Table des matières

Résumé **2**

Remerciements **2**

Dédicace **2**

Introduction **2**

1 Généralité sur les courbes et les surfaces paramétrées **8**

1.1 Courbes paramétrées 8

1.1.1 Vecteur tangent 9

1.1.2 Longueur d'arc 10

1.1.3 Abscisse curviligne 10

1.1.4 courbes planes 11

1.1.5 Courbes dans $\mathbb{R}^3$ 13

1.2 Surfaces paramétrées 14

1.2.1 Surfaces paramétrées dans $\mathbb{R}^3$ 14

1.2.2 Plan tangent et vecteur normal 16

1.2.3 Surface orientée 17

1.2.4 Première Forme fondamentale 18

1.2.5 Application de Gauss 18

1.2.6 Endomorphisme de Weingarten 18

1.2.7 Deuxième forme fondamentale 19

1.3 Application 21

1.3.1 Le vecteur normal 21

1.3.2 Première Forme fondamentale 22

1.3.3 Deuxième forme fondamentale 22

1.3.4 Les courbures 22

2 Les roulettes des coniques **25**

2.1 Paramétrage d'une roulette de Delaunay 25

2.1.1 Roulette d'une parabole 25

2.1.2 Roulette d'une ellipse 30
2.1.3 Roulette d'une hyperbole 32

3 Les surfaces de Delaunay **36**
3.1 Catenoïde : 36
3.2 Onduloïde : 37
3.3 Nodoïde 38
3.3.1 Nodoïde 1 : 38
3.3.2 Nodoïde 2 : 40

Bibliographie **44**

Table des figures

2.1 Position initiale d'une roulette d'une parabole. 26
2.2 $2^{\text{ème}}$ position 26
2.3 chaînette 28
2.4 caténoïde 29
2.5 ellipse 30
2.6 ondulaire 32
2.7 onduloïde 32
2.8 hyperbole 33
2.9 nodalaire 35
2.10 nodoïde 35

Notations

— $f_u = \frac{\partial f}{\partial t}$

— $f_v = \frac{\partial f}{\partial v}$

— $f_{uu} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 t}$

— $f_{vv} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 v}$

— $f_{uv} = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial v}$
— $\|.\|$: la norme ecludien

Résumé

Dans ce travail on obtient des paramétrages des surfaces de Delaunay qui sont des surfaces de révolution à courbure moyenne constante, ces paramétrages découlent directement des paramétrages des coniques engendrant ces surfaces via la roulette correspondante. Ce traitement utilise la géométrie naturelle de la conique (parabolique, elliptique ou hyperbolique) et conduit à des expressions simples pour les courbures moyenne et gaussienne de ces surfaces.

abstract

In this work we obtain parametrizations of the Delaunay surfaces which are surfaces of revolution with constant mean curvature, these parametrizations result directly from the parametrizations of the conics generating these surfaces via the corresponding roulette. This treatment uses the natural geometry of the conic (parabolic, elliptical or hyperbolic) and leads to simple expressions for the mean and Gaussian curvatures of these surfaces.

Remerciements

Au nom de Dieu
le très miséricordieux le plus, miséricordieux, louange à
Allah, par lequel les bonnes actions sont faites ce qui nous a
conduit sur le chemin de la connaissance et des portes de la science,
sans lui rien de tout cela n'aurait peut être, je veux remercier mon superviseur
Mr. KRIMI à son encouragement, son aide et son suivit pour terminer ce travail.
Aussi je remercie les membres de jury pour avoir accepté de discuter cette
mémoire. Je remercie sincèrement tous mes professeurs qui m'ont
accompagné au cours de mes études et aux mes Professeurs à d'université
Dr. Yehia Farès de Medea, enfin Merci
à toute ma famille

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents, ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.*

A toute ma famille.

A mes frère et *A mes Soeurs.*

A mes amies.
S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

Introduction

Les surfaces de révolution à courbure moyenne constante (CMC) ont été introduites et complètement caractérisées par C. Delaunay. Outre les cas élémentaires de sphères et de cylindres, il existe trois classes de surfaces de Delaunay, les caténoïdes, les unduloïdes et les nodoïdes, correspondant au choix de la conique comme parabole, ellipse ou hyperbole, respectivement. Nous obtenons ici les paramétrages des roulettes (les courbes qui engendrent les surfaces de Delaunay par rotation), et donc des surfaces de Delaunay correspondantes, directement à partir des paramétrages des coniques. Dans notre approche, l'unduloïde est décrit avec des fonctions trigonométriques, tandis que le caténoïde et le nodoïde sont décrits avec des fonctions hyperboliques. Cela donne des expressions simples pour la courbure gaussienne, la courbure totale et la courbure moyenne ainsi que la longueur des roulettes. La courbure moyenne d'un unduloïde, en particulier, est donnée par l'inverse de la distance entre les sommets de l'ellipse correspondante, alors que la courbure moyenne d'un nodoïde est donnée par moins l'inverse de la distance entre les sommets de l'hyperbole correspondante. Les paramétrages présentés ici donnent également lieu à une construction simple de nodoïdes. Ce travail est organisé comme suit, en chapitre un, on présente les notions générales nécessaires pour cette étude. Dans le chapitre deux, on introduit les roulettes des coniques. Enfin, le chapitre trois est une présentation des surfaces à courbure moyenne constante, appelées surfaces de Delaunay.

Chapitre 1

Généralité sur les courbes et les surfaces paramétrées

1.1 Courbes paramétrées

Définition 1.1.1. *Une courbe paramétrée ou un arc paramétrée est une application de classe* C^1 *:*

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Le paramétrage γ *est dit régulier sur* $[a, b]$ *si* $\gamma'(t) \neq 0$ *pour tout* $t \in [a, b]$.
L'image $Im\ \gamma = \gamma([a, b])$ *est appelée le support de* γ.

Exemple 1.1.1. (***Droite dans*** $\mathbb{R}^n$) *La droite dans* $\mathbb{R}^2$ *passant par Les deux points* $(1, 2)$ *et* $(2, -3)$ *peut être paramétrer par :*

$$\gamma(t) = (1, 2) + t(2, -3) = (1 + 2t, 2 - 3t)$$

. `Remarquons` *que,*$\gamma'(t) = (2, -3) \neq (0, 0)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$. *Donc* γ *est régulier sur* $\mathbb{R}$

Exemple 1.1.2. (**Cercle**) *Le cercle* C *de rayon* 2 *et de centre* $(1, -1)$ *est donné par l'équation :*

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

pour trouver un paramétrage pour C *on peut prendre*

$$x - 1 = 2\cos t \quad et \quad y + 1 = 2\sin t$$

alors

$$x = 1 + 2\cos t \quad et \quad y = 2\sin t - 1$$

on définit

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = (x(t), y(t)) = (1 + 2\cos t, 2\sin t - 1) \end{array}$$

puisque $\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t) \neq (0, 0)$ *pour tout* $t \in [0, 2\pi]$, *alors* γ *est un paramétrage régulire de* C.

Exemple 1.1.3. (**Ellipse**) *Pour trouver un paramétrage de l'ellipse E donné par l'équation cartésienne :*

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

on pose

$$\frac{x}{2}=\cos t \quad et \quad \frac{y}{3}=\sin t$$

alors

$$x=2\cos t \quad et \quad y=3\sin t$$

on peut vérifier facilement que :

$$\begin{array}{rccl}\gamma & :\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) \quad =(2\cos t, 3\sin t)\end{array}$$

est un paramétrage de E .

Exemple 1.1.4. (**Graphe d'une fonction**) *Si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et Γ_f son graphe alors :*

$$\begin{array}{rccl}\gamma & :[a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) \quad =(t,f(t))\end{array}$$

est un paramétrage de Γ_f .

1.1.1 Vecteur tangent

Définition 1.1.1. *Soit $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n (n=2 \ \ ou \ \ n=3)$ un arc paramétré et $t_0\in[a,b]$*

1.$\gamma'(t)$ est appele le vecteur tangent à γ au point $\gamma(t)$.

*2. Un point $\gamma(t_0)$ est dit **singulier** si $\gamma'(t)=0$(où 0 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$).*

*3. Un point $\gamma(t_0)$ est dit **régulier** si $\gamma'(t)\neq 0$*

*4. L'arc pramétré γ est dit **régulier**si tous ses points sont réguliers*

*5. Si γ est de classe C^2, le point p=$\gamma(t_0)$ est dit **birégulier** si les deux vecteurs*

$$\gamma'(t_0)=\frac{d\gamma}{dt}(t_0)=(x_1'(t_0),...,x_n'(t_0))$$

$$\gamma''(t_0)=\frac{d^2\gamma}{d^2t}(t_0)=(x_1''(t_0),...,x_n''(t_0))$$

*sont **linéairement indépendants** dans $\mathbb{R}^n$*

*6. L'arc paramétré γ est dit **birégulier** si γ est de classe C^2 et tous ses points sont birégulires .*

Exemple 1.1.5. *L'application $\gamma(t)=(t^2,t^4)$, $t\in\mathbb{R}$ est un paramétrage de la parabole d'équation $y=x^2$. C'est un arc paramétré non régulier .En effet : $\gamma'(t)=(2t,4t^3)$ pour $t=0,\gamma'(0)=(0,0)$ donc le point $\gamma(0)=(0,0)$ est un point singulier d'où γ est non régulier sur $\mathbb{R}$.*

Exemple 1.1.6. *L'arc parammétré :*

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = (t, 3t^2, 2t^3). \end{array}$$

est birégulier. En effet ,$\gamma'(t) = (1, 6t, 6t^2)$ *et* $\gamma''(t) = (0, 6, 12t)$ *sont des vecteurs non nuls et non colinéaires donc linéairement indépendants.*

1.1.2 Longueur d'arc

Soit C une courbe dans $\mathbb{R}^2$ (*ou dans* $\mathbb{R}^3$)

