République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et
de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Par

Adel SAOUDAOUI

Étude de quelques problémes elliptiques non locaux

Soutenu publiquement le ....., devant le jury composé de

Noureddine BENAICHOUCHE	*MAA.* **Univ. Médéa**	**Président**
Rezak SOUILAH	*MCA.* **Univ. Médéa**	**Encadreur**
Hocine AYADI	*MCA.* **Univ. Médéa**	**Examinateur**

Année universitaire 2022/2023

Remerciement

Tout d'abord, je voudrais remercier **Allah**, tout puissant, qui m'a donné la force de mener à bien ce travail.

Je remercie tout particulièrement Monsieur **R. SOUILAH**, qui a dirigé ce travail. Son enthousiasme, sa bienveillance et sa compétence m'a conduit bien plus loin que je n'aurais pu l'imaginer. J'ai énormément appris auprès de lui et je tiens à lui faire part de toute ma gratitude.

Mes remerciements vont également à Monsieur **N. BENAICHOUCHE**, président du jury qui a accepté de relire ce travail.

Je remercie vivement Monsieur **H. AYADI** qui m'a fait honneur en acceptant d'examiner et de juger ce travail.

Je souhaite aussi remercier tous les enseignants du département de mathématiques et informatique de la faculté des sciences de l'université Yahia Farès Médéa.

Je remercie également ma famille, surtout mes parents qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours.

Je tiens énormément à remercier mes amis et mes camarades de promotion pour leur soutien pendant toute la période de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à ma famille, en particulier à mes parents, à mon grand-père et à tous les professeurs qui m'ont enseigné tout au long de mon parcours universitaire, ainsi qu'à tous mes amis, qu'ils soient vivants ou décédés.

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié deux types de problèmes elliptiques non locaux. On a démontré des résultats d'existence pour ces problèmes par des arguments de point fixe.

Mots-clés : Problèmes elliptiques non locaux, théorème de Lax-Milgram, point fixe de Schauder, point fixe de Tikhonov, opérateurs pseudo monotones.

Notations

Ω	un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	frontière topologique de Ω
$\|\Omega\|$	mesure de Lebesgue du l'ensemble Ω
$x=(x_1,\cdots,x_N)$	point générique de $\mathbb{R}^N$
$dx=dx_1dx_2\cdots dx_N$	mesure de Lebesgue sur Ω
$\overline{\Omega}$	l'adhérence de l'ensemble Ω
$\rightharpoonup$	la convergence faible
p.p.	presque partout
V	un espace de Banach
H	un espace de Hilbert
V'	le dual topologique de V
$\langle .,. \rangle_{V'\times V}$	le crochet de dualité entre l'espace V et son dual topologique V'
$\|.\|$	la norme sur l'espace de Banach V
$(.,.)$	le produit scalaire sur l'espace de Hilbert H
$\|.\|$	la norme sur l'espace de Hilbert H
$\mathbb{R}^{m\times N}$	l'espace des matrices réelles.
Id	l'application identique.
$\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$	l'espace des fonctions continues
∂_i	La i-i ème dérivée partielle; $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$.
∂^α	La dérivée d'ordre α; $\partial^\alpha=\frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}$.
$\nabla u=(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_N})$	gradient de $v:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$
div v	La divergence du vecteur $v=(v_1,...,v_N)$ div $v=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+...+\frac{\partial v_N}{\partial x_N}$

Introduction générale

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'existence des solutions faibles pour deux problèmes elliptiques non locaux

$$(\mathscr{P}_1) \quad \begin{cases} -G\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u = g(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$(\mathscr{P}_2) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,l(u))\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $G : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant

$$\exists m_0 > 0 \quad G(t) \geq m_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

et $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant

$$|g(x,s)| \leq h(x) + c|s|,$$

où $c > 0$, et h est une fonction positive appartenant à $L^2(\Omega)$.

On suppose de plus que $f \in L^2(\Omega)$, $l : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue, et $a : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory telle que

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0; \quad \alpha \leq a(x,s) \leq \beta \quad \text{p.p } x \in \Omega, \forall s \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Le problème $(\mathscr{P}_1)$ est la contrepartie stationnaire de l'équation hyperbolique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\tau_0}{m} + \frac{\sigma E}{2mL}\int_0^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \tag{2}$$

qui a été proposé par **Kirchhoff** dans [18] afin de généraliser le modèle de **d'Alembert** :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\tau_0}{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in [0, L], \quad t > 0, \tag{3}$$

qui décrit des petites vibrations verticales d'une corde élastique, avec extrémités fixés. Les paramètres de l'équation (2) ont les significations suivantes : L est la longueur de la corde, τ_0 représente la tension initiale, m est la masse de la corde, E est le module de Young (ou module d'élasticité) du matériau, et σ est l'aire de la section transversale de la corde à la position de repos. L'inconnue u représente le déplacement de la corde dans la direction orthogonale à $[0, L]$ (pour plus de détails voir [16, 24, 25, 26, 30], et les références qui s'y trouvent). Tandis que le modèle de **d'Alembert** (3) suppose que la longueur de la corde est invariante pour des petites vibrations transversales, le modèle de **Kirchhoff** (2) prend en compte ces variations.

Dans [7], Carrier a établi l'équation qui modélise la vibration d'une corde élastique lorsque les variations de tension ne sont pas faibles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{1}{m} + \frac{\sigma E}{\tau_0 m L}\int_0^L u^2\, dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{4}$$

Le cadre abstrait du modèle de **Kirchhoff** a été proposé dans [23] sous le forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - G\left(\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2\right)\Delta u = f & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ u = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times]0, T[, \\ u(0) = u_0, \quad u'(1) = u_1, & \end{cases}$$

où $G : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $G(s) \geq c > 0$ pour tout $s \geq 0$, et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, avec une frontière régulière.

Dans [3], il a été signalé que le problème $(\mathscr{P}_1)$ pourrait modéliser plusieurs systèmes physiques, où u décrit un processus qui dépend de la moyenne de lui-même. L'effet non local (présence du terme $G\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)$) trouve également ses applications dans les systèmes biologiques. La version parabolique du problème $(\mathscr{P}_1)$ peut être utilisé pour décrire la croissance d'une espèce particulière (par exemple des bactéries).

Dans le cas où la fonction a ne dépend pas de x et $l(u) = \int_\Omega u(x)\, dx$, Le problème $(\mathscr{P}_2)$ a été proposé par Chipot-Lovat [9]. Plus précisément, ils ont étudié le problème suivant :

$$\begin{cases} a\left(\int_\Omega u(x)\,dx\right)\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et sa version parabolique :

$$(\mathscr{P}_3)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\left(\int_\Omega u(x,t)\,dx\right)\Delta u = f & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Les auteurs de ce travail ont signalé que le problème $(\mathscr{P}_3)$ se présente dans diverses situations. Par exemple, la fonction inconnue u pourrait décrire la densité d'une population (par exemple de bactéries). Le coefficient de diffusion a est alors censé dépendre de l'ensemble de la population du domaine plutôt que de la densité locale c'est-à-dire les mouvements sont guidés en tenant compte de l'état global du support. Une autre explication de la l'importance d'un tel modèle réside dans le fait que les mesures qui servent à déterminer les constantes physiques ne sont pas faites en un point mais représentent une moyenne dans un voisinage d'un point de sorte que ces constantes physiques dépendent de moyennes locales.

Ce travail a été généralisé par la suite par Chipot-Lovat [10] au problème suivant

$$(\mathscr{P}_4)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a\left(l\left(u(.,t)\right)\right)\Delta u = f & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega\times]0,T[, \\ u(x,0) = u_0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

où l est une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega)$. Les auteurs de ce modèle ont mentionné que dans le cas où $l\left(u(.,t)\right) = \int_{\Omega'} u(x,t)\,dx$, avec Ω' est un sous-domaine de Ω, le problème $(\mathscr{P}_4)$ pourrait modéliser une migration de population (par exemple des bactéries dans un récipient). Le terme non local $a\left(\int_{\Omega'} u(x,t)\,dx\right)$ signifie que la vitesse de la migration dépend de la population totale dans un sous-domaine Ω'.

Ce mémoire est composé de trois chapitres. Le premier est entièrement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaires pour la suite de ce travail. L'objectif du deuxième chapitre est de présenter un résultat d'existence pour le problème $\mathscr{P}_1$. Le troisième chapitre est consacré pour l'étude du problème $\mathscr{P}_2$.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé iii

Notations iv

Introduction générale v

1 Préliminaires 1

1.1 Rappels sur quelques espaces fonctionnels 1
1.2 Méthode variationnelle 10
1.3 Méthode de monotonie 17
1.4 Méthode de compacité 27

2 Problème elliptique non local de type Kirchhoff 35

2.1 Position du problème 35
2.2 Énoncé du résultat principal 36
2.3 Preuve du théorème 2.1 36

3 Problème elliptique quasi-linéaire non local 41

3.1 Position du problème 41
3.2 Énoncé du résultat principal 42
3.3 Preuve du théorème 3.1 42

Chapitre 1

Préliminaires

Sommaire

1.1 Rappels sur quelques espaces fonctionnels 1
1.2 Méthode variationnelle 10
1.3 Méthode de monotonie 17
1.4 Méthode de compacité 27

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail.

1.1 Rappels sur quelques espaces fonctionnels

1.1.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1: (Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$)

On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :

1. Pour $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \quad \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

2. Pour $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mesurable}, \quad \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)| < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)|.$$

Theorem 1.1 – [5, 14]. Pour $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach et de Hilbert pour $p = 2$ muni du produit scalaire :

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)g(x)\,dx.$$

Proposition 1.1: (Séparabilité, réflexivité et dual de l'espace $L^p(\Omega)$ [5])

1. $L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$ et réflexif pour $1 < p < +\infty$.
2. Le dual de $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < +\infty$ est isomorphe à $L^{p'}(\Omega)$, où p' est l'exposant conjugué de p, c'est-à-dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
3. $L^1(\Omega)$ est séparable, ni réflexif et son dual est $L^\infty(\Omega)$.
4. $L^\infty(\Omega)$ ni séparable, ni réflexif et son dual est contient strictement $L^1(\Omega)$.

Définition 1.2: (Fonction localement intégrable [4])

On dit qu'une fonction f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est localement intégrable si pour tout compact K de Ω on a $\int_K |f(x)|\,dx < \infty$.

Exemple 1.1

La fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \ln|x| & si\ x \neq 0, \\ 0 & si\ x = 0, \end{cases}$$

est localement intégrable.

Définition 1.3: (L'espace des fonctions localement intégrable $L^1_{loc}(\Omega)$ [4])

L'espace $L^1_{loc}(\Omega)$ est le quotient de l'espace des fonctions intégrables par la relation d'équivalence $f = g$ p.p sur Ω.

Theorem 1.2 – Inégalité de Young [5]. Soient $p > 1$ et p' l'exposant conjugué de p. Alors pour tout réels positifs a et b, on a

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^{p'}.$$

Theorem 1.3 – Inégalité de Hölder [5]. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq$

$+\infty$, et p' l'exposant conjugué de p. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et de plus on a

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Corollaire 1.1. Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Si $|\Omega| < +\infty$, alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

Définition 1.4: (Mode de convergence dans l'espace $L^p(\Omega)$)

Soient $p \in]1,+\infty[$, p' l'exposant conjugué de p, et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$.

1. On dit que la suite $(f_n)_n$ converge fortement vers la fonction f dans $L^p(\Omega)$, et on noté $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$, si
$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$
2. On dit que la suite $(f_n)_n$ converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$, et on noté $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$, si
$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (f_n(x) - f(x))\, g(x)\,dx = 0, \quad \forall g \in L^{p'}(\Omega).$$

Theorem 1.4 – Convergence dominée de Lebesgue [19]. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ avec $p \in]0,+\infty[$, convergeant presque partout vers une fonctions mesurable f. S'il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \text{p.p. sur} \quad \Omega.$$

Alors $f \in L^p(\Omega)$ et on a :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Theorem 1.5 – Réciproque partielle du théorème de la convergence dominée [17]. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge vers f dans $L^p(\Omega)$. Alors il existe une sous suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et une fonction g de $L^p(\Omega)$ telles que :

1. $f_{n_k}(x) \longrightarrow g(x)$ p.p. sur Ω.
2. $\forall k \in \mathbb{N}, |f_{n_k}(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω.

Définition 1.5: (Fonction de Carathéodory)

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dit que f est Carathéodory si :

1. $f(.,s) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable pour tout $s \in \mathbb{R}$,
2. $f(x,.) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ continue presque partout $x \in \Omega$.

