RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Fares, Médéa
Département de Mathématiques et informatique



Mémoire de fin d'études Pour l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques
SPÉCIALITÉ :ANALYSE ET MODÉLISATION MATHÉMATIQUE

Présenté par :

CHERIFI Hadda

Intitulé :

Résolution Numérique Des Équations Différentielles d'ordre fractionnaire via la matrice opérationnelle de Bernoulli de dérivation d'ordre fractionnaire

Soutenu publiquement le 14 juin 2017 à Médéa devant le jury composé de

N. Mekdache	Médéa	**Président**
H. Ayadi	Médéa	**Examinateur**
S. Rafaa	Médéa	**Examinateur**
A. Boutaghou	Médéa	**Invité**
A. Bokhari	Médéa	**Promoteur**

Remerciements

Avant tout, je remercais « Dieu » , le tout puisant et le miséricordieux pour la volonté et la patience qu'il m'a attribué. Qu'il soit loué pour l'aide qu'il m'a fournie afine d'achever mes études et pour m'avoier guidé dans le droit chemin dans ma vie.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à :

Ma encadreur « M :**Bokhari Ahmed** », de m'avoir aidé à réaliser le travaille

demandé dans ce projet de fin détude.

Tout les membres de jury d'avoir participer à la commission des examinateurs en vue

d'une évaluation prompte et à sa juste valeur.

Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude et ma plus grande reconnaissance envers ma famille, et surtout ma mère, mon père pour leurs soutien, ses patience et ses encouragements à aller le plus loin possible dans mes études.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à :

Tout l'encadrement de département de mathématiques qui j'ai recueillie tout l'année.

Mon frére qui m'a aidé dans mon travaile : **Barki mohamed**

Tout ceux qui ont contribué de loin ou prés à la réalisation de ce travail.

Merci à tous et à toutes.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à :

A mon trés chére pére.

A mon trés chére mére.

A mon frére **Ismail** et sa femme.

A mon fiancé **Youcef**.

A mes trés chéres soeurs et mes gendres.

A mes neuveux et mes niéces.

A tout la famille **CHERIFI**, **BELHADJI**.

A mes enseignants de l'école primaire jusqu à l'université dont les conseils précienx mon guide qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

A mon promoteur **M.BOKHARI Ahmed**.

A ma soeur intime : **Ramlia**

A mes amies et à leurs familles.

A tout la promotion de Analyse et modilisation Mathématique 2017.

Hadda

Table des matières

Remerciements i

Dédicace iii

Résumé vi

Abstract vii

Liste de symboles viii

Introduction 1

1 Préliminaires 3

1.1 Notations et définitions 3

1.1.1 Espaces $L^p(\Omega)$ 3

1.1.2 Espaces des fonctions continues 4

1.2 Fonctions spécifques pour la dérivation fractionnaire 4

1.2.1 La fonctions Gamma 4

1.2.2 La Fonctions Bêta 6

1.3 calcul fractionnaire 7

1.3.1 Intégrale et dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville 7

1.3.2 Dérivation fractionnaire au sens de Riemen-Liouville 8

1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo 9

1.3.4 propriétés générales des Dérivées fractionnaires 10

2 Matrice opérationnelle de dérivation de Bernoulli d'ordre fractionnaire 11

2.1 Polynômes et les nombres de Bernoulli 11

2.2 Approximation d'une fonction par les polynômes de Bernoulli 13

2.2.1 Analyse de convergence 17

2.3 Matrices opérationnelles de dérivation de Bernoulli 18

2.3.1 Matrice opérationnelle de dérivation de Bernoulli d'ordre entier . . . 18

2.3.2 Matrice operationnelle de dérivation de Bernoulli d'ordre fractionnaire 19

3 Applications 23

3.1 Méthodes de résolution 23

3.1.1 Cas d'une équation différentielle fractionnaire linéaire 23

3.1.2 Cas d'une équation différentielle fractionnaire non linéaire 24

3.2 Exemples 26

3.2.1 Équations différentielles fractionnaires linéaires 26

3.2.2 Exemples d'une équation différentielle fractionnaire non linéaire . . . 35

Annexe 44

Conclusion 56

Bibliographie 57

Résumé :

Le calcul fractionnaire est un domaine de mathématiques appliquées qui traite des dérivés et des intégrales d'ordres arbitraires. C'est une généralisation du calcul classique des intégrales et des drivées. Dans ce travail, nous utilisons une matrice opérationnelle des dérivées d'ordre fractionnaire au sens de Caputo basée sur les polynôme de Bernoulli pour résoudre numériquement des équations différentielles linéaires et non-linéaire. Cette matrice est construite en utilisant quelques propriétées de polynômes de Bernoulli. Conjointement avec la méthode de collocation et la méthode tau, les équations différentielles sont réduites à un système d'équations algébrique qui peuvent être efficacement résolues. L'efficacité de la technique proposée sera illustré par la résolution numérique de plusieurs équations différentielles linéaires et non- linéaires.

Mots-clés :Polynôme de Bernoulli, Matrice opérationnelle de dérivé d'ordre fractionnaire (matrice opérationnelle à la dérivation fractionnaire), Dérivé de caputo, Analyse numérique, Équations différentiels d'ordre fractionnaire

Math Subject Classifications : 11B68 - 65M70 - 34A08 - 26A33

Abstract :

Fractional calcul is a field of applied mathematics that deals with derivatives and integrals of arbitrary orders. are generalization of classical calcul Integrals and derivatives. In this work, we use an operational matrix of fractional derivative order in the Caputo sense based on Bernoulli polynomial, for solving numerically linear and non-linear fractional differential equations (FDEs). This matrix is constructed by using some important properties of Bernoulli polynomials. These matrices Jointly with the collocation method and tau method are used to reduce the FDEs into a system of algebraic equations that can be effciently solved. The effciency of the proposed techniques will be illustrated by solving several examples of linear and non-linear FDEs and to compare with the existing results.

Keywords : Bernoulli polynomials, Operational matrix of fractional derivatives, Numerical analysis, Caputo derivative, fractional-order differential equations.