Définition 1.1.2. *La longueur de l'arc de C d'origine* $\gamma(a)$ *et d'extrémité* $\gamma(t)$ *est donnée par :*

$$L(\gamma) = \int_a^t \|\gamma'(t)\| dt.$$

Exemple 1.1.7. *Soit un paramétrage d'un cercle C dans le plan*

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \end{array}$$

pour $t = \pi$ *:*

$$L(\gamma) = \int_0^\pi \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^\pi r dt = r\pi.$$

La longueur du support de γ (*la circonférence du cercle*) *est :*

$$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2r\pi.$$

1.1.3 Abscisse curviligne

Définition 1.1.3. *On appelle* ***abscisse curviligne*** *d'origine P=* $\gamma(a)$ *l'application définie par :*

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : [a, b] & \longrightarrow & [0, L] \\ & t & \longmapsto & s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du. \end{array}$$

Remarque 1.1.1. *1. L'abscisse curviligne* $s = s(t)$ *est une fonction diférentiable et croissante. En efet :*

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_a^t \|\gamma'(u)\| du = \|\gamma'(u)\| > 0$$

2. *Donc $s = s(t)$ est une bijection de $[a, b]$ sur $[0, L]$. Son inverse est $t = t(s)$. De plus on a :*

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}}$$

Définition 1.1.4. *Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un paramétrage d'une courbe C.*

L'arc γ est dit ***paramétré par abscisse curviligne****(par* ***longueur d'arc*** *ou* ***à vitesse unitaire*** *) noté p.a.c si $\gamma'(t)$ est un vecteur* ***unitaire*** *pour tout $t \in [a, b]$.*

Exemple 1.1.8. *Soit un paramétrage d'une droite*

$$\gamma(t) = (1 + t, 2 - 5t).$$

$\gamma'(t) = (1, -5)$. *Alors*

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{26} du = \sqrt{26}t.$$

la fonction inverse est

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{26}}.$$

1.1.4 courbes planes

Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré par abscisse curviligne, nous noterons $T(s)$ son vecteur tangent $\gamma'(s)$, qui dans ce cas est un vecteur unitaire.

Définition 1.1.5. *Soit $\gamma : \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré p.a.c. On définit le vecteur normal au point $\gamma(s)$:*

$$n(s) = J \times T(s), \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

remarquons que $\|n(s)\| = 1$.

Exemple 1.1.9. *Un paramétrage d'un cercle*

$$\begin{array}{rccl} \gamma & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longrightarrow & \gamma(s) = (r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}) \end{array}$$

$T(s) = (-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r})$ *et* $n(s) = (-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r})$.

Remarque 1.1.2. *Cette définition est réalisée de telle manière que la famille $\{T(s), n(s)\}$ forme une base orthonormée positivement orientée de $\mathbb{R}^2$. En d'autres termes, le vecteur $n(s)$ est obtenu à partir de $T(s)$ par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens antihoraire.*

Courbure d'une courbe plane

Si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est un arc paramétré p.a.c pour $s \in I$, on a :

$$< T(s), T(s) >= \|T(s)\| = 1$$

dérivons cette équation :

$$< T'(s), T(s) > + < T(s), T'(s) = 2 < T'(s), T(s) >= 0$$

Ainsi, les deux vecteurs $T(s)$ *et* $T'(s)$ sont perpendiculaires. Par conséqent $T'(s)$ est un multiple du vecteur normal $n(s)$, d'où :

$$T'(s) = \kappa(s).n(s).$$

Définition 1.1.6. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un arc paramétré p.a.c. La fonction*

$$\kappa : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

est appelée ***la courbure*** *de γ*

Exemple 1.1.10. *Soit le paramétrage d'un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon r :*

$$\begin{array}{rcll} \gamma & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & s & \longrightarrow & \gamma(s) = (r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}) \end{array}$$

remarquons que $\|T(s)\| = \|(-\sin\frac{s}{r}, \cos\frac{s}{r})\| = 1$, c-à-d γ est paramétré p.a.c, de plus $n(s) = (-\cos\frac{s}{r}, -\sin\frac{s}{r})$, on a :$T'(s) = (-\frac{1}{r}\cos\frac{s}{r}, -\frac{1}{r}\sin\frac{s}{r}) = \frac{1}{r} \times n(s)$, d'où $\kappa(s) = \frac{1}{r}$.

Remarque 1.1.3. *1 On peut calculr la courbure par :*

$$\kappa(s) =< T'(s), n(s) >= det(\gamma'(s), \gamma''(s))$$

2 Puisque $\|T'(s)\| = |\kappa(s)|$. La courbure d'une courbe plane est orientée.

Proposition 1.1.1. *Soit γ un arc paramétré régulier. La courbure de γ au point $\gamma(t)$ est :*

$$\kappa(t) = \frac{det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

Preuve : (voir*[5]*) ∎

Exemple 1.1.11.

$$\begin{array}{rcll} \gamma & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \end{array}$$

$$\gamma'(t) = (-r\sin t, r\cos t) \;\; et \;\; \gamma''(t) = (-r\cos t, -r\sin t)$$

on obtient :

$$\kappa(t) = \frac{det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{r^2}{r^3} = \frac{1}{r}.$$

1.1.5 Courbes dans $\mathbb{R}^3$

Dans toute la section,$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un paramétrage d'une courbe dans $\mathbb{R}^3$. De plus, si $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est p.a.c, on note par $T(s)$ le vecteur tangent $\gamma'(s)$ au point $\gamma(s)$.

Courbure

Définition 1.1.7. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un arc paramétré p.a.c. La fonction*

$$\begin{array}{rccl} \kappa & : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \kappa(s) = \|T'(s)\| \end{array}$$

est appelée ***la courbure*** *de γ au point $\gamma(s)$.*

Exemple 1.1.12. *1 La droite dans $\mathbb{R}^3$ passant par $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1)$ et $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ peut être paramétrer par :*

$$\gamma(t) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1) + t(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}t, -\frac{1}{\sqrt{2}}t, 1)$$

Remarquons que : $\gamma'(t) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque $\|\gamma'(t)\| = 1$, Alors :

$$\kappa(s) = \|\gamma''(t)\| = \|(0, 0, 0)\|$$

2.

$$\gamma(t) = (\cos(\frac{t}{\sqrt{2}}), \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}), \frac{t}{\sqrt{2}})$$

$$\gamma'(t) = (-\frac{1}{\sqrt{2}} sin(\frac{t}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\frac{t}{\sqrt{2}}), \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\|\gamma'(t)\| = 1$$

donc γ est p.a.c

$$\gamma''(t) = (-\frac{1}{2} \cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\frac{1}{2} sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0)$$

$$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{2}$$

Définition 1.1.8. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est un arc paramétré p.a.c. Si $\kappa(s) \neq 0$ pour tout $s \in I$. on définit le* ***vecteur normal*** *de γ au point $\gamma(s)$ par :*

$$n(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{T'(s)}{\kappa(s)}$$

Exemple 1.1.13.

$$\gamma(s) = (\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), \frac{s}{\sqrt{2}})$$

d'aprés l'exemple précédent, γ est p.a.c :

$$\gamma''(s) = (-\frac{1}{2} \cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\frac{1}{2} \sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0) \quad et \quad \kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = \frac{1}{2}$$

d'où :

$$n(s) = \frac{\gamma''(s)}{\kappa(s)} = (-\cos(\frac{s}{\sqrt{2}}), -\sin(\frac{s}{\sqrt{2}}), 0).$$

Proposition 1.1.2. *Soit $\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un arc paramétré régulier. Alors sa courbure est :*

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}.$$

Preuve : (Voir *[3]*, pp 291) ∎

Exemple 1.1.14. *L'hélice circulaire d'axe (zz') est la courbe paramétrée par :*

$$\gamma(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt), t \in \mathbb{R}$$

où a, b sont des réels non nuls

$$\gamma'(t) = (-a\sin(t), a\cos(t), b)$$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ceci montre que γ est régulier, mais n'est pas p.a.c.

$$\gamma''(t) = (-a\cos(t), -a\sin(t), 0)$$

et

$$\gamma'(t) \wedge \gamma''(t) = (ab\sin(t), -ab\cos(t), a^2)$$

il s'ensuit :

$$\kappa(t) = \frac{\|(ab\sin t, -ab\cos t, a^2)\|}{\|(-a\sin(t), a\cos(t), b)\|^3} = \frac{(a^2b^2 + a^4)^{\frac{1}{2}}}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{|a|}{a^2 + b^2}.$$

1.2 Surfaces paramétrées

1.2.1 Surfaces paramétrées dans $\mathbb{R}^3$

Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$. On utilisera (u, v) comme coordonnées dans l'espace des paramètres U et (x, y, z) comme coordonnées dans $\mathbb{R}^3$

Définition 1.2.1. *Une fonction $\sigma : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ est dite lisse sur U si pour tout entier $k \geq 2$, toutes ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continues.*

Définition 1.2.2. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$. Une application lisse :*

$$\begin{array}{rccc} \sigma & : U & \longrightarrow & \sigma(U) \subset \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & \sigma(u, v) \end{array}$$

*est dite un **paramétrage d'une surface**(ou une **surface paramétrée**)dans $\mathbb{R}^3$ si $\sigma_u \times \sigma_v(u, v) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ pour tout $(u, v) \in U$. $\sigma(U)$ est appelée le support de σ.*

Remarque 1.2.1. *La condition $\sigma_u \times \sigma_v(u,v) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ est équivalente à l'une des deux assertions équivalentes :*

1. *La matrice Jacobienne de σ est de **rang 2** en chaque point de U,*
2. *les deux vecteur σ_t et σ_v sont linéairement indépendants pour tout $(u,v) \in U$.*

