**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université Dr.Yahia Farès de Médéa**

**Faculté des Sciences-Département de Mathématiques et Informatique**



# MÉMOIRE

*Présenté en vue de l'obtention*

*du*

## Diplôme de Master en Recherche Opérationnelle

## Thème

# Étude des graphes arête-bipancyclique

*Réalisé par :*

- ***GUETTAF Nabila***
- ***AOUITER Bouchra***

*Jury :*

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Encadreur* | Mr. SAHRAOUI Abdelkader | M.A.A | *U.Dr.Yahia Farès Médéa* |
| *Président* | Mr. TABLENNEHAS Kamel | M.A.A | *U.Dr.Yahia Farès Médéa* |
| *Examinateur* | Mr. BOUCHOU Ahmed | M.C.A | *U.Dr.Yahia Farès Médéa* |
| *Examinateur* | Mr. ZEMIR Mohamed | M.A.A | *U.Dr.Yahia Farès Médéa* |

***Date de soutenance :15/10/2020***

# *Remerciement*

*Nous remercions, en premier, Allah qui nous a donné la force et la volonté de mener ce travail à bout.*

*En suite, nous remercions Monsieur* ***SAHRAOUI Abdelkader*** *qui nous a proposé le thème de cette étude et qui nous a suivi sérieusement dans la préparation de ce mémoire.*

*Nous remercions également les membres du jury* $M^r$ ***BOUCHOU Ahmed***, $M^r$ ***ZEMIR Mohamed*** *et* $M^r$ ***TABLENNEHAS Kamel*** *pour l'honneur qu'ils nous ont fait en acceptant de juger ce travail, et d'avoir consacrer leurs temps pour sa lecture.*

*Enfin, nous souhaitons adresser nos sincères remerciements à tous ceux qui ont contribué,de près ou de loin,à la réalisation de ce mémoire et qui nous ont accompagnée durant ces cinq années d ' étude et de travail.*

# *Dédicace*

*Je dédie ce travail*

*A mes chères parents.*

*A mes frères et mes sœurs.*

*A toute ma famille, à tous mes amis.*

*A mon chère binôme* ***Bouchra*** *et sa famille.*

*A tous ceux qui me sont chers et dont je n'ai pas cité de nom.*

***GUETTAF Nabila***

# *Dédicace*

*Je dédie ce travail.*

*A mes chères parents.*

*A mes frères et mes sœurs.*

*A mon fiancé.*

*A toute ma famille, à tous mes amis.*

*A mon chère binôme* ***Nabila*** *et sa famille.*

*A tous ceux qui me sont chers et dont je n'ai pas cité de nom.*

***AOUITER Bouchra***

**Résumé**

*Un graphe $G = (V, E)$ est dit arête-bipancyclique si chaque arête de $G$ se trouve sur au moins un cycle de chaque longueur paire entre 4 et $\mid V(G) \mid$. Notre objectif à travers ce mémoire est d'étudier quelques graphes arête-bipancyclique. Au premier chapitre nous représentons quelques définitions et notions de la théorie des graphes, ensuite dans le deuxième chapitre nous donnons quelques définitions et théorèmes sur les graphes bipancyclique et arête-bipancyclique. Enfin dans le troisième chapitre nous proposons quelques résultats des graphes arête-bipancyclique.*

**Abstract**

*A graph $G = (V; E)$ is called bipancyclic edge if each edge of $G$ lies on at least one cycle of each even length between 4 and $\mid V(G) \mid$. Our objective through this memory is to study some edge-bipancyclic graphs. In the first chapter we represent some definitions and notions of graph theories. then, in the second chapter we give some definitions and theorems of bipancyclic and edge-bipancyclic graphs. Finally ,in the third chapter we propose some results of edge-bipancyclic graphs.*

## ملخص

يقال ان الرسم البياني $G(E,V)$ هو حافة ثنائية الحلقة من أجل كل حافة من $G$ تقع على دورة واحدة على الأقل من كل طول زوجي بين $4$ و$|V(G)|$ . هدفنا من خلال هذه الأطروحة هو دراسة الرسوم البيانية ذات الحافة ثنائية الحلقات، وقد قسمنا دراستنا إلى ثلاثة فصول. في الفصل الأول ذكرنا بعض التعاريف و المفاهيم الخاصة بنظريات الرسوم البيانية، أما في الفصل الفصل الثاني فقد تطرقنا الى بعض التعاريف و المبرهنات الخاصة بالرسوم البيانية ثنائية الحلقات وذات الحافة ثنائية الحلقات. وفي الفصل الأخير قدمنا بعض الرسوم البيانية ذات الحافة ثنائية الحلقات.

# Table des matières

**Remerciement** **I**

**Dédicace** **II**

**Résumé** **III**

**Introduction** **1**

**1 Généralités sur la théorie des graphes** **2**
1.1 Introduction . . . . . 2
1.2 Définitions et notations relatives à la théorie des graphes . . 2
1.2.1 Graphe non orienté . . . . . 2
1.2.2 Ordre et taille . . . . . 2
1.2.3 Voisinage et degrés . . . . . 3
1.2.4 Chaîne et cycle . . . . . 4
1.2.5 Distances, excentricité, rayon, centre et diamètre . . . 4
1.3 Invariants de graphe . . . . . 4
1.3.1 Stable, Clique, Ensemble dominant, Transversal, Couplage et Recouvrement . . . . . 5
1.4 Différents type de graphes . . . . . 6
1.4.1 Graphe connexe . . . . . 6
1.4.2 Graphe simple . . . . . 6
1.4.3 Graphe partiel et sous-graphe d'un graphe . . . . . 6
1.4.4 Graphe complet . . . . . 7
1.4.5 Graphe biparti et graphe biparti complet . . . . . 7
1.4.6 Graphe biparti équilibré . . . . . 8
1.4.7 Graphe $k-$parti . . . . . 8
1.4.8 Graphe $k-$régulier . . . . . 8
1.4.9 Graphe complémentaire d'un graphe . . . . . 9
1.4.10 Graphes isomorphes . . . . . 9

1.5 Graphe hamiltonien . . . . . 9
1.6 Produit cartésien . . . . . 12
1.6.1 Grille . . . . . 12
1.6.2 Cylindre . . . . . 13
1.6.3 Tore . . . . . 13

**2 Graphes bipancyclique et graphes arête-bipancyclique 14**
2.1 Introduction . . . . . 14
2.2 Hypercube . . . . . 14
2.3 Graphe pancyclique , graphe presque pancyclique et graphe arête-pancyclique . . . . . 15
2.4 Quelques résultats de pancyclicité . . . . . 15
2.5 Graphe bipancyclique , presque bipancyclique et graphe arête-bipancyclique . . . . . 16
2.6 Résultats de bipancyclicité . . . . . 17
2.6.1 bipacyclicité de l'hypercube et le produit cartésien . . 17
2.6.2 Conditions sur le nombre d'arêtes . . . . . 18
2.6.3 Conditions sur les degrés . . . . . 19

**3 Quelques résultats sur les graphes arête-bipancyclique 20**
3.1 Introduction . . . . . 20
3.2 Graphes bipartis complets équilibrés et arête-bipancyclicité. . 20
3.3 Hypercubes et arête-bipancyclicité. . . . . 21
3.4 Graphes complets et arête-bipancyclicité . . . . . 21
3.5 Graphe de Turan et arête-bipancyclicité . . . . . 21
3.6 Graphes roues et arête-bipancyclicité . . . . . 22
3.7 Grilles et arête-bipancyclicité . . . . . 23
3.8 Tores et arête-bipancyclicité . . . . . 23
3.9 Graphes non connexe et arête-bipancyclicité . . . . . 24
3.10 Cylindres et arête-bipancyclicité . . . . . 24