Mathematics Subject Classiffication : : 11B68 - 65M70 - 34A08 - 26A33

Liste de symboles

$\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres naturels $\{0, 1, 2, 3, ...\}$.

$\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^n$: espace euclidien de dimension $n, n \geq 1$.

$\mathbb{C}$: l'ensemble des nombres complèxe.

$Re(z)$: la partie réel de nombre complèxe z.

$[\mu]$: la partie entière de nombre réel s.

$\lceil \mu \rceil$: la partie entière par exes .

$(.,.)$:Produit scalaire.

$\mathbf{D}^{(\mu)}$: est la matrice operationnelle de dérivée d'ordre fractionnaire

INTRODUCTION

Le calcul fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique. L'histoire du calcul fractionnaire remonte à plus de 300 ans. En 1695, Leibniz a posé une question à l'Hôpital en échangeant une lettre, " Le sens de la dérivée d' ordre entier peut être généralisé au dérivée d' ordres non entiers ?" Cette question révolutionnaire a suscité la curiosité de l'hôpital, le 30 septembre 1695, il répondit à Leibniz avec une autre question, "Que faire si l'ordre sera $\frac{1}{2}$?" Leibniz a répondu, " Par conséquent, il s'ensuit que sera égal à $x\sqrt{dx : x}$. utiles seront tirées. De nombreux systèmes physiques du monde réel sont gouvernés par une dynamique d'ordre fractionnaire, c'est-à-dire que leur comportement est régi par des équations différentielles fractionnaires (EDFs)[16]. Les EDFs ont suscité un intérêt considérable en raison de leur capacité à modéliser des phénomènes complexes tels que des matériaux viscoélastiques [2], économie [1], mécanique des milieux continus et mécanique statistique [14], mécanique solide [19] et la dynamique des interfaces entre les nanoparticules douces et les surfaces rugueuses [5]. L'un des travaux les plus récents sur le calcul fractionnaire, c'est-à-dire la théorie des dérivées et des intégrales d'ordre fractionnaire (non entier), est le livre de Podlubny [17], qui traite principalement des équations différentielles fractionnaires. Aujourd'hui, il existe de nombreux travaux sur le calcul fractionnaire (voir par exemple [11, 6]). Les résultats analytiques sur l'existence et l'unicité des solutions aux équations différentielles fractionnaires ont été étudiés par de nombreux auteurs (voir, par exemple, [17, 11]). Au cours des dernières décennies, plusieurs méthodes ont été utilisées pour résoudre des équations différentielles fractionnaires, des équations différentielles partielles fractionnaires et des systèmes dynamiques contenant des dérivés fractionnaires.

Les fonctions orthogonales ont fait l'objet d'une attention considérable dans le traitement de divers problèmes. La principale caractéristique de l'approche utilisant cette technique est

qu'elle réduit ces problèmes à ceux de la résolution d'un système d'équations algébriques, ce qui simplifie grandement le problème. Les polynômes de Bernoulli et les séries de Taylor ne sont pas basés sur des fonctions orthogonales, mais ils possèdent des matrices opérationnelles d'intégration et de dérivation. Dans cette méthode, une série tronquée est utilisée pour l'intégration numérique des équations différentielles, dans le but d'obtenir des solutions numériques efficaces.

Il existe plusieurs définitions de la dérivée fractionnaire d'ordre μ. Les définitions les plus utilisées sont celle de Riemann-Liouville et de Caputo. L'objectif principal de ce mémoire est d'utiliser la matrice oppérationnelle des dérivées fractionnaires basé sur les polynômes de Bernoulli pour résooudre des équation différentielles fractionnaire.

Ce mémoire est organisée selon le plan suivant :

Le premier chapitre sera consacré aux élément de base du calcul fractionnaire, nous citons par exemple la fonction Gamma, la fonction Bêta, l'integrale fractionnaire sur intervalle [a,b]. Deux approches sont présentés, ainsi que l'approche de Riemann-Liouville et celle de Caputo pour la généralisation des notions de dérivation entière.

Le deuxième chapitre de ce mémoire est dédié à la matrice opérationnelle de Bernoulli de dérivation d'ordre fractionnaire, Nous rappelons brièvement la définition et les propriétées de polynômes de Bernoulli, afin de dériver notre matrice.

Dans le troisième chapitre, nous présentons des illustrations numériques (Application) dans le but de prouver la validité et l'applicabilité de la technique proposée.

Finalement nous terminons notre mémoire par une conclusion générale avec quelques perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires

Introduction

Dans ce chapitre nous rappelons quelques définitions et quelques résultats élémentaires de la théorie du calcul fractionnaire : la dérivation fractionnaire, l'intégration fractionnaire, des notions que nous utilisons tout au long de ce mémoire.

1.1 Notations et définitions

1.1.1 Espaces $L^p(\Omega)$

Définition 1.1 *Soient $\Omega = (a, b)$ un intrevalle de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$*

1. *Pour $1 \leq p < \infty$. L'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions f reélles sur Ω telles que f est mesurable et*
$$(\int_a^b |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$$
2. *Pour $p \doteq \infty$. L'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des foctions mesurables f bornneés presque partout sur Ω*

Définition 1.2 *(**Convergence dans** L^p) Soit $\{f_n\}$ est une suite mesurable*

On dit que $\{f_n\}$ converge vers f dans $L^P(\Omega)$ si

$$\lim_n \|f_n - f\|_p = 0$$

1.1.2 Espaces des fonctions continues

Théorème 1.1 [11] *Soit* $\Omega = [a, b]$, $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ *et* $n \in \mathbb{N} = 0, 1.....$ *On note* $C^n(\Omega)$ *l'espace des fonctions* f *dont les dérivées d'ordre inférieur ou égale à* n *existent et sont continues dans* Ω. *En particulier Si* $n = 0$, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ *: l'espace des fonctions* f *continue sur* Ω *muni de la norme*

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in\Omega} |f(x)|$$

1.2 Fonctions spécifques pour la dérivation fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma et Bêta, qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces deux fonction jouent un rôle trés important dans la thèorie du calcule fractionnaire.