Exemple 1.2.1. *Le plan définit par l'équation cartésienne :*

$$3x + 2y - z = 0$$

. De l'équation découle

$$z = 3x + 2y$$

posons $x = u$ et $y = v$ on obtient un paramétrage de ce plan :

$$\begin{array}{rccccl} \sigma & : U & \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \\ & (u,v) & & \longmapsto & \sigma(u,v) & = (u, v, 3u + 2v) \end{array}$$

Exemple 1.2.2. (***Graphe d'une fonction lisse***) *Soit la fonction lisse*

$$\begin{array}{rccccl} f & : U & \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & (x,y) & & \longmapsto & f(x,y) & = z \end{array}$$

Considérons le graphe Γ_f de

$$\begin{array}{rccccl} \sigma & : U & \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & \\ & (x,y) & & \longmapsto & \sigma(x,y) & = (x, y, f(x,y)) \end{array}$$

l'application σ est un paramétrage de la surface $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^3$. En effet, l'application σ de U dans $\mathbb{R}^3$ vérifie pour tout $(u,v) \in U$:

$$\sigma_u \times \sigma_v(u,v) = (-f_u, -f_v, 1)(u,v) \neq 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Exemple 1.2.3. (***Surface de révolution***)
Soit $\gamma(t) = (y(t), z(t)), t \in [a,b])$ un paramétrage régulier d'une courbe C dans la plan (yz). On suppose que $y(t) > 0$ pour tout t. La surface obtenue par rotation de C autour de l'axe zz' est appelée la surface de révolution autour de l'axe zz'. Le point $\gamma(u) = (y(u), z(u))$ engendre un cercle dans le plan (xy) de centre $(0,0)$ et de rayon $y(t)$. On peut paramétrer ce cercle par $(y(t)\cos v, y(t)\sin v)$ où $v \in [0, \pi 2]$. En utilisant ce qui précède, on obtient le paramétrage :

$$\begin{array}{rccccl} \sigma & : [a,b] \times [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 & & \\ & (t,v) & \longmapsto & \sigma(t,v) & = (y(t)\cos v, y(t)\sin v, z(t)) \end{array}$$

Vérifions la condition :

$$\sigma_t(t,v) = (y'(t)\cos v, y'(t)\sin v, z'(t))$$

et

$$\sigma_v(t,v) = (-y(t)\sin v, y(t)\cos v, 0)$$

Par conséquent :

$$(\sigma_t \times \sigma_v)(t,v) = (-z'(t)y(t)\cos v, z'(t)y(t)\sin v, y'(t)y(t))$$

et

$$\|(\sigma_t \times \sigma_v)(t,v)\| = y(t)\|\gamma'(t)\| \neq 0$$

donc la surface de révolution de la courbe C est une surface paramétrée dans $\mathbb{R}^3$.

1.2.2 Plan tangent et vecteur normal

Soit $\sigma = \sigma(u,v)$ un paramétrage d'une surface $S = \sigma(U) \subset \mathbb{R}^3$ et

$$\begin{array}{rccc} \gamma & : [a,b] & \longrightarrow & U \subset \mathbb{R}^2 \\ & t & \longmapsto & \gamma(t) = (u(t), v(t)) \end{array}$$

un paramérage régulier d'une courbe C. Considérons maintenant

$$\begin{array}{rccc} \sigma & : U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u(t), v(t)) & \longmapsto & \sigma(u(t), v(t)) = \sigma(\gamma(t)) = \rho(t) \end{array}$$

l'image de C sur $S = \sigma(U)$. L'application $\rho = \sigma \circ \gamma$ est lisse car c'est la composée de deux applications lisses, de plus $\frac{d\rho}{dt}(t) \neq 0$ pour tout t.

Définition 1.2.3. *Soit $v \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul et S une surface de $\mathbb{R}^3$. Le vecteur v est tangent à S en un point $p \in S$ s'il existe une courbe sur S passant par p et paramétrée par β telle que $\frac{d\beta}{dt}(t) \neq v$.*
Si $\beta(t) = \sigma(u(t), v(t))$, alors

$$\frac{d\beta}{dt}(t) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\sigma}{\partial v}\frac{dv}{dt} = \sigma_u\frac{du}{dt} + \sigma_v\frac{dv}{dt} = \sigma_u u' + \sigma_v v'$$

d'où la définition :

Définition 1.2.4. *Soit $p = \sigma(u,v) \in S$. l'espace tangent à S au point p, noté T_pS est le plan engendré par les deux vecteurs $\sigma_u(u,v), \sigma_v(u,v)$.*
Pour un point $x \in T_pS$, alors : $x = p + \sigma_u(u,v) + \sigma_v(u,v)$.

Exemple 1.2.4. *Considérons la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Par l'exemple prédédent, le graphe $\Gamma_f = \{(x,y,x^2+y^2) | (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ est une surface paramétrée par :*

$$\sigma(u,v) = (u,v,f(u,v))$$

Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

$$\sigma_u(u,v) = (1,0,2u), \sigma_v(u,v) = (0,1,2v)$$

et

$$\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v) = (-2u, -2v, 1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$$

pour $p = \sigma(0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{aligned} T_pS &= Vect\{\sigma_t(0,0), \sigma_v(0,0)\} \\ &= Vect\{(1,0,0),(0,1,0)\} \end{aligned}$$

Définition 1.2.5. *Soit*

$$\begin{array}{rccc} \sigma & : U & \longrightarrow & S = \sigma(U) \in \mathbb{R}^3 \\ & (t,v) & \longmapsto & \sigma(u,v) \end{array}$$

une surface paramétrée régulière. Pour $p = \sigma(u,v) \in U$ *le vecteur* $\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)$ *est un vecteur non nul, orthogonal au plan tangent* T_pS*, on obtient le vecteur unitaire correspondant en prenant*

$$n(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|}$$

il est appelé ***le vecteur normal unitaire*** *de* S *au poit* $p = \sigma(u,v)$*.*

Exemple 1.2.5. *1. Considérons* $S = \{(u,v,f(u,v))|(u,v) \in \mathbb{R}^2\}$

Si $p = \sigma(u,v) \in S$*, alors :* $\sigma_u(u,v) = (1,0,f_u(u,v)), \sigma_v(u,v) = (0,1,f_v(u,v)$ *et*

$$n(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|} = \frac{(-f_t,-f_v,1)}{\|(-f_t,-f_v,1)\|} = \frac{(-f_t,-f_v,1)}{\sqrt{f_v^2+f_v^2+1}}$$

2. Pour $S = \{(x,y,z) \in S^2 | z > 0\}$ *paramétrée par :*

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & U = B(0,1) & \longrightarrow & S = \sigma(U) \in \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \sigma(u,v) = (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}) \end{array}$$

où $B(0,1)$ *est la boule ouverte de* $\mathbb{R}^2$*.*

Le vecteur normal au point $p = \sigma(u,v)$ *est :*

$$n(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|} = (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}).$$

1.2.3 Surface orientée

Définition 1.2.6. *Soit* S *une surface régulière de* $\mathbb{R}^3$*. Un champ de vecteurs normal sur* S *est une application vectorielle de class* C^∞

$$n : S \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

tel que pour tout $p \in S, n(p) \in (T_pS)^\perp$ *le plan orthogonal à* (T_pS)

Définition 1.2.7. *Une surface réguliée de* $\mathbb{R}^3$ *est* ***orientée*** *si elle admet un champ de vecteurs normal unitaires global de class* C^∞*.*

1.2.4 Première Forme fondamentale

Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée par :

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \sigma(u,v) \end{array}$$

Définition 1.2.8. *la première forme fondamentale de S au point $p = \sigma(u,v)$ est la restriction du produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ à T_pS l'espace tangent de S en p, c'est donc la forme bilinéaire symétrique définie positive donnée par :*

$$\begin{array}{rccc} I_p : & T_pS \times T_pS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & I_p(u,v) = \langle u,v \rangle . \end{array}$$

où $\langle .,. \rangle$ est le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$

et

$$I_p(u,v) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

avec : $E = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}\right)^2, F = \frac{\partial \sigma}{\partial u}.\frac{\partial \sigma}{\partial v},$ *et* $G = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}\right)^2$

1.2.5 Application de Gauss

Soit S une surface orientée et paramétrée par :

$$\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

un paramétrage régulière, $p = \sigma(u,v)$ un point de S.

Définition 1.2.9. *L'application de Gauss de S est l'application définie par :*

$$\begin{array}{rccc} \nu : & S & \longrightarrow & S^2 \\ & p & \longmapsto & \nu(p) = n_p(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|} \end{array}$$

Où S^2 est la sphère unité.

1.2.6 Endomorphisme de Weingarten

Soit S une surface orientée et paramétrée par :

$$\sigma : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

un paramétrage régulière, $p = \sigma(u,v)$ un point de S.