**Conclusion 25**

**Bibliographie 26**

# Table des figures


1.1 Un exemple d'un graphe G . . . . . 3
1.2 La chaîne $P_4$ et le cycle $C_4$ . . . . . 4
1.3 Un graphe G . . . . . 5
1.4 Graphe connexe et graphe non connexe . . . . . 6
1.5 Un graphe simple . . . . . 6
1.6 Un graphe G et le sous-graphe de G induit par $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 7
1.7 Un graphe partiel de G . . . . . 7
1.8 Le graphe complet $K_4$ . . . . . 7
1.9 Un graphe biparti . . . . . 8
1.10 Le graphe biparti complet $K_{2,3}$ . . . . . 8
1.11 Le graphe biparti équilibré . . . . . 8
1.12 Un graphe 3−régulier . . . . . 9
1.13 Graphe G et son complément $\overline{G}$ . . . . . 9
1.14 Graphes isomorphes . . . . . 9
1.15 Une chaîne hamiltonienne . . . . . 10
1.16 Un cycle hamiltonien . . . . . 10
1.17 Un graphe hamiltonien . . . . . 11
1.18 Un graphe semi-hamiltonien . . . . . 11
1.19 . . . . . 12
1.20 La grille $P_3 \square P_4$. . . . . 13
1.21 Le cylindre $C_3 \square P_4$ . . . . . 13
1.22 Le tore $T_{4,4}$ . . . . . 13

2.1 Les hypercubes $Q_n : n = 1 : 3$ . . . . . 14
2.2 Graphe pancyclique . . . . . 15
2.3 Graphe presque pancyclique . . . . . 15
2.4 Graphe arête-pancyclique . . . . . 15
2.5 Le graphe roue $W_5$ . . . . . 16
2.6 Le graphe complet $K_3$ . . . . . 16
2.7 Un graphe biparti . . . . . 18

3.1 Le graphe biparti équilibré $K_{3,3}$ . . . . . 20
3.2 Le graphe de turan $T_{4,9}$ . . . . . 22
3.3 Les roues $w_4$ et $w_5$ . . . . . 22
3.4 La grille $P_3 \square P_4$. . . . . 23
3.5 Le cylindre $C_3 \square P_4$ . . . . . 24

# Introduction

La recherche opérationnelle RØ est la discipline des mathématiques appliquées qui traite des questions d'utilisation optimale des ressources dans l'industrie et dans le secteur public. Depuis une dizaine d'années, le champ d'application de la RØ s'est élargi à des domaines comme l'économie, la finance, le marketing et la planification d'entreprise. Plus récemment, la RØ a été utilisée pour la gestion des systèmes de santé et d'éducation, pour la résolution de problèmes environnementaux et dans d'autres domaines d'intérêt public.

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au XVIIIe siècle et trouve son origine dans l'étude de certain problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XXe siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdös.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,...

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs. Les derniers travaux en théorie des graphes est souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

En 1982, Schmeichel et Mitchem a défini un graphe bipancyclique G pour être un graphe biparti équilibré qui contient des cycles de tous ordres égaux de 4 jusqu'à $n$.

# Chapitre 1

# Généralités sur la théorie des graphes

## 1.1 Introduction

Commençons par donner quelques définitions élémentaires relatives au domaine de l'étude. En théorie des graphes, un ensemble de concepts est utilisé pour décrire les graphes et leur type.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons plus particulièrement aux concepts de base de la description du graphe, ainsi qu'aux différents types de graphes que nous utilisons dans ce mémoire.

## 1.2 Définitions et notations relatives à la théorie des graphes

### 1.2.1 Graphe non orienté

Un graphe $G$ est la donnée d'un ensemble fini $V$,appelé ensemble de sommets et un ensemble $E$ de parties à deux élément de $V$ appelé ensemble des arêtes. on note $G = (V; E)$.

### 1.2.2 Ordre et taille

Soit $G = (V; E)$ un graphe non orienté. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G, noté par $n(G)$ et le cardinal de E est appelé la taille de G, noté par m(G).
Une arête $e \in E$ est une paire de sommets $\{u; v\}$ notée par $uv$, où $u$ et $v$ sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que $u$ et $v$ sont adjacents et que e est incidente à $u$ et $v$.
Une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même .

### 1.2.3 Voisinage et degrés

- Le voisinage ouvert d'un sommet $v$ est :

$$N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$$

- Le voisinage fermé de $v$ est :

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$$

- Pour un sous-ensemble $S \subset V$ le voisinage ouvert de S est :

$$N_G(S) = \cup_{\{v \in S\}} N_G(v)$$

- Le voisinage fermé de S est :

$$N_G[S] = N_G(S) \cup S$$

- Le degré d'un sommet $v \in V$, noté $d_G(v)$ est égal au cardinal de son voisinage ouvert. On note par :

$$N_S(x) = N_G(x) \cap S$$

et

$$d_G(v) = |N_S(x)|$$

- On notera par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$, le degré maximum et le degré minimum dans G , respectivement.

**Exemple 1**

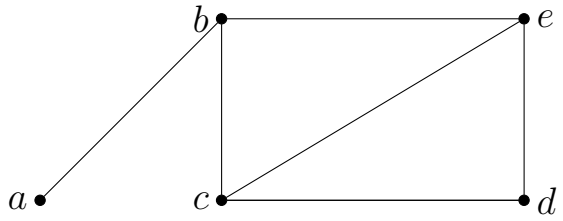



FIGURE 1.1: Un exemple d'un graphe G

$d_G(a) = 1, d_G(b) = d_G(c) = d_G(e) = 3, d_G(d) = 2.$
$\Delta(G) = 3$ et $\delta(G) = 1.$
$N_G(e) = \{b, c, d\}$ et $N_G[e] = \{b, c, d, e\}.$
Soit $S = \{b, e\}$ :$N_G(S) = \{a, c, d\}$ et $N_G[S] = \{a, b, c, d, e\}.$

Le théorème suivant établir une relation fondamentale entre les degrés des sommets d'un graphe et son nombre d'arêtes.

**Théorème 1.2.1**

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2m$$

### 1.2.4 Chaîne et cycle

**Chaîne :** Une chaîne dans un graphe est une suite de sommets $x_1, x_2, ..., x_k$ tels que pour $i = \overline{1, k-1}$, $x_i$ est adjacent à $x_{i+1}$ et la longueur d'une chaîne correspond au nombre d'arêtes dans la chaîne.

**Cycle :** Un cycle est une chaîne dont l'extrémité initiale se confond avec l'extrémité terminale.

La figure 1.2 représente une chaîne $P_4$ et un cycle $C_4$.

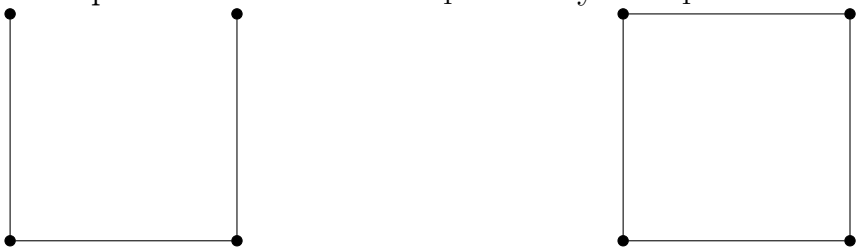


FIGURE 1.2: La chaîne $P_4$ et le cycle $C_4$

### 1.2.5 Distances, excentricité, rayon, centre et diamètre

Soit $u$ et $v$ deux sommets d'un graphe G.

- La distance entre $u$ et $v$ notée $d_G(u; v)$ est la longueur de la plus courte chaîne joignant $u$ et $v$.
- L'excentricité d'un sommet $v$ dans G est :

$$exc(v) = \max\{d_G(v; w) : w \in V\}$$

- Le rayon de G noté $R(G)$ est la plus petit excentricité :

$$R(G) = \min\{exc(v) : v \in V\}$$

- Le centre de G est l'ensemble des sommets de G dont l'excentricité est égale au rayon.
- Le diamètre de G noté $D(G)$, est la plus grande excentricité :

$$D(G) = \max\{exc(v) : v \in V\}$$

## 1.3 Invariants de graphe

Invariant d'un graphe est une propriété préservée par isomorphisme. Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe.
Nous définissons ci-après quelques invariants de graphes intervenant dans la suite.

