RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ Dr.YAHIA FARES, MEDEA.
FACULTÉ DES SCIENCES



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par : GHEZAL Yasmina

THÈME

Introduction aux équations aux q-différences

Soutenu publiquement, le 18/06/2018, devant le jury composé de :

Mme	**N. AZROU**	M. A. A.	à l'UFY Médéa	Président
Mr.	**M. KRIMI**	M. A. A.	à l'UFY Médéa	Directeur de Mémoire
Mr.	**K. MAALOUM**	M. A. A.	à l'UFY Médéa	Examinateur
Mr.	**S. RAFA**	M. A. A.	à l'UFY Médéa	Examinateur

Remerciements

Je tiens, d'abord, à remercier mon professeur Mr. KRIMI de m'avoire fait l'honneur de diriger ce travail, je lui remercie de m'avoire aidée à mener à bien cette recherche et de tous ces conseils judicieux.

J'aimerai bien remercie aussi Mme AZROU, Mr. MAALOUM et Mr. RAFA qui ont consacré une bonne partie de leur temps dans le but de m'orienter dans la bonne voie grâce à leurs remarques attentives qui ont enrichi mon travail de recherche.

J'ai le grand plaisir d'exprimer mes sentiments de gratitude et tous mes remerciements à tous les enseignants de la faculté qui m'ont accompagné tout au long de mes années d'études.

Dédicaces

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...
Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude,
L'amour, le respect, la reconnaissance...
Aussi, c'est tout simplement que
Je dédie cette thèse...

À mes chers parents, je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours.

Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos voeux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez.

Puisse Dieu, le Très haut, vous accordez santé, bonheur et longue vie et faire en sorte que jamais je ne vous déçoit.

Mes frères Khaled et Mohammed Tahar et ma soeur Nawale.

À toute ma famille GHEZAL et KHADRAOUI.

À tous les enseignants et les éducateurs qui ont contribué à ma formation durant tout le parcours de mes études jusqu'à ce jour.

Résumé

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude des équations aux q-différences pour q un réel non nul vérifiant $|q| < 1$. Nous commençons par donner quelques outils de base concernant la q-analyse. Nous introduisons les séries q-hypergéométriquesaprès avec quelques propriétés, les équations aux q-différences linéaires du premier ordre et enfin les systèmes aux q-différences linéaires du premier ordre.

Mots clés :équations, différences, hypergéométrique, analyse.

Table des matières

Remerciements **i**

Dédicaces **i**

Résumé **i**

Introduction **1**

1 Fonctions q-hypergéométriques, q-dérivation et q-intégration **3**

1.1 Les fonctions hypergéométriques de Gauss 3

1.1.1 Les fonctions hypergéométriques 4

1.2 Equations aux q-différences 5

1.2.1 Les fonctions q-hypergéométriques 7

1.3 La q-dérivation et la q-intégration 8

1.3.1 La q-dérivation 8

1.3.2 q-derivée d'un produit 9

1.3.3 q-dérivée d'une fraction 9

1.3.4 q-dérivée d'une fonction composée 9

1.3.5 q-derivée de la fonction inverse d'une fonction continue 10

1.3.6 La q-intégration 10

1.3.7 Les principes fondamentaux de la q-analyse 14

2 Les équations aux q-différences linéaires d'ordre 1 **15**

2.1 Les équations aux q-différences linaires d'ordre 1 16

2.1.1 Le cas homogène : 16

2.1.2 Le cas d'équation non homogène : 18

2.2 Equations aux q-diffèrences non linéaires transformables en équations linéaires 23

2.2.1 Cas 1 : Equation de type de Riccati 24
2.2.2 Cas 2 : Equation homogène de la forme $f(\frac{D_q y(x)}{y(x)}, x) = 0$ 25
2.2.3 Cas 3 : Equation homogène de la forme $(y(qx))^{c1}(y(x))^{c_2} = g(x)$ . . . 25

3 Systèmes aux q- diffèrences linéaires d'ordre 1 **27**

Introduction

Le $18^{\text{ème}}$ siécle a été témoin des débuts des équations aux q-différences avec Euler dans le cadre des problémes de dénombrement en théorie des nombres. Une étape importante due à Heine qui a introduit les q-analogues des fonctions hypergéométriques d'Euler et de Gauss : les fonctions hypergéométriques basiques qui sont des solutions des équations aux q-différences linéaires algébriques du second ordre, analogues des équations différentielles hypergéométriques classiques. Il faut citer ensuite les travaux de Jacobi : sa fonctions théta et sa célébre formule du triple produit jouent un rôle central dans la théorie. Après Jacobi, on retrouve les équations aux q-différences chez Poincaré et Picard, puis Ramanujan, G. Watson.Un peu plus tard, dans le cadre des motivations assez différentes chez G. Birkhoff et certains de ses éléves, ce thèmè a été largement oublié et a presque totalement disparu pendant un bon demi-siécle aprés la fin des années quarante. Aujourd'hui il y a un foisonnement de travaux en mathématique et physique faisant intervenir des équations aux q-différences. C'est assez paradoxal de constater que le sujet manquait jusqu'à une date trés récente des fondations solides, même dans le cas le plus simple des équations linéaires ordinaires. Ceci est en fait similaire qui s'est passé pour les équations différentielles ordinaires au $20^{\text{ème}}$ siécle ; entre la fin des années quarante et le début des années soixante-dix le sujet fut considéré comme clos et sans grand intérêt.

Dans ce mémoire, pour q un réel non nul tel que $|q| < 1$, nous nous intéressons à l'étude des équations aux q-différences qui sont des équations fonctionnelles de la forme :

$$a_n(x)D_q^n f(x) + a_{n-1}(x)D_q^{n-1} f(x) + ... + a_1(x)D_q^1 f(x) + a_0(x)f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$$

où les $a_i(x)$ $(i = 0, ..., n)$ sont des fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur un domaine de $\mathbb{R}$ et

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

est la q-dérivation définie si-dessous (définition 1.3.1) appelée la dérivée de Jackson

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x},\ x(s) = q^s,\ q^s \in T\ ,\ s \in \mathbb{Z}$$

et $q \in \mathbb{R}$ tel que $|q| < 1$, on travail sur un réseau géométrique :

$$T = [0 = q^{\infty}, ..., q^{s+1}, q^{s}, ..., q^{2}, q, q^{0} = 1, q^{-1}, q^{-2}, ...q^{-s}, q^{-s-1}, ..., q^{-\infty} = \infty]$$

Le premier chapitre de ce mémoire est une mise en évidence des concepts de base de q-analyse, les séries q-hypergéomètriques, la dérivé au sens du q-analyse (q-dérivation) et l'intégration au sens du q-analyse (q-intégration).