Définition 1.2.10. *L'endomorphisme de Weingarten est l'applicatin linéaire W_p définie par :*

$$\begin{array}{rccc} W_p : & T_pS & \longrightarrow & T_pS \\ & X & \longmapsto & W_p(X) = -d\nu_p(X). \end{array}$$

où $d\nu_p(X)$ la différentielle de l'application de Gauss

1.2.7 Deuxième forme fondamentale

Définition 1.2.11. *Soit $p = \sigma(u, v)$. La forme bilinéaire symétrique*

$$\begin{array}{rccl} II_p: & T_pS \times T_pS & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (X, Y) & \longmapsto & II_p(X, Y) = \langle W_p(X), Y\rangle = -\langle d\nu_p(X), Y\rangle \end{array}$$

est appelée ***la deuxième forme fondamentale*** *de σ en p.*
On peut l'écrire sous la forme :

$$II_p(X, Y) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

où $L = \frac{\partial^2\sigma}{\partial u^2}.n(u, v)$, $M = \frac{\partial^2\sigma}{\partial u.\partial v}.n(u, v)$ *et* $N = \frac{\partial^2\sigma}{\partial v^2}.n(u, v)$

Proposition 1.2.1. *Pour tout $p \subset S$, l'endomorphisme de Weingarten est une forme bilinéaire symétrique pour le produit scalaire euclidien.*

Preuve : (Voir *[19]*)∎

Proposition 1.2.2. *(Ecriture matricielle de l'endomorphisme de Weingarten et de la deuxième forme fondamentale)*

Soient $W_p, I_p, et\ II_p$ respectivement les matrices de l'endomorphisme de Weingarten, la première et la deuxième forme fondamentale de S au point $p = \sigma(u, v)$ écritent dans la base $(\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v))$, alors :

$$W_p(X) = I_p^{-1}(X).II_p(X)$$

où $X \in T_pS$

Démonstration

on sait que $dn_p \in T_pS$, alors $n_u(u, v)$ et $n_v(u, v)$ s'écrivent dans la base $(\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v))$ de T_pS sous la forme :

$$\begin{pmatrix} n_u \\ n_v \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} W_{00} & W_{01} \\ W_{10} & W_{11} \end{pmatrix}}_{W_p} \begin{pmatrix} \sigma_u \\ \sigma_v \end{pmatrix}$$

où W_p est la matrice de l'endomorphisme de Weingarten dans la base $(\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v))$.

Les matrices des deux formes fondamentales écritent dans la base $(\sigma_u(u, v), \sigma_v(u, v))$ sont :

$$I_p = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, II_p = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$\forall X, Y \in T_pS$:
$II_p(X, Y) =< W_p(X), Y >$

$$= (Y_u, Y_v) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}$$

$$= (Y_u, Y_v) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{00} & W_{01} \\ W_{10} & W_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_u \\ X_v \end{pmatrix}$$

alors :

$$\begin{pmatrix} W_{00} & W_{01} \\ W_{10} & W_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & EN - FM \end{pmatrix}$$

donc on a :

$$det(W_m) = \frac{det(II_m)}{det(I_m)} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

et

$$tr(W_m) = \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}$$

Courbures

L'endomorphisme de Weingarten W_p étant symétrique donc diagonalisable dans la base orthonormale (V_1, V_2) de T_pS, où V_1, V_2 sont les vecteurs propres de W_p associés respectivement aux valeurs propres k_1, k_2.

Définition 1.2.12. *On appelle k_1 et k_2.* ***Les courbures principales*** *de S en $p = \sigma(u, v)$*

Remarque 1.2.2. *Si $k_1 = k_2 = k$, alors $W_p(X) = kX$. Si $k_1 \neq k_2$, les deux vecteurs propres sont appelés directions principales de S en $p = \sigma(u, v)$.*

Définition 1.2.13. ***La courbure de Gauss*** *de S en $p = \sigma(u, v)$ est :*

$$K(p) = k_1(p).k_2(p) = det(W_p)$$

Définition 1.2.14. ***La courbure moyenne*** *de S en $p = \sigma(u, v)$ est :*

$$H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)) = \frac{1}{2}tr(W_p)$$

1.3 Application

On va appliquer les calculs précédants pour une surface de révolution.
Soit S est une surface de révolution paramétrée par :

$$\sigma(u,v) = (h(u)\cos(v), h(u)\sin(v), g(u))$$

où $u \in]a,b[, v \in]0,2\pi[$ *et* $h(u) > 0$.

on a :

$$\sigma_u(u,v) = \begin{pmatrix} h'(u)\cos(v) \\ h'(u)\sin(v) \\ g'(u) \end{pmatrix}, \sigma_v(u,v) = \begin{pmatrix} -h(u)\sin(v) \\ h(u)\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{uu}(u,v) = \begin{pmatrix} h''(u)\cos(v) \\ h''(u)\sin(v) \\ g''(u) \end{pmatrix}, \sigma_{vv}(u,v) = \begin{pmatrix} -h(u)\cos(v) \\ -h(u)\sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{uv}(u,v) = \begin{pmatrix} -h'(u)\sin(v) \\ h'(u)\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.3.1 Le vecteur normal

On a :

$$\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v) = \begin{pmatrix} -h(u)\cos(v)g'(u) \\ -h(u)\sin(v)g'(u) \\ h(u)h'(u) \end{pmatrix}$$

$$\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\| = h(u)\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}$$

donc

$$n(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|} = \frac{1}{\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}} \begin{pmatrix} -g'(u)\cos(v) \\ -g'(u)\sin(v) \\ h'(u) \end{pmatrix}$$

1.3.2 Première Forme fondamentale

On a :

$$E = \|\sigma_u(u,v)\|^2 = h'(u)^2 + g'(u)^2.$$

$$G = \|\sigma_v(u,v)\|^2 = h(u)^2.$$

$$F = \langle \sigma_u(u,v), \sigma_v(u,v) \rangle = 0.$$

donc

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h'(t)^2 + g'(u)^2 & 0 \\ 0 & h(u)^2 \end{pmatrix}$$

1.3.3 Deuxième forme fondamentale

On a :

$$L = \sigma_{vv}(u,v).n(u,v) = \frac{1}{\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}}(-h''(u)g'(u) + h'(u)g''(u)).$$

$$N = \sigma_{uu}(u,v).n(u,v) = \frac{1}{\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}}\left(h(t)g'(u)\right).$$

$$M = \sigma_{uv}(u,v).n(u,v) = 0.$$

donc

$$II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g'(u)^2 + h'(u)^2}} \begin{pmatrix} -h''(u)g'(u) + h'(u)g''(u) & 0 \\ 0 & h(t)g'(u) \end{pmatrix}$$

1.3.4 Les courbures

Soit S une surface de révolution, les courbures donnée par :

♦ ***les courbures principales :*** *sont les valeurs propres de* $II_p(X,Y)$

$$k_1 = \frac{L}{E} = \frac{1}{(g'(u)^2 + h'(u)^2)^{\frac{3}{2}}}(-h''(u)g'(u) + h'(u)g''(u)).$$

$$k_2 = \frac{N}{G} = \frac{1}{(g'(u)^2 + h'(u)^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{g'(u)}{h(u)}\right).$$

♦ ***la courbure moyenne :***

$$2H = k_1 + k_2 = \frac{L}{E} + \frac{N}{G}$$

$$= \frac{1}{(g'(u)^2 + h'(u)^2)^{\frac{3}{2}}}(-h''(u)g'(u) + h'(u)g''(u)) + \frac{1}{(g'(t)^2 + h'(u)^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{g'(u)}{h(u)}\right).$$

♦ ***la courbure de Gauss :***

$$K = \frac{LN}{EG} = \frac{g'(u)(-h''(u)g'(u) + h'(t)g''(u))}{h(u)(g'(u)^2 + h'(u)^2)^2}.$$

Exemple 1. *Soit S une surface de révolution paramétreé par :*

$$\sigma :]0,\pi[\times]0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u,v)\longmapsto (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u))$$

avec : $f(u)=\sin(u)$ *et* $g(u)=\cos(u)$.

alors on a :

$$\sigma_u(u,v)=\begin{pmatrix}\cos(u)\cos(v)\\ \cos(u)\sin(v)\\ -\sin(u)\end{pmatrix}, \sigma_v(u,v)=\begin{pmatrix}-\sin(v)\sin(u)\\ \cos(v)\sin(u)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_{uu}(u,v)=\begin{pmatrix}-\sin(u)\cos(v)\\ -\sin(u)\sin(v)\\ -\cos(v)\end{pmatrix}, \sigma_{vv}(u,v)=\begin{pmatrix}-\cos(v)\sin(u)\\ -\sin(v)\sin(u)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_{uv}(u,v)=\begin{pmatrix}-\cos(u)\sin(v)\\ \cos(u)\cos(v)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$E=\|\sigma_u(u,v)\|^2= f'(u)^2+g'(u)^2=\cos^2(u)+\sin^2(u)=1.$$

$$G=\|\sigma_v(u,v)\|^2= f(t)^2=\sin^2(u).$$

$$F=\langle\sigma_u(u,v),\sigma_v(u,v)\rangle=0.$$

$$n=\frac{\sigma_u(u,v)\wedge\sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v)\wedge\sigma_v(u,v)\|}=\frac{1}{\sqrt{g'(u)^2+f'(u)^2}}\begin{pmatrix}-g'(u)\cos(v)\\ -g'(u)\sin(v)\\ f'(u)\end{pmatrix}$$

$$=(\sin(u)\cos(v),\sin(u)\sin(v),\cos(u))=\sigma(u,v).$$

$$L=\sigma_{vv}(u,v).n(u,v)=\frac{1}{\sqrt{g'(u)^2+f'(u)^2}}\left(-f''(u)g'(u)+f'(u)g''(u)\right)=-\left(\sin^2(u)+\cos^2(u)\right)=-1.$$

$$N=\sigma_{uu}(u,v).n(u,v)=\frac{1}{\sqrt{g'(t)^2+f'(u)^2}}\left(f(u)g'(u)\right)=-\sin^2(u).$$

$$M=\sigma_{uv}(u,v).n(u,v)=0.$$

♦ ***les courbures principales :***

$$k_1=\frac{L}{E}=\frac{1}{(g'(t)^2+f'(u)^2)^{\frac{3}{2}}}(-f''(u)g'(u)+f'(t)g''(u))=-1.$$

$$k_2=\frac{N}{G}=\frac{1}{(g'(u)^2+f'(u)^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{g'(u)}{f(u)}\right)=-1.$$

♦ ***la courbure moyenne :***

$$2H=k_1+k_2=-1.$$

♦ ***la courbure de Gauss :***

$$K=\frac{LN}{EG}=\frac{g'(u)(-h''(u)g'(u)+h'(u)g''(u))}{h(u)(g'(u)^2+h'(u)^2)^2}=1.$$

Chapitre 2

Les roulettes des coniques

Rappelons que les coniques sont les courbes obtenues par l'intersection d'une cône et d'un plan : **la parabole, l'ellipse et l'hyperbole**.