### 1.3.1 Stable, Clique, Ensemble dominant, Transversal, Couplage et Recouvrement

Soit $G = (V; E)$ un graphe simple.

**Stable :** On appelle stable de G un sous-ensemble de sommets de V deux à deux non adjacentes, notée $\alpha(G)$.

**Clique :** On appel clique un sous-ensemble de sommets de V deux à deux adjacents, noté $w(G)$.

**Ensemble dominant :** Un sous-ensemble de sommets $D \subseteq V$ de G est dit ensemble dominant si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D, noté $\gamma(G)$.

**Transversal :** Un transversal T est un ensemble de sommets qui couvre toutes les arêtes de G, notée $\tau(G)$.

**Couplage :** On appelle couplage de G un sous-ensemble d'arêtes de E deux à deux non adjacentes, notée $\alpha_0(G)$.

**Recouvrement :** Soit $G = (V; E)$ un graphe simple sans sommet isolé, on appelle recouvrement un ensemble d'arêtes qui sont adjacent à tous les sommets de G, notée $\nu(G)$.

**Exemple 2** *Dans la figure 1.3 on a : Stable=*$\{b, d\}$ *et* $\alpha(G) = 2$.
*Clique=*$\{b, c, e\}$ *et* $w(G) = 3$.
*Ensemble dominant :*$D = \{a, e\}$ *et* $\gamma(G) = 2$.
*Transversal :*$T = \{b, d, e\}$ *et* $\tau(G) = 3$.
*Couplage=*$\{bc, ed\}$ *et* $\alpha_0(G) = 2$.
*Recouvrement=*$\{ab, ce, de\}$ *et* $\nu(G) = 3$.

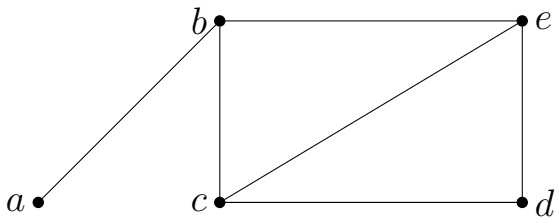



FIGURE 1.3: Un graphe G

## 1.4 Différents type de graphes

Certains types de graphes jouent un rôle prépondérant en théorie des graphes.

### 1.4.1 Graphe connexe

Un graphe G est dit connexe si chaque deux sommets de G sont reliée par au moins une chaîne. Voir la figure 1.4.

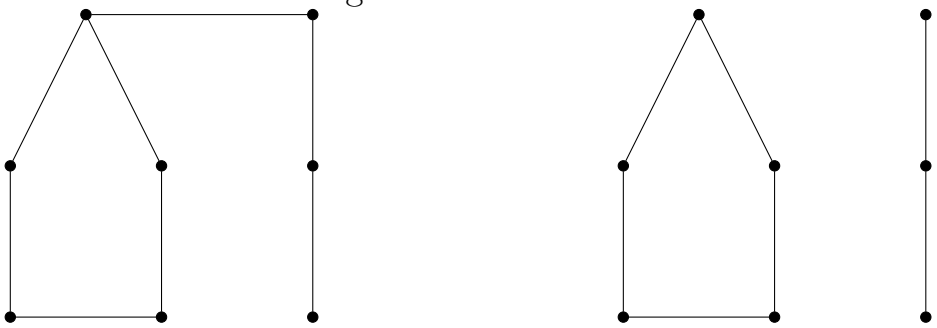


FIGURE 1.4: Graphe connexe et graphe non connexe

### 1.4.2 Graphe simple

Un graphe est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples.

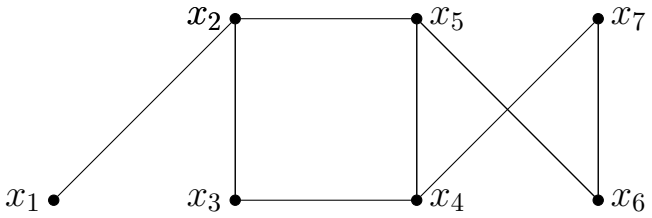



FIGURE 1.5: Un graphe simple

La figure 1.5 représente un graphe simple $G = (V, E)$ avec :

$$V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$$

et

$$E(G) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_2x_5, x_3x_4, x_4x_5, x_4x_7, x_5x_6, x_6x_7\}$$

### 1.4.3 Graphe partiel et sous-graphe d'un graphe

- Soit $G = (V; E)$ un graphe simple . On appelle sous-graphe de G, un graphe $H = (U; F)$ tel que $U \subseteq V$et $F \subseteq E$.
- Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$ , le sous-graphe induit par A, noté $G[A]$, est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A. Voir la figure 1.6.

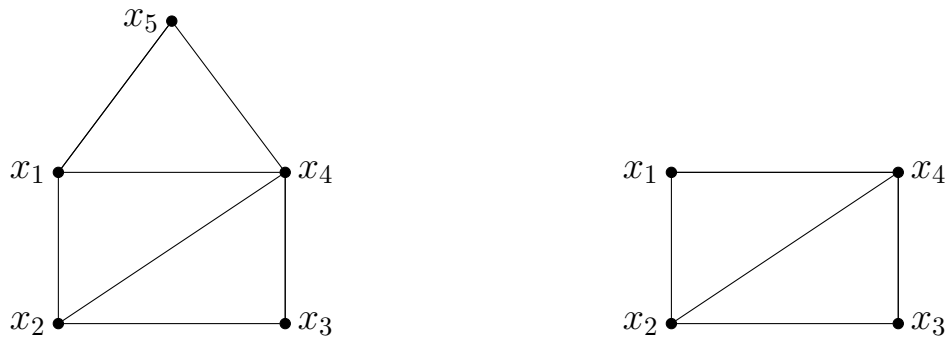



FIGURE 1.6: Un graphe G et le sous-graphe de G induit par $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

- Étant donné un graphe H , on dit que G est sans H si G ne contient pas un sous-graphe isomorphe à H.
- Un graphe partiel de G est un graphe $H = (V; F)$ avec $F \subset E$. Voir la figure 1.7.

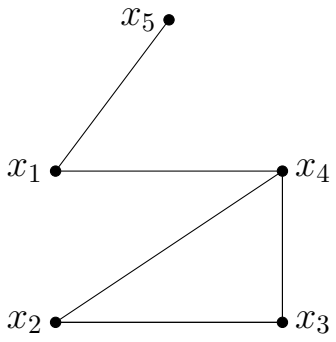



FIGURE 1.7: Un graphe partiel de G

### 1.4.4 Graphe complet

Le graphe complet d'ordre n, noté par $K_n$ est le graphe dans lequel tous ses sommets sont de degré n-1. Voir la figure 1.8.