Le second chapitre fait référence aux équations aux q-différences linéaires du premier ordre. Certains exemples sont fournis avec des preuves relatant les calculs appropriés, et le chapitre est terminé par la mise en place de l'importance des séries q-hypergéométriques dans le q-analyse (relation q-équation différentielle avec la série q-hypergéométrique).

Le troisième est le dernier chapitre, contient la formulation et la théorie génèrale des systèmes aux q-différences linéaires du premier ordre.

1

Fonctions q-hypergéométriques, q-dérivation et q-intégration

Dans ce chapitre, nous allons introduire les notions de base concernant les équations aux q-différences. Nous allons commencer par les séries q-hypergéométriques puis nous allons passer aux notions de dérivation et intégration dans le sens du q-analyse.

1.1 Les fonctions hypergéométriques de Gauss

Les fonctions hyergéométriques sont intronduites par Gauss au début du $19^{\text{ème}}$ siècle, l'orsqu'il a étudié l'équation différentielle qui provient de la physique :

$$x(1-x)F'' + (c-(a+b+1)x'')F' - abF = 0 \ a, b, c, \in \mathbb{C}$$

La recherche de solutions en séries entières sous la forme :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

conduit à la relation de récurrence suivante, tel que $c \in \mathbb{C}$

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(k+a)(k+b)}{(k+c)(k+1)}$$

En fixant $c_0 = 1$, on obtient :

$$F(a, b, c; x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k (1)_k} x^k$$

où $(a)_k$ désigne le symbole de Pochhammer :

$$\begin{aligned}(a)_k &= (a)(a+1)...(a+k+1), a \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}^* \\ (a)_0 &= 1\end{aligned}$$

en particulier, $(1)_k = k$.

1.1.1 Les fonctions hypergéométriques

Le terme fonction hypergéométrique provient de la relation :

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(k+a)(k+b)}{(k+c)(k+1)}$$

cette relation de type :

$$c_{k+1} = H(k)c_k \tag{1.1.1}$$

quotient de deux polynômes de degré 2, où H est une fonction rationnelle. Si ces deux polynômes étaient constants égaux à 1, on obtient la série

$$G(x) = 1 + x + x^2 + ...$$

qui est la série géométrique (de raison x). On obtient aussi la série géométrique comme cas particulier de la fonction hypergéométrique de Gauss :

$$F(1, c, c; x) = G(x) = 1 + x + x^2 + ...$$

la première généralisation des fonctions hypergéométriques consiste à modifier la fraction rationnelle H de la relation 1.1.1. On obtient les fonctions :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a_1, ..., a_r)_k}{(b_1, ..., b_s)_k} \frac{x^k}{k!}$$

notées :

$${}_rF_s \left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r; \\ b_1, \ldots, b_s; \end{matrix} \mathrm{x} \right)$$

$$(a_1, ..., a_r)_k = (a_1)_k ... (a_r)_k$$

Si

$$a_i = -n \quad \text{pour } i = 1, ..., r$$

où

$$n \in \mathbb{N}^*$$

dans ce cas cette fonction est un polynôme fini sur $\mathbb{Z}$.

1.2 Equations aux q-différences

Une équation différentielle ordinaire est une relation

$$G(x; f, ..., f^{(n)}) = 0.$$

entre une fonction inconnue f et ses transformées par itération de "*l'automorphisme infinitésimal*"

$$f \longmapsto \frac{d}{dx} f$$

De façon analogue on peut s'intéresser au cas où l'automorphisme infinitésimal est remplacé par un véritable automorphisme

$$f(x) \longmapsto \sigma(f(x)) = f(qx)$$

d'un domaine réel en x. On obteint alors des équations fonctionnelles

$$G(x; f, \sigma f, ..., \sigma^n f) = 0$$

où l'on a posé

$$\sigma f(x) = f(qx).$$

Nous nous intéresserons uniquement au cas où

$$G(x; y_0, ..., y_n)$$

est analytique en toutes les variables sur un domaine réel.

Définition 1.2.1 *Une équation fonctionnelle est une équation n'est pas une simple variable mais une fonction qui elle-même dépend d'une variable.*

Exemple 1.2.1 *L'équation fonctionnelle*

$$xf(x) = f(x + 1)$$

est satisfaite par la fonction gamma d'Euler

$$\Gamma(z) = \int_0 t^{z-1} e^{-t} dt$$

pour z un nombre complexe vérifiant

$$\mathrm{Re}(z) > 0.$$

Les équations fonctionnelles expriment des égalités entre des fonctions inconnues d'une ou plusieurs variables et celles qu'on en déduit en effectuant sur ces variables des substitutions connues ou inconnues.

Définition 1.2.2 *Une équations aux q-différences linéaire d'ordre n est une équation fonctionnelle de la forme :*

$$a_n(x)\sigma^n f(x) + a_{n-1}(x)\sigma^{n-1} f(x) + ... + a_1(x)\sigma^1 f(x) + a_0(x)\sigma^0 f(x) = 0 \quad où \quad a_n(x) \neq 0$$

les $a_i(x)$ pour $i = 0, ..., n$ sont des fractions rationnelles sur $\mathbb{R}$.
on peut exprimer cette équation sous une autre forme :

$$a_n(x)f(q^n x) + a_{n-1}(x)f(q^{n-1}x) + ... + a_0(x)f(x) = 0.$$

Exemple 1.2.2 *A titre d'exemple, un q-analogue de la factorielle*

$$n! = \Pi_{1\leq i\leq n} i$$

est la q-factorielle

$$n_{q!} = \Pi_{1\leq i\leq n} \frac{q^i - 1}{q - 1}.$$

La série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

a pour somme la fonction

$$f(x) = e^x$$

qui est solution de l'équation différencielle

$$\frac{dy}{dx} = y.$$

De même, la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

admet pour somme une fonction f, l'un des q-analogues de la fonction exponentielle est une solution de l'équation fonctionnelle

$$f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x}$$

si l'on prend la limite $q \to 1$ dans la série ou dans l'équation fonctionnelle, on retrouve sa contrepartie différentielle.

Remarque 1.2.1 *Dans ce mémoire, on s'intéresse aux équations aux q-différences qui sont des équations fonctionnelles de la forme :*

$$a_n(x)D_q^n f(x) + a_{n-1}(x)D_q^{n-1} f(x) + ... + a_1(x)D_q^1 f(x) + a_0(x)f(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}$$

où

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}$$

est la q-dérivation définie si-dessous (définition 1.3.1) appelée la dérivée de Jackson

$$D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x},\ x(s) = q^s,\ \ q^s \in T\ ,\ s \in \mathbb{Z}$$

donc et puisque $q \in \mathbb{R}$ tel que $-1 < q < 1$, on travaille sur un réseau géométrique :

$$T = [0 = q^{\infty}, ..., q^{s+1}, q^s, ..., q^2, q, q^0 = 1, q^{-1}, q^{-2}, ...q^{-s}, q^{-s-1}, ..., q^{-\infty} = \infty]$$

c'est une suite géométrique de raison égal à q. Pour cette raison, les équations aux q-différences sont parfois appelées équations de différences géométriques.