Définition 2.0.1. *Etant donné une courbe dans le plan qui roule sur une autre courbe fixé sans glisser, le mouvement d'un point de cette courbe décrit une courbe appelée une* ***roulette***

Définition 2.0.2. (**Roulette de Delaunay**) *On appelle roulette de Delaunay le lieu l'un des foyers d'une conique roulant sans glisser sur une droite, on appelle roulette elliptique, parabolique ou hyperbolique suivant que la conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole.*

2.1 Paramétrage d'une roulette de Delaunay

Chercherons un paramétrage du tracé du foyer $F(t) = (F_1(t), F_2(t))$ d'une conique quant il roule sans glisser sur une droite. Considérons :
$P = (P_1, P_2)$ un point de la conique, T la droite tangente de la conique passant par P, F le foyer de la conique, R la droite perpendiculaire à T et passant par F et Q est l'intersection de T et R.

Suivant le type de la roulette, on distingue 3 cas. Commençons par :

2.1.1 Roulette d'une parabole

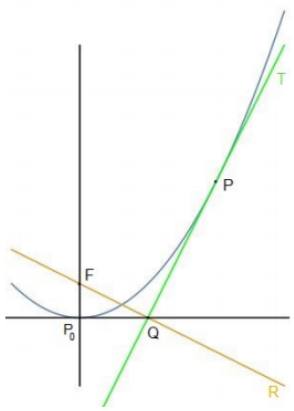


FIGURE 2.1 – Position initiale d'une roulette d'une parabole.

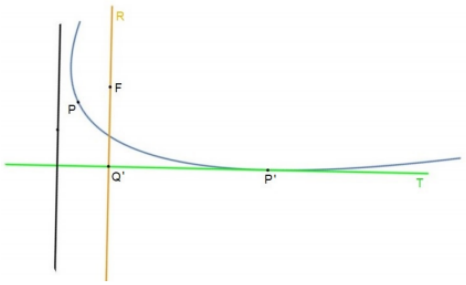


FIGURE 2.2 – $2^{\text{ème}}$ position

On peut voir dans la figure (2.2) que la première coordonnée du foyer F et la première coordonnée de $Q' = (Q_1, Q_2)$ sont égaux, alors :

$$F_1(t) = Q_1 = s(t) - \overrightarrow{|P'Q'|} = s(t) - \overrightarrow{|PQ|}$$

où :
$s(t)$ est la longueur d'arc de la parabole du point P_0 au point P, et $\overrightarrow{|PQ|}$ est le module du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ ou en d'autre terme, la longueur du segment P_1Q_1.

Au lieu de rouler la conique sur une ligne, on peut changer les rôles, on fixant la conique et on utilisant la tangente T à chaque point de la conique. Comme le paramétrage de le parabole est donné par :

$$\alpha(t) = (2b\sinh t, b\sinh^2 t).$$

où $b > 0$ et $t \in [t_1, t_2]$. Alors $s(t)$ est donnée par :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\alpha'(u)| du = b(t + \sinh t \coth t).$$

la droite tangente T est paramétrée par :

$$T : (2b \sinh t, b \sinh^2 t) + \lambda(2b \coth t, 2b \cosh t \sinh t), \lambda \in \mathbb{R}.$$

puisque T passe par le point $P = \alpha(t)$ de la parabole et son vecteur directeur $\alpha'(t)$. Alors en considérant le point Q est l'intersection entre les droites $y = 0$ et T, de plus la deuxième coordonnée de T est 0, donc on obtient :

$$Q = (b \sinh t, 0).$$

$$\overrightarrow{PQ} = (-b \sinh t, -b \sinh^2 t).$$

et la longueur du segment $\overrightarrow{PQ}$ est :

$$|\overrightarrow{PQ}| = b \sinh t \cosh t.$$

d'où

$$F_1(t) = s(t) - |\overrightarrow{PQ}| = bt.$$

Maintenant, on va calculer $F_2 = |\overrightarrow{FQ}|$ où $|\overrightarrow{FQ}|$ est la longueur du segment qui passe par F et Q. Le segment R qui passe par Q et de vecteur directeur perpendiculaire à $\alpha'(t)$ est paramétré par :

$$R : (b \sinh t, 0) + \lambda(2b \cosh t \sinh t, 2b \cosh t).$$

et comme F est l'intersection de R est la droite $x = 0$, on obtient : $F = (0, b)$.

Alors :

$$\overrightarrow{FQ} = (b \sinh t, -b)$$

,

donc :

$$F_2 = |\overrightarrow{FQ}| = b \cosh t.$$

Le paramétrage de la roulette engendrée par F est :

$$A(t) = (F_1, F_2) = (bt, b \cosh t).$$

C'est un paramétrage de la chaînette dont la surface de révolution est la caténoïde. Notons que :

$$|A'(t)| = b \cosh t.$$

et l'abscisse curviligne est :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |A'(u)| du = [b \sinh u]_{t_0}^{t}.$$

(voir le figuer 2.3 et 2.4) (chaînette, caténoïde)

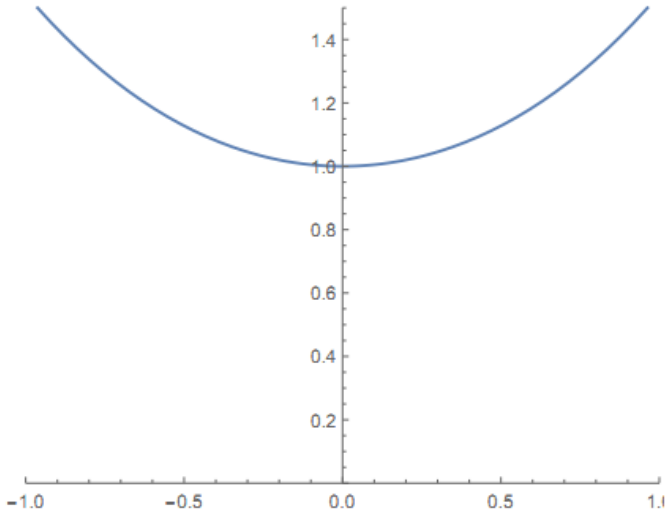


FIGURE 2.3 – chaînette

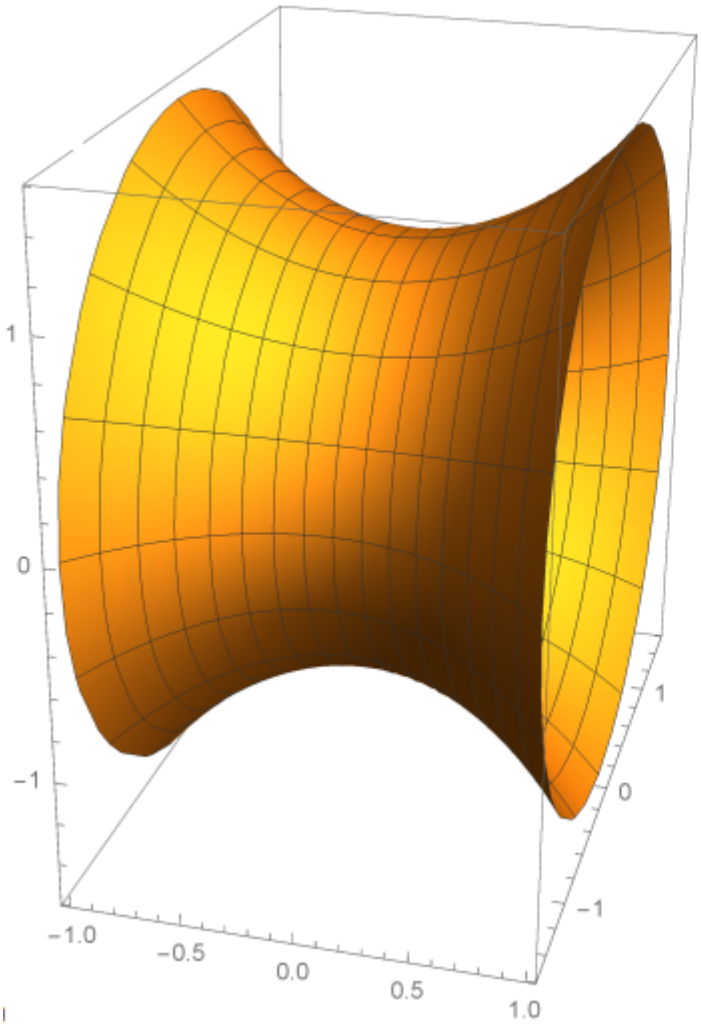


FIGURE 2.4 – caténoïde

2.1.2 Roulette d'une ellipse

Le paramétrage de l'ellipse est donné par :

$$\beta(t) = (a\cos t, b\sin t).$$

avec :$b < a, t \in [t_1, t_2]$.
La longueur d'arc est :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\beta'(u)|du = \int_{t_0}^{t} \sqrt{a^2 - c^2\cos^2 u}du.$$

avec :$c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Puisque l'ellipse admet deux foyers : F, F' (voir figure 2.5), dans ce cas deux courbes sont engendrées.