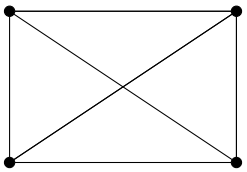


FIGURE 1.8: Le graphe complet $K_4$

### 1.4.5 Graphe biparti et graphe biparti complet

**Définition 1.4.5.1** *Un graphe $G = (V; E)$ est dit biparti si $V$ peut-être partitionner en deux stables $V_1$et $V_2$.*

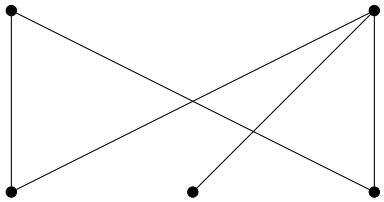


FIGURE 1.9: Un graphe biparti

**Théorème 1.4.1 (Asratian et Roland, [2])** *Un graphe est biparti si et seulement s'il ne contient pas de cycles de longueur impaire.*

**Définition 1.4.5.2** *Un graphe biparti complet est un graphe biparti ou chaque sommet de $V_1$ est relié à tous les sommets de $V_2$, si $\mid V_1 \mid = p$ et $\mid V2 \mid = q$ le graphe biparti complet est noté par $K_{p,q}$. Voir la figure 1.10.*

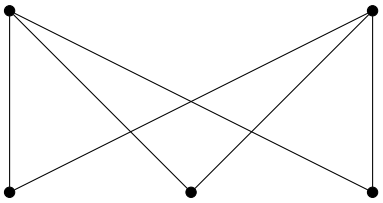


FIGURE 1.10: Le graphe biparti complet $K_{2,3}$

### 1.4.6 Graphe biparti équilibré

Un graphe biparti G est dit équilibré si les ensembles de la bipartition sont de même cardinalité. voir la figure 1.11.

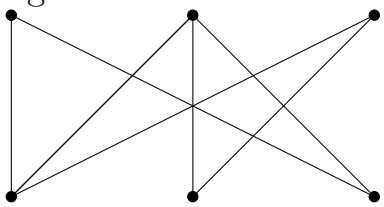


FIGURE 1.11: Le graphe biparti équilibré

### 1.4.7 Graphe $k-$parti

Un graphe $G = (V; E)$ est dit $k$-parti si V peut-être partitionné en $k$ ensembles stables $V_1$, $V_2$, ...$V_k$.

### 1.4.8 Graphe $k-$régulier

Un graphe G est dit $k$-régulier si tous ses sommets ont le même degré k . Voir la figure 1.12.

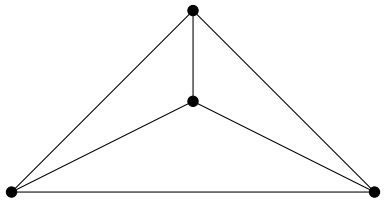


FIGURE 1.12: Un graphe 3−régulier

### 1.4.9 Graphe complémentaire d'un graphe

Le graphe complémentaire de G, noté $\overline{G}$, est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans $\overline{G}$ si elle n'est pas dans G. Voir la figure 1.13.



FIGURE 1.13: Graphe G et son complément $\overline{G}$

### 1.4.10 Graphes isomorphes

Deux graphes G et H sont dits isomorphes , noté $G \simeq H$, s'il existe une application bijective f de $V(G)$ dans $V(H)$ telle que pour toute arête $uv \in E(G)$, l'arête $f(u)f(v) \in E(H)$. Voir la figure 1.14.

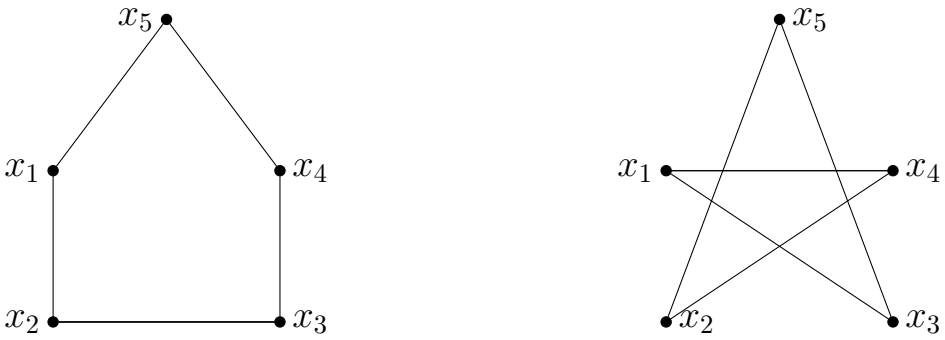



FIGURE 1.14: Graphes isomorphes

## 1.5 Graphe hamiltonien

**Définition 1.5.0.1** *Une chaîne hamiltonienne est une chaîne qui passe par tous les sommets une et une seule fois.*

**Exemple 3** *La chaîne* $P_5 = \{x_1, x_2, x_5, x_3, x_4\}$ *est une chaîne hamiltonienne. Voir la figure 1.15.*

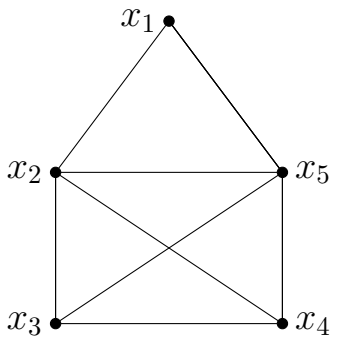



FIGURE 1.15: Une chaîne hamiltonienne

**Définition 1.5.0.2** *Un cycle hamiltonien est un cycle qui passe par tous les sommets une et une seule fois.*

**Exemple 4** *Le cycle* $C_5 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1)$ *est un cycle hamiltonien. Voir la figure 1.16.*

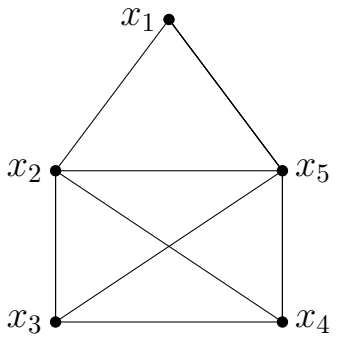



FIGURE 1.16: Un cycle hamiltonien

**Définition 1.5.0.3** *Un graphe hamiltonien est un graphe qui contient au moins un cycle hamiltonien .*

**Exemple 5** *Dans la figure 1.17, le cycle* $C_7 = (A, F, C, D, E, B, A)$ *est un cycle hamiltonien.*

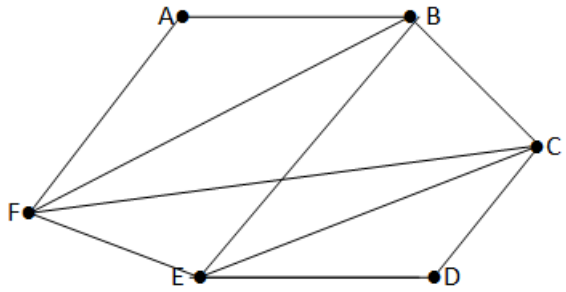



FIGURE 1.17: Un graphe hamiltonien

**Remarque 1** *Ce cycle hamiltonien n'est pas unique.*

**Définition 1.5.0.4** *Un graphe semi-hamiltonien est un graphe qui contient une chaîne hamiltonienne, mais pas de cycle hamiltonien. Voir la figure 1.18.*

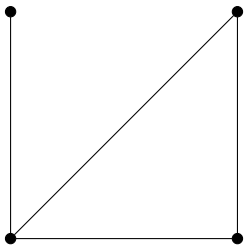


FIGURE 1.18: Un graphe semi-hamiltonien

**Définition 1.5.0.5** *Un graphe est dit hamiltonien-connexe si chaque deux sommets du graphe sont reliés par une chaîne hamiltonienne.*

**Théorème 1.5.1 (Ore, [14])** *Un graphe simple d'ordre $n$ ($n \geq 3$) est hamiltonien si pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ non adjacent :*

$$d_G(u) + d_G(v) \geq n$$

**Théorème 1.5.2 (Dirac, [7])** *Soit $G$ un graphe simple avec $n \geq 3$ sommets. Si $d_G(u) \geq \frac{n}{2}$ pour chaque sommet $u$, alors $G$ est hamiltonien.*

**Remarque 2** *Si $G$ vérifié $d_G(u) \geq \frac{n}{2}$ pour chaque sommet $u$ avec $n \geq 3$, alors $G$ vérifié $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ pour toute paire de sommets $\{u, v\}$ non adjacent avec $(n \geq 3)$. La réciproque est fausse.*

En effet,la somme de degrés de chaque paire de sommets est au moins égale à $n$.
La figure 1.19 est exemple d'un graphe vérifiant le théorème d'Ore mais ne vérifie pas le théorème de Dirac.