Définition 1.6: (Opérateur de Nemytskii [29])

Soient $u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ et $f:\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory. L'opérateur défini par $(N_f u)(x)=f(x,u(x))$, pour toute fonction mesurable $u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$, est appelé l'opérateur de Nemytskii (ou opérateur de superposition) relatif à f.

Theorem 1.6 – **Continuité de l'opérateur de Nemytskii [29].** Soit f une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance :

$$|f(x,s)|\leq a(x)+b|s|,\quad \text{p.p } x\in\Omega\ \forall s\in\mathbb{R},$$

où $b>0$, et a est une fonction positive appartenant à $L^2(\Omega)$. Alors l'opérateur de Nemytskii N_f est continu de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

1.1.2 Espaces de Sobolev

Définition 1.7: (Espace des fonctions test [20])

. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\varphi:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction.

- On appelle support de φ l'ensemble :

$$\operatorname{supp}(\varphi)=\overline{\{x\in\Omega:\varphi(x)\neq 0\}}.$$

- On dit que la fonction φ à support compact si il existe une partie compacte K de $\mathbb{R}^N$ telle que $\operatorname{supp}(\varphi)\subset K$.
- On appelle l'espace des fonctions test et on note $D(\Omega)$ ou $(C_c^\infty(\Omega))$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω.

Exemple 1.2: [33, 21]

Soit $x=(x_1,\cdots,x_N)\in\mathbb{R}^N$, $r=\|x\|_{\mathbb{R}^N}=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_N^2}$. *On pose*

$$\varphi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-r^2}} & si\ r<1\\ 0 & si\ r\geq 1.\end{cases}$$

est une fonction de classe C^∞ *à support compact. En effet, on a*

$$\operatorname{supp}\varphi=\left\{x\in\mathbb{R}^N;\quad \|x\|_{\mathbb{R}^N}\leq 1\right\},$$

la boule de centre 0 *et de rayon* 1.

Définition 1.8: [Distribution][33, 34, 21]

On appelle distribution T sur Ω une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathscr{D}(\Omega)$.

1. fonctionnelle linéaire signifie : une application T de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) faisant correspondre à une fonction $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, nombre $\langle T,\varphi\rangle$ tel que : pour

tout $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle T, \alpha\varphi_1 + \beta\varphi_2 \rangle = \alpha\langle T, \varphi_1 \rangle + \beta\langle T, \varphi_2 \rangle.$$

Au lieu de fonctionnelle linéaire, on dit aussi forme linéaire.

2. continue signifie : si la suite (φ_n) converge dans $\mathscr{D}(\Omega)$ vers φ, alors $\langle T, \varphi_n \rangle$ converge au sens usuel vers $\langle T, \varphi \rangle$.

Exemple 1.3

Soit f une fonction localement intégrable. Il définit une distribution T_f par

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Pour la démonstration voir [33, Example I., page 74].

Exemple 1.4: [33]

La distribution de Dirac δ est définie par

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0).$$

La distribution de Dirac δ_a au point $a \in \mathbb{R}^N$ est définie par

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

Exemple 1.5: (La distribution $pv\,\frac{1}{x}$)

La fonction $\frac{1}{x}$ ne définit pas une distribution car elle n'est pas intégrable au voisinage de 0. Cependant, l'intégrale

$$pv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx$$

existe si $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. En conséquence, on peut définir une distribution $T = pv\,\frac{1}{x}$ (valeur principale de Cauchy) de la manière suivante :

$$\langle pv\,\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx.$$

Une présentation plus détaillée peut se trouver dans [33, page 84].

Proposition 1.2: (Densité de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans les espaces de Lebesgue)

$\mathscr{D}(\Omega)$ est un sous-espace dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.

Preuve.

Voir [19, Theorem 1.12.], ou [14, Proposition 1.2.21.].

Définition 1.9: [Dérivées aux sens de distributions]

Soit $N \in \mathbb{N}^\star, k \in \{1,\dots,N\}, \alpha \in \mathbb{N}^N$ et $T \in \mathscr{D}'(\Omega)$. On appelle dérivé partielle de T par rapport à la k-ième variable et on la note $\frac{\partial T}{\partial x_k}$, la distribution définie par

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x_k}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

par récurrence, on définit la dérivé partielle de T d'ordre α par

$$\langle \mathscr{D}^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \mathscr{D}^\alpha \varphi \rangle, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Définition 1.10: (Dérivée au sens faible)

Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. On dit que la fonction u admet une dérivée faible dans la direction i, s'il existe une fonction $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in D(\Omega).$$

Exemple 1.6

La fonction $u : \Omega =]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$u(x) = \begin{cases} -x & si \quad -1 < x < 0, \\ 0 & si \quad x = 0, \\ x & si \quad 0 < x < 1, \end{cases}$$

est faiblement dérivable. En effet, la fonction u *est clairement localement intégrable (elle est continue), et de plus, pour toute fonction* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$*, on a*

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)\, dx &= \int_{-1}^{0} u(x)\varphi'(x)\, dx + \int_{0}^{1} u(x)\varphi'(x)\, dx \\ &= -\int_{-1}^{0} x\varphi'(x)\, dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x)\, dx \\ &= -\big[x\varphi(x)\big]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \varphi(x)\, dx + \big[x\varphi(x)\big]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} \varphi(x)\, dx \\ &= -\int_{-1}^{0} (-1)\varphi(x)\, dx - \int_{0}^{1} (1)\varphi(x)\, dx. \end{aligned}$$

Par suite il existe une fonction

$$v(x) = \begin{cases} -1 & si \quad -1 < x < 0, \\ 1 & si \quad 0 < x < 1, \end{cases}$$

localement intégrable telle que

$$\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)\,dx = \int_{-1}^{1} v(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Donc la fonction u est faiblement dérivable.

Définition 1.11: (Espace de Sobolev $H^1(\Omega)$)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On définit l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ par :

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \quad tel\ que \quad \forall i \in \{1,...N\}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\},$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée faible de u dans la direction i.

Exemple 1.7
La fonction définie dans l'exemple 1.6 appartient à l'espace de Sobolev $H^1(]-1,1[)$.

Theorem 1.7 – Structure Hilbertienne de $H^1(\Omega)$ [32]. L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (u(x)v(x) + \nabla u(x)\nabla v(x))dx$$

et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2)dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

est un espace de Hilbert.

Theorem 1.8 – Séparabilité de $H^1(\Omega)$ [32]. L'espace $H^1(\Omega)$ muni et de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2)dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

est séparable.

Définition 1.12: [Convergence forte, faible dans $H^1(\Omega)$]

Soit (f_n) une suite de $H^1(\Omega)$.

1. On dit que f_n converge fortement vers f dans $H^1(\Omega)$, et on note $f_n \to f$ dans $H^1(\Omega)$, si
$$f_n \to f \text{ dans } L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla f_n \to \nabla f \text{ dans } L^2(\Omega).$$

2. On dit que f_n converge faiblement vers f dans $H^1(\Omega)$, et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $H^1(\Omega)$, si
$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \nabla f_n \rightharpoonup \nabla f \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Définition 1.13: (L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ est défini comme l'adhérence de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$; c'est-à- dire :
$$H_0^1(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

Theorem 1.9 – Inégalité de Poincaré [2]. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Il existe une constante $C_\Omega \geq 0$ (dépend seulement du domaine Ω) telle que pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$, on a :
$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Remarque 1.1. L'inégalité de Poincaré reste vraie si Ω est borné seulement dans une direction.

Theorem 1.10 – Norme équivalente sur $H_0^1(\Omega)$. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors la semi-norme
$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$
est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $H^1(\Omega)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Poincaré 1.9. □

Définition 1.14: (Ouvert de frontière régulière [2])

On dit qu'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$ est régulier de classe $\mathscr{C}^1$ s'il existe un nombre fini d'ouverts $(\omega_i)_{0\leq i\leq I}$ tels que
$$\bar{\omega_0} \subset \Omega, \quad \bar{\Omega} \subset \cup_{i=0}^I, \quad \partial\Omega \subset \cup_{i=1}^I,$$
et que, pour chaque $i \in \{1, \cdots, I\}$, il existe une application bijective ϕ_i, de classe $\mathscr{C}^1$, de ω_i dans l'ensemble
$$Q = \left\{ y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}; \quad |y'| < 1, |y_N| < 1 \right\},$$
dont l'inverse est aussi de classe $\mathscr{C}^1$, et telle que
$$\phi_i(\omega_i \cap \Omega) = Q \cap \left\{ y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}; \quad |y_N| > 0 \right\} = Q^+,$$
$$\phi_i(\omega_i \cap \partial\Omega) = Q \cap \left\{ y = (y', y_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}; \quad y_N = 0 \right\}.$$

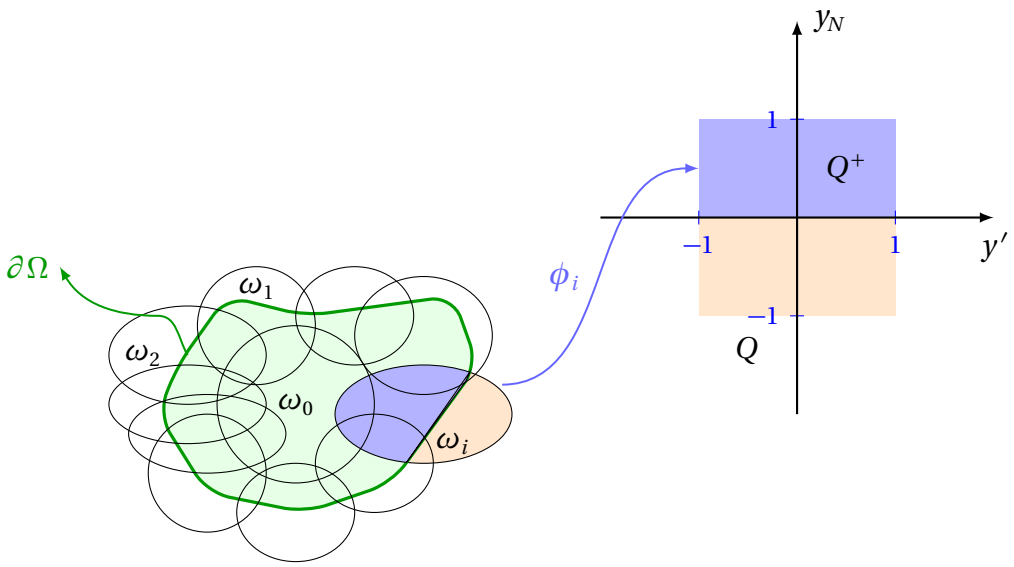


Figure 1.1 – Ouvert de classe $\mathscr{C}^1$

Theorem 1.11 – Théorème de trace [2]. Soit Ω un ouvert borné de classe $\mathscr{C}^1$, ou bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. On définit l'application trace γ_0

$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & H^1(\Omega)\cap\mathscr{C}(\overline{\Omega}) & \longrightarrow & L^2(\partial\Omega)\cap\mathscr{C}(\overline{\partial\Omega}) \\ & v & \mapsto & \gamma_0(v) = v|_{\partial\Omega}. \end{array}$$

Cette application γ_0 se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, notée encore γ_0. En particulier, il existe une constante $C>0$ telle que, pour toute fonction $v \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Theorem 1.12 – Caractérisation de l'espace $H^1_0(\Omega)$ [32]. On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors $H^1_0(\Omega)$ est le noyau de l'application trace γ_0, i.e.,

$$H^1_0(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega); \quad v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Theorem 1.13 – Rellich [2]. Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de classe $\mathscr{C}^1$, alors de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$ (on dit que l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte).

Remarque 1.2. Si l'on remplace $H^1(\Omega)$ par $H^1_0(\Omega)$, le théorème de Rellich 1.13 reste vrai sans supposer que le domaine est de classe $\mathscr{C}^1$.

Définition 1.15: (Espace de Sobolev $H^{-1}(\Omega)$)

L'espace de Sobolev $H^{-1}(\Omega)$ est le dual topologique de l'espace $H_0^1(\Omega)$; c'est-à-dire : l'espace vectoriel de toutes les formes linéaires continues sur $H_0^1(\Omega)$.

Theorem 1.14 – Formule d'intégration par parties [32]. On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1. Alors, si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u v \, n_i \, d\sigma, \quad 1 \le i \le N. \tag{1.1}$$

où $n = (n_i)_{1\le i\le N}$ est le vecteur normal unitaire, orienté vers l'extérieur de $\partial\Omega$.

