad x \in \Omega_\eta \end{cases} \\ \|\nabla\varphi\|_{L^\infty} = \gamma \end{cases}$$

Où $\gamma = \gamma(\xi, \eta, \Omega)$ est une constante indépendante de ϵ. On peut alors utiliser la quasiconvexité de f pour obtenir

$$\int_\Omega f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta + \nabla\varphi)dx = \int_{\Omega_\xi} f(\xi)dx + \int_{\Omega_\eta} f(\eta)dx + \int_{\Omega-(\Omega_\xi\cup\Omega_\eta)} f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta + \nabla\varphi)dx$$
$$\geq f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta + \nabla\varphi)mes(\Omega)$$

En utilisant les propriètès de la fonction f et le fait que ϵ est arbitraire, on a bien obtenu que f est de 1-rang convexe.

Partie 4. *f polyconvexes $\Rightarrow$ f* rang un convexe . On utilise le lemme (2.3.3). En effet, depuis f est polyconvexes, il existe $F : \mathbb{R}^{\tau(n,m)} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe de façon que

$$f(\xi) = F(T(\xi)).$$

Soit $\lambda \in [0,1], \xi, \eta \in \mathbb{R}^{m\times n}$ avec le rang $\{\xi - \eta\} = 1$, alors, on utilise le lemme (2.3.3), on obtient

$$f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) = F(T(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta)) = F(\lambda T(\xi) + (1-\lambda)T(\eta))$$
$$\leq \lambda F(T(\xi)) + (1-\lambda)F(T(\eta)) = \lambda f(\xi) + (1-\lambda)f(\eta).$$

2.4 Contre exemples

Dans ce paragraphe on va étudie les propriétés réciproques et on donne des contres exemples pour les implications précédentes (voir [6], [1])

1. Une fonction rang un convexe et non polyconvexe

On sait que toute fonction polyconvexe est rang un convexe. Dans le cas $n = 3$ le résultat est faux, un contre-exemple a été donnée par Terpstra et Serre. (voir [6])

Théorème 2.4.1 *Soit M une matrice symétrique de $\mathbb{R}^{(m\times n)\times(m\times n)}$*
et $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ tels que :

$$f(\xi) = < M\xi, \xi >$$

avec $<,>$ désigne le produit scalaire Euclidien dans $\mathbb{R}^{m\times n}$. Alors

$$f \text{ rang un convexe} \not\Rightarrow f \text{ polyconvexe.}$$

Lemme 2.4.2 *Soit M une matrice symmetrique dans $\mathbb{R}^{(m\times n)\times(m\times n)}$ et soit*

$$f(\xi) := \langle M\xi, \xi\rangle.$$

Alors on a les résultats suivants.

1. *f est convexe si et seulement si*

$$f(\xi) \geq 0$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$

2. *f est polyconvexe si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^{\sigma(2)}$ telle que*

$$f(\xi) \geq \langle \alpha, adj_2\xi\rangle$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$. On note par $\langle .,.\rangle$ le produit scalaire sur $\mathbb{R}^{\sigma(2)}$ où

$$\sigma(2) = C_m^2 C_n^2$$

3. *f est quasiconvexe si et seulement si*

$$\int_D f(\nabla\varphi(x))dx \geq 0$$

pour tout ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ et pour tout $\varphi \in W_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^m)$.

4. *f est rang un convexe si et seulement si*

$$f(a \otimes b) \geq 0$$

pour tout $a \in R^m$, $b \in \mathbb{R}^n$.

On donne maintenant un contre-exemple de fonction rang un convexe et qui n'est pas polyconvexe pour $n = 3$.
Soit

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \xi_2^1 & \xi_3^1 \\ \xi_1^2 & \xi_2^2 & \xi_3^2 \\ \xi_1^3 & \xi_2^3 & \xi_3^3 \end{pmatrix}$$

et

$$f(\xi) = \left(\xi_1^1 - \xi_2^3 - \xi_3^2\right)^2 + \left(\xi_1^1 - \xi_1^3 - \xi_3^1\right)^2 + \left(\xi_1^2 - \xi_1^3 - \xi_3^1\right)^2 + (\xi_2^2)^2 + (\xi_3^3)^2$$