1.2.1 La fonctions Gamma

L'un des outils de base de calcul fractionnaire est La fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$. C'est une fonction qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels, et même aux nombres complexes.

Définition 1.3 *Pour* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $Re(z) > 0$, *on définit la fonction Gamma par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \tag{1.2.1}$$

avec $\Gamma(1) = 1$,.

Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.2.2}$$

qu'on peut la démontrer par une intégration par parties

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = \left[-e^{-t} t^z\right]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

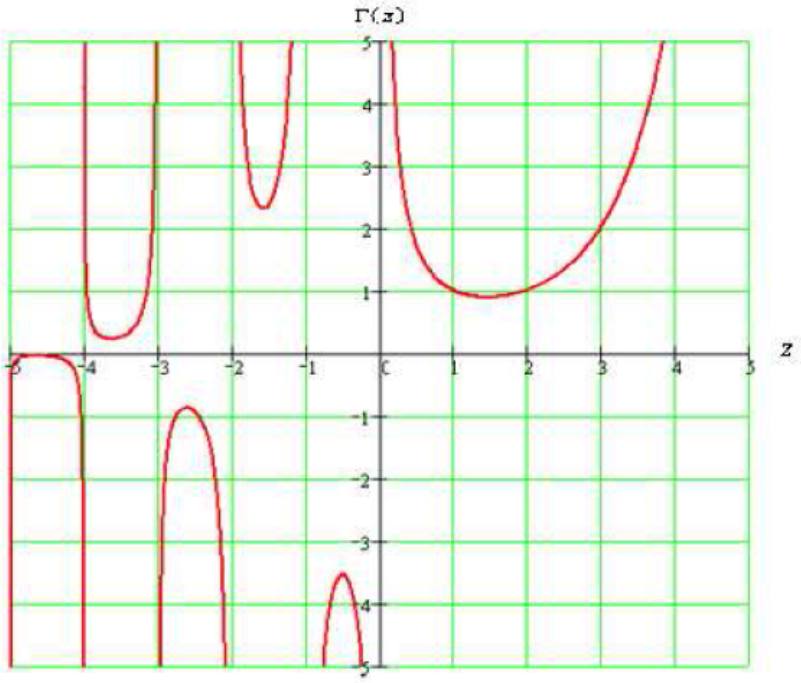


FIGURE 1.1 – La fonction Gamma

La propriété (1.2.2) permet d'établir que

$$\Gamma(n+1) = n!, \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.2.3}$$

La fonction Gamma est illustré à la figure 1.1

1.2.2 La Fonctions Bêta

Définition 1.4 *La fonction Béta est un type l'integrale d'Euler définie pour tout nombres complexe z et w de partie reèlles strictement positive par :*

$$\beta(z,w)=\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}dt,\quad Re(z)>0,\quad Re(w)>0 \tag{1.2.4}$$

La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par la relation suivante [11] :

$$\beta(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \tag{1.2.5}$$

Propriété 1.1 *1. La fonction Béta est symetrique en les deux variables :*

$$\beta(z,w)=\beta(w,z),\ Re\,(z)>0,\ Re\,(w)>0,$$

2. Elle satisfait les équations suivantes

$$\beta(z,w+1)=\tfrac{w}{z+w}\beta(z,w)$$

$$\beta(z,1)=\tfrac{1}{z}$$

3. si $z=m$, $w=n$ avec $n,m\in\mathbb{N}^*$ on obtient

$$\beta(m,n)=\tfrac{(m-n)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

1.3 calcul fractionnaire

1.3.1 Intégrale et dérivée fractionnaires de Riemann-Liouville

Définition 1.5 *L'intégrale fractionnaire d'ordre $\mu > 0$,μ est arbitraire réel ou complexe de Riemann-Liouville d'une fonction $f \in L^1[a,b]$ continue sur $[a,b]$ est donnée par*

$$I_{\alpha}^{(\mu)} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^x (x-t)^{\mu-1} f(t)dt, \quad t > a, \tag{1.3.1}$$

où Γ est la fonction Gamma donner par (1.2.1).

Théorème 1.2 [3], [11] *Pour $f \in C[a,b]$, l'integrale fractionnaire de Riemann-Liouville posséde la proprieté suivante :*

$$I_a^{(\alpha)}[I_a^{(\mu)} f(t)] = I_a^{(\alpha+\mu)} f(t) \ \alpha > 0, \mu > 0 \tag{1.3.2}$$

Preuve. La preuve découle directement de la définition

$I_a^{(\alpha)}[I_a^{(\mu)} f(t)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^s (s-t)^{\mu-1} f(t)dtds$ pour $\alpha > 0, \mu > 0$

d'aprés le théorème de Fubini et par le changement de variable $t = u + s(x-u)$ on obtient

$$I_a^{(\alpha)}[I_a^{(\mu)} f(t)] = \frac{\beta(\alpha,\mu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\mu)} \int_0^x (t-u)^{1-\alpha-\mu} f(u)du = I_a^{(\alpha+\mu)} f(x) \ \alpha > 0, \mu > 0$$

Où $B(\alpha,\mu)$ désigne la fonction Bêta.

■

Théorème 1.3 [3], [11] *Si $f \in L^1([a,b])$, alors $I_a^{(\mu)} f(t)$ existe pour tout $t \in [a,b]$ et de plus $I_a^{(\mu)} f(t) \in L^1([a,b])$*

Exemple 1.1 *Soit $f(t) = t^r$ avec $r > -1$ On a*

$$(I_0^{(\mu)} f)(t) := (I^{(\mu)}) f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t x^r (t-x)^{\mu-1} dx \tag{1.3.3}$$

En posant $x = tu$ (1.3.3) devient :

$$(I^{(\mu)} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^1 (tu)^r (1-u)^{\mu-1} t du$$

En utilisant la fonction Bêta (1.2.4) *puis de la rélation* (1.2.5) *on trouve :*

$$\begin{aligned}(I^{(\mu)}f)(t) &= \tfrac{t^{r+\mu}}{\Gamma(\mu)}\int_0^1 (u)^r(1-u)^{\mu-1}du \\ &= \tfrac{t^{r+\mu}}{\Gamma(\mu)}B(r+1,\mu) \\ &= \tfrac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\mu+r+1)}t^{r+\mu}\end{aligned}$$

Dérivée fractionnaire

Il existe de nombreuses définitions de dérivées fractionnaires ; Riemann-Liouville ; Grünwald-Letnikov ; Caputo ; ect... Pour la définition au sens Caputo la dérivée d'une constante est nulle, et les conditions initiales ont une interprétation physique connue. Ce qui la rend importante de point de vue d'un ingénieur.