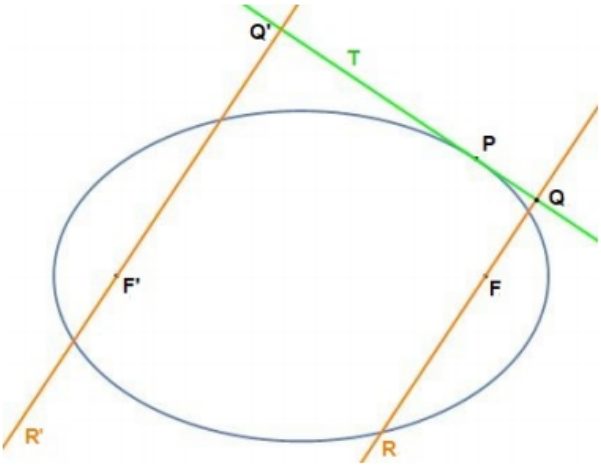


FIGURE 2.5 – ellipse

Premièrement, On prend F, le foyer le plus proche à la droite tangente T, on a :

$$\overrightarrow{|PQ|} = \frac{c\sin t(a - c\cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}}$$

Alors :

$$F_1 = s(t) - \overrightarrow{|PQ|} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{a^2 - c^2\cos^2 u}du - \frac{c\sin t(a - c\cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}}.$$

et

$$F_2 = \overrightarrow{|FQ|} = \frac{b(a - c\cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}}.$$

Donc
le paramétrage de la roulette engendrée par F est :

$$\beta_1(t) = (F_1, F_2) = \left(\int_{t_0}^{t} \sqrt{a^2 - c^2\cos^2 u} du - \frac{c\sin t(a - c\cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}}, \frac{b(a - c\cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}} \right).$$

Notons que :

$$|\beta_1'(t)| = \frac{ab}{a + c\cos t}.$$

et l'abscisse curviligne est :

$$s_1(t) = \int_{t_0}^{t} |\beta_1'(u)| du = \left[2a \arctan\left(\sqrt{\tfrac{a-c}{a+c}} \tan\left(\frac{u}{2} \right) \right) \right]_{t_0}^{t}.$$

Maintenant on prend le deuxième foyer F', la longueur du segment est donnée par : $\overrightarrow{|PQ'|}$ où :

$$\overrightarrow{|PQ'|} = \frac{c\sin t(a + c\cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos t}}$$

Alors :

$$F_1 = s(t) - \overrightarrow{|PQ'|} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{a^2 - c^2\cos^2 u} du - \frac{c\sin t(a + c\cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos t}}.$$

et

$$F_2 = \overrightarrow{|F'Q'|} = \frac{b(a + c\cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}}.$$

d'où le paramétrage de la roulette engendrée par F' est :

$$\beta_2(t) = (F_1, F_2) = \left(\int_{t_0}^{t} \sqrt{a^2 - c^2\cos^2 u} du - \frac{c\sin t(a + c\cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos t}}, \frac{b(a + c\cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}} \right).$$

Notons que :

$$|\beta_2'(t)| = \frac{ab}{a - c\cos t}.$$

et l'abscisse curviligne est :

$$s_2(t) = \int_{t_0}^{t} |\beta_2'(u)| du = \left[2a \arctan\left(\sqrt{\tfrac{a+c}{a-c}} \tan\left(\frac{u}{2} \right) \right) \right]_{t_0}^{t}.$$

$\beta_1(t)$ et $\beta_2(t)$ sont des paramétrages de l'ondulaire dont la surface de révolution est l'onduloïde. (voir la figure 2.6 et 2.7)

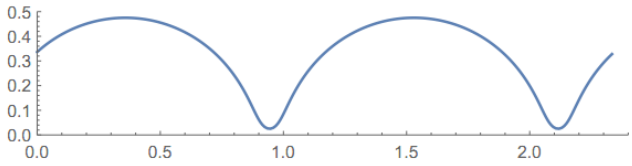


FIGURE 2.6 – ondulaire

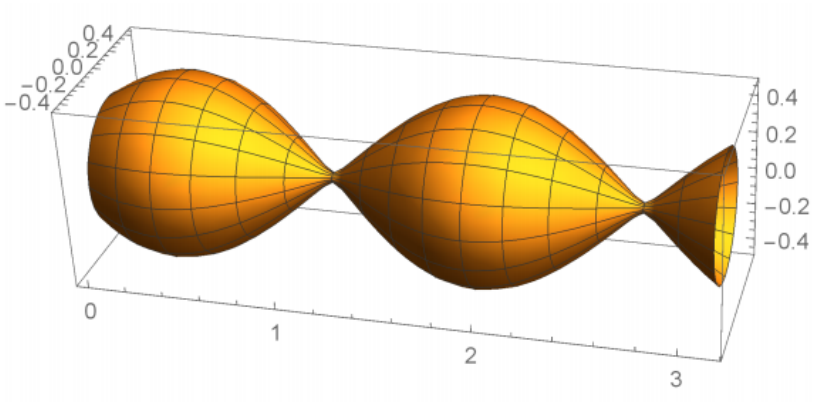


FIGURE 2.7 – onduloïde

2.1.3 Roulette d'une hyperbole

Le paramétrage de l'hyperbole est donné par :

$$\gamma(t) = (a\cosh t, b\sinh).$$

avec :$a, b > 0, t \in [t_1, t_2]$.
la longueur d'arc est donnée par :

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\gamma'(u)|du = \int_{t_0}^{t} \sqrt{c^2 \cosh^2 u - a^2}du.$$

avec :$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

L'hyperbole admet deux foyers F et F' (voir figure 2.8) On commence par F

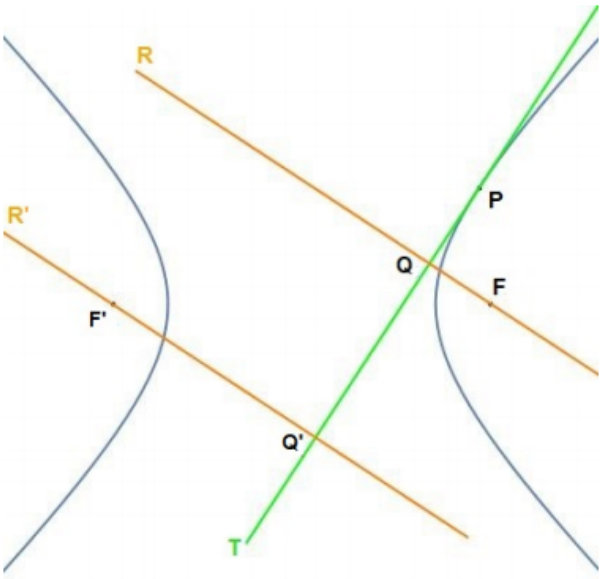


FIGURE 2.8 – hyperbole

La longueur du segment PQ est :

$$\overrightarrow{|PQ|} = \frac{c \sinh t(c \cosh t - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2 t - a^2}}.$$

Alors :

$$F_1 = s(t) - \overrightarrow{|PQ|} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{c^2 \cosh^2 u - a^2}du - \frac{c \sinh t(c \cosh t - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2 t - a^2}}.$$

et

$$F_2 = \overrightarrow{|FQ|} = \frac{b(c \cosh t - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2 t - a^2}}.$$

d'où le paramétrage de la roulette engendrée par F est :

$$C_1(t) = (F_1, F_2) = \left(\int_{t_0}^{t} \sqrt{c^2 \cosh^2 u - a^2}du - \frac{c \sinh t(c \cosh t - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2 t - a^2}}, \frac{b(c \cosh t - a)}{\sqrt{c^2 \cosh^2 t - a^2}} \right).$$

Notons que :

$$|C_1'(t)| = \frac{ab}{c\cosh t + a}.$$

et l'abscisse curviligne est :

$$s_1(t) = \int_{t_0}^{t} |C_1'(u)|du = \left[2a \arctan\left(\sqrt{\tfrac{a-c}{a+c}} \tanh\left(\frac{u}{2}\right)\right)\right]_{t_0}^{t}.$$

Pour le deuxième foyer F', la longueur du segment $|PQ'|$ est :

$$\overrightarrow{|PQ'|} = \frac{c\sinh t(c\cosh t + a)}{\sqrt{c^2\cosh^2 t - a^2}}.$$

Alors :

$$F_1 = s(t) - \overrightarrow{|PQ'|} = \int_{t_0}^{t} \sqrt{c^2\cosh^2 u - a^2}du - \frac{c\sinh t(c\cosh t + a)}{\sqrt{c^2\cosh^2 t - a^2}}.$$

et

$$F_2 = \overrightarrow{|F'Q'|} = \frac{b(a\cosh t + a)}{\sqrt{c^2\cosh^2 t - a^2}}.$$

d'où le paramétrage de la roulette engendrée par F' est :

$$C_2(t) = (F_1, F_2) = \left(\int_{t_0}^{t} \sqrt{c^2\cosh^2 u - a^2}du - \frac{c\sinh t(c\cosh t + a)}{\sqrt{c^2\cosh^2 t - a^2}}, \frac{b(a\cosh t + a)}{\sqrt{c^2\cosh^2 t - a^2}}\right).$$

Notons que :

$$|C_2'(t)| = \frac{ab}{c\cosh t - a}.$$

et l'abscisse curviligne est :

$$s_2(t) = \int_{t_0}^{t} |C_2'(u)|du = \left[2a \arctan\left(\sqrt{\tfrac{a+c}{a-c}} \tanh\left(\frac{u}{2}\right)\right)\right]_{t_0}^{t}.$$

$C_1(t)$ et $C_2(t)$ sont des paramétrages du nodulaire dont la surface de révolution est le nodoïde . (voir figure 2.9 et 2.10)(nodulaire, nodoïde)