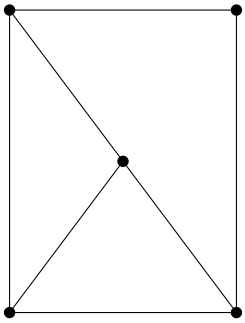


FIGURE 1.19

**Théorème 1.5.3 (Chen et al, [5])** *Si $G$ est un graphe $k-$parti équilibré d'ordre $kn$ avec un degré minimum :*
*1)* $\delta(G) \geq (\frac{k}{2} - \frac{1}{k+1})n$, *si $k$ est impair ;*
*2)* $\delta(G) \geq (\frac{k}{2} - \frac{2}{k+2})n$, *si $k$ est pair ;*
*alors $G$ est hamiltonien.*

## 1.6 Produit cartésien

Le produit cartésien des deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$, noté $G_1 \square G_2$,est le graphe défini par son ensemble des sommets $V(G_1 \square G_2) = V_1 V_2$ et son ensemble d'arêtes $E(G_1 \square G_2)$ défini comme suit :
$E(G_1 \square G_2) = \{(x, y)(x', y')$ tel que $(x = x'$ et $yy' \in E_2)$ ou $(xx' \in E_1$ et $y = y')\}$.

### 1.6.1 Grille

Une grille est le produit cartésien de deux chaînes $P_m$ et $P_n$, noté $P_m \square P_n$.

**Exemple 6** *La grille $P_3 \square P_4$.*

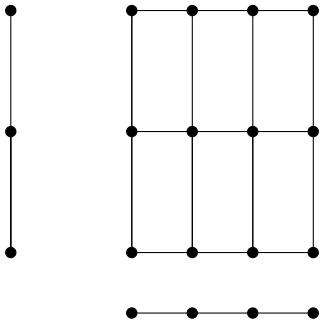


FIGURE 1.20: La grille $P_3 \square P_4$.

### 1.6.2 Cylindre

Un cylindre est le produit cartésien d'un cycle $C_n$ et une chaine $P_m$ .

**Exemple 7** *Le cylindre* $C_3 \square P_4$.

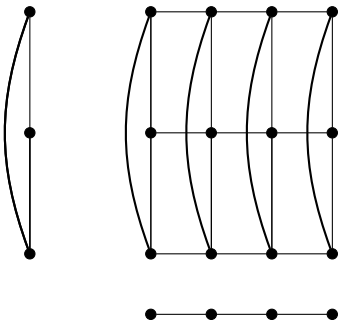


FIGURE 1.21: Le cylindre $C_3 \square P_4$

### 1.6.3 Tore

Un tore est le produit cartésien de deux cycles $C_n$et $C_m$, noté $T_{n,m}$ .

**Exemple 8** *Le tore* $T_{4,4}$.

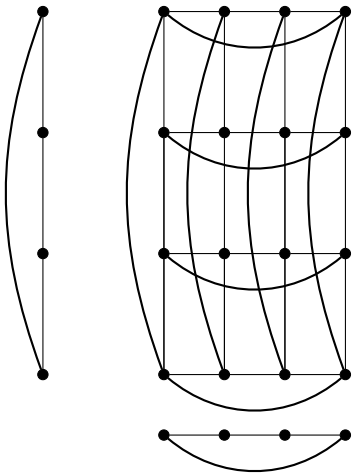


FIGURE 1.22: Le tore $T_{4,4}$

# Chapitre 2

# Graphes bipancyclique et graphes arête-bipancyclique

## 2.1 Introduction

Nous allons présenter dans ce chapitre quelques définitions et propriétés sur les graphes bipancyclique et les graphes arête-bipancyclique .

## 2.2 Hypercube

**Définition 2.2.0.1** *Un hypercube $Q_n$ $(n-cube)$ est le graphe dont l'ensemble de sommets est $\{0,1\}^n$, l'ensemble de tous les $n-$uplets de 0 et 1, et dans lequel deux $n-$uplets sont adjacents s'ils différent d'exactement une coordonnée. Un hypercube $Q_n$ est aussi le produit cartésien de $n$ graphes complet $K_2$. Voir la figure 2.1.*

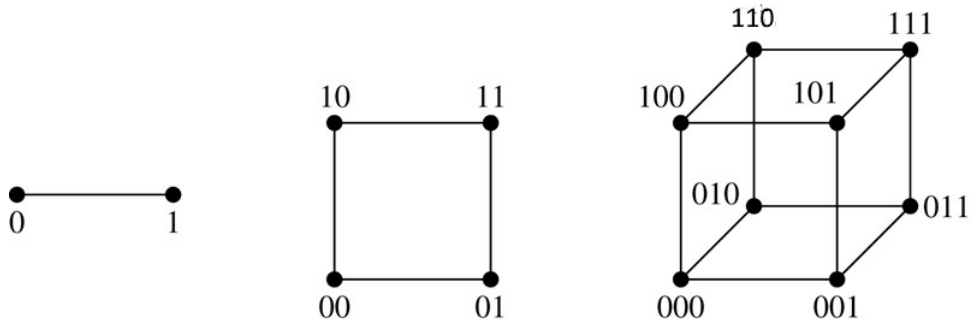



FIGURE 2.1: Les hypercubes $Q_n : n = 1 : 3$

**Remarque 3** *L'hypercube est un graphe hamiltonien, régulier et biparti.*

**Théorème 2.2.1 (Chan et Lee, [4])** *Pour tout sous-ensemble $F$ de $E(Q_n)$ avec $\mid F \mid \leq 2n-5$, $Q_n - F$ contient un cycle hamiltonien à condition que $n \geq 3$ et chaque sommet est incident à au moins deux arêtes .*

## 2.3 Graphe pancyclique , graphe presque pancyclique et graphe arête-pancyclique

**Définition 2.3.0.2** *Un graphe $G$ de $n$ sommets est pancyclique s'il contient les cycles de touts les longueurs entre 3 et $n$.Voir la figure 2.2*

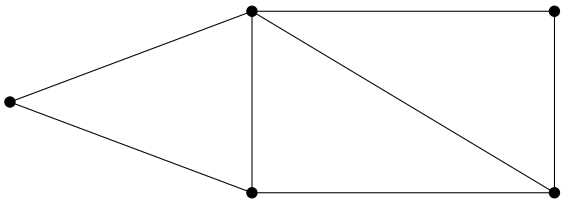


FIGURE 2.2: Graphe pancyclique

**Définition 2.3.0.3** *Un graphe $G$ de $n$ sommets est presque pancyclique s'il contient les cycles de touts les longueurs entre 4 et $n$. Voir la figure 2.3.*

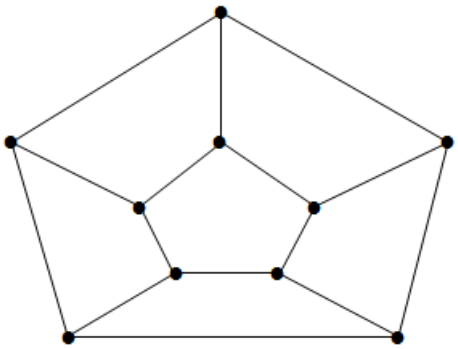


FIGURE 2.3: Graphe presque pancyclique

**Définition 2.3.0.4** *Un graphe $G$ de $n$ sommets est arête-pancyclique si chaque arête $e$ de $G$ se trouve dans un cycle de tout longueur entre 3 et $n$.Voir la figure 2.4*