1.3.2 Dérivation fractionnaire au sens de Riemen-Liouville

Définition 1.6 *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre μ (avec $n-1<\mu\leq n$) au sens de Riemann-Liouville est définie par :*

$$\begin{aligned}D^{\mu}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\mu)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-\mu-1}f(\tau)\,d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n}\left(I^{n-\mu}f(t)\right).\end{aligned}$$

En particulier, pour $\mu=m\in\mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}D_a^0 f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d}{dt}\right)\int_a^t f(\tau)\,d\tau = f(t) \\ D_a^m f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d^{m+1}}{dt^{m+1}}\right)\int_a^t f(\tau)\,d\tau = \frac{d^m}{dt^m}f(t) = f^{(m)}(t),\end{aligned}$$

où $f^{(m)}(t)$ déssigne la dérivée usuelle d'ordre n de $f(t)$. Par suite la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coincide avec la dérivée classique pour $\mu\in\mathbb{N}$.

Exemple 1.2 *Soit $f(t)=(t-a)^r$ avec $r>-1$.*

Pour $\mu\geq 0$ tel que $0<m-1\leq\mu\leq n$ avec $r>-1$ alors on a :

$$D^{\mu}(t-a)^r = \tfrac{1}{\Gamma(n-\mu)}\int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{n-\mu-1}(t-a)^r d\tau$$

En faisant un changement de variable $\tau=a+s(t+1)$, on aura

$$\begin{aligned} D^{\mu}(t-a)^{r} &= \frac{1}{\Gamma(n-\mu)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}(t-a)^{n+r-\mu}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-a-1}s^{r}ds \\ &= \frac{\Gamma(n+r-a+1)\Gamma(n-a)\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\mu+1)\Gamma(n-\mu)\Gamma(n+r-\mu+1)}(t-a)^{r-\mu} \\ &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\mu+1)}(t-a)^{r-\mu}. \end{aligned}$$

– *Pour* $\mu=\frac{1}{2}$, $r=\frac{1}{2}$ *et* $a=0$,*on a*

$$D^{\frac{1}{2}}(\sqrt{t})=\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)}=\Gamma(\frac{3}{2})=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Remarque 1.1 *Pour* $\mu>0$, $\mu=0$, *la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'une fonction constante* $f(t)=C$ *non nulle, sa valeur est :*

$$D_{a}^{\mu}C=\frac{C\,(t-a)^{-\mu}}{\Gamma\,(1-\mu)}.$$

1.3.3 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Définition 1.7 *Pour une fonction donnée* f *sur l'intervalle* $[a,b]$, *la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo de* f, *d'ordre* $\mu>0$ *est définie par*

$$D^{\mu}f\,(t)=\frac{1}{\Gamma\,(n-\mu)}\int_{0}^{t}\frac{f^{(n)}\,(\tau)}{(t-\tau)^{\mu+1-n}}d\tau,\quad n-1<\mu\leq n,\quad n\in\mathbb{N} \tag{1.3.4}$$

Remarque 1.2 *L'avantage principal de l'approche Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires au sens de Caputo prennent la même forme que dans le cas des équations différentielles d'ordre entier.*

Exemple 1.3 *Pour* $f\,(x)=(t-a)^{r}$ *avec* $r>0$, *on a*

$$D_{a}^{\mu}f\,(t)=\begin{cases} 0 & si\quad r\in\{0,1,...,n-1\} \\ \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-\mu)}(t-a)^{r-\mu} & si\qquad r\geq n. \end{cases}$$

En particulier,

$$D^{\mu}C = 0,\quad C\ est\ une\ constante, \tag{1.3.5}$$

$$D^{\mu}t^{r} = \begin{cases} 0, & si\qquad r\in\mathbb{N}\ et\ r<\lceil\mu\rceil\,, \\ \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-\mu)}t^{r-\mu} & si\quad r\in\mathbb{N}\ et\ r\geq\lceil\mu\rceil\ \ ou\ r\notin\mathbb{N}\ et\ r>\lceil\mu\rceil\,, \end{cases} \tag{1.3.6}$$

où $\lceil\mu\rceil$ *désigne le plus petit nombre entier supérieur ou égal à* μ.

1.3.4 propriétés générales des Dérivées fractionnaires

Proposition 1.1 – *Si $\mu = 0$. L'operateur D_t^μ est l'operateur identité, c'est à dire*

$$D_t^0 f(t) = f(t)$$

– *l'opérateur de dérivation fractionnaire (au sens de Riemen-Liouville ou au sens de Caputo) est est un opérateur lineaire*

$$D_t^\mu(\lambda f(t) + \alpha g(t)) = \lambda D^\mu f(t) + \alpha D^\mu g(t)$$

avec λ et α constants

Le théorème suivants établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de Caputo et celle au sens de Riemann-Liouville.