1.2.1 Les fonctions *q*-hypergéométriques

Les analogues des fonctions hypergéométriques dans le q-analyse sont les fonctions q-hypergéométriques.

Définition 1.2.3 *Soit $a, b, q\ \epsilon\mathbb{C}$ avec $|q| < 1$. La fonction q-hypergéométrique est la fonction définie par :*

$${}_r\phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r; \\ b_1, \ldots, b_s; \end{matrix} q\ ;x \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a_1, ..., a_r; q)_k}{(b_1, ..., b_s)_k; q} ((-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}})^{1+s-r} \frac{x^k}{(q;q)_k}$$

où

$$(a_1, ...a_p; q)_k = (a_1; q)_k ... (a_p; q)_k, (a; q)_0 = 1$$

$$(a; q)_k = (1 - a)(1 - aq)(1 - aq^2)...(1 - aq^{k-1})\ \ k = 1, 2...$$

Nous supposons que les paramètres de la fonction en question ne soient jamais nuls. Si un des paramètres a_i de la définition prècedante est ègal à q^{-n}, où n est un nombre entier positive cette série q-hypergéométrique est un polynôme sur $\mathbb{Z}$.

En particulier, si

$$r = s + 1$$

on obtient :

$$ {}_{s+1}\phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_{s+1}; \\ b_1, \ldots, b_s; \end{matrix} \mathrm{q;x} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a_1, ..., a_{s+1}; q)_k}{(b_1, ..., b_s)_k} \frac{x^k}{(a, q)_k} $$

Cette série q-hypergéométrique à été la première fois présentée par Heine au 1846, elle est appellée parfois la série de Heine.

Remarque 1.2.2 *La série q-hypergéométrique, q-analogue de la série hypergéométrique classique est définie par :*

$$ \lim_{q\to 1} {}_r\phi_s \left(\begin{matrix} q^{a_1}, q^{a_2}, \ldots, q^{a_r} \\ q^{b_1}, q^{b_2}, \ldots, q^{b_s} \end{matrix} \middle| q; (q-1)^{(1+s-r)} x \right) = {}_r F_s \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots, b_s \end{matrix} \middle| x \right). $$

1.3 La q-dérivation et la q-intégration

Dans toute la section, f et g sont des fonctions définies sur des domaines de $\mathbb{R}$.

1.3.1 La q-dérivation

On introduit la fonction dérivée d'une fonction f au sens de la q-analyse :

Définition 1.3.1 *La q-dérivée de f est la fonction donnée par :*

$$ D_q f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x}. \tag{1.3.1} $$

Exemple 1.3.1 *1. Pour $f(x) = x^k$, sa q-dérivée est :*

$$ D_q x^k = \frac{q^k - 1}{q - 1} x^{k-1} $$

c'est un polynôme de degré $k - 1$.

2. Pour

$$ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k $$

on obtient sa q-dérivée :

$$ D_q p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} x^k $$

1.3.2 q-derivée d'un produit

On a la formule de la q-derivée d'un produit

Proposition 1.3.1 *La q-derivée du produit $f.g$ est :*

$$\begin{aligned} D_q(f.g)(x) &= g(qx)D_q f(x) + f(x)D_q g(x) \\ &= f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x) \end{aligned}$$

1.3.3 q-dérivée d'une fraction

La q-dérivée d'une fraction retionnelle est donnée par la Proposition suivante.

Proposition 1.3.2 *Pour $g \neq 0$. La q-derivée de la fonction*

$$\frac{f}{g}$$

est donnée par :

$$Dq(\frac{f}{g})(x) = \frac{g(x)D_q f(x) - f(x)D_q g(x)}{g(qx)g(x)}$$

1.3.4 q-dérivée d'une fonction composée

La q-dérivée d'une fonction composée est donnée par la proposition suivante

Proposition 1.3.3 *La q-dérivée de la fonction $f \circ g$ est :*

$$\begin{aligned} D_q(f(g))(x) &= \frac{f(g(qx)) - f(g(x))}{g(qx) - g(x)} . \frac{g(qx) - g(x)}{qx - x} \\ &= D_{q,g}f(g).D_{q,x}g(x) \end{aligned}$$

où

$$D_{q,g}f(g)$$

est la q-dérivée de f par rapport à g, et

$$D_{q,x}g(x)$$

est la q-dérivée de g par rapport à x.

1.3.5 q-derivée de la fonction inverse d'une fonction continue

On pose $y = f(x)$. Dans le cas $x = f^{-1}(y)$ avec f^{-1} est l'inverse de la fonction f, on applique la q-derivée on obtient

$$\begin{aligned} 1 &= D_q x = D_q f^{-1}(y) \\ 1 &= \frac{f^{-1}(y(qx)) - f^{-1}(y(x))}{y(qx) - y(x)} . \frac{y(qx) - y(x)}{qx - x} \\ 1 &= D_{q;y} f^{-1}(y) . D_{q;x} y(x) \end{aligned}$$

par conséquence :

$$D_{q,y} f^{-1}(y) = \frac{1}{D_{q,x} f(x)}$$

où

$$D_{q,y} f^{-1}(y)$$

est la q-dérivée de f^{-1} par rapport à y, et

$$D_{q,x} f(x)$$

est la q-dérivée de f par rapport à x.

1.3.6 La q-intégration

On introduit ici la fonction primitive d'une fonction f au sens de la q-analyse.

Définition 1.3.2 *La q-primitive d'une fonction f est la fonction g solution de l'équation aux q-différences suivante :*

$$D_q g(x) = f(x) \tag{1.3.2}$$

Cherchons une formule de la q-primitive d'une fonction continue f :

$$\frac{g(qx) - g(x)}{qx - x} = \frac{1 - E_q}{(1-q)x} g(x) = f(x) \quad \text{où} \quad E_q h(x) = h(qx)$$

puisque la norme de E_q, $\|E_q\| < 1$ (voire [Gal, Chapitre 5, pp 18]), on obtient :

$$g(x) = (1 - E_q)^{-1}((1-q)xf(x)) = (1-q)\sum_{i=0}^{\infty} E_q^i (xf(x))$$

enfin la q-primitive de f est :

$$g(x) = (1-q)x\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i x)$$

Le calcul précédent est clairement valide seulement si la série dans le coté droit de cette égalité est convergente.