Theorem 1.15 – Formule de Green. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1. Si $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \Delta u(x) v(x) dx = -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v(x) ds,$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n.$

Preuve.

Il suffit d'appliquer la formule d'intégration par parties (1.1).

1.2 Méthode variationnelle

1.2.1 Rappel sur les espaces de Banach et de Hilbert

Définition 1.16: (Norme [13])

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une norme sur V est une application de V vers $\mathbb{R}$ que l'on note

$$x \mapsto \|x\|,$$

telle que, pour tout $(x, y) \in V \times V$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on ait :

1. $\|x\| \ge 0$,
2. $\|x\| = 0 \implies x = 0_E$,
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
4. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, (inégalité triangulaire).

Définition 1.17: (Espace vectoriel normé)

Soit V un espace vectoriel muni de la norme $\|.\|$. Alors Le couple $(V,\|.\|)$ est appelé un espace vectoriel normé. V est un espace métrique pour la distance associée à la norme $\|.\|$ définie par

$$d(x,y)=\|x-y\|;\quad \forall x,\, y\in V. \tag{1.2}$$

Définition 1.18: (Espace de Banach)

Un espace de Banach est un espace vectoriel normé $(V,\|.\|)$ complet pour la topologie induite par la norme.

Définition 1.19: (Espace préhilbertien réel [31])

Un espace préhilbertien réel V est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $(.\,,.)_V$, c'est à dire : une application de $V\times V$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses suivantes :

1. bilinéaire :

$$(u_1+\lambda u_2\,,\,v)_V=(u_1\,,\,v)_V+\lambda(u_2\,,\,v)_V;\quad \forall\lambda\in\mathbb{R},\,\forall u_1,\,u_2,\,v\in V,$$

et

$$(u\,,\,v_1+\lambda v_2)_V=(u\,,\,v_1)_V+\lambda(u\,,\,v_2)_V;\quad \forall\lambda\in\mathbb{R},\,\forall u,\,v_1,\,v_2,\,v\in V,$$

2. symétrique : $(u\,,\,v)_V=(v\,,\,u)_V;\quad \forall u,\,v\in V,$
3. définie : $(v\,,\,v)_V=0\Longrightarrow v=0_V,$
4. positive : $(v\,,\,v)_V>0;\quad \forall v\in V,\ v\neq 0_V.$

Définition 1.20: (Norme associée au produit scalaire)

Soit V un espace préhilbertien réel muni du produit scalaire noté $(.\,,.)_V$. L'application $N:\ x\mapsto\sqrt{(x\,,\,x)_V}$ est une norme sur V appelé norme associée au produit scalaire $(.\,,.)_V$.

Proposition 1.3: (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit V un espace préhilbertien réel muni d'un produit scalaire noté $(.\,,.)_V$, et de la norme $\|.\|_V$ associée. Pour tous vecteurs u et v de V, on a :

$$\left|(u\,,\,v)_V\right|\leq\|u\|_V\|v\|_V.$$

Définition 1.21: (Espace de Hilbert)

Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet par rapport à la norme associée au produit scalaire.

Theorem 1.16 – (Projection) [11]. Soit K un ensemble convexe, fermé et non vide d'un espace de Hilbert H. Alors pour tout $u \in H$ il existe une unique élément de K, noté $P_K u$, tel que :

$$\|u - P_K u\|_H = \min_{v \in K} \|u - v\|_H, \tag{1.3}$$

qui est caractérisé par :

$$(u - P_K u\,,\, v - P_K u) \leq 0 \quad \forall v \in H. \tag{1.4}$$

En outre, l'application P_K est une contraction :

$$\|P_K u - P_K w\| \leq \|u - w\| \quad \forall u,\, v \in H. \tag{1.5}$$

Corollaire 1.2 – [11]. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert H. On a la décomposition $H = F \oplus F^{\perp}$, où $F^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H, appelé l'orthogonal de F et défini par :

$$F^{\perp} = \left\{ u \in F \quad \text{tel que } (u, v)_H = 0, \quad \forall v \in H \right\}, \tag{1.6}$$

et en outre, $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F$.

Theorem 1.17 – Théorème de représentation de Riesz . Soient H un espace de Hilbert et $f \in H'$ une forme linéaire continue sur H. Alors il existe élément unique u de H tel que :

$$f(v) = (u, v)_H; \quad \forall v \in H.$$

Preuve.

1. **Existence.** On distingue deux cas.
   (a). Si $f \equiv 0$, il suffit de prendre $u = 0$ comme un représentant de f.
   (b). Si $f \not\equiv 0$, alors il existe un élément non nul u_0 de $(\ker f)^{\perp}$. Dès que f est continue, $\ker f$ est un sous-espace fermé de H, et par le corollaire 1.2, il vient

$$H = \ker f \oplus (\ker f)^{\perp}.$$

Soit $v \in H$. Il est clair que $w = u_0 f(v) - f(u_0) v$ est un élément de $\ker f$, et en conséquence, on a

$$0 = (u_0, w) = \left(u_0, u_0 f(v) - f(u_0) v\right) = \|u_0\|^2 f(v) - f(u_0)(u_0, v)$$

Par suit, il vient

$$f(v) = \left(\frac{f(u_0) u_0}{\|u_0\|^2}, v \right)$$

Donc, on peut prendre $u = \dfrac{f(u_0) u_0}{\|u_0\|^2}$ comme un représentant de f.

2. **L'unicité.** On suppose qu'il existe deux éléments u_1 et u_2 de H tels que

$$f(v)=(u_1,v);\quad \forall v\in H, \tag{1.7}$$

et

$$f(v)=(u_2,v);\quad \forall v\in H. \tag{1.8}$$

En soustrayant (1.8) de (1.7), il vient

$$(u_1-u_2,v)=0\quad \forall v\in H. \tag{1.9}$$

Prenant $v=u_1-u_2$ dans (1.9), il s'en suit que $\|u_1-u_2\|^2=0$, ce que implique que $u_1=u_2$.

Theorem 1.18 – Lax-Milgram [1]. Soient H un espace de Hilbert, a une forme bilinéaire sur $H\times H$ telle qu'il existe deux constantes strictement positives α et β telles que

1. $\forall u,v\in H,\quad |a(u,v)|\leq\beta\|u\|_H\|v\|_H$ (a est continue sur $H\times H$),
2. $\forall v\in H,\quad a(v,v)\geq\alpha\|v\|_H^2$ (a est coercive).

Soit L une forme linéaire continue sur H. Alors, le problème suivant

$$\begin{cases}\text{Trouver } u\in H \text{ tel que :}\\ a(u,v)=L(v) \qquad \text{pour tout } v\in H.\end{cases} \tag{1.10}$$

admet une unique solution.

Preuve.

On définit l'opérateur

$$\begin{aligned}A: H &\longrightarrow H\\ u &\mapsto Au\end{aligned}$$

où $A(u)$ est le représentant unique de Riesz de la forme linéaire continue $a(u,.)$. Donc, on a :

$$a(u,v)=(Au,v),\quad \forall v\in H. \tag{1.11}$$

On va montrer que A est une application linéaire, continue, et bijective.

1. **Linéarité de A.**

Soient $u,w\in H$, et $t\in\mathbb{R}$. On va démontrer que :

$$A(u+tw)=A(u)+tA(w).$$

Soit $v\in H$. En utilisant la linéarité de a par rapport à la deuxième variable, on obtient :

$$\begin{aligned}(A(u+tw),v)&=a(u+tw,v)\\ &=a(u,v)+ta(w,v),\\ &=(A(u),v)+t(A(w),v)\\ &\quad (A(u)+tA(w),v).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$(A(u+tw)-A(u)-tA(w),v)=0$$

En choisissant $v=A(u+tw)-A(u)-tA(w)$, il s'en suit que

$$\|A(u+w)-A(u)-A(w)\|_H^2=0,$$

ce qui implique que $A(u+tw)=A(u)+tA(w)$.

2. **Continuité de A.**
Soit $u\in H$. En utilisant la continuité de la forme bilinéaire a et l'inégalité de Young, il vient :

$$\begin{aligned}\|A(u)\|_H^2 &= (A(u),A(u))\\ &= a(u,A(u))\\ &\leq \beta\|u\|_H\|A(u)\|_H\\ &\leq \frac{1}{2}\beta^2\|u\|_H^2+\frac{1}{2}\|A(u)\|_H^2.\end{aligned} \tag{1.12}$$

De (1.11), il découle que

$$\|A(u)\|_H\leq\beta\|u\|_H.$$

D'où la continuité de l'opérateur A.

3. **Injectivité de A.** Il suffit de montrer que $\ker A=\{0\}$. Soit $u\in H$ tel que $A(u)=0$. En utilisant la coercivite de la forme bilinéaire a, il s'en suit que

$$0=(A(u),u)=a(u,u)\geq\alpha\|u\|_H^2.$$

Ce qui implique que $\|u\|=0$, et en conséquence $u=0$.

4. **Surjectivité de A.** Il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(A)=H$.

   (a). $\mathrm{Im}(A)$ **est fermé.** Soit (u_n) une suite de H telle que

   $$A(u_n)\longrightarrow\eta \text{ fortement dans } H.$$

   En utilisant la coercivité de a, et l'inégalité de Young, il découle que

   $$\begin{aligned}\alpha\|u_p-u_q\|^2 &\leq a\left(u_p-u_q,u_p-u_q\right)\\ &= \left(A(u_p-u_q),u_p-u_q\right)\\ &\leq \beta\|A(u_p)-A(u_q)\|\|u_p-u_q\|\\ &\leq \frac{1}{2\alpha}\beta^2\|A(u_p)-A(u_q)\|^2+\frac{\alpha}{2}\|u_p-u_q\|^2\end{aligned}$$

   De la dernière inégalité, il s'en suit que

   $$\|u_p-u_q\|\leq\frac{\beta}{\alpha}\|A(u_p)-A(u_q)\|.$$

   Donc u_n est une suite Cauchy dans l'espace de Hilbert H, et par conséquent, il existe $u\in H$ tel que

$$u_n \longrightarrow \text{ fortement dans } H.$$

En conséquence, par la continuité de A, il vient

$$A(u_n) \longrightarrow A(u) \text{ fortement dans } H.$$

L'unicité de la limite implique que $\eta = A(u)$, ce que entraîne que $\eta \in \mathrm{Im}(A)$. Donc $\mathrm{Im}(A)$ et fermé.

(b). $\mathrm{Im}(A)^{\perp} = \{0\}$. Soit $u_0 \in \mathrm{Im}(A)^{\perp}$. En utilisant la coercivité de a, il vient

$$\alpha \|u_0\|^2 \leq a(u_0, u_0) = (A(u_0), u_0) = 0.$$

En conséquence $u_0 = 0$.

Puisque $\mathrm{Im}(A)$ est un sous-espace fermé de H, alors par le corollaire 1.2, on a :

$$\begin{aligned} H &= \mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)^{\perp} \\ &= \mathrm{Im}(A) \oplus \{0\} = \mathrm{Im}(A). \end{aligned}$$

Puisque L est une forme linéaire continue sur H, alors par le théorème de représentation de Riesz 1.17, il existe $f \in H$ tel que :

$$L(v) = \big(f, v\big)_H \qquad \forall v \in H. \tag{1.13}$$

De (1.11) et (1.11), il est clair que le problème (1.10) équivaut au problème suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H \text{ tel que :} \\ \\ A(u) = f. \end{cases} \tag{1.14}$$

Comme A est une bijection, le problème (1.14) admet une unique solution $u = A^{-1}(f)$.

1.2.2 Formulations faibles et leur résolution

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.15}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et M est une matrice elliptique bornée ; c-à-d., il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \cdot \xi, \qquad |M(x)\xi| \leq \beta|\xi|, \tag{1.16}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et presque partout $x \in \Omega$. De plus, on suppose que f est une fonction $L^2(\Omega)$.

Définition 1.22: (Solution faible)

On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (1.15), si pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega M(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1.17}$$

Theorem 1.19. On suppose que l'hypothèse (1.16) est satisfaite, et que $f \in L^2(\Omega)$. Alors le problème (1.15) admet une unique solution faible.

Preuve.

On définit la forme bilinéaire $a : H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$a(u,\varphi) = \langle A(u),\varphi\rangle = \int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx$$

et on définit la forme continue $L : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$L(\varphi) = \int_\Omega f\varphi\,dx.$$

On va montrer que a est L satisfaire toutes les hypothèses du théorème de Lax-Milgram 1.18.