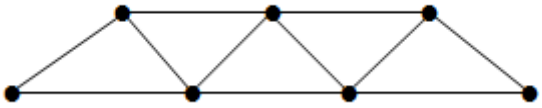


FIGURE 2.4: Graphe arête-pancyclique

## 2.4 Quelques résultats de pancyclicité

**Théorème 2.4.1 (Zhang, [18])** *S'il existe des sommets $x_1, x_2$ sur un cycle Hamiltonien $C$ tel que $d(x_1, x_2) = 2$ et $d_G(x_1) + d_G(x_2) \geq n+1$, alors $G$ est pancyclique .*

**Exemple 9** *Le graphe roue $W_5$ est un graphe pancyclique, voir la figure 2.5.*

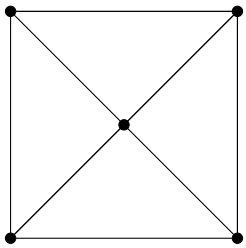


FIGURE 2.5: Le graphe roue $W_5$

**Théorème 2.4.2 (Hendry, [10])** *Si $G$ un graphe d'ordre $n \geq 3$ et $\delta(G) \geq \frac{n+1}{2}$ alors $G$ et sommet pancyclique.*

**Exemple 10** *Les graphes complets sont des graphes pancyclique, voir la figure 2.6.*

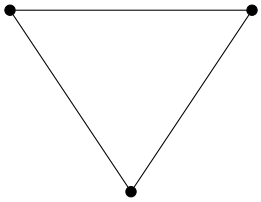


FIGURE 2.6: Le graphe complet $K_3$

**Corollaire 2.4.1 (Harris, [9])** *Si $G$ est hamiltonien avec plus de $\frac{n}{3}$ sommets de degré supérieure au égal $\frac{n+1}{2}$, alors $G$ est pancyclique.*

## 2.5 Graphe bipancyclique , presque bipancyclique et graphe arête-bipancyclique

**Définition 2.5.0.5** *Un graphe $G$ de $n$ sommets est bipancyclique s'il contient un cycle de tout longueur paire entre 4 et $n$.*

**Définition 2.5.0.6** *Un graphe 3-regulier est presque bipancyclique s'il a des cycles de toutes les longueurs paires de 4 à $\mid V(G) \mid$ sauf peut-être pour 4 et 8.*

**Définition 2.5.0.7** *Un graphe $G$ de $n$ sommets est arête-bipancyclique si chaque arête $e$ de $G$ se trouve au moins un cycle de toute longueur paire entre 4 et $n$.*

**Définition 2.5.0.8** *Un graphe biparti $G(U, V, E)$ d'ordre $2n$ a un ordre bipancyclique si les ensembles des $U = (u_1, ..., u_n)$ et $V = (v_1, ..., v_n)$, alors le sous graphe induit de $G$ avec l'ensemble de sommets $\{u_1, ..., u_k, v_1, ..., v_k\}$est hamiltonien, pour $2 \leq k \leq n$.*

## 2.6 Résultats de bipancyclicité

Dans cette section , nous citons quelques théorèmes et lemmes relatifs à la bipancyclicité et arête-bipancyclicité.

### 2.6.1 bipacyclicité de l'hypercube et le produit cartésien

L'hypercube est arête-bipancyclique selon le lemme proposé par Saad et Schultz.

**Lemme 2.6.1 (Saadet Schultz, [15])** *Pour $n \geq 2$, l'hypercube $Q_n$ est arête-bipancyclique.*

**Lemme 2.6.2 (Shih et al, [17])** *Considérons un hypercube $Q_n$ à dimension $n$, pour $n \geq 4$. Soit $e_0$, $e_1$ et $e_2$ trois arêtes quelconques dans $Q_n$, il existe des cycles contenant $e_1$ et $e_2$ dans $Q_n - \{e_0\}$ de longueurs $l(C) = 2^n$, $2^n - 2$ et $2^n - 4$.*

Tsai, Tan, Hsu, ont montrés le théorème suivant :

**Théorème 2.6.1 (Tsai et Tan, [12])** *Pour $n \geq 3$, L'hypercube $Q_n$ est bipancyclique.*

Le lemme suivant découle du fait que le produit de cycles pairs est bipancyclique.

**Lemme 2.6.3 ( Chen, [6])** *Si $G_1$ et $G_2$ sont des graphes bipartis hamiltoniens , alors le produit cartésien $G_1 \square G_2$ est bipancyclique.*

**Lemme 2.6.4 (Chen, [6])** *Pour $r \geq 2$, le graphe $C_{k1} \square C_{k2} \square ... \square C_{kr}$ contient des :*

- *cycles de toute longueur de $k_i$ à $k_1 k_2 ... k_r$ si $k_i$ est impair ;*
- *cycles de toute longueur paire de 4 à $m$, où $m = k_1 k_2 ... k_r$ si certains $k_i$ est pair ;*
- *cycles de toute longueur paire de 4 à $m$, où $m = k_1 k_2 ... k_r - 1$ si tous les $k_i$ sont impair.*

Les grilles sont des graphes bipancyclique suivant le lemme :

**Lemme 2.6.5 (Mane et Waphare, [13])** *Étant donné $k \geq 2$, $P_k$ la chaîne de longueur $k - 1$. Alors la grille $P_m \square P_n$ $(m, n \geq 2)$ contient un cycle de longueur $l$ pour tout entier pair $l$ avec $4 \leq l \leq m.n$.*

### 2.6.2 Conditions sur le nombre d'arêtes

Citons quelques conditions sur le nombre d'arêtes et la bipancyclicité des graphes bipartis équilibrés. En 1988, Entringer et Schmeichel, ont proposé les trois théorèmes suivants dans l'ordre. Le premier est une condition nécessaire de la bipancyclicité des graphes bipartis équilibrés.

**Théorème 2.6.2 (Entringer et Schmeichel, [8])** *Supposons que $G$ un graphe biparti équilibré d'ordre $2n$. Si $G$ a plus de $n(n-1)+1$ arêtes, alors $G$ est bipancyclique.*

Ce second théorème est une condition nécessaire de la bipancyclicité des graphes bipartis hamiltoniens.

**Théorème 2.6.3 ( Entringer et Schmeichel, [8])** *Supposons que $G$ un graphe biparti hamiltonien d'ordre $2n$ ($n > 3$). Si $G$ a plus de $\frac{n^2}{2}$ arêtes, alors $G$ est bipancyclique.*

Il est facile de voir que l'exigence $n > 3$ est nécessaire, car pour $n = 3$ le 4-cycle n'existe pas. Voir la figure 2.7

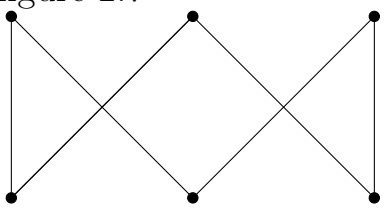


FIGURE 2.7: Un graphe biparti

Entringer et schmeichel ont montrés que les graphes bipartis équilibrés sont bipancycliques.

**Théorème 2.6.4 (Entringer et schmeichel, [8])** *Tout graphe biparti équilibré d'ordre $2n$ de $n^2 - n + 2$ arêtes est bipancyclique.*

On général, Les graphes bipartis contiennent des $2p$-cycles à condition que le nombre d'arêtes dépasse un nombre bien déterminé.

**Théorème 2.6.5 (Bagga et Varma, [3])** *Soit $G = (U, V; E)$ un graphe biparti avec $\mid U \mid = m$, $\mid V \mid = n$ et $m \leq n$. Si $\mid E(G) \mid \geq n(m-1)+2$, alors $G$ contient des $C_{2p}$ pour tous $2 \leq p \leq m$.*

De même, Jackson a cité le théorème d'existence des $2p$-cycles suivant une condition sur le nombre d'arêtes et la cardinalitée de $\mid U \mid$.