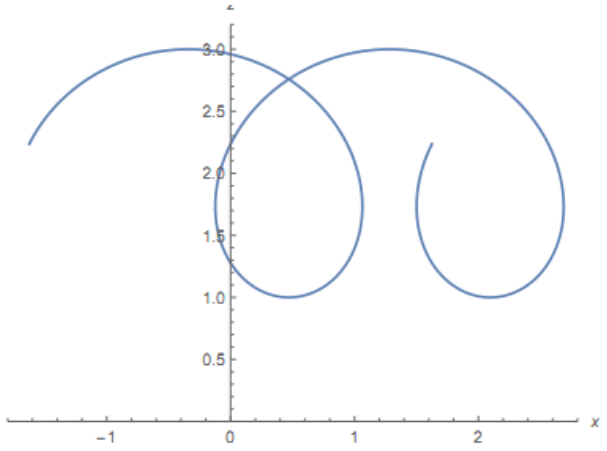


FIGURE 2.9 – nodalaire

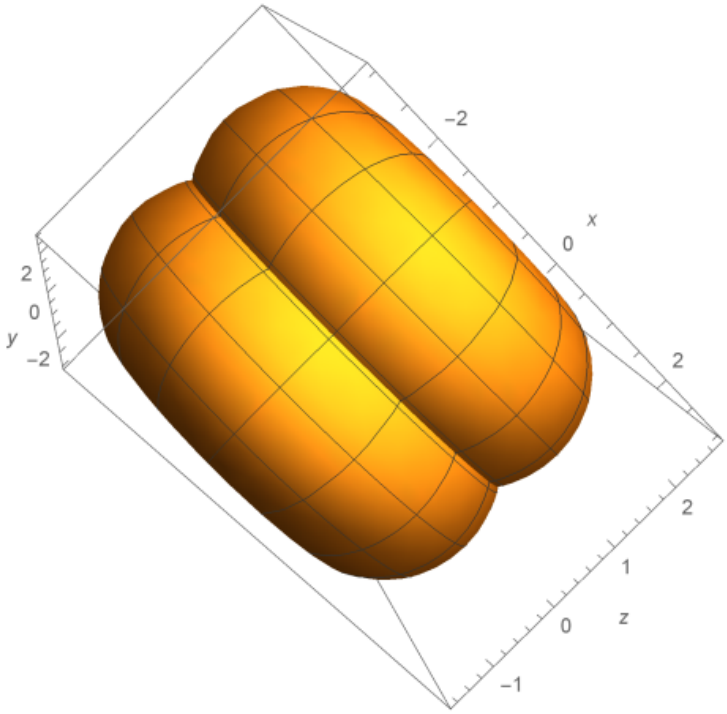


FIGURE 2.10 – nodoïde

Chapitre 3

Les surfaces de Delaunay

Dans ce chapitre nous étudions les surfaces de Delaunay, qui sont des surfaces de révolution engendrées par les roulettes des foyers des coniques discutés dans le chapitre précédent. Donc ce sont les surfaces de révolution engendrées par les courbes $A(t), B_1(t), B_2(t), C_1(t)$ *et* $C_2(t)$. Ensuite nous décrivons les paramétrages des coefficients de la première et la deuxième formes fondamentales et le vecteur normal de chacune de ces surfaces et de leurs courbures., pour ce faire on commence par :

3.1 Catenoïde :

le paramétrage de la caténoïde est :

$$A(t,v) = (f_c(t)\cos(v), f_c(t)\sin(v), g_c(t))\,.$$

où

$$f_c(t) = b\cosh(t) \quad et \quad g_c(t) = bt.$$

Donc

$$A_t(t,v) = (b\sinh(t)\cos(v), b\sinh(t)\sin(v), b).$$

$$A_v(t,v) = (-b\cosh(t)\sin(v), b\cosh(t)\cos(v), 0).$$

$\surd$ ***le vecteur normal est :***

$$n_c(t,v) = \left(-\frac{\cos(v)}{\cosh(t)}, -\frac{\sin(v)}{\cosh(t)}, \tanh(t)\right).$$

$\surd$ ***les coefficients de la première forme fondamental sont :***

$$I_m = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^2\cosh^2(t) & 0 \\ 0 & b^2\cosh^2(t) \end{pmatrix}.$$

√ ***les coefficients de la deuxième forme fondamental sont :***

$$II_m = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

♦ ***les courbures principales sont :***

$$k_1 = \frac{-1}{b\cosh^2(t)} \quad et \quad k_2 = \frac{1}{b\cosh^2(t)}.$$

♦ ***la courbure moyenne est :***

$$H = 0.$$

♦ ***la courbure de Gauss est :***

$$K = \frac{-1}{b^2\cosh^4(t)}.$$

3.2 Onduloïde :

le paramétrage de la onduloïde est :

$$\beta(t,v) = \left(f_u^1(t)\cos(v), f_u^1(t)\sin(v), g_u^1(t)\right).$$

Où :

$$f_u^1(t) = \frac{b(a - c\cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}} \quad et \quad g_u^1(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{a^2 - c^2\cos^2 u}du - \frac{c\sin t(a - c\cos t)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2 t}}.$$

Donc :

$$\beta_t(t,v) = (c\sin(t)h_u(t)\cos(v), c\sin(t)h_u(t)\sin(v), bh_u(t)).$$

$$\beta_v(t,v) = \left(-f_u^1(t)\sin(v), f_u^1(t)\cos(v), 0\right).$$

avec :

$$h_u(t) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2(t)}(a + c\cos(t))}.$$

√ ***le vecteur normal est :***

$$_u(t,v) = \left(\frac{-b\cos(v)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2(t)}}, \frac{-b\sin(v)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2(t)}}, \frac{c\sin(t)}{\sqrt{a^2 - c^2\cos^2(t)}}\right).$$

√ ***les coefficients de la première forme fondamental sont :***

$$I_m = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

avec :

$$E = \frac{a^2b^2}{(a + c\cos(t))^2}.$$

et

$$G = \frac{b^2(a - c\cos(t))}{a + c\cos(t)}.$$

√ ***les coefficients de la deuxième forme fondamental sont :***

$$II_m = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

avec :

$$L = \frac{-ab^2c\cos(t)}{(a^2 - c^2\cos^2(t))(a + c\cos(t))}.$$

et

$$N = \frac{b^2}{a + c\cos(t)}.$$

♦ ***les courbures principales sont :***

$$k_1 = \frac{-c\cos(t)}{a(a - c\cos(t))}.$$

$$k_2 = \frac{1}{a - c\cos(t)}.$$

♦ ***la courbure moyenne est :***

$$H = \frac{1}{2a}.$$

♦ ***la courbure de Gauss est :***

$$K = \frac{-c\cos(t)}{a(a - c\cos(t))^2}.$$

Remarque 1. *On peut faire le même calcul pour la surface engendrée par β_2, mais il suffit de considérer que le domaine propre du paramètre t appartient à un ou une autre partie de l'onduloïde. En fait, ces surfaces sont périodiques avec la période 2π en ce qui concerne au paramètre t.*

3.3 Nodoïde

Il faut cependant considérer les deux parties C_1 *et* C_2 dans la construction des nodoïdes, parce que chaque roulette admit un domaine en $\mathbb{R}$.

3.3.1 Nodoïde 1 :

le paramétrage du nodoïde 1 est :

$$C_1(t, v) = (f_n^1(t)\cos(v), f_n^1(t)\sin(v), g_n^1(t)).$$

Où :

$$f_n^1(t) = \frac{b(c\cosh(t)-a)}{\sqrt{c^2\cosh^2(t)-a^2}} \quad et \quad g_n^1(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{c^2\cosh^2(u)-a^2}du - \frac{c\sinh(t)(c\cosh(t)-a)}{\sqrt{c^2\cosh^2(t)-a^2}}.$$

Donc :

$$(C_1)_t(t,v) = (c\sinh(t)h_1(t)\cos(v), c\sinh(t)h_1(t)\sin(v), bh_1(t)).$$

$$(C_1)_v(t,v) = \left(-f_n^1(t)\sin(v), f_n^1(t)\cos(v), 0\right).$$

avec :

$$h_1(t) = \frac{ab}{\sqrt{c^2\cosh^2(t)-a^2}(c\cosh(t)+a)}.$$

√ ***le vecteur normal est :***

$$n_1(t,v) = \left(\frac{-b\cos(v)}{\sqrt{c^2\cosh^2(t)-a^2}}, \frac{-b\sin(v)}{\sqrt{c^2\cosh^2(t)-a^2}}, \frac{c\sinh(t)}{\sqrt{c^2\cosh^2(t)-a^2}}\right).$$

√ ***les coefficients de la première forme fondamental sont :***

$$I_m = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

avec :

$$E = \frac{a^2b^2}{(c\cosh(t)+a)^2}.$$

et

$$G = \frac{b^2(c\cosh(t)-a)}{c\cosh(t)+a}.$$

√ ***les coefficients de la deuxième forme fondamental sont :***

$$II_m = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

avec :

$$L = \frac{-ab^2c\cosh(t)}{(c^2\cosh^2(t)-a^2)(c\cosh(t)+a)}.$$

et

$$N = \frac{b^2}{c\cosh(t)+a}.$$

♦ ***les courbures principales sont :***

$$k_1 = \frac{-c\cosh(t)}{a(c\cosh(t)-a)}.$$

$$k_2 = \frac{1}{c\cosh(t)-a}.$$

♦ ***la courbure moyenne est :***

$$H = \frac{-1}{2a}.$$

♦ ***la courbure de Gauss est :***

$$K = \frac{-c\cosh(t)}{a(c\cosh(t)-a)^2}.$$

3.3.2 Nodoïde 2 :

le paramétrage du nodoïde 2 est :

$$C_2(t,v) = (f_n^2(t)\cos(v), f_n^2(t)\sin(v), g_n^2(t)).$$

Où :

$$f_n^2(t) = \frac{b(c\cosh(t)+a)}{\sqrt{c^2\cosh^2(t)-a^2}} \quad et \quad g_n^2(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{c^2\cosh^2(u)-a^2}du - \frac{c\sinh(t)(c\cosh(t)+a)}{\sqrt{c^2\cosh^2(t)-a^2}}.$$