La q-primitive de f qui s'annule en $x = x_0 = 0$ est la fonction :

$$\int_0^x f(x)d_qx = (1-q)x\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^{i+1}x) \tag{1.3.3}$$

L'expression dans le coté droit de la formule (1.3.3) est une somme de Riemann de la fonction f sur $[0, x]$ pour $x \neq \infty$, où la segmentation est donnée par le lattice géométrique

$$T : q^s,\ s = 0, ..., \infty,$$

c'est-à-dire si f est intégrable au sens de Riemann au voisinage de $x_0 = 0$, on peut donner sa primitive comme dans la formule (1.3.3) qui est définie pour

$$x \in T,\ x \neq \infty.$$

Si la fonction f n'est pas intégrable au sens de Riemann, au voisinage de $x_0 = 0$ mais est intégrable au sens de Riemann au voisinage de $x_0 = \infty$, on peut définir la primitive de f par :

$$\begin{aligned}
\int_\infty^x f(x)d_qx &= \lim_{s\to+\infty}\sum_{i=0}^{s}(xq^{-i-1} - xq^{-i})f(q^{-i-1}x) \\
&= (q^{-1}-1)x\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i}f(q^{-i-1}x) \\
&= (\frac{1-q}{q})x\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i}f(q^{-i-1}x) \quad \text{avec } q \neq 0 \\
&= (1-q)x\sum_{i=0}^{\infty} q^{-i-1}f(q^{-i-1}x)
\end{aligned}$$

on pose $j = i + 1$ on obtient :

$$= (1-q)x\sum_{j=1}^{\infty} q^{-j}f(q^{-j}x)$$

Donc :

$$\int_\infty^x f(x)d_qx = (1-q)x\sum_{i=1}^{\infty} q^{-i}f(q^{-i}x) \tag{1.3.4}$$

Si la fonction f n'est pas intégrable au sens de Riemann, au voisinage de $x_0 = 0$, ni au voisinage de $x_0 = \infty$, mais intégrable au sens de Riemann au voisinage de certain

$x_0 = c = q^d, d \in \mathbb{Z}$, on peut définir la primitive de f par :

$$\begin{aligned}\int_c^x f(x)d_qx &= \sum_{i=d}^{s-1}(q^{i+1}-q^i)f(q^i) \text{ avec } c = q^d \geq x = q^s \\ \int_c^x f(x)d_qx &= (q-1)\sum_{i=d}^{s-1} q^i f(q^i)\end{aligned}$$

Si on pose

$$q^i = t$$

on obtient :

$$\int_c^x f(x)d_qx = (q-1)\sum_{c}^{xq^{-1}} tf(t)$$

Donc :

$$\int_c^x f(x)d_qx = (q-1)\sum_{c}^{xq^{-1}} tf(t) \tag{1.3.5}$$

La formule (1.3.3) est un cas particulier de la q-intégrale la plus générale :

$$\int_a^x f(t)d_qt =^{def} (x-a)(1-q)\sum_{0}^{\infty} q^i f(a+q^i(x-a)) \tag{1.3.6}$$

lorsque $a = 0$ on obtient la formule (1.3.3).

Définition 1.3.3 *Soit f une fonction, la q-primitive de f est la fonction donnée par :*

$$\int_a^b f(x)d_qx = (q-1)\sum_{i=0}^{\beta} q^i f(q^i) \text{ avec } b = q^\alpha \geq a = q^{\beta+1} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Si on pose $q^i = x$, on obteint :

$$\int_a^b f(x)d_qx = (q-1)\sum_{x=b}^{x=q^\beta} xf(x)$$

Si la fonction f est intégrable au sens de Riemann au voisinage de $x_0 = 0$, on peut l'écrire d'une autre manière :

$$\int_a^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)d_qx + \int_0^a f(x)d_qx$$

Evidemment, si la fonction f est différentiable au point x, la q-dérivée dans (1.3.1) tend vers la dérivé ordinaire lorsque $q \to 1$. De même, si la fonction f est intégrable au sens

de Riemann sur les intervalles en question, les intégrales dans les formules (1.3.3),(1.3.4), (1.3.5) et (1.3.6) tend vers les intégrales de Riemann de f sur les intervalles correspondants lorsque $q \to 1$.

On remarque que la q-intégrale admet les mêmes propriétés de intégrale de Reimann sur des intervalles finis ou infinis.

Exemple 1.3.2 *Calcul de la q-intégrale* $\int x^\alpha d_q x$

1. *Pour* $\alpha > -1$, $f(x) = x^\alpha$ *est intégrable au sens de Riemann au voisinage de* $x_0 = 0$ *par conséquant :*

$$\begin{aligned}\int_0^x x^\alpha d_q x &= (1-q)x\sum_0^\infty q^i f(q^i x) = (1-q)x\sum_0^\infty q^i q^{\alpha i} x^\alpha \\ &= (1-q)x^{\alpha+1}\sum_0^\infty (q^{(1+\alpha)})^i\end{aligned}$$

si on pose

$$p = q^{1+\alpha}$$

on a :

$$\begin{aligned}\sum_0^\infty p^i &= \frac{1}{1-p} = (1-q)x^{\alpha+1}.\frac{1}{1-q^{\alpha+1}} \\ &= \frac{1-q}{1-q^{\alpha+1}}.x^{\alpha+1} = \frac{1}{q^\alpha + ... + q^0}x^{\alpha+1}\end{aligned}$$

lorsque $q \to 1$ *on obteint :*

$$\sum_0^\infty p^i = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} = \int_0^x x^\alpha dx$$

2. *Pour* $\alpha < -1$, $f(x) = x^\alpha$ *n'est pas intégrable au sens de Riemann au voisinage* $x_0 = 0$, *mais est, intégrable au sens de Riemann au voisinage* $x_0 = \infty$. *On obtient*

$$\begin{aligned}\int_\infty^x x^\alpha dx &= (q-1)\sum_{i=0}^\infty q^{-(i+1)}x^\alpha q^{-(i+1)\alpha} \\ &= \frac{1-q}{1-q^{\alpha+1}}x^{\alpha+1}\end{aligned}$$

Si on applique la régle de l'hôpital et $q \to 1$, *on obtient* $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \int_0^x x^\alpha dx, q \to 1$.