Théorème 1.4 *Soient $a \geq 0$, $n = [a] + 1$. Si f possède $(n-1)$ dérivée en a et si $D_a^\mu f$ existe, alors*

$$(D_a^\mu f)(x) = D^\mu(f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k)$$

$$D_t^\mu f(t) = D_t^\mu f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a_+)}{\Gamma(k-a+1)} \frac{d^k f(t)}{dt^k}\Big|_{t=a_+}$$

ou $[\mu]$ est la partie entière de μ. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville avec $0 < \mu < 1$ est donnée par

$$D_t^\mu f(t) = \frac{d}{dt}\big(D_t^{-(1-\mu)} f(t)\big) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \frac{d}{dt}\big(\int_\mu^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\mu} d\tau\big)$$

la dérivée fractionnaire de Caputo est donnée par

$${}^C D_t^\mu f(t) = D_t^{-(1-\mu)}\big(\frac{df(t)}{dt}\big) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \int_\mu t \frac{\frac{df(\tau)}{d\tau}}{(t-\tau)^\mu} d\tau$$

Remarque 1.3 *Le résultat du théoréme (1.4) signifie que la dérivation au sens de Caputo d'une fonction f est une dérivation fractionnaire du reste dans le développement de Taylor de f.*

Chapitre 2

Matrice opérationnelle de dérivation de Bernoulli d'ordre fractionnaire

2.1 Polynômes et les nombres de Bernoulli

Les nombres de Bernoulli jouent un rôle important et assez mystérieux dans des parties aussi diverses des mathématiques que l'analyse, la théorie des nombres, la topologie différentielle, ect... Il sapparaissent dans la représentation integrale des fonctions dérivables périodiques, ainsi, ils interviennent dans des développements en séries entières, dans la formule d'Euler-Mac Laurin et aussi dans les valeurs aux entiers pairs de la fonction Zeta.

Définition 2.1 *Les polynômes de Bernoulli d'ordre m sont définis sur l'intervalle $[0,1]$ par*

$$b_m(t) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_k t^{m-k}, \tag{2.1.1}$$

où B_i, $i = 0, 1, ..., m$ sont les nombres de Bernoulli. Ces nombres sont définis par

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} B_i \frac{t^i}{i!}. \tag{2.1.2}$$

Les premiers nombres de Bernoulli sont

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, ... \tag{2.1.3}$$

tels que $B_{2i+1} = 0$, $i = 1, 2, ...$

Les premiers polynômes de Bernoulli sont

$b_0(t) = 1$

$b_1(t) = t - \frac{1}{2}$

$b_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$

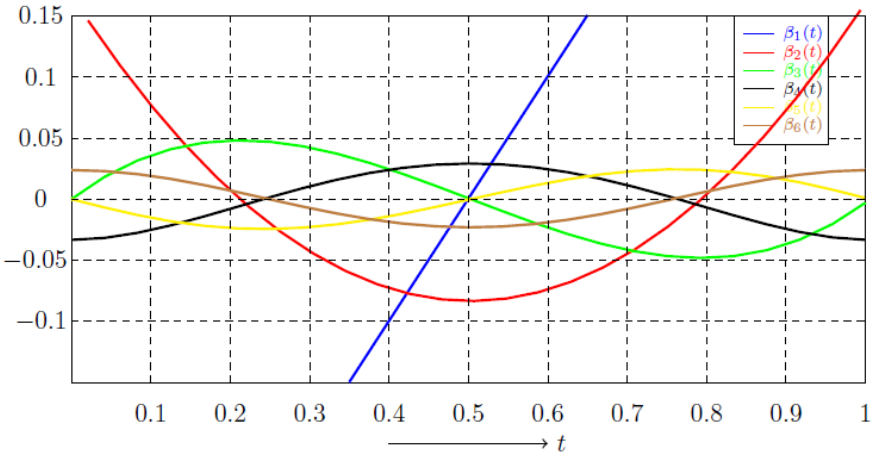
$b_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t$

$b_4(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - \frac{1}{30}$

$b_5(t) = t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{6}t$

$b_6(t) = t^6 - 3t^5 + \frac{5}{2}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{42}$

Les premiers polynômes de Bernoulli:



Quelques proprietés [3] ,[20]

Théorème 2.1 *Les polynômes de Bernoulli satisfont aux formules suivantes* [12]

$$\int_0^1 b_n(t)\, b_m(t)\, dt = (-1)^{n-1} \frac{m!n!}{(m+n)!} \alpha_{n+m}, \qquad m, n \geq 1. \tag{2.1.4}$$

$$\frac{db_n(t)}{dt} = n b_{n-1}(t)$$

$$b_k(1) = (-1)^k B_k$$

$$b_n(t) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_n t^{n-k}$$

$$Pour\ tout\ n \in \mathbb{N}^*\ \ on\ \ a : b_n'(t) = n b_{n-1}(t)$$

$$Pour\ n \geq 1,\ \ on\ \ a : b_n(t+1) - b_n(t) = n t^{n-1}$$

$$Pour\ n \geq 1,\ \ on\ \ a : \int_0^1 b_n(t) dt = 0$$

$$Pour\ tout\ n \in \mathbb{N},\ \ B_n = b_n(0)$$

2.2 Approximation d'une fonction par les polynômes de Bernoulli

Soit $H = L^2[0,1]$ l'espace de Hilbert et soit. $Y = Vect\{b_0(t), b_1(t), ..., b_M(t)\}$ un sous-espace fermé de dimension fini, donc Y est un sous-espace complet de H . Donc, si $f(t)$ est un élément arbitraire dans H ; il a une meilleure approximation unique dans Y sachant que

$$\exists f_0(t) \in Y \text{ , telle que } \forall y(t) \in Y \quad \|f(t) - f_0(t)\| \leq \|f(t) - y(t)\|$$

cela implique que

$$\forall y(t) \in Y \ < f(t) - f_0(t), y(t) >= 0 \tag{2.2.1}$$

Où $<,>$ désigne le produit scalaire sur H. Comme $f_0(t) \in Y$, il existe des coefficients uniques $c_0, c_1, ..., c_2$, tels que

$$f(t) \simeq f_0(t) = \sum_{i=0}^{m} c_i b_i(t) = C^T B(t) \tag{2.2.2}$$

où C et $B(t)$ sont donnés par :

$$C = [c_0, c_1, ..., c_M]^T, \tag{2.2.3}$$

$$B(t) = [b_0(t), b_1(t), ..., b_M(t)]^T \tag{2.2.4}$$

En utilisant l'équation (2.2.1), nous avons

$$< f(t) - C^T B(t), b_i(t) >= 0, \ i = 1, 2, ...M$$

Pour simplifier, nous écrivons

$$C^T < B(t), B(t) >=< f(t), B(t) > \tag{2.2.5}$$

Où $< B(t), B(t) >$ est une matrice de dimension $(M+1)(M+1)$:

$$D =< B(t), B(t) >= \int_0^1 B(t)B(t)^T dt \tag{2.2.6}$$

La matrice D de l'équation (2.2.6) peut être calculée en utilisant la relation (2.1.4). Toute fonction $f(t) \in L^2[0,1]$ peut être développée en série de polynômes de Bernoulli par

$$f(t) = C^T B(t)$$

Où à partir des équations (2.2.5) et (2.2.6), nous obtenons

$$C = D^{-1} < f(t), B(t) > \tag{2.2.7}$$

Exemple 2.1 *Soit la fonction a appproximer,* $f(t) = t^{\frac{1}{2}}$*, selon la base*

$$B(t) = [1, t - \tfrac{1}{2}, t^2 - t + \tfrac{1}{6}, t^3 - \tfrac{3}{2}t^2 + \tfrac{1}{2}t]$$