**Théorème 2.6.6 (Jackson, [11])** *Soit $G = (U, V; E)$ un graphe biparti avec $\mid U \mid = m$, $\mid V \mid = n$ et $m \leq n$, ou $m \geq 2k + 2$, $k \in N$. Si $\mid E(G) \mid \geq n(m - k - 1) + k + 2$, alors il existe $p \geq m - k$ tel que le sous graphe $C_{2p} \subset G$.*

### 2.6.3 Conditions sur les degrés

Citons quelques conditions sur les degrés et la bipancyclicité des graphes bipartis équilibrés et graphes bipartis hamiltoniens. Schmeichel et Mitchem ont montrés qu'un graphe biparti hamiltonien et bipancyclique si la somme des degrés de deux sommets consécutifs dépasse la moitié d'ordre du graphe.

**Théorème 2.6.7 (Schmeichel et Mitchem, [16])** *Un graphe biparti hamiltonien avec le cycle hamiltonien $C = (v_1, v_2, ..., v_{2n}, v_1)$, où $d_G(v_1) + d_G(v_{2n}) \geq n + 1$, est bipancyclique.*

**Remarque 4** *Le théorème est évidemment vrai pour $n = 2$ et faux pour $n = 3$ (considère $C_6$).*

Ensuite, Amar, a cité le théorème suivant :

**Théorème 2.6.8 (Amar, [1])** *Un graphe biparti équilibré connexe d'ordre $2n$ satisfaisant à la condition que pour toutes les paires de sommets $u, v$ où $d_G(u, v) = 3$ implique $d_G(u) + d_G(v) \geq n + 1$, alors $G$ est bipancyclique.*

**Lemme 2.6.6 (Schmeichel et Mitchem, [16])** *Supposons que $n$ est pair, et $G$ un graphe biparti contenant un cycle hamiltonien $C = (v_1, v_2, ..., v_{2n}, v_1)$ dans lequel $d_G(v_2) = d_G(v_{2n}) = \frac{1}{2}n + 1$. Alors $G$ est bipancyclique.*

# Chapitre 3

# Quelques résultats sur les graphes arête-bipancyclique

## 3.1 Introduction

Nous allons présenté dans le troisième chapitre quelques résultats sur les graphes bipancyclique et graphes arête-bipancyclique.

## 3.2 Graphes bipartis complets équilibrés et arête-bipancyclicité.

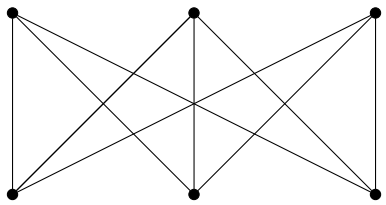


FIGURE 3.1: Le graphe biparti équilibré $K_{3,3}$

**Proposition 3.2.1** *Les graphes bipartis complets équilibrés $K_{n,n}$ $(n \geq 2)$ sont des graphes arête-bipancyclique.*

**Preuve 3.2.0.1** *Soit $G = (V, E)$ un graphe biparti complet équilibré $K_{n,n}$ $(n \geq 2)$, le nombre d'arête dans un graphe biparti complet est $n^2$, et comme $n^2 \geq n^2 - n + 2 \geq n^2 - n + 1$ , d'aprés les théorèmes 2.7.2 et 2.7.4 $G$ est un graphe bipancyclique.Puisque le graphe biparti ne contient pas de cycles de longueur impaire.Alors chaque arête $e$ de $G$ se trouve dans un cycle de chaque longueur paire entre 4 et $2n$.*

## 3.3 Hypercubes et arête-bipancyclicité.

**Proposition 3.3.1** *Les hypercubes $Q_n$ avec $(n \geq 2)$ sont des graphes arête-bipancyclique.*

**Preuve 3.3.0.2** *Soit $Q_n$ un hypercube, par définition $Q_n$ est le produit cartésien de $n$ $(n \geq 2)$ graphes complets $K_2$. C'est-à-dire $Q_n$ est un grille d'ordre $2^n$, d'après le lemme 2.7.5, $Q_n$ contient tous les cycles de longueur 4, 6, ..., $2^n$.D'après le lemme 2.7.1, $Q_n$ est un graphe arête-bipancyclique.*

## 3.4 Graphes complets et arête-bipancyclicité

**Proposition 3.4.1** *Les graphes complets $K_n$ d'ordre $n$ avec $n \geq 4$ sont des graphes arête-bipancyclique.*

**Preuve 3.4.0.3** *Soit $G = (V, E)$ un graphe complet. Pour chaque sommet $v$, $\mid N_G(v) \mid = n-1$ le sous-graphe $G-v$ est un graphe complet. Soit e l'arête incidente au sommet $v$, alors il existe une chaine $p$ de longueur $k$ tel que $3 \leq k \leq n-1$, les deux extrémités de la chaîne $p$ sont adjacents à $v$, donc l'arête $e$ appartient à un cycle de longueur $k+1$ qui contint la chaîne $p$ et le sommet $v$.*
*On pose : $l = k+1 \Rightarrow k = l-1$ avec $l$ nombre paire, alors $e$ appartient aux cycle de longueur $l$ avec $4 \leq l \leq n$. Donc les graphes complets sont des graphes arête-bipancyclique.*

## 3.5 Graphe de Turan et arête-bipancyclicité

**Définition 3.5.0.1** *Le graphe de Turan noté $T_{k,n}$, est un graphe $k-$parti complet à $n$ sommets dont les parties sont de tailles égales ou presque égales. Voir la figure 3.2.*

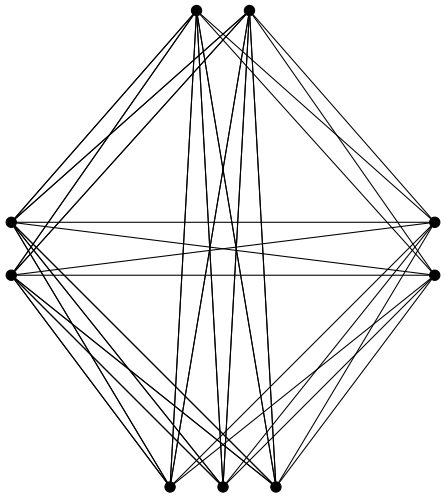


FIGURE 3.2: Le graphe de turan $T_{4,9}$

**Proposition 3.5.1** *Le graphe de Turan $T_{k,n}$ avec $k \geq 2$ et $n > 4$ est un graphe arête-bipancyclique.*

**Preuve 3.5.0.4** *Soit $T_{k,n}$ un graphe de Turan, on a chaque sommet $v$ est de degré $d_T(v) \geq \frac{n}{2}$ car $k \geq 2$, donc d'après la (Condition de Dirac), $T$ est un graphe hamiltonien.*

- *Si $k = 2$, alors $T$ est un graphe biparti complet équilibré $K_{n,n}$ qui est un graphe arête-bipancyclique (les graphes bipartis complets sont des cas particuliers du grapheT$_{k,n}$).*
- *Si $3 \leq k \leq n$, alors le graphe $T$ contient $k$ graphe complet (clique) $K_n$ et Les graphes complets sont des graphes arête-bipancyclique(voir la preuve de proposition 3.4.1).*

## 3.6 Graphes roues et arête-bipancyclicité

**Définition 3.6.0.2** *Le graphe roue $W_n$ est un graphe d'ordre $n \geq 4$ formé en ajoutant un sommet centre adjacent à tous les sommets du cycle $C_{n-1}$. La figure 3.3 contient des graphes roues.*



FIGURE 3.3: Les roues $w_4$ et $w_5$

**Proposition 3.6.1** *Les roues sont des graphes arête-bipancyclique.*

**Preuve 3.6.0.5** *Soit $W_n$ un roue, et soit $v$ le sommet centre de $W_n$ , $v$ est adjacent à tout les sommet de $W_n$. Le graphe $W - v$ est un cycle de longueur $n-1$, soit $e$ l'arête incidente au sommet $v$, alors il existe une chaine $p$ de longueur $k$ tel que $3 \leq k \leq n-1$, les deux extrémités de la chaîne $p$ est adjacent à $v$, donc l'arête $e$ appartient à un cycle de longueur $k+1$ qui contint la chaîne $p$ et le sommet $v$.*
*On pose : $l = k+1 \Rightarrow k = l-1$ avec $l$ nombre paire, alors $e$ appartient aux cycle de longueur $l$ avec $4 \leq l \leq n$. Donc les graphes roues sont des graphes arête-bipancyclique.*

## 3.7 Grilles et arête-bipancyclicité

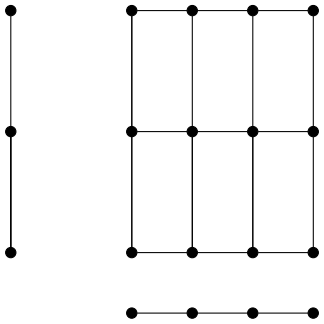


FIGURE 3.4: La grille $P_3 \square P_4$.