3. *Pour* $\alpha = -1$, *la fonction* $f(x) = \frac{1}{x}$ *n'est pas intégrable au sens de Riemann au voisinage* $x_0 = 0$ *ni au voisinage* $x_0 = \infty$, *on utilise la formule (1.3.5), avec* $q \in [0, 1[$ *on obtient :*

$$\int_1^x \frac{d_q x}{x} = (q-1)\sum_{i=0}^{s-1}(1) = (q-1)s = \frac{q-1}{\ln q}\ln x \to \ln x = \int_1^x \frac{dx}{x}, q \to 1$$

1.3.7 Les principes fondamentaux de la q-analyse

On a les deux propriétés de la q-intégration suivantes :

1.

$$\begin{aligned} D_q(\int_a^x f(x)d_qx) &= D_q\{(1-q)(x\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i x) - a\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i a))\} \\ &= \frac{(1-q)}{x(q-1)}(x\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^{i+1}x) - a\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i a) - x\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i x) + a\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i a)) \\ &= \frac{x(1-q)}{x(q-1)}(\sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^{i+1}x) - \sum_{i=0}^{\infty} q^i f(q^i x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \int_a^x D_q f(x)d_qx &= \int_a^x \frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}d_qx \\ &= (1-q)x\sum_{i=0}^{\infty} q^i \frac{f(q^{i+1}x)-f(q^i x)}{(q-1)q^i x} - (1-q)a\sum_{i=0}^{\infty} q^i \frac{f(q^{i+1}a)-f(q^i a)}{(q-1)q^i a}d_qx \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f(q^i x) - f(q^{i+1}x) - \sum_{i=0}^{\infty} f(q^i a) - f(q^{i+1}a) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} f(q^i x) - \sum_{i=0}^{\infty} f(q^{i+1}x)] - \sum_{i=0}^{\infty} f(q^i a) - \sum_{i=0}^{\infty} f(q^{i+1}a) \\ &= f(x) - f(a) \end{aligned}$$

2

Les équations aux q-différences linéaires d'ordre 1

Ce chapitre est une étude de base des équations aux q-différences linéaires d'ordre 1. Deux types des équations aux q-différences sont traités a titre illustratif, le 1^{er} concerne les équations aux q-différences linéaires, le second les équations aux q-différences non linéaires transformables en équations linéaires.

Définition 2.0.4 *Une équation aux q-differences du premier ordre est une équation de la forme :*

$$f(x, y(x), D_q y(x)) = 0 \tag{2.0.1}$$

ou bien :

$$\begin{aligned} f(x, y(x), D_q y(x)) &= f(x, y(x), \frac{y(qx) - y(x)}{(q-1)x}) \\ &= g(x, y(x), y(qx)) \end{aligned}$$

elle peut être exprimée sous la forme :

$$g(x, y(x), y(qx)) = 0 \tag{2.0.2}$$

Souvent on utilise l'équation (2.0.1) au lieu de l'equation (2.0.2).

Il n'existe pas une méthode générale pour résoudre les équations aux q-différences d'ordre 1, mais on peut résoudre des cas spéciaux, parmi ces cas : les équations aux q-differences linaires d'ordre 1 et les équations aux q-differences non linaires qu'on peut transformer à des équations aux q-différences linaires du premier ordre.

2.1 Les équations aux q-différences linaires d'ordre 1

On considère l'équation aux q-différences suivante :

$$D_q y(x) = a(x)y(qx) + b(x) \tag{2.1.1}$$

L'étude de cette équation est équivalente à l'étude de l'èquation :

$$D_q y(x) = a(x)y(x) + b(x) \tag{2.1.2}$$

en effet, (2.1.1) est équivalente à l'équation :

$$D_q y(x) = \tilde{a}y(x) + \tilde{b}(x) \tag{2.1.3}$$

où

$$\tilde{a}(x) = a(qx)$$

et

$$\tilde{b}(x) = b(qx)$$

de (2.1.3) on peut trouver (2.1.1) lorsque on pose :$x = q^{-1}x$ et remplace q par q^{-1}
et vice versa

2.1.1 Le cas homogène :

On considère le cas homogène suivant :

$$D_q y(x) = a(x)y(qx) \tag{2.1.4}$$

L'équation (2.1.4) donne :

$$D_q y(x) = \frac{y(qx) - y(x)}{(q-1)x} = a(x)y(qx)$$

d'où

$$y(x) = (1 + (1-q)xa(x))y(qx) \tag{2.1.5}$$

Par réccurence on obtient :

$$\begin{aligned} D_q^2 y(x) &= D_q(D_q y(x)) = D_q(a(x)y(qx)) \\ &= \frac{a(qx)y(q^2x) - a(x)y(qx)}{x(q-1)} \end{aligned}$$

de même on peut calculer :

$$D_q^3 y(x)$$

D'où :

$$y(x) = (1 + (1-q)xa(x))y(qx)$$

appliquons la même formule pour $y(qx)$:

$$y(x) = (1 + (1-q)xa(x))(1 + (1-q)qxa(qx))y(q^2x)$$

par recurrence :

$$y(x) = \Pi_{i=0}^{N-1}(1 + (1-q)q^i xa(q^i x)).y(q^N x) \tag{2.1.6}$$

Si

$$N \to \infty$$

avec

$$0 < q < 1$$

on obtient :

$$y(x) = y(0)\Pi_{i=0}^{\infty}(1 + (1-q)q^i xa(q^i x)).$$

Exemple 2.1.1 *Pour*

$$a(x) = \frac{q^k - 1}{q-1}.\frac{1}{q^k x - 1} \qquad k \in \mathbb{N}$$

on trouve :

$$\begin{aligned} y(x) &= y(0)\Pi_{i=0}^{k-1}(1 + (1-q)q^i x\frac{q^k-1}{q-1}.\frac{1}{q^{k+1}x-1}) \\ &= y(0)\Pi_{i=0}^{k-1}(1 - q^i x(\frac{q^k-1}{q^{k+i}x-1})) \end{aligned}$$

lorsque $k \to \infty$ et comme $0 < q < 1$, on obtient :

$$y(0)\Pi_{i=0}^{K-1}(1-q^i x) =^{def} y(0)(x;q)_k$$

2.1.2 Le cas d'équation non homogène :

On considère le cas non homogène suivant :

$$D_q y(x) = a(x)y(qx) + b(x) \tag{2.1.7}$$

On applique la méthode de variation des constantes, on obtient une solution particulière

$$y(x) = c(x)y_0(x)$$

pour trouver la fonction $c(x)$ on pose :

$$\begin{aligned} c'(x) &= \frac{b(x)}{y_0(x)} \\ c(x) &= \int_{x0}^{x} b(t)y_0^{-1}(t)d_q t + c \end{aligned}$$

pour $x = x_0$ on trouve :

$$c(x_0) = c$$

la solution particulière sous la forme :

$$y(x) = c(x_0)y_0(x) + \int_{x0}^{x} y_0(x)b(t)y_0^{-1}(t)d_q t$$

donc la solution générale sous la forme :

$$y(x) = y_p + y_0$$

$$y(x) = c(x_0)y_0(x) + \int_{x0}^{x} y_0(x)b(t)y_0^{-1}(t)d_q t + y_0(x)$$

$$y(x) = (c(x_0) + 1)y_0(x) + \int_{x0}^{x} y_0(x)b(t)y_0^{-1}(t)d_q t$$

On note :

$$c(x_0) + 1 = C$$

et d'aprés la formule (2.1.1) de l'équation :

$$y(x) = y_0(x)C + \int_{x0}^{x} y_0(x)b(t)y_0^{-1}(qt)d_q t$$

On applique la q-primitive on obtient la solution générale :

$$y(x) = y_0(x)C + (1-q)x\sum_{i=0}^{\infty} q^i y_0(x)y_0^{-1}(q^{i+1}x)b(q^i x)$$

Cas 1 : Equation sous la forme

$$D_q y(x) = ay(x)$$

où a est une constante.