1. **Continuité de a.**
   En utilisant l'hypothèse (1.16) et l'inégalité de Hölder, on obtient, pour tout $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$
   $$\begin{aligned}|\langle A(u),\varphi\rangle| &= \left|\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx\right| \\ &\le \beta\int_\Omega |\nabla u||\nabla\varphi|\,dx \\ &\le \beta\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \beta\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$
2. **Coercivité de a.** En utilisant l'hypothèse (1.16) ,on obtient pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$
   $$\begin{aligned}\langle A(u),u\rangle &= \int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla u\,dx \\ &\ge \alpha\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\ &= \alpha\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Par suite, il vient

$$\frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \alpha\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'où $\frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \longrightarrow +\infty$ si $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow +\infty$.

1.3 Méthode de monotonie

Dans ce qui suit, V est un espace de Banach réflexif et séparable, A est un opérateur de V dans V' (en général non linéaire).

Définition 1.23: [Opérateur borné]

On dit que l'opérateur A est borné, s'il transforme les bornés de V en des bornés de V'.

Exemple 1.8

Soient $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. On considère l'opérateur de Volterra

$$\begin{aligned} A:\ E &\longrightarrow E,\\ f &\longrightarrow Af, \end{aligned}$$

défini par

$$Af(t) = \int_0^t f(s)ds \quad \text{pour tout } t\in[0,1].$$

L'opérateur de Volterra A est borné. En effet, pour tout $t\in[0,1]$, on a

$$\begin{aligned} |Af(t)| &= \left|\int_0^t f(s)\,ds\right| \\ &\leq \int_0^t |f(s)|ds \\ &\leq \int_0^t \sup_{s\in[0,1]}|f(s)|ds \\ &\leq t\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Ainsi $\|Af\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, ceci implique que l'opérateur de Volterra A est borné.

Définition 1.24: [Opérateur monotone]

On dit que l'opérateur A est monotone si

$$\forall u,v\in V, \qquad \langle A(u)-A(v),u-v\rangle \geq 0. \tag{1.18}$$

On dit que A est strictement monotone si de plus $\langle A(u)-A(v), u-v\rangle = 0$ implique $u = v$.

Exemple 1.9
Soient H est un espace de Hilbert et $f : H \longrightarrow H$ un opérateur vérifiant

$$\|f(u)-f(v)\|_H \leq \|u-v\|_H \quad \text{pour tout } u, v \in H. \tag{1.19}$$

Alors $A = \mathrm{id}_H - f$ est un opérateur monotone. En effet, si $u, v \in H$, alors en utilisant (1.19), et l'inégalité de Cauchy-Schwarz 1.2.1, il vient

$$\begin{aligned}
\langle A(u)-A(v), u-v\rangle &= \big((\mathrm{id}-f)(u)-(\mathrm{id}-f)(v), u-v\big)_H \\
&= \big(u-v-(f(u)-f(v)), u-v\big)_H \\
&= \|u-v\|_H^2 - \big(f(u)-f(v), u-v\big)_H \\
&\geq \|u-v\|_H^2 - \|f(u)-f(v)\|_H \|u-v\|_H \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Exemple 1.10: (Opérateur laplacien)
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On définit l'opérateur laplacien $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ par

$$\langle A(u), \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx.$$

Cet opérateur est strictement monotone. Effectivement, si u et v deux éléments distingués de V, on a

$$\begin{aligned}
\langle A(u)-A(v), u-v\rangle &= \langle A(u-v), u-v\rangle \\
&= \int_\Omega \nabla(u-v)\cdot\nabla(u-v)\, dx \\
&= \|u-v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Définition 1.25: [Opérateur hémi-continu]

On dit que l'opérateur A est hémi-continu si
$\forall u, v, w \in V$, l'application $t \mapsto \langle A(u+tv), w\rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1.11
L'opérateur laplacien défini dans l'exemple 1.10 est hémi-continu. Évidemment, si u, v et w trois éléments de $H_0^1(\Omega)$, la fonction

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int_\Omega \nabla(u+tv)\nabla(w)dx \\ &= \int_\Omega \nabla(u)\nabla(w)dx + t\int_\Omega \nabla(v)\nabla(w)dx \\ &= b + at,\end{aligned}$$

est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (car elle est affine).

Définition 1.26: [Opérateur coercitif]

On dit que l'opérateur A est coercitif si

$$\exists \zeta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : \lim_{s\longrightarrow+\infty} \zeta(s) = +\infty \text{ et } \langle A(u), u\rangle \geq \zeta(\|u\|)\|u\|$$

En d'autres termes, A est coercitif si

$$\lim_{\|u\|\longrightarrow+\infty} \frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|} = +\infty. \tag{1.20}$$

Exemple 1.12

L'opérateur laplacien est coercif. En effet, si $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\langle A(u), u\rangle &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u\, dx \\ &= \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Par suite, il vient

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'où $\frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \longrightarrow +\infty$ lorsque $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow +\infty$.

Theorem 1.20 – Théorème de surjectivité de Leray-Lions [22]. Soit $A : V \longrightarrow V'$ un opérateur borné, hémi-continu, monotone et coercif. Alors A est surjectif; cela signifie, pour tout $f \in V'$, il y a au moins une solution à l'équation

$$A(u) = f. \tag{1.21}$$

Si on suppose de plus la stricte monotonie sur l'opérateur A, l'équation (1.21) admet une unique solution.

Application 1.1

Montrer que le problème que le problème (1.15) admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

Solution.

On définit l'opérateur $A:\ V = H_0^1(\Omega) \longrightarrow V' = H^{-1}(\Omega)$ Par :

$$\langle A(u), \varphi \rangle = \int_\Omega M(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

On va montrer que l'opérateur A est borné, monotone, hémi-continu, et coercif.

1. **L'opérateur A est borné.** Soient $u, v \in H_0^1(\Omega)$, en utilisant l'hypothèse (1.16) et l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle A(u), \varphi\rangle| &= \left| \int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx \right| \\ &\le \beta \int_\Omega |\nabla u||\nabla\varphi|\,dx \\ &\le \beta\, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \beta\, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

   Par suite, il en résulte que

$$\|A(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|\varphi\|\le 1} |\langle A(u), \varphi\rangle| \le \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

   Donc l'opérateur A transforme les bornés de $H_0^1(\Omega)$ en des bornés de $H^{-1}(\Omega)$.

2. **L'opérateur A est strictement monotone.** Soient $u, v \in H_0^1(\Omega)$, avec $u \neq v$. En utilisant l'hypothèse (1.16), on obtient :

$$\begin{aligned} \langle A(u)-A(v), u-v\rangle &= \langle A(u-v), u-v\rangle \\ &= \int_\Omega M(x)\nabla(u-v)\cdot\nabla(u-v) \\ &\ge \alpha \int_\Omega |\nabla(u-v)|^2 > 0. \end{aligned}$$

3. **L'opérateur A est hémi-continu.**
   Soient u, v et $w \in H_0^1(\Omega)$. On va montrer que $\phi(t) = \langle A(u+tv), w\rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \langle A(u+tv), w\rangle \\ &= \langle -\mathrm{div}(M(x)\nabla(u+tv), w\rangle \\ &= \int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla w\,dx + t\int_\Omega M(x)\nabla v\cdot\nabla w\,dx, \\ &= c_1 + c_2 t. \end{aligned}$$

Donc ϕ est une fonction affine, et par conséquent elle est continue.

4. **L'opérateur A est coercif.** Voir la démonstration du théorème 1.19.

Définition 1.27: [Opérateur pseudo-monotone [36]]

On dit que l'opérateur A est pseudo-monotone si

1. A est borné,
2. lorsque $u_n \longrightarrow u$ dans V faible et $\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\langle A(u_j), u_n - u\rangle \leq 0$ alors

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty}\langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle \qquad \forall v \in V. \tag{1.22}$$

Proposition 1.4: [22]

Si A est borné, hémi-continu et monotone alors A est pseudo-monotone.

Proposition 1.5: [19, 27]

Soit $A: V \longrightarrow V'$. l'opérateur A est pseudo-monotone si et seulement si A est borné et satisfait la condition suivante :

$$\left.\begin{array}{l} u_n \longrightarrow u \quad \text{faiblement dans } V \\ A(u_n) \longrightarrow \xi \quad \text{faiblement dans } V' \\ \limsup_{n\longrightarrow+\infty}\langle A(u_n), u_n\rangle \leq \langle \xi, u\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \xi = A(u) \text{ et } \langle A(u_n), u_n\rangle \longrightarrow \langle A(u), u\rangle. \tag{1.23}$$

Theorem 1.21 – Leray-Lions [22]. Tout opérateur A pseudo-monotone et coercitif est surjectif; cela signifie, pour tout $f \in V'$, il y a au moins une solution à l'équation

$$A(u) = f.$$

Application 1.2

Montrer que le problème

$$\begin{cases} -\text{div}(M(x)\nabla u) = f & dans \Omega, \\ u = 0 & sur \partial\Omega, \end{cases}$$

admet au-mois une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

Solution.

On considère l'opérateur A défini par :

$$A: V = H_0^1(\Omega) \longrightarrow V' = H^{-1}(\Omega)$$
$$u \longrightarrow A(u)$$

avec

$$\langle A(u), \varphi\rangle = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx \quad \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

On va montrer que l'opérateur A est coercif et pseudo-monotone.

1. **L'opérateur A est coercif.** Voir l'application la démonstration du théorème 1.19.
2. **L'opérateur A est pseudo-monotone.**
   (a). **L'opérateur A est borné.** Voir l'application 1.3.
   (b). **L'opérateur A satisfait (1.22).** Soit (u_n) une suite de $V = H_0^1(\Omega)$ telle que

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans} V. \tag{1.24}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0. \tag{1.25}$$

On va montrer que :

$$\liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - w\rangle \geq \langle A(u_n), u - w\rangle \quad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

Tout d'abord, on montre que A est monotone :
Soient $u, v \in H_0^1(\Omega)$. En utilisant l'hypothèse (1.16), on obtient

$$\begin{aligned}\langle A(u) - A(v), u - v\rangle &= \langle A(u-v), u - v\rangle \\ &= \int_\Omega M(x)\nabla(u-v)\cdot\nabla(u-v) \\ &\geq \int_\Omega |\nabla(u-v)|^2 \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Comme l'opérateur A est monotone, alors

$$\langle A(u_n), u_n - u\rangle \geq \langle A(u), u_n - u\rangle$$

En passant à la limite inférieure, et en utilisant le fait que $u_n \rightharpoonup u$ dans $V = H_0^1(\Omega)$, il s'en suit que

$$\liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle \geq 0. \tag{1.26}$$

De (1.25) et (1.26) il vient

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle = \liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle = 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle = 0. \tag{1.27}$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$, en posant $w = u + t(v-u)$, avec $t \in]0,1[$. En utilisant la monotonie de l'opérateur A, on obtient

$$\langle A(u_n) - A(w), u_n - w\rangle \geq 0,$$

et par conséquent

$$\langle A(u_n) - A(w), u_n - u - t(v-u)\rangle \geq 0.$$

D'où

$$t\langle A(u_n), u-v\rangle \geq -\langle A(u_n), u_n-u\rangle + \langle A(w), u_n-u\rangle + t\langle A(w), u-v\rangle,$$

et par suite

$$t\langle A(u_n), u_n-v\rangle + t\langle A(u_n), u-u_n\rangle \geq -\langle A(u_n), u_n-u\rangle + \langle A(w), u_n-u\rangle + t\langle A(w), u-w\rangle. \tag{1.28}$$

En utilisant (1.27) et le fait que $u_n \rightharpoonup u$, et en passant à la limite inférieure quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité (1.28), il vient

$$t \liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n-v\rangle \geq t\langle A(w), u-v\rangle.$$

Après avoir divisé par t, on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n-v\rangle \geq \langle A(w), u-v\rangle \tag{1.29}$$

Puisque l'opérateur A est linéaire, alors

$$A(w) = A(u+t(v-u)) = (1-t)A(u) + tA(v).$$

En substituant dans (1.29), il découle que

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} \langle A(u_n), u_n-v\rangle \geq (1-t)\langle A(u), u-v\rangle + t\langle A(v), u-v\rangle.$$

En passant à la limite quand t tend ver 0, il s'en suit que

$$\lim_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n-v\rangle \geq \langle A(u), u-v\rangle.$$

Définition 1.28: Opérateur de Leray-Lions

Soit $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une fonction de Carathéodory vérifiant :

1. Il existe $k \in L^2(\Omega)$ est constante C tels que

$$\forall (x,s,\lambda) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad |F(x,s,\lambda)| \leq k(x) + C(|s| + |\lambda|) \tag{1.30}$$

2. Pour x et s fixés, F est monotone par rapport à λ,
3. Il existe une constant $\alpha > 0$ telle que

$$\forall (x,s,\lambda) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad F(x,s,\lambda)\cdot\lambda \geq \alpha|\lambda|^2. \tag{1.31}$$

Application 1.3

On considère le problème

$$\begin{cases} A(u) = f & dans\,\Omega, \\ u = 0 & sur\,\partial\Omega, \end{cases} \tag{1.32}$$

où $A(u) = -\mathrm{div}(F(x,u,\nabla u))$ est l'opérateur de Leray-Lions agissant de $H_0^1(\Omega)$ dans son dual, et f est une fonction de $H^{-1}(\Omega)$.