On a (En utilisant Matlab) voir (3.2.2)

$$D =< B(t), B(t) >= \int_0^1 B(t)B(t)^T dt$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 & -\frac{1}{120} \\ 0 & 0 & \frac{1}{180} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{120} & 0 & \frac{1}{840} \end{pmatrix}.$$

Donc

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 280 \\ 0 & 0 & 180 & 0 \\ 0 & 280 & 0 & 2800 \end{pmatrix}.$$

D'autre part

$$< f(t), B(t) >= [\int_0^1 f(t)b_0(t)dt, \int_0^1 f(t)b_1(t)dt, \int_0^1 f(t)b_2(t)dt, \int_0^1 f(t)b_3(t)dt]$$

$$= [\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{15}, \tfrac{-1}{315}, \tfrac{-2}{315}]^T$$

Donc

$$C = D^{-1} < f(t), B(t) >$$

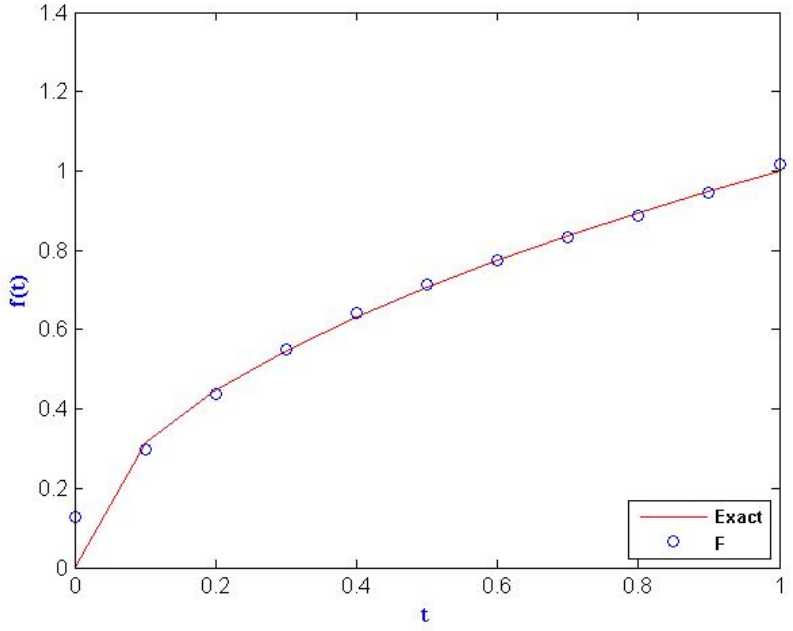


FIGURE 2.1 – L'approximation de $f(t) = t^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 280 \\ 0 & 0 & 180 & 0 \\ 0 & 280 & 0 & 2800 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{15} \\ \frac{-1}{315} \\ \frac{-2}{315} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} \\ \frac{-4}{7} \\ \frac{8}{9} \end{pmatrix},$$

par conséquent l'approximation de la fonction f est donnée par :

$$f(t) = t^{\frac{1}{2}} \simeq C^T B(t) = [\tfrac{2}{3}, \tfrac{4}{5}, \tfrac{-4}{7}, \tfrac{8}{9}] \begin{pmatrix} 1 \\ t - \frac{1}{2} \\ t^2 - t + \frac{1}{6} \\ t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t \end{pmatrix}$$

$$= \tfrac{8}{9}t^3 - \tfrac{40}{21}t^2 + \tfrac{40}{21}t + \tfrac{8}{63}$$

La figure 2.1 montre q'une petite valeur de M donne une bonne approximation de $f(t) = \sqrt{t}$.

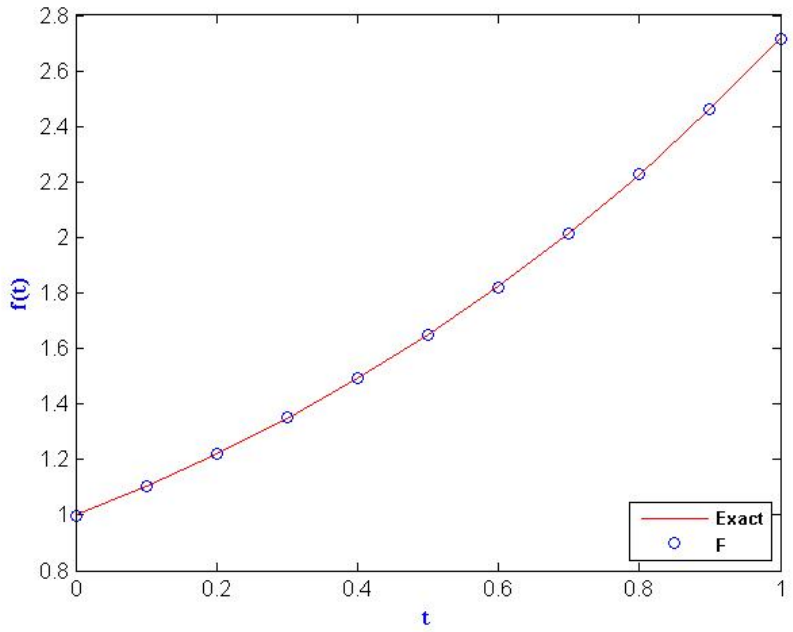


FIGURE 2.2 – L'approximation de $f(t) = e^t$

Exemple 2.2 *Soit la fonction a approximer* $f(t) = e^t$ *selon la base :*

$$B(t) = [1, t - \tfrac{1}{2}, t^2 - t + \tfrac{1}{6}, t^3 - \tfrac{3}{2}t^2 + \tfrac{1}{2}t, t^4 - 2t^3 + t^2 - \tfrac{1}{30}]$$