On peut écrire :

$$y(qx) = (1 + (q-1)xa)y(x)$$

et on cherche la solution formelle sous la forme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

remplaçons $y(x)$ dans l'équation précédante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n = ((q-1)xa + 1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (qx)^n = (q-1)a \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} (q^n - 1) c_n x^n = (q-1)a \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}$$

aprés le changement de variable ($m = n + 1$) on obtient :

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} (q^n - 1) c_n x^n = (q-1)a \sum_{m\geq 1}^{\infty} c_{m-1} x^m$$

Donc :

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} (q^n - 1) c_n x^n = (q-1)a \sum_{n\geq 1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

par identification :

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty} (q^n - 1) c_n = (q-1)a \sum_{n\geq 1}^{\infty} c_{n-1}$$

pour $n = 1$

$$\begin{aligned}(q-1)c_1 &= (q-1)ac_0\\ c_1 &= \frac{(q-1)}{(q-1)}ac_0\\ \frac{c_1}{c_0} &= \frac{q-1}{q-1}\\ (q^2-1)c_2 &= (q-1)a.\frac{(q-1)}{(q-1)}ac_0\\ c_2 &= \frac{1-q}{1-q^2}a^2c_0\\ c_n &= \Pi_{k=1}^{n}(\frac{1-q}{1-q^k})a^nc_0\end{aligned}$$

avec

$$(k)_q =^{def} \frac{1-q^k}{1-q} \to k, q \to 1$$

on peut écrire :

$$c_n = c_0\frac{a^n}{(n)_{q!}}$$

où

$$(n)_{q!} =^{def} \Pi_{k=1}^{n}\frac{1-q^k}{1-q}.$$

Par conséquant la solution est donnée par la fonction q-exponentiel $c_0\exp(ax)$:

$$\begin{aligned}y_q(x) &= c_0\exp(ax)\\ y_q(x) &= c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{(n)_{q!}}x^n\end{aligned}$$

Cas 2 : Equation sous la forme

$$D_qy(x) = ay(qx)$$

On peut écrire :

$$y(x) = (1+(1-q)xa)y(qx)$$

On utilisant le cas 1 et en posant $x = q^{-1}x'$ on a :

$$\begin{aligned}y(q^{-1}x') &= (1+(1-q)q^{-1}x'a)y(x')\\ &= (1+(1-q)(q^{-1}x')a)y(x')\\ &= (1+(q^{-1}-1)x'a)y(x')\end{aligned}$$

D'où la solution est donné sous la forme :

$$y_{q^{-1}}(x) = c_0 e_{q^{-1}}^{ax} = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{(n)_{q-1}!} x^n.$$

où $(n)_{q-1}!$ est obtenue de $(n)_{q!}$, en remplaçant q par q^{-1}.

Les fonctions e_q^x et $e_{q^{-1}}^x$ sont les q-exponentielles.

La question qui se pose ici, consiste à trouver leur fonctions respectives de q-inverse. La réponse à cette question peut voir facilement d'apres le théorème suivant :

Théorème 2.1.1 *Sous les hypothèses suivantes :*

$$D_q y = a(x)y(x)$$

$$D_q z = -a(x)z(qx)$$

$$y(x_0)z(x_0) = 1$$

on a :

$$y(x)z(x) = 1$$

Preuve. On a $D_q(zy) = z(qx)D_q y(x) + D_q z(x).y(x) = z(qx)a(x) - z(qx)a(x)y(x) = 0$

par conséquent :

$$y(x)z(x) = cste.$$

■

Corollaire 2.1.1 *Les deux fonctions e_q^x et $e_{q^{-1}}^x$ vérifient la relation :*

$$e_q^x e_{q^{-1}}^{-x} = 1$$

Cas 3 : Equation sous la forme

$$D_q y(x) = ay(x) + b$$

D'aprés le cas 1 et la méthode de variation des constantes on obtient :

La solution homogène sous la forme :

$$y_q(x) = c(x)e_q^{ax}$$

Pour trouver la fonction $c(x)$ on pose :

$$c(x) = \frac{b}{y_q(x)}$$

$$c(x) = \int_0^x e_{q^{-1}}^{-at} b d_q t + cst$$

pour $x = 0$, on obteint

$$c(0) = y(0)$$

donc

$$c(x) = \frac{-e_{q^{-1}}^{-at}}{a}|_0^x b + y(0) = \frac{-e_{q^{-1}}^{-ax}}{a} b + \frac{b}{a} + y(0)$$

d'où

$$\begin{aligned} y_q(x) &= (\frac{-e_{q^{-1}}^{-ax}}{a} b + \frac{b}{a} + y(0)) e_q^{ax} \\ &= \frac{-b}{a} + \frac{b}{a} e_q^{ax} + y(0) e_q^{ax} \end{aligned}$$

Cas 4 : Equation sous la forme

$$D_q y(x) = a y(qx) + b$$

d'aprés le cas 2 et la méthode de variation des constantes on obtient :

La solution homogène sous la forme :

$$y_q(x) = c(x) e_{q^{-1}}^{ax}$$

Pour trouver la fonction $c(x)$ on pose :

$$c(x) = \frac{b}{y_q(x)}$$

$$c(x) = \int_0^x e_q^{-at} b d_q t + cst$$

pour $x = 0$, on obtient $c(0) = y(0)$

$$\begin{aligned} c(x) &= \frac{-e_q^{-at}}{a}|_0^x b + y(0) \\ c(x) &= \frac{-e_q^{-ax}}{a} b + \frac{b}{a} + y(0) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} y_q(x) &= (\frac{b}{a} - \frac{e_q^{-ax}}{a} b + y(0)) e_{q^{-1}}^{ax} \\ y_q(x) &= \frac{b}{a} e_{q^{-1}}^{ax} - \frac{b}{a} + y(0) e_{q^{-1}}^{ax} \end{aligned}$$