- Montrer que le problème (1.32) admet au-moins une solution faible u appartenant à $H_0^1(\Omega)$.

Solution.

Soient u et v sont deux fonctions de $H_0^1(\Omega)$. Grâce à la condition de croissance (1.30), il vient

$$\begin{aligned} \big|\langle A(u), v\rangle\big| &= \left|\int_\Omega F(x,u,\nabla u)(x)\cdot\nabla v(x)\,dx\right| \\ &= \int_\Omega |F(x,u,\nabla u)(x)||\nabla v(x)|\,dx \\ &\le \int_\Omega \big|k(x) + C|u(x)| + C|\nabla u(x)|\big||\nabla v(x)| \\ &\le \int_\Omega |k(x)||\nabla v(x)|\,dx + C\int_\Omega |u(x)||\nabla v(x)|\,dx + C\int_\Omega |\nabla u(x)||\nabla v(x)|\,dx \\ &\le \big[\|k\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\big]\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|A(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \|k\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Donc, A transforme les bornés de $H_0^1(\Omega)$ en des bornés de $H^{-1}(\Omega)$.
Maintenant, on montre que A est pseudo-monotone, et coercif.

1. A **est coercif.** En utilisant la condition (1.31), il s'en suit que

$$\begin{aligned} \langle A(u), u\rangle &= \int_\Omega (F(x,u(x),\nabla u(x))\cdot\nabla u(x)dx \\ &\ge \alpha\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx. \end{aligned}$$

Par suite

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \ge \alpha\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

D'où $\frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \longrightarrow +\infty$ si $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow +\infty$.

2. A **est pseudo-monotone.**

Soit (u_n) une suite de $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega), \tag{1.33}$$

et

$$A(u_n) \longrightarrow \xi \quad \text{faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N. \tag{1.34}$$

On suppose de plus que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n\, dx \le \langle \xi, u\rangle. \tag{1.35}$$

Par la condition de croissance (1.30), la suite $F(x,u_n,\nabla u_n)$ est bornée dans $\left(L^2(\Omega)\right)^N$. Donc, on peut extraire une sous-suite, toujours notée u_n), telle que

$$F(x,u_n,\nabla u_n) = g_n \longrightarrow g \quad \text{faiblement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N. \tag{1.36}$$

De (1.34) et (1.36), il vient

$$\xi = -\operatorname{div}(g). \tag{1.37}$$

Par (1.35) et (1.37), il en résulte que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n\cdot\nabla u_n\, dx \le \int_\Omega g\cdot\nabla u\, dx. \tag{1.38}$$

Maintenant, en utilisant la monotonie de F par rapport à sa troisième variable, il vient pour tout ϕ de $\left(L^2(\Omega)\right)^N$

$$\int_\Omega [F(x,u_n,\nabla u_n) - F(x,u_n,\phi)]\cdot[\nabla u_n - \phi]\, dx \ge 0, \tag{1.39}$$

soit

$$\int_\Omega g_n\cdot\nabla u_n\, dx - \int_\Omega g_n\cdot\phi\, dx - \int_\Omega F(x,u_n,\phi)\cdot[\nabla u_n - \phi]\, dx \ge 0 \tag{1.40}$$

Puisque la suite (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ qui, par le théorème de Rellich 1.13, s'injecte de façon compacte dans $L^2(\Omega)$, alors on na

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{1.41}$$

Par suite, en utilisant le théorème de La réciproque partielle de Lebesgue dominée 1.5, il en résulte que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{p.p } x\in\Omega, \tag{1.42}$$

et il existe une fonction h de $L^2(\Omega)$ telle que

$$|u_n(x)| \le h(x) \quad \text{p.p } x\in\Omega. \tag{1.43}$$

Comme F est continue par rapport à la deuxième variable, alors

$$F(x,u_n,\phi)\longrightarrow F(x,u,\phi)\quad \text{p.p } x\in\Omega. \tag{1.44}$$

En utilisant la condition de croissance (1.30) et (1.43), il découle que

$$\left|F(x,u_n,\phi)\right|\leq k(x)+Ch+C|\phi|=\psi\in L^2(\Omega). \tag{1.45}$$

Tenant compte de (1.44) et (1.45), on peut appliquer le théorème de convergence dominée 1.4, pour conclure que

$$F(x,u_n,\phi)\longrightarrow F(x,u,\phi)\quad \text{fortement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N. \tag{1.46}$$

Par conséquent

$$\int_\Omega F(x,u_n,\phi)\cdot[\nabla u_n-\phi]dx\longrightarrow\int_\Omega F(x,u,\phi)\cdot[\nabla u-\phi]dx, \tag{1.47}$$

et

$$\int_\Omega g_n\cdot\phi\,dx\longrightarrow\int_\Omega g\cdot\phi\,dx. \tag{1.48}$$

En utilisant (1.38), (1.47) et (1.48), on peut passer à la limite supérieure dans (1.40), pour obtenir

$$\int_\Omega g\cdot\nabla u\,dx-\int_\Omega g\cdot\phi\,dx-\int_\Omega F(x,u,\phi)\cdot[\nabla u-\phi]dx\geq 0,$$

soit

$$\int_\Omega[g-F(x,u,\phi)]\cdot[\nabla u-\phi]dx\geq 0,$$

Prenant $\phi=\nabla u-t\varphi$ avec $t>0$, il vient

$$\int_\Omega[g-F(x,u,\nabla u+t\varphi)]\cdot\varphi\,dx\geq 0,$$

d'où en faisant tendre t vers 0 et en utilisant le théorème de convergence dominée,

$$\int_\Omega[g-F(x,u,\nabla u)]\cdot\varphi\,dx\geq 0,$$

on en déduit que $g=F(x,u,\nabla u)$; c'est à dire $\xi=A(u)$.
Reprenons alors la monotone de F par rapport à la troisième variable

$$\int_\Omega[F(x,u_n,\nabla u_n)-F(x,u_n,\nabla u)]\cdot[\nabla u_n-\nabla u]dx\geq 0,$$

soit

$$\int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n dx\geq\int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u\,dx+\int_\Omega F(x,u_n,\nabla u)\cdot\nabla(u_n-u)dx, \tag{1.49}$$

De (1.47) et (1.48), il s'en suit que

$$\int_\Omega F(x,u_n,\nabla u)\cdot\nabla(u_n-u)dx \longrightarrow 0, \tag{1.50}$$

et

$$\int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u dx \longrightarrow \int_\Omega g\cdot\nabla u dx = \int_\Omega F(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u dx, \tag{1.51}$$

Par conséquent, passant à la limite inférieure dans (1.49),il vient

$$\liminf \int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n dx \geq \int_\Omega F(x,u,\nabla u)\cdot\nabla u dx = \langle A(u),u\rangle.$$

Par hypothèse

$$\limsup \int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n dx \leq \langle \xi,u\rangle = \langle A(u),u\rangle.$$

Puisque par l'étape précédente $\xi = A(u)$, on a montré que

$$\int_\Omega F(x,u_n,\nabla u_n)\cdot\nabla u_n dx = \langle A(u_n),u\rangle \longrightarrow \langle A(u),u\rangle.$$

Donc que A est bien un opérateur pseudo-monotone.

1.4 Méthode de compacité

1.4.1 Applications compactes

Définition 1.29: (Application continue)

Soient X et Y deux espaces de Banach. Une application $T : X \longrightarrow X$ est continue en point $x \in X$, si pour toute suite $(x_n)_{n\in N}$ de X qui converge par la norme vers x, $T((x_n))_{n\in N}$ converge par la norme vers $T(x)$.
T est dite continue sur un ensemble $A \in X$ si elle est continue en tout point $x \in A$.

Définition 1.30: (Application compacte [28])

Soient X et Y deux espaces de Banach et C un sous-ensemble non vide de X. On dit que $f : C \longrightarrow Y$ est compacte si elle est continue et pour tout $B \subset C$ bornée, $\overline{f(B)}$ est compacte dans Y.

Exemple 1.13: [14]
Si $A : X \longrightarrow Y$ est un opérateur linéaire avec $\dim \mathrm{Im}(A) < \infty$ (l'opérateur dit de rang fini), alors A est compact.

Exemple 1.14
Soient $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions continues de* $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *muni de la norme de convergence uniforme* $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$, *et* $F = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions continûment dérivables de* $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *muni de la norme* $\|f\|_{C^1} = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty\}$. *Alors l'injection canonique* $i : F \longrightarrow E$, *est un opérateur compact (voir [15, Example 6.5., page 168]).*

Exemple 1.15: [14]
Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ *l'espace des fonctions continues de* $[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *muni de la norme* $\|.\|_\infty$. *Soit* k *une fonction continue sur le produit cartésienne* $[0,1]\times[0,1]$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$. *L'opérateur* $A : E \longrightarrow E$ *défini par*

$$Af(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)\,ds; \quad \forall f \in E,$$

est compacte de E *en lui-même (voir [35, Examples 4.5.5, page 266.]).*

Remarque 1.3. Dans l'exemple précédent, si on choisit k est la fonction caractéristique de l'ensemble $\{(s,t)\in[0,1]\times[0,1]; \quad t<s\}$, on tombe sur l'opérateur de Volterra qui est également compacte malgré que la fonction k n'est pas continue ((voir [35, Examples 4.5.5, page 266.])).

1.4.2 Théorèmes de Point fixe

Définition 1.31: (Point fixe d'une application)

Soient X un espace de Banach. On appelle point fixe d'une application $T : X \longrightarrow X$ tout point $x \in X$ vérifiant $Tx = x$.

Theorem 1.22 – **Point fixe de Schauder [12, 29].** Soient X un espace de Banach, K un sous-ensemble convexe fermé de X et S une application continue de K dans K telle que $S(K)$ est relativement compact, alors S admet au-moins un point fixe dans K.

Application 1.4

On considère le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = g(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.52}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et $M : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{N\times N}$ est une fonction satisfaisant

$$\exists \alpha > 0; \quad \alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi\cdot\xi, \quad \text{p.p } x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{1.53}$$

et

$$\exists \beta > 0; \quad |M(x)\xi| \leq \beta|\xi|, \quad \text{p.p } x \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{1.54}$$

De plus, on suppose que $g : \Omega\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory vérifiant la condition de croissance :

$$|g(x,s)| \leq h(x) + c|s|, \quad \text{p.p } x \in \Omega \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{1.55}$$

où $c > 0$, et h est une fonction positive appartenant à $L^2(\Omega)$.

- Montrer que le problème (1.52) admet au-mois une solution faible u appartenant à $H_0^1(\Omega)$.

Solution.

On définit l'application

$$\begin{aligned} S : L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega), \\ v &\longmapsto S(v) = u. \end{aligned}$$

où u est la solution unique faible du problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = g(x,v) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.56}$$

au sens faible suivant

$$\int_\Omega M(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega N_g(v)(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{1.57}$$

où N_g est l'opérateur de Nemytskii associé à la fonction g (voir la définition 1.6).

Remarque 1.4. La problème (1.56) admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ par le théorème de Lax-Milgram 1.18 (On peut également utiliser le théorème de surjectivité 1.20). En conséquence l'application S est bien définie.

On va vérifier que l'application S satisfait toutes les hypothèses du théorème de point fixe de Schauder 1.22.