Tout d'abord on va montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tels que

$$f\big(a \otimes b\big) - \epsilon |a \otimes b|^2 \geq 0 \tag{2.7}$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}^3$, où $|\xi|^2 = \big\langle \xi, \xi \big\rangle$ dénote la norme euclidien.
D'après le lemme (2.3.3) on aura garantie que la fonction :

$$g(\xi) = f(\xi) - \epsilon |\xi|^2 \tag{2.8}$$

est rang un convexe.
Dans la deuxième étape on va montrer que g est non polyconvexe.
Premièrement, posons

$$\epsilon_0 = \inf \Big\{ f(a \otimes b) : \quad a, b \in \mathbb{R}^3, \ |a \otimes b| = 1 \Big\} \tag{2.9}$$

Alors, puisque $f \geq 0$ on a $\epsilon_0 \geq 0$, Pour démontrer (2.7), il suffit de prouver que $\epsilon_0 > 0$.On procède par l'absurde et supposons que $\epsilon_0 = 0$. Notons que dans (2.9) le minimum est atteint (parce que f est continu et l'ensemble des matrice $a \times b = 1$ est un ensemble borne) et par conséquent, il existe $a, b \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$f(a \otimes b) = \epsilon_0 = 0 \quad et \quad |a \otimes b| = 1$$

Rappelant que

$$a \otimes b = \begin{pmatrix} a^1 b_1 & a^1 b_2 & a^1 b_3 \\ a^2 b_1 & a^2 b_2 & a^2 b_3 \\ a^3 b_1 & a^3 b_2 & a^3 b_3 \end{pmatrix}$$

Donc, on obtient

$$\begin{cases} a^1 b_1 = a^2 b_3 + a^3 b_2 \\ a^1 b_2 = a^3 b_1 - a^1 b_3 \\ a^2 b_1 = a^1 b_3 + a^3 b_1 \\ a^2 b_2 = 0, \quad a^3 b_3 = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

1. $a^2 = a^3 = 0$ alors on obtient

$$\begin{cases} a^2 = a^3 = 0 \\ a^1 b_1 = a^1 b_3 = 0 \\ a^1 b_2 = -a^1 b_3 \end{cases} \tag{2.11}$$

- $a^1 = 0$, donc $a^1 = a^2 = a^3 = 0$ et par conséquant $|a \otimes b| = 0$, contradiction avec $|a \otimes b| = 1$.
- $b_1 = 0$ et $b_3 = 0$, d'aprés (2.11) $b_2 = 0$. on déduit que $|a \otimes b| = 0$. Contradiction

2. $a^2 = b^3 = 0$ alors on obtient :

$$\begin{cases} a^2 = b^3 = 0 \\ a^1 b_1 = a^3 b_2 \\ a^1 b_2 = a^3 b_1 \\ a^3 b_1 = 0 \end{cases}$$

- $a^3 = 0$, alors $a^1 b_1 = a^1 b_2 = 0$ donc $|a \otimes b| = 0$, contradiction.
- $b_1 = 0$, alors $a^3 b_2 = a^1 b_2 = 0$ donc $|a \otimes b| = 0$, contradiction.

3. De même pour le cas $a^3 = b_2 = 0$ et $b_2 = b_3 = 0$. Et donc la fonction g définie par (2.8) est rang un convexe pour tout ϵ tels que $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

On va montrer maintenant que g est non polyconvexe, en tenant compte du lemme (2.4.2), il suffit de démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, il existe $\xi \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tels que $g(\xi) + \langle \alpha, adj_2 \xi \rangle < 0$.
On va montrer que l'inégalité ci-dessus est vrai pour les matrices ξ de la forme suivante :

$$\xi = \begin{pmatrix} a+b & c-a & a \\ c+a & 0 & b \\ c & d & 0 \end{pmatrix}$$

pour de telles matrices ξ on a $f(\xi) = 0$ et par conséquant

$$\begin{aligned} g(\xi) &= -\epsilon |\xi|^2 \\ &= -\epsilon[(b+d)^2 + (c-a)^2 + a^2 + (c+a)^2 + b^2 + c^2 + b^2] \end{aligned}$$

et

$$adj_2 \xi = \begin{pmatrix} -bd & bc & cd + ad \\ ad & -ac & -(bd + d^2 - c^2 + ac) \\ bc - ab & ac + a^2 - b^2 - bd & a^2 - c^2 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\left\langle \alpha, adj_2\xi \right\rangle &= -\alpha_1 bd + \alpha_2 bc + \alpha_3(cd + ad) \\ &+ \alpha_4 ad - \alpha_5 ac - \alpha_6(bd + d^2 - c^2 - bd) \\ &+ \alpha_7(bc - ab) + \alpha_8(ac + a^2 - b^2 - bd) + \alpha_9(a^2 - c^2).\end{aligned}$$