Cas 5 : Equation sous la forme

$$D_q y(x) = \alpha x y(x)$$

On cherche la solution sous la forme :

$$y(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$$

On obtient les coefficients :

$$c_{2n} = \alpha^n \frac{c_0}{(2n)_{q!!}}$$

avec

$$[2n]_{q!!} =^{def} \frac{1-q^{2n}}{1-q}\frac{1-q^{2n-2}}{1-q}...\frac{1-q^2}{1-q}.1$$

On peut écrire :

$$(2n)_{q!!} = (n)_{q!}(2)_q^x$$

et

$$(2)_q^x =^{def} (1+q)(1+q^2)...(1+q^n)$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{q\to 1}(2n)_{q!!} &= (2n)!! =^{def} (2n)(2n-2)(2n-4)...2.1 \\ &= 2^n n! = \lim_{q\to 1}(n)_{q!}(2)_q^n \end{aligned}$$

donc la solution est :

$$y(x) = c_0 \varepsilon_q^{\frac{\alpha x^2}{2}}$$

où

$$\varepsilon_q^{\frac{\alpha x^2}{2}} = \sum_0^\infty \frac{\alpha^n x^{2n}}{(n)_{q!}(2)_q^n}$$

est la q-version de la fonction

$$e^{\frac{\alpha x^2}{2}}.$$

2.2 Equations aux q-diffèrences non linéaires transformables en équations linéaires

On considére l'équation aux q-différences non linéaire de type :

$$f(x, y(x), D_q y(x)) = 0$$

ou de type :

$$g(x, y(x), y(qx)) = 0$$

transformable en équation aux q-différences linéaire.

2.2.1 Cas 1 : Equation de type de Riccati

$$D_q y(x) = a(x)y(qx) + b(x)y(x)y(qx)$$

pour résoudre cette équation, on remplace

$$y(x) = \frac{1}{z(x)}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
D_q \frac{1}{z(x)} &= \frac{a(x)z(x) + b(x)}{z(qx).z(x)} \\
\frac{\frac{1}{z(qx)} - \frac{1}{z(x)}}{(q-1)x} &= \frac{a(x)z(x) + b(x)}{z(qx).z(x)} \\
\frac{z(x) - z(qx)}{z(qx).z(x)} \frac{1}{(q-1)x} &= \frac{a(x)z(x) + b(x)}{z(qx).z(x)} \\
D_q z(x) &= -(a(x)z(x) + b(x))
\end{aligned}$$

c'est une équation aux q-différences linéaire d'ordre 1.

Exemple 2.2.1 *Pour résoudre l'équation :*

$$y(qx)y(x) - y(qx) + y(x) = 0$$

on remplace :

$$y(x) = \frac{1}{z(x)}$$

On obtient :

$$z(x) = z(qx) + 1$$

et donc la solution est donnée par :

$$z(x) = \frac{-\ln x}{\ln q}$$

alors

$$y(x) = \frac{-\ln q}{\ln x}$$

2.2.2 Cas 2 : Equation homogène de la forme $f(\frac{D_q y(x)}{y(x)}, x) = 0$

Ces équations peuvent être transformer à des équations linéaires par le changement de variable :

$$z(x) = \frac{D_q y(x)}{y(x)}$$

Exemple 2.2.2 *Pour résoudre l'équation :*

$$(D_q y(x))^2 - 2y(x)D_q y(x) - 3(y(x))^2 = 0$$

par le changement de variable

$$z(x) = \frac{D_q y(x)}{y(x)}$$

on obtient :

$$(\frac{D_q y(x)}{y(x)})^2 - 2(\frac{D_q y(x)}{y(x)}) - 3 = 0$$

ou

$$z^2(x) - 2z(x) - 3 = 0$$

On trouve

$$z(x) = 3$$

et

$$z(x) = 1$$

d'où

$$y(x) = ce_q^{3x}$$

ou

$$y(x) = ce_q^x.$$

2.2.3 Cas 3 : Equation homogène de la forme $(y(qx))^{c1}(y(x))^{c_2} = g(x)$

où c_1 et c_2 sont de constantes quelconques.

Dans ce cas on obtient :

$$c_1 \ln(y(qx)) + c_2 \ln(y(x)) = \ln(g(x))$$

et on a

$$z(x) = \ln(y(x))$$

et enfin :

$$c_1 z(qx) + c_2 z(x) = \ln(g(x))$$

Exemple 2.2.3 *On a l'équation sous la forme :*

$$\frac{(y(x)^2)}{y(qx)} = e^{x^2}$$

on applique la fonction ln *on obtient :*

$$2z(x) - z(qx) = x^2 \qquad z(x) = \ln y(x)$$

la solution de l'équation homogène est :

$$z(x) = x^{\frac{\ln 2}{\ln q}}$$

On peut trouver la solution particulière en inversant l'opérateur dans

$$1 - \frac{1}{2}E_q$$

pour obtenir :

$$\begin{aligned} z(x) &= (1 - \frac{1}{2}E_q)^{-1}\frac{x^2}{2} \\ &= \frac{x^2}{2}\sum_0^\infty 2^{-i}q^{2i} \\ &= \frac{x^2}{2-q^2} \end{aligned}$$

d'où la solution est :

$$z(x) = cx^{\frac{\ln 2}{\ln q}} + \frac{x^2}{2-q^2}$$

et par conséquant :

$$\begin{aligned} y(x) &= \exp(cx^{\frac{\ln 2}{\ln q}} + \frac{x^2}{2-q^2}) \\ &= \exp(c2^{\frac{x}{\ln q}} + \frac{x^2}{2-q^2}). \end{aligned}$$

3

Systèmes aux q- diffèrences linéaires d'ordre 1

Ce chapitre est une brève introduction aux systèmes aux q-différences linéaires d'ordre 1.

On considère le systéme aux q-différences linéaire suivant :

$$D_q y(x) = A(x)y(qx) + b(x) \tag{3.0.1}$$

où

$$\begin{aligned} y(x) &= (y_1(x), ..., y_k(x))^t \\ b(x) &= (b_1(x), ..., b_k(x))^t \in \mathbb{R}^k \\ A(x) &= (a_{i,j}(x))_{i,j=1}^k \end{aligned}$$

telle que la matrice :

$$I_k + (1-q)xA(x)$$

soit non singulière.

Comme le cas scalaire, le systéme (3.0.1) est équivalent au systéme suivant :

$$D_q y(x) = \tilde{A}(x)y(x) + \tilde{b}(x) \tag{3.0.2}$$

où

$$\tilde{A}(x) = A(qx)$$

et

$$\tilde{b}(x) = b(qx)$$

de (3.0.1) et on posant :

$$x = q^{-1}x$$

et q^{-1} par q

on trouve (3.0.2), et vice versa.