1. **L'application S laisse invariante une certaine boule fermée de $L^2(\Omega)$.**

   En prenant $\varphi = u$ dans (1.57), et en utilisant (1.53) et (1.55), on obtient

$$\begin{aligned}\alpha\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\leq \int_\Omega |f(x,v(x))||u|dx,\\ &\leq \int_\Omega [h(x)+c|v(x)|]|u(x)|dx,\\ &\leq \int_\Omega h(x)|u(x)|dx + c\int_\Omega |v(x)||u(x)|dx,\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder 1.3, il en résulte que

$$\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha}\|h\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{c}{\alpha}\|v\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce l'inégalité de Poincaré 1.9, on en déduit que

$$\|u\|^2_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\alpha}\left[\|h\|_{L^2(\Omega)} + c\|v\|_{L^2(\Omega)}\right]\|u\|_{H^1_0(\Omega)}.$$

Par l'inégalité de Young 1.2, il s'en suit que

$$\|u\|_{H^1_0(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\alpha}\left[\|h\|_{L^2(\Omega)} + c\|v\|_{L^2(\Omega)}\right]. \tag{1.58}$$

Par l'inégalité de Poincaré encore une fois, il découle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C^2_\Omega}{\alpha}\left[\|h\|_{L^2(\Omega)} + c\|v\|_{L^2(\Omega)}\right] = R.$$

Donc $\overline{B}(0,R) = \left\{w \in L^2(\Omega);\quad \|w\|_{L^2(\Omega)} \leq R\right\}$ est une boule fermée de $L^2(\Omega)$ invariante par l'application S.

2. **L'application S est continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.**

Soit (v_n) une suite de $L^2(\Omega)$ telle que

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{1.59}$$

On va montrer que

$$S(v_n) = u_n \longrightarrow S(v) = u \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{1.60}$$

Or u_n et u vérifient respectivement

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega N_g(v_n)(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi \in H^1_0(\Omega). \tag{1.61}$$

et

$$\int_\Omega M(x)\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)dx = \int_\Omega N_g(v)(x)\varphi(x)dx \quad \forall\varphi \in H^1_0(\Omega). \tag{1.62}$$

En soustrayant (1.62) de (1.61), on obtient

$$\int_\Omega M(x)\nabla(u_n-u)\cdot\nabla\varphi\,dx=\int_\Omega\big[N_g(v_n)(x)-N_g(v)(x)\big]\varphi(x)\,dx. \tag{1.63}$$

Prenant $\varphi=u_n-u$, et en utilisant (1.53), il vient

$$\alpha\int_\Omega|\nabla(u_n-u)|^2dx\le\int_\Omega\big|N_g(v_n)(x)-N_g(v)(x)\big||u_n-u|dx. \tag{1.64}$$

Par l'inégalité de Hölder 1.3, il découle que

$$\|u_n-u\|^2_{L^2(\Omega)}\le\frac{1}{\alpha}\|N_g(v_n)-N_g(v)\|_{L^2(\Omega)}\|u_n-u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.65}$$

Grâce à l'inégalité de Young 1.2, on en déduit que

$$\|u_n-u\|_{L^2(\Omega)}\le\frac{1}{\alpha}\|N_g(v_n)-N_g(v)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.66}$$

Par le théorème 1.6, l'opérateur de Nemytskii N_g est continue de $L^2(\Omega)$ fort dans $L^2(\Omega)$ fort. En conséquence, en utilisant (1.59), il en résulte que

$$N_g(v_n)\longrightarrow N_g(v)\quad\text{fortement dans } L^2(\Omega) \tag{1.67}$$

Laisser n tend vers $+\infty$ dans (1.66), et en utilisant (1.67), il s'en suit que la suite (u_n) converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers la fonction u.

3. $S\big(\overline{B}(0,R)\big)$ **est relativement compacte.**

Soit $(u_n)=(S(v_n))$ une suite de $S\big(\overline{B}(0,R)\big)$. En vertu de (1.58), cette suite est bornée dans $H^1_0(\Omega)$ qui, par le théorème de Rellich 1.13, s'injecté de façon compacte dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent la suite (u_n) admet une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$.

Theorem 1.23 – Point fixe de Tikhonov [29]. Soit X un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. Si $T:K\subset X\longrightarrow K$ est une application continue laissant invariant un sous-ensemble K non vide, convexe et compact de X, alors T admet au-moins un point fixe dans K.

Application 1.5

On considère le problème suivant

$$\begin{cases}-\operatorname{div}(a(x,u)\nabla u)=g(x,u) & \text{dans }\Omega,\\ u=0 & \text{sur }\partial\Omega,\end{cases} \tag{1.68}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et $a:\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory vérifiant

$$\exists\alpha>0,\exists\beta>0;\quad \alpha\le a(x,s)\le\beta,\quad \text{p.p } x\in\Omega\quad\forall s\in\mathbb{R}. \tag{1.69}$$

De plus, on suppose que $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance :

$$|g(x,s)| \leq h(x) + c|s|, \quad \text{p.p } x \in \Omega \; \forall s \in \mathbb{R}, \tag{1.70}$$

où $c > 0$, et h est une fonction positive appartenant à $L^2(\Omega)$.

- Montrer que le problème (1.68) admet au-mois une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ au sens faible suivant :

$$\int_\Omega N_a(u)\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega N_g(u)\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

où N_a (respectivement N_g) est l'opérateurs de Nemytskii associé à a (respectivement à g)(voir la définition 1.6).

Solution.

On définit l'application

$$\begin{aligned} T : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega), \\ v &\longrightarrow T(v) = u, \end{aligned}$$

où u la solution problème

$$(P_v) \begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,v)\nabla u) = g(x,v) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

au sens faible suivant :

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que,} \\ \displaystyle\int_\Omega N_a(v)\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega N_g(v)\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{1.71}$$

On peut vérifier facilement que (1.71) admet une unique solution via le théorème de Lax-Milgram 1.18, et en conséquence l'application T est bien définie. Maintenant, on montre que T satisfait toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Tikhonov 1.23.

1. **Il existe une boule $\overline{B}(0,R)$ de $H_0^1(\Omega)$ telle que $T\left(\overline{B}(0,R)\right) \subset \overline{B}(0,R)$.**

   En prenant $\varphi = u$ dans (1.71), et en utilisant (1.69)

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \leq \int_\Omega |N_g(v)(x)||u(x)| \, dx \tag{1.72}$$

   Grâce à la condition (1.70), l'opérateur de Nemytskii envoie $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ (voir le théorème 1.6). Par conséquent, en utilisant inégalité de Hölder 1.3, on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx \leq \|N_g(v)\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré 1.9, il vient

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\alpha}\|N_g(v)\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{1.73}$$

Par l'inégalité de Young 1.2, il s'en suit que

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega^2}{2\alpha^2}\|N_g(v)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{1.74}$$

De (1.74), il découle que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\alpha}\|N_g(v)\|_{L^2(\Omega)} = R \tag{1.75}$$

En définissant

$$\overline{B}(0,R) = \left\{ w \in H_0^1(\Omega); \quad \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R \right\},$$

l'application T envoie la boule $\overline{B}(0,R)$ dans elle-même.

2. **L'application T est continue de $H_0^1(\Omega)$ faible dans $H_0^1(\Omega)$ faible.**

Soit (v_n) une suite de $H_0^1(\Omega)$ qui converge faiblement vers la fonction v. On va montrer que la suite $(u_n) = (T(v_n))$ converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers la fonction $u = T(v)$. Le fait que (v_n) converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, alors par le théorème de Rellich 1.13, il existe une sous-suite $(v_{n'})$ telle

$$v_{n'} \longrightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{1.76}$$

Par le théorème 1.6, l'opérateur N_g (resp. N_a) est continue de $L^2(\Omega)$ fort dans $L^2(\Omega)$ fort, en conséquence il découle de (1.76)

$$N_g(v_{n'}) \longrightarrow N_g(v) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{1.77}$$

et

$$N_a(v_{n'}) \longrightarrow N_a(v) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{1.78}$$

Le fait que, pour tout n fixé, la fonction $u_{n'}$ satisfait l'inégalité (1.75), alors la suite $(u_{n'})$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$(qui est réflexif), donc elle est admet une sous-suite $(u_{n''})$ telle que

$$u_{n''} \longrightarrow u \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \tag{1.79}$$

Puisque tout n'' fixé $u_{n''} = T(v_{n''})$, alors

$$\int_\Omega N_a(v_{n''})\nabla u_{n''} \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega N_g(v_{n''})\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.80}$$

En utilisant (1.79), (1.77) et (1.78), on peut passer à la limite dans (1.80), pour obtenir

$$\int_\Omega N_a(v)\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega N_g(v)\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.81}$$

Ce qui prouve bien que $u = T(v)$. Pour compléter la démonstration on a besoin de lemme suivant

Lemme 1.1. [19] Soit X un espace topologique et (x_n) une suite de cet espace qui a la propriété qu'il existe $x \in X$ tel que de toute sous-suite de cette suite, on peut extraire une nouvelle sous-suite qui converge vers x. Alors la suite entière (x_n) converge vers x.

En utilisant (1.79), et le fait que $u = T(v)$, on en déduit, par le lemme 1.1, que la suite entière (u_n) converge faiblement vers $u = T(v)$. Donc T est continue de $H_0^1(\Omega)$ faible dans $H_0^1(\Omega)$ faible. Comme T vérifie toutes les hypothèse du théorème du point fixe de Tikhonov 1.23, elle est admet au-moins un point fixe $u \in H_0^1(\Omega)$. Par conséquent, le problème (1.68) admet au-moins une solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

Chapitre 2

Problème elliptique non local de type Kirchhoff

Sommaire

2.1 Position du problème 35
2.2 Énoncé du résultat principal 36
2.3 Preuve du théorème 2.1 36

2.1 Position du problème

On considère le problème elliptique non local suivant

$$\begin{cases} -G\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\right)\Delta u = g(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et $G : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant la condition suivante :

$$\exists m_0 > 0 \quad G(t) \geq m_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.2}$$

On suppose, en outre que $g : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance :

$$|g(x,s)| \leq h(x) + c|s|, \tag{2.3}$$

où $c > 0$, et h est une fonction positive appartenant à $L^2(\Omega)$.

Définition 2.1

Une solution faible du problème (2.1) est une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \frac{1}{G\left(\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right)} \int_\Omega N_g(u)(x)\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega),$$

où N_g est l'opérateur de Nemytskii associé à g (voir la définition 1.6).

2.2 Énoncé du résultat principal

Theorem 2.1. Sous les hypothèses (2.2) et (2.3), le problème (2.1) admet au-moins une solution faible.

2.3 Preuve du théorème 2.1

On définit l'application

$$\begin{aligned} S : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega), \\ v &\longrightarrow S(v) = u, \end{aligned}$$

où u est la solution unique du problème linéaire

$$\begin{cases} -G\left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx\right)\Delta u = g(x,v) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

au sens faible suivant

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \frac{1}{G\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx\right)} \int_\Omega N_g(v)(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.5}$$

Lemme 2.1. Le problème (2.4) admet une unique solution faible.

Preuve.

1. **Méthode 1 : Via le théorème de Lax-Milgrame 1.18.**
   En reprenant la formulation faible (2.5) : on peut l'écrire sous la forme

   $$a(u,\varphi) = L(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{2.6}$$

   où

   $$a(u,\varphi) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx \quad \forall u, \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{2.7}$$

   et

   $$L(\varphi) = \frac{1}{G\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx\right)} \int_\Omega N_g(v)(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{2.8}$$

   On va prouver que a et L satisfont toutes les hypothèses du théorème de **Lax-Milgram** 1.18.

   (a). **a est une forme bilinéaire continue coercive.** Il suffit de reprendre la démonstration du théorème 1.19 en prenant M est la matrice d'identité.

   (b). **L est une forme linéaire continue.**

   I. **Linéarité de L.** Il découle directement de la linéarité de l'intégrale.

II. **Continuité de L.** En utilisant (2.2), l'inégalité de Hölder 1.3 et celle de Poincaré 1.9, il en résulte que

$$\begin{aligned}|L(\varphi)| &= \Big|\frac{1}{G\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx\right)}\int_\Omega N_g(v)(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)\Big| \\ &\leq \frac{1}{m_0}\int_\Omega |N_g(v)(x)||\varphi(x)|\,dx \\ &\leq \frac{1}{m_0}\|N_g(v)\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{C_\Omega}{m_0}\|N_g(v)\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq C\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Ce qui prouve bien la continuité de L.

2. **Méthode 2 : Via la méthode de monotonie.**
On définit l'opérateur $A:\ V = H_0^1(\Omega) \longrightarrow V' = H^{-1}(\Omega)$ par :

$$\langle A(u), \varphi\rangle = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx; \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

L'opérateur A est borné, strictement monotone, hémi-continu, et coercif. Pour s'en convaincre, il suffit de reprendre la démonstration de l'application (1.3), avec $M(x)$ est la matrice d'identité. Le fait que $N_g(v)$ appartenant à $L^2(\Omega)$ qui est un sous-espace de $H^{-1}(\Omega)$, alors, par le théorème de surjectivité de Leray-lions 1.20, le problème (2.4) admet une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

Maintenant, on vérifie que l'application S satisfait toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Schauder 1.22.