On trouve

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 0 & 280 & 0 \\ 0 & 0 & 3780 & 0 & 12600 \\ 0 & 280 & 0 & 2800 & 0 \\ 0 & 0 & 12600 & 0 & 44100 \end{pmatrix}$$

$$C = [e - 1, 2720 - 1000e, 180390e - 490350, 27020 - 9940e, 630630e - 1714230]^T$$

Par conséquent ; $f(t) = e^t \simeq C^T B(t)$

$$= \tfrac{74604793}{1073741824}t^4 + \tfrac{38390234991}{274877906944}t^3 + \tfrac{280693872371}{549755813888}t^2 + \tfrac{1097805595055}{1099511627776}t + \tfrac{16889387640033691}{16888498602639360}$$

2.2.1 Analyse de convergence

Lemme 2.1 [20] *Soient* $f(t) \in C^{M+1}[0,1]$ *et* $S_M = span\{b_0(t), b_1(t), ...b_M(t)\}$. *Si* $C^T B(t)$ *est la meilleure approximation* $f(t)$ *dans* S_M *alors*

$$\| f(t) - C^t B(t) \|_{L^2[0,1]} \leq \frac{K}{(M+1)!\sqrt{2M+3}},$$

où $K = \max_{t\in[0,1]} |f^{(M+1)}(t)|$

Preuve. L'ensemble $\{1, t.....t^M\}$ est un base de l'espace des polynômes de dègreé M . On pose

$$y_1(t) = f(0) + tf'(0) + \frac{t^2}{2!}f''(0) + ... + \frac{t^M}{M!}f^{(M)}(0).$$

Par la formule de Taylor on a :

$$|f(t) - y_1(t)| = |f^{(M+1)}(\xi_1)\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}|, \tag{2.2.8}$$

où $\xi_1 \in (0,1)$. Comme $C^T B(t)$ est la meilleure approximation de $f(t)$ dans S_m $y_1(t) \in S_m$ et de l'equation (2.2.8), on a :

$$\| f(t) - C^t(t) \|^2_{L^2[0,1]} \leq \| f(t) - y_1(t) \|^2_{L^2[0,1]}$$

$$= \int_0^1 |f(t) - y_1(t)|^2 dt = \int_0^1 \| f(m+1)(\xi_1) \|^2 \left(\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}\right)^2 dt$$

$$\leq \frac{k^2}{(m+1)!^2} \int_0^1 t^{2m+2} dt = \frac{k^2}{(m+1)!^2(2m+3)}$$

En prenant les racines carrées, la preuve est complète. ∎

Théorème 2.2 [20] *Supposons* $f(t) \in L^2[0.1]$ *est approximée par :*

$$f_m(t) = \sum c_i b_i(t) = C^T B(t),$$

où C *et* $B(t)$ *sont définis par les équations* (2.2.3) *et* (2.2.4). *Alors, nous avons*

$$\lim_{m\to\infty} \| f(t) - f_m(t) \|_{L^2[0,1]} = 0.$$

2.3 Matrices opérationnelles de dérivation de Bernoulli

2.3.1 Matrice opérationnelle de dérivation de Bernoulli d'ordre entier

La propriété (2.1) nous permettre de prouver le théorème suivant

Théorème 2.3 [10]

Si l'on introduit le vecteur de Bernoulli $B(t)$ sous la forme $B(t) = [b_0(t), b_1(t), ..., b_M(t)]$, alors sa dérivée $B'(t)$ peut être exprimée par :

$$\frac{d}{dt}B(t) = \mathbf{D}B(t) = \mathbf{D}^{(1)}B(t) \tag{2.3.1}$$

ou bien

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_0'(t) \\ b_1'(t) \\ b_2'(t) \\ \vdots \\ b_{M-1}'(t) \\ b_M'(t) \end{bmatrix}}_{B'(t)^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^{(1)}} \underbrace{\begin{bmatrix} b_0(t) \\ b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_{M-1}(t) \\ b_M(t) \end{bmatrix}}_{B(t)^T}, \tag{2.3.2}$$

où $\mathbf{D}^{(1)}$ est la matrice opérationnelle de dérivation des polynômes de Bernoulli d'ordre $(M+1)\times(M+1)$.

Corollaire 2.2 *La dérivée n^{ieme} de $B(t)$ est donnée par :*

$$\frac{d^n}{dt^n}B(t) = \mathbf{D}^{(n)}B(t),$$

telle que

$$\mathbf{D}^{(n)} = \left(\mathbf{D}^{(1)}\right)^n. \tag{2.3.3}$$

Exemple 2.3 *Pour $M = 3$, on a*

$$B(t) = [1, t - \frac{1}{2}, t^2 - t + \frac{1}{6}, t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t]^T,$$

donc la matrice opérationnelle de dérivation de Bernoulli s'écrit sous la forme

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

par conséquent

$$\mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3.2 Matrice operationnelle de dérivation de Bernoulli d'ordre fractionnaire

L'objectif principal de cette section est de généraliser la matrice opérationnelle de Bernoulli donnée en (2.3.1) pour un ordre fractionnaire.