**Proposition 3.7.1** *Les grilles $P_n \square P_m$ avec $(n, m \geq 2)$ sont des graphes arête-bipancyclique.*

**Preuve 3.7.0.6** *Soit $P_n \square P_m$ une grille et $e$ une arête de $G$.Par construction de la grille $e \in C_4$.Si $\mid E(G) \mid > 4$, alors il existe un $C_4^{'}$ tel que $e \in C_4 \cap C_4^{'}$. Donc le cycle $C^{'} = C_4 \cap C_4^{'} - \{e\}$ tel que $E(C^{'}) = 6$. ainsi de suite on peut démontrer que l'arête $e$ est dans un dans un cycle de longueur paire de $4$ à $n.m$.*

## 3.8 Tores et arête-bipancyclicité

**Définition 3.8.0.3** *Le tore $C_n \square C_n$, ou $n \geq 3$ est une grille $P_n \square P_n$ avec une arête périphérique dans chaque ligne et colonne.*

**Proposition 3.8.1** *Les tores $T_{n,n}$ sont des graphes arête-bipancyclique.*

**Preuve 3.8.0.7** *Soit $T_{n,n}$ un tore, Si n est pair :*
*D'après le lemme* 2.7.3*, le produit cartésien des graphes bipartis hamiltoniens (les cycles pairs ) est bipancyclique. Par conséquent chaque arête e de G se trouve dans un cycle de chaque longueur paire entre* 4 *et* $n^2$*. Donc Les tores $T_{n,n}$ avec (n est pair) sont des graphes arête-bipancyclique.*
*Si n est impaire :*
*D'après le troisième résultat du lemme* 2.7.4*, Les tores $T_{n,n}$ avec (n est impair) sont des graphes arête-bipancyclique.*

## 3.9 Graphes non connexe et arête-bipancyclicité

**Proposition 3.9.1** *Les graphes non connexe sont des graphes non arête-bipancyclique.*

**Preuve 3.9.0.8** *Soit $G = (V, E)$ un graphe non connexe , G admet au moins deux composantes connexes . Soit $C_1, C_2, ..., C_k$ les composantes connexes de G, et soit $C' \neq C_i$ tel que $1 \leq i \leq k$,$\mid V(C') \mid = \max \mid V(C_i) \mid$ soit $e \in \mid E(C') \mid$ l'arête e n'appartient pas aux cycles d'ordre m tel que $m > \mid V(C') \mid$ donc G n'est pas arête-bipancyclique.*

## 3.10 Cylindres et arête-bipancyclicité

**Définition 3.10.0.4** *Le cylindre $C_n \square P_m$, ou $n, m \geq 3$ est une grille $P_n \square P_m$ avec arête enveloppant dans chaque rangée.*

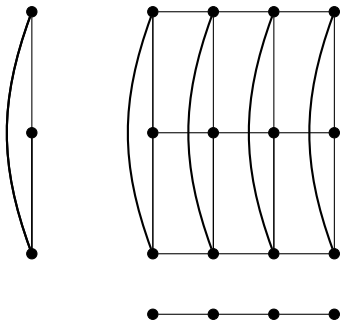


FIGURE 3.5: Le cylindre $C_3 \square P_4$

**Conjecture :**
Pour $m, n$ ($\geq 4$) deux entiers pair , ou $n \equiv 0(mod 4)$, les cylindres $C_m \square P_{n+1}$ et $P_{m+1} \square C_n$ sont des graphes arête-bipancyclique.

# *Conclusion*

*Tout au long de ce travail, nous nous sommes intéressés principalement à l'étude des problèmes de graphe bipancyclique. Dans un premier temps, nous avons rappelé quelques résultats existant sur les graphes bipancyclique qui ont été définis par Schmeichel et Mitchem.*
*Ensuite, on a déterminer la notion du arête-bipancyclique, et nous avons exposé des différents résultats obtenus concernant la détermination du arête-bipancyclique de plusieurs types de graphes par les chercheurs dans ce sens. La bipancyclicité est essentiellement une restriction de pancyclicité(qui demande si un graphe donné contient des cycles de toute longueur possible) au graphe biparti dont tous les cycles sont nécessairement paires. On conclut donc que la détermination de ce graphe en général n'est pas facile pour certains types de graphe.*

# Bibliographie

[1] D. Amar. Applying a condition for a hamiltonian bipartite graph to be bipancyclic. Descrete Math. 111 :19-25, 1993.

[2] S. Asratian, Tristan M. J. Denley et Roland Häggkvist, « Bipartite Graphs and their Applications », Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, vol. 131,1998.

[3] K.S. Bagga and B.N. Varma, Hamiltonian properties in bipartite graphs, Bull. Inst. Comb. Appl. 26 (1999) 71-85.

[4] M.Y. Chan, S.J. Lee, On the existence of hamiltonian circuits in faulty hypercubes, SIAM J. Discrete Math. 4 (1991) 511–527.

[5] G.Chen, R.Fauldree, R.Gould,M.Jacobson, and L.Lesniak. Hamiltonocity in balenced K-partite graphs. Graphs and combinatoircs, 11 :221-231 ,1995.

[6] X.B. Chen, Panconnectivity and edge-pancyclicity of multidimensionel torus, Discrete Appl. Math. 178(2014)33-45.

[7] G.A.Dirac .Some theoreme on abstract graphs.Proc.lond .Math.soc,2 :69-81.

[8] R.C. Entringer, E.F. Schmeichel, Edge conditions and cycle structure in bipancyclic graphs. Ars. Comb. 26, 229–232 (1988).

[9] A. Harris. Cycle Structures in Graphs. PhD thesis, University of Colorado Den ver, 2009.

[10] G.R.T.Hendry, Extending cycles in graphs. Discrete Math. 85(1990), 59-72.

[11] B. Jackson, Long cycles in bipartite graphs, J. Comb. Theory Ser. B 38 (1985) 118-131.

[12] T.K.Li, C.H. Tsai, J.J.M. Tan, L.H. Hsu, Bipanconnectivity and edge-fault-tolerant bipancyclicity of hypercube, Informe. Process. Lett. 87(2003) 107-110.

[13] S.A.Mane, B.N.Waphare, Regular connected bipancyclic spanning subgraphs of hypercubes, comput. Math. Appl, 62(2011), 3551-3554.

[14] O. Ore, Note on hamilton circuits, Amer. Math. Monthly 67 :55 (1960).

[15] Y. Saad, M.H. Schultz, Topological properties of hypercubes, IEEE Trans. Comput. 37 (7) (1988) 867–872.

[16] E.F. Schmeichel, J. Mitchem, Bipartite graphs with cycles of all even lengths. J. Graph Theory 6, 429–439 (1982).

[17] L.M. Shih et al. / Information Processing Letters 105 (2007) 20–25.

[18] She-Min Zhang. Pancyclism and bipancyclism of hamiltonian graph. J. Combin. Theory, 60(Series B) :159-168,1994.