Le systéme (3.0.1) est dit non homogène (respectivement, non autonome) si le terme indépendant b ne s'annule pas (respectivement, ses coefficients dépendent de x) .

Ainsi, le système homogène correspondant à (3.0.1) est :

$$D_q y(x) = A(x)y(qx) \tag{3.0.3}$$

comme dans le cas des équations scalaires, on peut reécrire les équations (3.0.1) et (3.0.3) respectivement sous les formes récurrentes suivantes :

$$D_q y_i(x) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij} y_j(qx) + b_i(x)$$

On obtient :

$$y_i(x) = y_i(qx) + (1-q)x \sum_{j=1}^{k} a_{ij} y_j(qx) + (1-q)x b_i(x) \qquad i = 1..k$$

$$y_i(x) = (I + (1-q)xA(x))y(qx) + (1-q)xb(x) \qquad i = 1..k$$

On prend le cas homogène donc :

$$y(x) = (I + (1-q)xA(x))y(qx) \tag{3.0.4}$$

On considére le cas du système homogène (3.0.3) équivalent au système (3.0.4) dont la solution est **:**

$$\begin{aligned} y(x) &= (I + (1-q)xA(x))y(qx) \\ y(qx) &= (I + (1-q)xA(x))(I + (1-q)qxA(qx))y(q^2x) \end{aligned}$$

et par recurence, on obtient :

$$y(x) = \Pi_{t=0}^{k-1}(I + (1-q)tA(t))y(q^k x) \tag{3.0.5}$$

lorsque

$$k \to \infty$$

avec

$$0 < q < 1$$

et

$$x_0 = 0$$

(3.0.5) donne :

$$y(x) = (\Pi_0^{\infty}(I + (1-q)q^i xA(q^i x)))y(0)$$

Le théorème suivant montre l'existence et l'unicité de la solution d'un système au q-différences linéaire :

Théorème 3.0.1 *Pour tout vecteur $v_0 \in \mathbb{R}^k$, il existe une solution unique du système homogène (3.0.3) vérifiant*

$$y(x_0) = v_0$$

Soit $y_1(x), ..., y_k(x)$ un systéme de k vecteurs dans $\mathbb{R}^k$, et soit $Y(x)$ une matrice d'ordre k avec les colonnes sont constituées par les vecteurs $y_1(x), ..., y_k(x)$.

Théorème 3.0.2 *La matrice $Y(x)$ est solution du système homogène (3.0.3) si et seulement si chaque élément de l'ensemble $\{y_1(x), ..., y_k(x)\}$ l'est.*

Des deux théorèmes précédents, on obtient le suivant :

Théorème 3.0.3 *Pour V_0 une matrice d'ordre k, il existe une solution unique du système homogène (3.0.3) vérifiant*

$$Y(x_0) = V_0$$

On considére l'équation (3.0.4), la solution est donnée par :

$$Y(x) = (\Pi_{t=q^{-1}x_0}^{x}(I + (1-q)tA(t)))V_0$$

et pour

$$x_0 = 0$$

$$Y(x) = (\Pi_{t=0}^{\infty}(I + (1-q)q^i xA(q^i x)))V_0$$

Théorème 3.0.4 *Soient les deux matrices Y et Z telles que :*

$$\begin{aligned} D_qY(x) &= A(x)Y(x) \\ D_qZ(x) &= -Z(qx)A(x) \end{aligned}$$

$$Y(x_0)Z(x_0) = I \tag{3.0.6}$$

Alors :

$$Y(x)Z(x) = I$$

où I est la matrice identité.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} D_q(Z(x)Y(x)) &= Z(qx).D_qY(x) + D_qZ(x).Y(x) \\ &= Z(qx).Ay(x) - Z(qx).AY(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$ZY = const$$

et d'aprés le théoreme précédent, on obtient

$$ZY = I.$$

. ■

De même, on prouve facilement :

Théorème 3.0.5 *Si Y et Z sont deux matrices telles que :*

$$D_qY(x) = A(x)Y(qx)$$

$$D_qZ(x) = -Z(x)A(x)$$

$$Y(x_0)Z(x_0) = I$$

Alors

$$Y(x)Z(x) = I \tag{3.0.7}$$

Les corollaires suivants sont des conséquences directes du théorème précédent.

Corollaire 3.0.1 *Les matrices $Y(x)$ et $Z(x)$ dans (3.0.6) et (3.0.7) vérifient :*

$$Y(x)Z(x) = I$$

$$Z(x)Y(x) = I.$$

Corollaire 3.0.2 *La solution de l'équation*

$$D_qY(x) = A(x)Y(x)$$

est une matrice non singulière si et seulement si elle est non singulière pour $x = x_0$.

Définition 3.0.1 *Soit A un ensemble de k solutions linéairement indépendantes de (3.0.3), A est appelée un système fondamental de solutions. La matrice non singulière, solution du système $Y(x)$ est dite matrice fondamentale.*

Théorème 3.0.6 *Tout système d'équations aux q-differences linéaires (3.0.3) admet toujours un système fondamental de solutions ou une manière fondamentale.*

Preuve. On considére un système linéaire indépendant de k vecteurs de $\mathbb{R}^k$, notée

$$v_1, ..., v_k.$$

D'aprés le corollaire 3.0.1, soit

$$y_i(x_0) = v_i,\ i = 1...k.$$

Cela signifie que l'ensemble des solutions

$$y_i(x), i = 1..., k$$

est linéairement indépendant au point x_0. Ou de maniére équivalente, $Y(x)$ est non singulière en $x = x_0$ grace au corollaire (3.0.2), $y(x)$ est non singulière pour tout x et le système correspondant $\{y_1(x), ..., y_k(x)\}$ est un système fondamental . ■

Corollaire 3.0.3 *L'éspace de solutions du système homogène (3.0.3) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension k.*

Bibliographie

[Ben] Bangerezako G., An introduction to q-difference equations, Preprint, Bujumbura, 2008.

[D-R-S-Z] Di Vizio L., Ramis J-P., Sauloy J., Zhang , Equations aux q-différences. SMF, Gazette 96, Avril 2003.

[Gal] Gallardo M. L., Cours sur les espaces de Hilbert, Licence $3^{ème}$ année, Université de Tours, année 2007-2008.

[Mign] Mignon T., Système GKZ et variétés toriques, prépublication, 2010.

[Saul] Sauloy J., Equations aux q-différences linéaires : factorisation, résolution et théorèmes d'indices, prépublication, 2008.