Donc :

$$(C_2)_t(t,v) = (c\sinh(t)h_2(t)\cos(v), c\sinh(t)h_2(t)\sin(v), bh_2(t)).$$

$$(C_2)_v(t,v) = \left(-f_n^2(t)\sin(v), f_n^2(t)\cos(v), 0\right).$$

avec :

$$h_2(t) = \frac{-ab}{\sqrt{c^2\cosh^2(t)-a^2}(c\cosh(t)-a)}.$$

√ ***le vecteur normal est :***

$$n_2(t,v) = \left(\frac{b\cos(v)}{\sqrt{c^2\cosh^2(t)-a^2}}, \frac{b\sin(v)}{\sqrt{c^2\cosh^2(t)-a^2}}, -\frac{c\sinh(t)}{\sqrt{c^2\cosh^2(t)-a^2}}\right).$$

√ ***les coefficients de la première forme fondamental sont :***

$$I_m = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

avec :

$$E = \frac{a^2b^2}{(c\cosh(t)-a)^2}.$$

et

$$G = \frac{b^2(c\cosh(t)+a)}{c\cosh(t)-a}.$$

√ ***les coefficients de la deuxième forme fondamental sont :***

$$II_m = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

avec :

$$L = \frac{-ab^2 c\cosh(t)}{(c^2\cosh^2(t) - a^2)(c\cosh(t) - a)}.$$

et

$$N = \frac{-b^2}{c\cosh(t) - a}.$$

♦ ***les courbures principales sont :***

$$k_1 = \frac{-c\cosh(t)}{a(c\cosh(t) + a)}.$$

$$k_2 = \frac{-1}{c\cosh(t) + a}.$$

♦ ***la courbure moyenne est :***

$$H = \frac{-1}{2a}.$$

♦ ***la courbure de Gauss est :***

$$K = \frac{c\cosh(t)}{a(c\cosh(t) + a)^2}.$$

Définition 1. *Les surfaces de Delaunay sont les surfaces de révolution à courbure moyenne constant(**CMC**)*

Exemple 1. *Soit S_1 une surface de révolution paramétrée par :*

$$\begin{array}{rccl} \sigma: &]-\infty,+\infty[\times]0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \sigma(u,v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u)) \end{array}$$

avec :$f(u) = 1$ et $g(u) = \cos(u)$.

alors on a :

$$\sigma_u(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(u) \end{pmatrix}, \sigma_v(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin(v) \\ \cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{uu}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos(v) \end{pmatrix}, \sigma_{vv}(u,v) = \begin{pmatrix} -\cos(v) \\ -\sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \|\sigma_u(u,v)\|^2 = f'(u)^2 + g'(u)^2 = \sin^2(u).$$

$$G = \|\sigma_v(u,v)\|^2 = f(u)^2 = 1.$$

$$F = \langle \sigma_u(u,v), \sigma_v(u,v) \rangle = 0.$$

$$n(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g'(u)^2 + f'(u)^2}} \begin{pmatrix} -g'(u)\cos(v) \\ -g'(u)\sin(v) \\ f'(u) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin(u)} (\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), 0).$$

$$L = \sigma_{vv}(u,v).n(u,v) = \frac{1}{\sqrt{g'(u)^2 + f'(u)^2}} (-f''(u)g'(u) + f'(u)g''(u)) = 0.$$

$$N = \sigma_{uu}(u,v).n(u,v) = \frac{1}{\sqrt{g'(u)^2 + f'(u)^2}} (f(u)g'(u)) = -1.$$

$$M = \sigma_{uv}(u,v).n(u,v) = 0.$$

♦ ***les courbures principales :***

$$k_1 = \frac{L}{E} = \frac{1}{(g'(u)^2 + f'(u)^2)^{\frac{3}{2}}}(-f''(u)g'(u) + f'(u)g''(u)) = 0.$$

$$k_2 = \frac{N}{G} = \frac{1}{(g'(u)^2 + f'(u)^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{g'(u)}{f(u)}\right) = -1.$$

♦ ***la courbure moyenne :***

$$2H = k_1 + k_2 = -\frac{1}{2}.$$

Donc :

S_1 est une surface de Delaunay .

Exemple 2. *Soit S_2 une surface de révolution paramétrée par :*

$$\begin{array}{rccl} \sigma : &]0,+\infty[\times]0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & \sigma(u,v) = (f(u)\cos(v), f(t)\sin(v), g(u)) \end{array}$$

avec :$f(u) = u$ et $g(u) = \cos(u)$.

alors on a :

$$\sigma_u(u,v) = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \\ -\sin(u) \end{pmatrix}, \sigma_v(u,v) = \begin{pmatrix} -u\sin(v) \\ u\cos(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{uu}(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin(v) \\ \cos(v) \\ -\cos(u) \end{pmatrix}, \sigma_{vv}(u,v) = \begin{pmatrix} -u\cos(v) \\ -u\sin(v) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \|\sigma_u(u,v)\|^2 = f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1 + \sin^2(u).$$

$$G = \|\sigma_v(u,v)\|^2 = f(u)^2 = u^2.$$

$$F = \langle \sigma_u(u,v), \sigma_v(u,v) \rangle = 0.$$

$$n(u,v) = \frac{\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)}{\|\sigma_u(u,v) \wedge \sigma_v(u,v)\|} = \frac{1}{\sqrt{g'(u)^2 + f'(u)^2}} \begin{pmatrix} -g'(u)\cos(v) \\ -g'(u)\sin(v) \\ f'(u) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sin^2(u)+1}} \left(\sin(u)\cos(v), \sin(u)\sin(v), 1\right).$$

$$L = \sigma_{vv}(u,v).n(u,v) = \frac{1}{\sqrt{g'(u)^2+f'(u)^2}} \left(-f''(u)g'(u) + f'(t)g''(u)\right) = -\frac{1}{\sqrt{\sin^2(u)+1}} \cos(u).$$

$$N = \sigma_{uu}(u,v).n(u,v) = \frac{1}{\sqrt{g'(t)^2+f'(u)^2}} \left(f(u)g'(u)\right) = -\frac{u}{\sqrt{\sin^2(u)+1}} \sin(u).$$

$$M = \sigma_{uv}(u,v).n(u,v) = 0.$$

♦ ***les courbures principales :***

$$k_1 = \frac{L}{E} = \frac{1}{(g'(u)^2+f'(u)^2)^{\frac{3}{2}}}(-f''(u)g'(u) + f'(u)g''(u)) = \frac{-\cos(u)}{(1+\sin^2(u))^{\frac{3}{2}}}.$$

$$k_2 = \frac{N}{G} = \frac{1}{(g'(u)^2+f'(u)^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{g'(u)}{f(u)}\right) = \frac{-\sin(u)}{u\sqrt{1+\sin^2(u)}}.$$

♦ ***la courbure moyenne :***

$$2H = k_1 + k_2 = \frac{-\cos(u)}{(1+\sin^2(u))^{\frac{3}{2}}} + \frac{-\sin(u)}{u\sqrt{1+\sin^2(u)}}.$$

Donc :

S_2 n'est pas une surface de Delaunay .

Théorèm 1. *Une surface de révolution $\sum$ paramétrée par :*

$$\sigma(u,v) = (f(u)\cos(v), f(u)\sin(v), g(u)).$$

admit une courbure moyenne constante si et seulement si la fonction $f(t)$ satisfait :

$$f^2 \pm \frac{2af}{\sqrt{1+f'^2}} = \pm b^2.$$

preve.(voir*[17]*) ∎

Bibliographie

[1] Banchoff, T., Lovett, S. Differential Geometry of curves and surfaces. *CRC Press, (2010).*

[2] .Bendito, E., Bowich, M.J and Medina, A. Delaunay Surfaces. *arXiv :1305.5681v1, 2013.*

[3] Berge. M. Differential Geometry, Manifolds, curves and surfaces (GTM 115). *Springer, New York, 1988.*

[4] Besant, W.H. Notes on roulettes and glissettes. *Deighton, Bell and Co. (1890).*

[5] Boris. T. Courbes et surfaces, cours, *Université Joseph-Fourier, GrenobleI*

[6] Delaunay, C. Sur les surfaces de révolution dont la courbure moyenne est constante. *J. Math. Pures et Appl., ser 1 (6) (1841) 309-320 (with a note by M. Sturm)*

[7] Eells. J. The surfaces of Delaunay. *Math. Intelligencer 9 (1987), 53-57.*

[8] Gray, A Modern differential geometry of curves and surfaces with mathematica. *CRC Press (2007).*

[9] Hadzhilazova, M and MLadenov, I.M. On Evolutes of Nodary and Undulary Delaunay Curves. *Proc. 38th Spring Conference of the Union of Bulgarian Matem., 131-136, 2009.*

[10] Hoffman, D. Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature. *Journal of Differential Geometry, 8, 161-176, (1977).*

[11] Kenmotsu, K. Surfaces with Constant Mean Curvature. *Trans. Amer. Math. Soc. Vol 221, Providence, R.I., 2003.*

[12] Kenmotsu, K. Surfaces of revolution with prescribed mean curvature. *Tohoku Mathematical Journal, 32-147-153, 1980.*

[13] Lejdfors, K.J. Surfaces of constant mean curvature. *Master's thesis, Lund University.*

[14] Lopez, R Constant mean curvature surfaces with boundary. *Springer Monographs in Mathematics. New York, 2013.*

[15] Lopez, R Surfaces with constant mean curvature in euclidean space. *International Electronic Journal of Geometry. Vol 3, No. 2. 67-101, (2010)*

[16] Mladenov, I.M. Delaunay surfaces revisited. *C. R. Bulg. Acad. Sci. 55, 19-24 (2002).*

[17] Oprea. J. Differential geometry and its application. *Mathematical As-sociation of America, 2007.*

[18] Paragoda, T. Constant mean curvature surfaces of revolution versus Willmore surfaces of revolution : A comparative study with physical applications. *Ph.D. Thesis. Texas Tech University. 2014.*

[19] Vincent. B. Cours, Courbures. *Université de Lyon.*