on considère pleusieurs cas

1. Si $\alpha_8 > 0$, alors $a = c = d = 0$ et $b \neq 0$, on obtient

$$\begin{aligned}g(\xi) + \left\langle \alpha, adj_2\xi \right\rangle &= -\epsilon|\xi|^2 + \left\langle \alpha, adj_2\xi \right\rangle \\ &= -\epsilon(2b^2) - \alpha_8 b^2 < 0\end{aligned}$$

2. Si $\alpha_6 > 0$, alors $a = b = c = 0$ et $d \neq 0$, on a

$$g(\xi) + \left\langle \alpha, adj_2\xi \right\rangle = -\epsilon(2d^2) - \alpha_6 d^2 < 0.$$

3. Si $\alpha_9 - \alpha_6 > 0$ ($\alpha_8 \leq 0, \alpha_6 \leq 0$), alors $a = b = d = 0$ et $c \neq 0$ on a

$$g(\xi) + \left\langle \alpha, adj_2\xi \right\rangle = -\epsilon(2c^2) - (\alpha_6 - \alpha_9)c^2 < 0$$

   on peut supposer que $\alpha_8 \leq 0$, $\alpha_6 \leq 0$ et $\alpha_9 - \alpha_6 \leq 0$. d'aprés trois inégalité on peut déduit que $\alpha_8 + \alpha_9 \leq 0$, on prenant $b = c = d = 0$ et $a \neq 0$, on a

$$g(\xi) + \left\langle \alpha, adj_2\xi \right\rangle = -\epsilon(3a^2) + (\alpha_8 + \alpha_9)a^2 < 0$$

ce qui termine la démonstration

Deuxième exemple :

On donne maintenant un contre exemple de fonctions rang un convexes non polyconvexes qui est donné avec des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et est dû à Dacorogna.(voir [6]) Soient ξ_1, ξ_2, $\xi_3 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$; λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in [0, 1]$ tels que :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ \sum_i \lambda_i \det \xi_i = \det(\sum_i \lambda_i \xi_i), \\ \det(\xi_i - \xi_j) \neq 0 \quad \forall i, j; i \neq j : \end{cases}$$

On pourra prendre

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dfrac{1}{3}, \\ \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \xi_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Soit $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, définie par

$$f(\xi) = \begin{cases} 0, & si\ \xi = \xi_i,\ i = 1, 2, 3 \\ +\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors f est rang-1-convexe et non polyconvexe.

2. Une fonction rang un convexe et non quasiconvexe

Nous savons que toutes fonction quasiconvexe est rang un convexe. on va etudie la réciproque. Dans le cas $m \geq 3$ et $n \geq 2$ le résultat est faux. Ceci a été démontré par $\widetilde{S}$verak dans un article publie en 1992, (voir [12]).

Théorème 2.4.3 *Si $m \geq 3$ et $n \geq 2$. alors il existe $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ rang un convexe mais non quasiconvexe*

Remarque

1. Si $n = m > 1$, l'application $F \mapsto |detF|$ est quasiconvexe mais n'est pas convexe
2. Pour $m = n = 2$, la fonction $f(\xi) = \det \xi$ est polyconvexe sans être convexe.

CHAPITRE 3

LES ENVELOPPES CONVEXES AU SENS GÉNÉRALISÉ

En général la fonctionnelle I n'est pas faiblement semi-continue inférieurement, de ce fait, on ne peut pas appliquer les méthodes directes. Toutefois il est possible de remplacer (P) par un nouveau problème (QP), appelé problème relaxé, qui garde l'essentiel des caractéristiques du problème :

$$\inf\left\{\bar{I}(u)=\int_{\Omega} Qf\big(\nabla f(x)\big)dx\right\}, \qquad \text{(QP)}$$

Où Qf est l'enveloppe quasiconvexe de f, qui est la plus grande fonction quasiconvexe majorée par f. La difficulté rencontrée dans le passage du problème (P) au problème (QP) réside dans le calcul explicite de l'enveloppe quasiconvexe QW.