1. **Il existe une boule $\overline{B}(0,R)$ de $H_0^1(\Omega)$ telle que $S\left(\overline{B}(0,R)\right) \subset \overline{B}(0,R)$.**

Prenant $\varphi = u$ dans la formulation (2.5), et en utilisant (2.2), et le fait que l'opérateur de Nemytskii N_g envoie $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on obtient

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{m_0}\|N_g(v)\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré 1.9, puis l'inégalité de Young 1.2, il s'en suit que

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leq \frac{C_\Omega}{m_0}\|N_g(v)\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq \frac{C_\Omega^2}{2m_0^2}\|N_g(v)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

En conséquence, on a

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{m_0}\|N_g(v)\|^2_{L^2(\Omega)} = R.$$

Donc l'application S envoie la boule $\overline{B}(0,R)=\left\{w\in H_0^1(\Omega);\|w\|_{H_0^1(\Omega)}\leq R\right\}$ dans elle-même.

2. **S est continue de $H_0^1(\Omega)$ fort dans $H_0^1(\Omega)$ fort.**

Soit (v_n) une suite de $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega). \tag{2.9}$$

On va montrer que

$$u_n = S(v_n) \longrightarrow u = S(v) \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega). \tag{2.10}$$

Comme u_n et u sont respectivement solutions des problèmes

$$\int_\Omega \nabla u_n(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \frac{1}{G\left(\int_\Omega |\nabla v_n|^2\,dx\right)}\int_\Omega N_g(v_n)(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega), \tag{2.11}$$

et

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \frac{1}{G\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx\right)}\int_\Omega N_g(v)(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega), \tag{2.12}$$

alors en soustrayant (2.12) de (2.11), et prenant $\varphi = u_n - u$, et en utilisant (2.2) et l'inégalité de Hölder 1.3, il s'en suit que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(u_n-u)(x)|^2\,dx &= \frac{1}{G\left(\int_\Omega |\nabla v_n|^2\,dx\right)}\int_\Omega \left[N_g(v_n)(x)-N_g(v)(x)\right](u_n(x)-u(x))\,dx \\
&+\left[\frac{1}{G\left(\int_\Omega |\nabla v_n|^2\,dx\right)}-\frac{1}{G\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx\right)}\right]\int_\Omega N_g(v)(x)(u_n(x)-u(x))\,dx. \\
&\leq \frac{C_\Omega}{m_0}\|N_g(v_n)-N_g(v)\|_{L^2(\Omega)}\|u_n-u\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&+C_\Omega\left|\frac{1}{G\left(\int_\Omega |\nabla v_n|^2\,dx\right)}-\frac{1}{G\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx\right)}\right|\|N_g(v)\|_{L^2(\Omega)}\|u_n-u\|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young 1.2, il découle que

$$\begin{aligned}
\|u_n-u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega^2}{m_0^2}\|N_g(v_n)-N_g(v)\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \frac{1}{2}\|u_n-u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&+C_\Omega^2\left[\frac{1}{G\left(\int_\Omega |\nabla v_n|^2\,dx\right)}-\frac{1}{G\left(\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx\right)}\right]^2\|N_g(v)\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

De (2.13), on en déduit que

$$\begin{aligned}\|u_n-u\|_{H_0^1(\Omega)} &\le \frac{2C_\Omega}{m_0}\|N_g(v_n)-N_g(v)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\quad+2C_\Omega\left|\frac{1}{G\left(\int_\Omega|\nabla v_n|^2\,dx\right)}-\frac{1}{G\left(\int_\Omega|\nabla v|^2\,dx\right)}\right|\|N_g(v)\|_{L^2(\Omega)}\\ &= I_n+J_n.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Tenant en compte de (2.9), la continuité de l'opérateur de Nemytskii de $L^2(\Omega)$ fort dans $L^2(\Omega)$ (voir le théorème 1.6), et celle de la fonction G, il découle que

$$I_n,\ J_n\longrightarrow 0\quad\text{lorsque } n\to+\infty.\tag{2.15}$$

De (2.14) et (2.15), on en déduit que la suite (u_n) converge fortement dans $H_0^1(\Omega)$ vers la fonction u.

3. $S(\overline{B}(0,R))$ **et relativement compacte.**

Soit (v_n) une suite de $\overline{B}(0,R)$. On va montrer que la suite $(u_n)=(S(v_n))$ admet une sous-suite convergeant fortement dans $H_0^1(\Omega)$.

Puisque (u_n) est borné dans $H_0^1(\Omega)$ qui est réflexif, alors il existe une fonction u appartenant à $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$u_n\longrightarrow u\quad\text{faiblement dans } H_0^1(\Omega).\tag{2.16}$$

Par le théorème de Rellich 1.13, la suite (u_n) admet une sous-suite $(u_{n'})$ telle que

$$u_{n'}\longrightarrow u\quad\text{fortement dans } L^2(\Omega).\tag{2.17}$$

Par la réciproque partielle de Lebesgue dominée 1.5, la suite $(u_{n'})$ admet de son tour une sous-suite $(u_{n'})$ telle que

$$u_{n''}(x)\longrightarrow u(x)\quad\text{p.p } x\in\Omega.\tag{2.18}$$

Puisque $u_{n''}=S(v_{n'})$, alors on a

$$\int_\Omega\nabla u_{n''}(x)\nabla\varphi(x)\,dx=\frac{1}{G\left(\int_\Omega|\nabla v_{n''}|^2\,dx\right)}\int_\Omega N_g(v_{n''})(x)\varphi(x)\,dx\quad\forall\varphi\in H_0^1(\Omega),\tag{2.19}$$

Prenant $\varphi=u_{n''}-u$ dans (2.19), et en utilisant (2.2), il vient

$$\begin{aligned}\int_\Omega\nabla(u_{n''}-u)(x)\cdot\nabla(u_{n''}-u)(x)\,dx &\le \frac{1}{m_0}\int_\Omega\left|N_g(v_{n''})(x)(u_{n''}-u)(x)\right|dx\\ &\quad-\int_\Omega\nabla u(x)\cdot\nabla(u_{n''}-u)(x)\,dx\end{aligned}\tag{2.20}$$

Par suite en utilisant l'inégalité de Hölder 1.3, il s'en que

$$\begin{aligned} \|u_{n''}-u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{1}{m_0}\|N_g(v_{n''})\|_{L^2(\Omega)}\|u_{n''}-u\|_{L^2(\Omega)} \\ + \langle \operatorname{div}(\nabla u), u_{n''}-u\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Tenant compte de (2.16) et (2.17), on peut passer à la limite dans (2.21), pour déduire que la suite $(u_{n''})$ converge fortement vers u dans $H_0^1(\Omega)$.

Chapitre 3

Problème elliptique quasi-linéaire non local

Sommaire

3.1 Position du problème 41
3.2 Énoncé du résultat principal 42
3.3 Preuve du théorème 3.1 42

3.1 Position du problème

On considère le problème elliptique quasi-linéaire non local

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,l(u))\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et $a : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition

$$\exists \alpha > 0,\ \exists \beta > 0; \quad \alpha \leq a(x,s) \leq \beta \quad \text{p.p } x \in \Omega\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

On suppose de plus que

$$f \in L^2(\Omega) \tag{3.3}$$

et

$$l : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{est une forme linéaire continue.} \tag{3.4}$$

Définition 3.1

Une solution faible du problème (2.1) est une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega a(x,l(u))\nabla u(x)\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

3.2 Énoncé du résultat principal

Theorem 3.1. Sous les hypothèses (3.2)–(3.4), le problème (3.1) admet au-moins une solution.

3.3 Preuve du théorème 3.1

1. **Méthode 1 : Point fixe de Tikhonov**

On définit l'application T

$$\begin{aligned} T : H_0^1(\Omega) &\longrightarrow H_0^1(\Omega), \\ v &\longrightarrow T(v) = u, \end{aligned}$$

où u est la solution unique faible du problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, l(v))\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

au sens faible suivant

$$\int_\Omega a(x, l(v))\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Lemme 3.1. Le problème (3.6) admet une unique solution.

Preuve.

(a). **Méthode 1 : Par le théorème de Lax-Milgrame 1.18.**
En reprenant la formulation faible (3.6), on peut l'écrire sous la forme

$$b(u, \varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{3.7}$$

où

$$b(u, \varphi) = \int_\Omega a(x, l(v))\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx \quad \forall u, \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{3.8}$$

et

$$F(\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{3.9}$$

On va prouver que b et F satisfont toutes les hypothèses du théorème de **Lax-Milgram** 1.18.

I. **b est une forme bilinéaire continue coercive.**

A. **b est une forme bilinéaire.**

Il découle directement de la linéarité du gradient et celle de l'intégrale.

B. *b* **est continue.** En utilisant (3.2), et l'inégalité de Hölder 1.3, il vient

$$\begin{aligned}|b(u,\varphi)| &= \Big|\int_\Omega a(x,l(v))\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx\Big| \\ &\le \beta\int_\Omega |\nabla u(x)||\nabla\varphi(x)| \\ &\le \Big[\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\Big]^{\frac12}\Big[\int_\Omega |\nabla\varphi|^2\,dx\Big]^{\frac12} \\ &\le \beta\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

C. *b* **est coercive.** En utilisant (3.2), il en résulte que

$$\begin{aligned}b(u,u) &= \int_\Omega a(x,l(v))\nabla u(x)\cdot\nabla u(x)\,dx \\ &\ge \alpha\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \\ &\ge \alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

II. *L* **est une forme linéaire continue.**

A. *F* **est une forme linéaire.**
Il découle directement de la linéarité de l'intégrale.

B. *F* **est continue.** Par l'inégalité de Hölder 1.3, puis l'inégalité de Poincaré 1.9, on trouve

$$\begin{aligned}|F(\varphi)| &= \Big|\int_\Omega f(x)\varphi(x)\Big| \\ &\le \int_\Omega |f(x)||\varphi(x)|\,dx \\ &\le \|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &\le C_\Omega\|f\|_{L^2(\Omega)}\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}. \\ &\le C\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

(b). **Méthode 2 : Par la méthode de monotonie.**
On définit l'opérateur

$$\begin{aligned}A : V = H_0^1(\Omega) &\longrightarrow V' = H^{-1}(\Omega), \\ u &\longrightarrow A(u) = -\operatorname{div}(a(x,l(v))\nabla u).\end{aligned}$$

On va vérifier que l'opérateur A satisfait toutes les hypothèses du théorème 1.20.

I. **A est est borné.**

Soient $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$. Par l'hypothèse (3.2) et l'inégalité de Hölder, il s'en suit que

$$\begin{aligned}
|\langle A(u), \varphi \rangle| &= \left| \int_\Omega a(x, l(v)) \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |a(x, l(v))| |\nabla u \cdot \nabla \varphi| \, dx \\
&\leq \beta \int_\Omega |\nabla u| |\nabla \varphi| \, dx \\
&\leq \beta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

D'où

$$\|A(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} |\langle A(u), \varphi \rangle| \leq \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Donc l'opérateur A transforme les bornés de $H_0^1(\Omega)$ en des bornés de $H^{-1}(\Omega)$.

II. **A est est strictement monotone.**

Soient $u, w \in H_0^1(\Omega)$, avec $u \neq w$. En utilisant l'hypothèse (3.2) et linéarité du l'opérateur A, il vient

$$\begin{aligned}
\langle A(u) - A(w), u - w \rangle &= \langle A(u - w), u - w \rangle \\
&= \int_\Omega a(x, l(v)) \nabla (u - w) \cdot \nabla (u - w) \\
&\geq \alpha \int_\Omega |\nabla (u - w)|^2 > 0.
\end{aligned}$$

III. **A est est hémi-continu.**

Soient u, g et $w \in H_0^1(\Omega)$. On va montrer que $\phi(t) = \langle A(u + tg), w \rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= \langle A(u + tg), w \rangle \\
&= \langle -\operatorname{div}\big(a(x, l(v)) \nabla (u + tg)\big), w \rangle \\
&= \int_\Omega a(x, l(v)) \nabla u \cdot \nabla w \, dx + t \int_\Omega a(x, l(v)) \nabla g \cdot \nabla w \, dx, \\
&= c_1 + c_2 t.
\end{aligned}$$

Donc ϕ est une fonction affine, et par conséquent elle est continue.