3.1 Les différentes enveloppe

On définit les enveloppes convexe, polyconvexe, quasiconvexe, rang un convexe et séparément convexe d'une fonction f par, respectivement, la plus grande fonction convexe, polyconvexe, quasiconvexe, rang un convexe et séparément convexe qui minore f. On les dénote, respectivement, par Cf, Pf, Qf, Rf, Sf et on a

$$Cf(x)=\sup\Big\{g(x):\ \ g\ convexe;\ \ g\leq f\Big\}$$

$$Pf(x) = \sup\Big\{g(x) : \quad g \ polyconvexe; \quad g \leq f\Big\}$$

$$Qf(x) = \sup\Big\{g(x) : \quad g \ quasiconvexe; \quad g \leq f\Big\}$$

$$Rf(x) = \sup\Big\{g(x) : \quad g \ rang - un - convexe; \quad g \leq f\Big\}$$

$$Sf(x) = \sup\Big\{g(x) : \quad g \ separement \ convexe; \quad g \leq f\Big\}$$

On observe d' après le théorème (3.4) immédiatement ce qui suit :

$$Cf \leq Pf \leq Qf \leq Rf \leq Sf \leq f$$

3.1.1 L'enveloppe convexe

Théorème 3.1.1 *Soit $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ verifiant :*

$$\alpha \leq f(\xi) \quad pour \ tout \ \xi \in \mathbb{R}$$

Alors on a la formule suivante, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$$Cf(\xi) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n.m+1} \lambda_i f(x_i) : \quad \sum_{i=1}^{n.m+1} \lambda_i \xi_i = \xi\right\}$$

3.1.2 L'enveloppe polyconvexe

Théorème 3.1.2 *Soient $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathbb{R}^{m\times m} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que*

$$f(\xi) \geq g(\xi) \quad pour \ tout \ \xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Alors on a la formule suivante, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$$Pf(\xi) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \lambda_i f(x_i) : \quad \sum_{i=1}^{\tau(n,m)+1} \lambda_i T(\xi_i) = T(\xi)\right\}$$

3.1.3 L'enveloppe quasiconvexe

Théorème 3.1.3 *Soient $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ borel mesurable localement borné et $g : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ quasiconvexe telle que*

$$f(\xi) \geq g(\xi) \qquad pour \quad tout \quad \xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$$Qf(\xi) = \inf\left\{\frac{1}{mes(\Omega)}\int_\Omega f(\xi + \nabla\varphi(x))dx : \quad \varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^m)\right\} \tag{3.1}$$

Où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *ouvert borné. En particulier la borne inférieure de la formule est indépendant du choix de* Ω.

Pour plus de détails (voir [6])

3.1.4 L'enveloppe rang un convexe

Soit I un entier quelconque et $\lambda \in \Lambda_I$ telle que

$$\Lambda_I = \left\{\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_I) : \lambda_i \geq 0 \quad et \quad \sum_{i=1}^{I}\lambda_i = 1\right\}.$$

Théorème 3.1.4 *Soit* $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est rang un convexe telle que*

$$f(\xi) \geq g(\xi) \quad pour \quad tout \quad \xi \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$,

$$Rf(\xi) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{I}\lambda_i f(\xi_i) : \lambda \in \Lambda_I, \quad \sum_{i=1}^{I}\lambda_i\xi_i = \xi, \quad (\lambda_i, \xi_i) \quad satisfont(H_I)\right\}$$

Où H_I *est définie dans le* 1^{re} *chapitre*

Théorème 3.1.5 *Soit* $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, *si on pose* $R_0 f := f$ *et pour* $k \in \mathbb{N}$

$$R_{k+1}(\xi) := \inf\left\{\begin{array}{c} \lambda R_k f(\xi_1) + (1-\lambda)R_k f(\xi_2), \quad \lambda \in [0,1], \\ \xi = \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2, \quad et\ rang(\xi_1 - \xi_2) \leq 1. \end{array}\right\}$$

Alors

$$\lim_{k\to\infty} R_k f(\xi) = R_k f(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Démonstration :

On note d'abord que,

$$g \leq R_{k+1}f \leq R_k f$$

Et par conséquent, les quantités suivantes sont bien définies

$$R'f := \lim_{k\to\infty} R_k f = \inf_{k\in\mathbb{N}} R_k f$$

On montre maintenant que $R'f$ est rang un convexe pour cella on considère ξ et η dans $\mathbb{R}^{m\times n}$ et $\lambda \in [0,1]$ tels que $\text{rang}(\xi - \eta) \leq 1$ on doit montrer que

$$\lambda R'f(\xi) + (1-\lambda)R'f(\eta) \geq R'f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta).$$