IV. *A* **est est coercif.**

Soit $u \in H_0^1(\Omega)$. Par l'hypothèse (3.2), il vient

$$\begin{aligned}\langle A(u), u\rangle &= \int_\Omega a(x, l(v))\nabla u \cdot \nabla u \, dx \\ &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \\ &= \alpha \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Par suite, il vient

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq c\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'où $\frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \longrightarrow +\infty$ si $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow +\infty$.

Le fait que $f \in L^2(\Omega)$ qui est un sous-espace de $H^{-1}(\Omega)$, alors par le théorème 1.20 l'équation $A(u) = f$ admet un unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$. Et par suite, le problème (3.5) admet une unique solution faible.

On va vérifier que l'application T satisfait toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Tikhonov 1.23.

(a). **L'application** *T* **fixe une certaine boule fermée de** $H_0^1(\Omega)$**.**

Prenant $\varphi = u$ dans (3.6), et en utilisant (3.2), et l'inégalité de Hölder 1.3, puis celle de Poincaré 1.9, il vient

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité de Young 1.2, on trouve

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega^2}{2\alpha^2}\|f\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

En conséquence, il vient

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)} = R.$$

Donc l'application T laisse invariante la boule

$$\overline{B}(0, R) = \left\{w \in H_0^1(\Omega); \|w\|_{H_0^1(\Omega)} \leq R\right\}.$$

(b). **L'application** *T* **est continue de** $H_0^1(\Omega)$ **faible dans** $H_0^1(\Omega)$ **faible.**

Soit (v_n) une suite de $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \tag{3.10}$$

On va prouver que

$$u_n = T(v_n) \longrightarrow u = T(v) \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \tag{3.11}$$

Le fait que (v_n) converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, alors par le théorème de Rellich 1.13, il existe une sous-suite $(v_{n'})$ telle

$$v_{n'} \longrightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{3.12}$$

Le fait que l est une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega)$, alors

$$l(v_{n'}) \longrightarrow l(v). \tag{3.13}$$

Puisque a est continue par rapport à la deuxième variable, alors

$$a(x, l(v_{n'})) \longrightarrow a(x, l(v)) \quad \text{p.p } x \in \Omega. \tag{3.14}$$

En utilisant (3.2), et (3.14), on en déduit par le théorème de Lebesgue dominée 1.4, que pour toute fonction $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$a(x, l(v_{n'}))\nabla\varphi(x) \longrightarrow a(x, l(v))\nabla\varphi(x) \quad \text{fortement dans } \left(L^2(\Omega)\right)^N. \tag{3.15}$$

En extrayant si nécessaire une sous-suite de $(u_{n'})$, toujours notée $(u_{n'})$, on peut supposer, en tenant compte la réflexivité de $H_0^1(\Omega)$, qu'il existe une fonction w appartenant à $H_0^1(\Omega)$ telle que

$$u_{n'} \longrightarrow w \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \tag{3.16}$$

Puisque, $u_{n'} = T(v_n)$, alors on a

$$\int_\Omega a(x, l(v_{n'}))\nabla\varphi(x)\cdot\nabla u_{n'}(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.17}$$

En vertu de (3.16) et (3.15), on peut alors passer à la limite dans (3.17), afin d'obtenir

$$\int_\Omega a(x, l(v))\nabla\varphi(x)\cdot\nabla w(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.18}$$

De (3.18), on en déduit que $w = T(v)$. Par conséquent, en utilisant (3.16) et le lemme 1.1, il découle que la suite entière (u_n) converge faiblement vers $T(v)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

2. Méthode 2 : Point fixe de Schauder

On définit l'application du point fixe :

$$\begin{aligned} S : L^2(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega), \\ v &\longrightarrow S(v) = u. \end{aligned}$$

où u est la solution unique faible du problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x,l(v))\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \tag{3.19}$$

au sens faible suivant

$$\int_\Omega a(x,l(v))\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi\in H_0^1(\Omega). \tag{3.20}$$

On va vérifier que l'application S satisfait toutes les hypothèses du théorème de point fixe de Schauder 1.22.

(a). **L'application S laisse invariante une certaine boule fermée de $L^2(\Omega)$.**

En prenant $\varphi = u$ et en utilisant la condition 3.2, on obtient :

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \le \int_\Omega |f||u| dx.$$

Par l'inégalité de Hölder 1.3, il en résulte que

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Grâce l'inégalité de Poincaré 1.9, on en déduit que

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{C_\Omega}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Par l'inégalité de Young 1.2, il s'en suit que

$$\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{C_\Omega^2}{2\alpha^2}\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.21}$$

L'inégalité (3.21) implique que

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{C_\Omega}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.22}$$

Par l'inégalité de Poincaré 1.9 encore une fois, il en résulte que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{C_\Omega^2}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)} = R. \tag{3.23}$$

Donc $\overline{B}(0,R) = \left\{w\in L^2(\Omega); \|w\|_{L^2(\Omega)} \le R\right\}$, est une boule fermée de $L^2(\Omega)$ invariante par l'application S.

(b). **L'application S est continue de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.**

Soit (v_n) une suite de $L^2(\Omega)$ telle que

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{3.24}$$

On va montrer que

$$S(v_n) = u_n \longrightarrow S(v) = u \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{3.25}$$

Or u_n et u vérifient respectivement

$$\int_\Omega a(x, l(v_n))\nabla u_n(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{3.26}$$

et

$$\int_\Omega a(x, l(v))\nabla u(x)\cdot\nabla\varphi(x)\,dx = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{3.27}$$

on obtient, en soustrayant (3.27) de (3.26)

$$\int_\Omega a(x, l(v_n))\nabla(u_n - u)\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_\Omega \big[a(x, l(v)) - a(x, l(v_n))\big]\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx. \tag{3.28}$$

Prenant $\varphi = u_n - u$, et en utilisant (3.2),il en résulte que

$$\alpha\int_\Omega |\nabla(u_n - u)|^2 dx \le \int_\Omega \big|a(x, l(v_n)) - a(x, l(v))\big||\nabla u|\cdot|\nabla(u_n - u)|dx. \tag{3.29}$$

Par l'inégalité de Hölder 1.3, on a

$$\|u_n - u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{1}{\alpha}\left[\int_\Omega \big|a(x, l(v_n)) - a(x, l(v))\big|^2|\nabla u|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)}. \tag{3.30}$$

Grâce à l'inégalité de Young 1.2, on en déduit que

$$\|u_n - u\|_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{1}{\alpha}\left[\int_\Omega \big|a(x, l(v_n)) - a(x, l(v))\big|^2|\nabla u|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.31}$$

En vertu de (3.24), la continuité de la formé linéaire l, et celle de la fonction a par rapport à la deuxième variable, il s'en suit que

$$\big|a(x, l(v_n)) - a(x, l(v))\big|^2|\nabla u|^2 \longrightarrow 0 \quad \text{p.p } x \in \Omega. \tag{3.32}$$

En vertu de (3.2), il vient

$$\big|a(x, l(v_n)) - a(x, l(v))\big|^2|\nabla u|^2 \le 4\beta^2|\nabla u|^2 \quad \text{p.p } x \in \Omega. \tag{3.33}$$

Au vu de (3.32), (3.33), et le théorème de convergence dominée 1.4, il en résulte en passant à limite dans (3.31) que la suite (u_n) converge fortement vers u dans $H_0^1(\Omega)$, et en conséquence dans $L^2(\Omega)$.

(c). $S\left(\overline{B}(0,R)\right)$ **est relativement compacte.**

Soit $(u_n)=(s(v_n))_n$ une suite de $S\left(\overline{B}(0,R)\right)$. En vertu de (3.22), cette suite est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ qui, par le théorème de Rellich 1.13, s'injecté de façon compacte dans $L^2(\Omega)$. Par conséquent la suite $(u_n)=(s(v_n))_n$ admet une sous suite convergente dans $L^2(\Omega)$.

Bibliographie

[1] S. Abgrall, et al. *Mathématiques L3-Mathématiques appliquées : Cours complet avec 500 tests et exercices corrigés*. Pearson Education France, 2009.

[2] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique* . Editions Ecole Polytechnique, 2005.

[3] C. A. Alves, S. A. Corrêa, and T. F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type*. Computers & Mathematics with Applications 49.1 (2005) : 85-93.

[4] J. M. Bony, *Cours d'analyse : théorie des distributions et analyse de Fourier*. Editions Ecole Polytechnique, 2001.

[5] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.

[6] R. F. Brown : A Topological Introduction to Nonlinear Analysis, Birkhäuser, Boston, Mass, USA, 2nd edition, 2004.

[7] G. F. Carrier, *On the non-linear vibration problem of the elastic string*. Quarterly of applied mathematics 3.2 (1945) : 157-165.

[8] M. Chipot, and J. F. Rodrigues, *On a class of nonlocal nonlinear elliptic problems*. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis 26.3 (1992) : 447-467.

[9] M. Chipot, and B. Lovat, *Some remarks on non local elliptic and parabolic problems*. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications 30.7 (1997) : 4619-4627.

[10] M. Chipot, and B. Lovat, *On the asymptotic behaviour of some nonlocal problems*. Positivity 3 (1999) : 65-81.

[11] P. Ciarlet, and E. Luneville, *La méthode des éléments finis : de la théorie à la pratique*. ISTE Group, 2022.

[12] P. G. Ciarlet, *Linear and nonlinear functional analysis with applications*. Vol. 130. Siam, 2013.

[13] J. J. Colin, J. M. Morvan, and R. Morvan, *Topologie des espaces vectoriels normés : L2, L3 classes préparatoires*. Cepadues Editions, 2010.

[14] P. Drabek, and J. Milota, *Methods of nonlinear analysis : applications to differential equations*. Springer Science & Business Media, 2007.

[15] M. Einsiedler, and T. Ward, *Functional analysis, spectral theory, and applications*. Vol. 104. Berlin : Springer, 2017.

[16] F. Julio, S. A. Corrêa, and G. M. Figueiredo, *On an elliptic equation of p-Kirchhoff type via variational methods*. Bulletin of the Australian Mathematical Society 74.2 (2006) : 263-277.

[17] O. Kavian : Introduction a la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Verlag,Berlin Heidelberg, vol. 13, 1993.

[18] G. Kirchhoff, *Vorlesungen uber mechanik*. BG Teubner, 1883.

[19] H. Le Dret, *Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*. Springer International Publishing, 2018.

[20] G. Leoni, *A first course in Sobolev spaces*. American Mathematical Soc., 2017.

[21] A. Lesfari, *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace : cours et exercices*. Ellipses, 2012.

[22] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. 1969.

[23] J. L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics*. North-Holland Mathematics Studies. Vol. 30. North-Holland, 1978. 284-346.

[24] T. F. Ma, *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type*. Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications 63.5-7 (2005) : e1967-e1977.

[25] L. A. Medeiros, J. Limaco, & S. B. Menezes, *Vibrations of elastic strings : Mathematical aspects, Part one*. Journal of Computational Analysis and applications 4 (2002) : 91-127.

[26] L. A. Medeiros, and J. Limaco, *On the Kirchhoff equation in noncylindrical domains of* $\mathbb{R}^N$. Pro Mathematica 19.37-38 (2005) : 91-106.

[27] S. Migorski, A. Ochal, and M. Sofonea, *Nonlinear inclusions and hemivariational inequalities : models and analysis of contact problems*. Vol. 26. Springer Science and Business Media, 2012.

[28] D. Motreanu, V. V. Motreanu, and N. S. Papageorgiou, *Topological and variational methods with applications to nonlinear boundary value problems*. Vol. 1. No. 7. New York : Springer, 2014.

[29] H.K. Pathak, *An introduction to nonlinear analysis and fixed point theory*. Springer, 2018.

[30] J. Peradze, *An approximate algorithm for a Kirchhoff wave equation*. SIAM journal on numerical analysis 47.3 (2009) : 2243-2268.

[31] E. Provenzi, *From Euclidean to Hilbert Spaces : Introduction to Functional Analysis and Its Applications*. John Wiley & Sons, 2021.

[32] P. A. Raviart, and J. M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Vol. 6. Elsevier Masson, 1983.

[33] L. Schwartz, *Mathematics for the physical sciences*. Courier Dover Publications, 2008.

[34] L. Schwartz, *Théorie des distributions*. Hermann, 1966, 1997.

[35] H. L. Vasudeva, and S. Shirali, *Elements of Hilbert spaces and operator theory*. Singapore : Springer, 2017.

[36] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications : II/B : Nonlinear Monotone Operators*. Springer Science and Business Media, 2013.