Par définition de la borne inférieure, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver $i, j \in \mathbb{N}$, tels que

$$R'f(\xi) \geq -\epsilon + R_i f(\xi) \geq -\epsilon + R_j f(\xi) \text{ et } R'f(\eta) \geq -\epsilon + R_j f(\eta).$$

On retrouve ainsi que

$$\begin{aligned}
\lambda R'f(\xi) + (1-\lambda)R'f(\eta) &\geq -\epsilon + \lambda R_j f(\xi) + (1-\lambda)R_j f(\eta) \\
&\geq -\epsilon + R_{j+1}f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \\
&\geq -\epsilon + R'f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta).
\end{aligned}$$

Comme ϵ est arbitraire, le résultat découle

3.2 Théorème de relaxation

Le problème relaxé est utile non seulement à définir des solutions généralisées de (P). On peut caractériser ces solutions par passage au problème relaxé qui, bien sûr admet des solutions. [voir [6]]

Théorème 3.2.1 *Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ $f : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable vérifiant, pour un certain $p \leq 1$*

$$0 \leq f(\xi) \leq \alpha\,(1 + |\xi|^p), \qquad \textit{pour tour } \xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Où $\alpha > 0$ est une constante alors que pour le cas $p = \infty$, on suppose de plus que f est localement borné. Pour chaque $\xi \in R^{m\times n}$, soit

$$Qf(\xi) = \sup\left\{g(\xi) : \ \ g \leq f \qquad \textit{et } \ g \ \textit{quasiconvexe}\right\}$$

soit l'enveloppe quasiconvexe de f.

1. *alors*

$$\inf(P) = \min(QP).$$

Plus précisément, pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, il existe une suite $(u_n)_{\{\nu\in\mathbb{N}} \subset u + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ telle que

$$u_\nu \to u \quad \textit{dans } L^p \qquad\qquad \textit{quand } \nu \to \infty$$
$$\int_\Omega f(\nabla(u_\nu)) \to \int_\Omega Qf(\nabla u(x))dx \qquad\qquad \textit{quand } \nu \to \infty$$

2. *Supposons, en plus des hypothèses de la partie 1, que, si $1 < p < \infty$, il existe $\alpha \geq \beta > 0$, $\gamma \in \mathbb{R}$ alors*

$$\gamma + \beta|\xi|^p \leq f(\xi) \leq \alpha(1 + |\xi|^p) \qquad \textit{pour tout}\xi \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

Puis, en plus des conclusions de la partie 1, la suivante est vérifiée :

$$u_\nu \rightharpoonup u \ \ \textit{dans } W^{1,p}(\Omega) \qquad \textit{si } \nu \to \infty.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] G.Aubert, Quelque remarques sur les notions de rang un convexe et de polyconvexité en dimensions 2 et 3, tom 22, n1(1988),p.5-28.

[2] S.Benzoni,Méthodes directes en calcul des variations, quasiconvexité, Le journal de maths des élèves, Volume 1 (1995), No.3

[3] O.Boussaid, Étude de quelques techniques de Relaxations pour des fonctions polynômiales et ensembles dans les Problèmes Variationnels Non-Convexes et liens avec les Equations Aux Dérivées Partielles, Thèse de doctorat, université Sidi Bel Abbes, Algerie, June 16, 2010

[4] H.Brezis, Analyse fonctionnelle : Théorie et applications, Masson 1983.

[5] G.Carlier, Analyse fonctionnelle, ENS, 2008-2009

[6] B.Dacorogna, Direct methods in the calculus of variations , volume 78 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[7] B.Dacorogna, On some defnitions and properties of generalized convex sets arising in the calculus of variation, July 6, 2005

[8] O.Isely, Espaces de Sobolev et problèmes variationnels, Thèse de doctorat : Projet de Semèstre ,2005.

[9] C.B.Morrey, Quasiconvexity and the semicontinuity of multiple integrals, Pacific J. Math, 2 (1952), pp. 25-53.

[10] A.Munnier, Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles, Institut Elie Cartan.

[11] A.M.F. Ribeiro, Inclusions différentielles et problèmes variationnels, Thèse de doctorat, université de Lisboa, Lisbonne, Portugal (2006).

[12] V.$\tilde{S}$verak , On regularity for the Monge-Ampère equation, preprint Heriot-Watt University, 1991