Dans tout ce qui suit la dérivation fractionnaire est au sens de Caputo. On commence par demontrer le lemme suivant, bien utile :

Lemme 2.3 *Soit $B_i(t)$ un polynôme de Bernoulli. Alors*

$$D^{\mu} B_i(t) = 0, \ i = 0, 1, ..., \lceil \mu \rceil - 1. \tag{2.3.4}$$

Preuve. Nous pouvons obtenir le résultat facilement par l'usage des relations (1.3.5) , (1.3.6) et la linéarité de l'opérateur de dérivation. ∎

Théorème 2.4 *Soit $B(t)$ le vecteur Bernoulli donné par*

$$B(t) = [b_0(t), b_1(t), ..., b_M(t)]^T,$$

et soit $\mu > 0$. Alors, on a

$$D^{\mu} B(t) \simeq \mathbf{D}^{(\mu)} B(t), \tag{2.3.5}$$

où $\mathbf{D}^{(\mu)}$ est la matrice opérationnelle de dérivation fractionnaire de Bernoulli définie par

$$\mathbf{D}^{(\mu)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \theta_{\lceil\mu\rceil.0.r} & \theta_{\lceil\mu\rceil.1.r} & \cdots & \theta_{\lceil\mu\rceil.M.r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{i} \theta_{i.0.r} & \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{i} \theta_{i.1.r} & \cdots & \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{i} \theta_{i.M.r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{M} \theta_{M.0.r} & \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{M} \theta_{M.1.r} & \cdots & \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{M} \theta_{M.M.r} \end{pmatrix}$$

Avec

$$\theta_{i.j.r} = b_{ir} c_{rj}, \tag{2.3.6}$$

$$b_{ir} = \frac{i! B_{i-r}}{(i-r)!\Gamma(r+1-\mu)}. \tag{2.3.7}$$

Les B_i sont le nombres de Bernoulli et les c_{rj} sont obtenus par la formule (2.2.7) Notons que dans $\mathbf{D}^{(\mu)}$, les élément de la première ligne sont touS nules.

Preuve. On a

$$b_i(t) = \sum_{r=0}^{i} \binom{i}{r} B_{i-r} t^r, \tag{2.3.8}$$

par linéarité de l'opérateur D^μ, on trouve

$$D^\mu B_i(t) = \sum_{r=0}^{i} \binom{i}{r} B_{i-r} D^\mu t^r \tag{2.3.9}$$

En utilisant les relations (1.3.5) et (1.3.6), nous aurons

$$D^\mu t^r = 0 \quad \text{si } r < \lceil\mu\rceil \tag{2.3.10}$$

$$D^\mu t^r = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-\mu)} t^{r-\mu} \text{ avec } r \geq \lceil\mu\rceil, \tag{2.3.11}$$

donc la relation (2.3.10) devient

$$D^\mu B_i(t) = \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{i} \frac{i!}{r!(i-r)!} B_{i-r} \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+1-\mu)} t^{r-\mu}$$

On a $r \in \mathbb{N}$, donc $\Gamma(r+1) = r!$, alors

$$D^\mu B_i(t) = \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{i} \frac{i! B_{i-r}}{(i-r)!\Gamma(r+1-\mu)} t^{r-\mu}$$

On pose

$$b_{ir} = \frac{i!B_{i-r}}{(i-r)!\Gamma(r-\mu+1)} \tag{2.3.12}$$

par conséquent

$$D^{\mu}B_i(t) = \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{i} b_{ir}t^{r-\mu}, \tag{2.3.13}$$

En développant $t^{r-\mu}$ en terme de polynômes de Bernoulli par

$$t^{r-\mu} = \sum_{j=0}^{N} c_{rj}b_j(t) \tag{2.3.14}$$

avec

$$c_{r.j} = D^{(-1)} < f(t), B(t) >, \quad j = 0, 1, ..., N$$

avec

$$D =< B(t), B(t) > \quad \text{et } f(t) = t^{r-\mu}$$

Remplaçant (2.3.14) dans (2.3.13) nous aurons

$$\mathbf{D}^{(\mu)}B_i(t) = \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{i} b_{ir} \sum_{j=0}^{N} c_{rj}B_j(t), \tag{2.3.15}$$

$$= \sum_{j=0}^{N}(\sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{i} \theta_{ijr})B_j(t), \tag{2.3.16}$$

avec

$$\theta_{i.j.r} = b_{i.r}c_{r.j} \tag{2.3.17}$$

$$D^{\mu}B_i(t) = \sum_{j=0}^{M}(\sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{i} \theta_{ijr})B_j(t) \tag{2.3.18}$$

Réécrivons (2.3.16) sous une forme matricielle, nous obtenons

$$D^{\mu}B_i(t) = [\sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{i} \theta_{i.0.r}, \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{i} \theta_{i.1.r}..... \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{i} \theta_{i.M.r}]B\,(t)\,,$$

donc

$$\mathbf{D}^{(\mu)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \theta_{\lceil\mu\rceil.0.r} & \theta_{\lceil\mu\rceil.1.r} & \cdots & \theta_{\lceil\mu\rceil.M.r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{i} \theta_{i.0.r} & \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{i} \theta_{i.1.r} & \cdots & \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{i} \theta_{i.M.r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{M} \theta_{M.0.r} & \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{M} \theta_{M.1.r} & \cdots & \sum_{r=\lceil\mu\rceil}^{M} \theta_{M.M.r} \end{pmatrix}$$

donc nous arrivons au résultat désiré. ■

Chapitre 3

Applications

Dans ce chapitre on va essayer d'appliquer les différents outils introduits dans les chapitres precédents, on utilisera la matrice operationnelle de Bernoulli vues au chapitre précédent pour rechercher la solution approcheé.

3.1 Méthodes de résolution

3.1.1 Cas d'une équation différentielle fractionnaire linéaire

Considérons l'équation différentielle fractionnaire suivante :

$$D^{\mu}y(t) = a_1 D^{b_1}y(t) + ... + a_k D^{b_k}y(t) + a_{k+1}y(t) + a_{k+2}g(t) \tag{3.1.1}$$

avec les conditions initiales

$$y^{(i)}(0) = d_i \quad i = 0, ..., n\, d_i = n \tag{3.1.2}$$

oú a_j $j = 1, ..., k+2$ sont des coefficients réels constants et $n < \mu \leq n+1$, $0 < \beta_1 < \beta_2 < ...\beta_k < \mu$ et D^{μ} désigne la dérivée fractionnaire au sens de Caputo d'ordre μ.

Pour résoudre le problème (3.1.1) – (3.1.2) selon la méthode proposée, nous développons $y(t)$ et $g\,(t)$ en série de polynômes de Bernoulli par

$$y(t) \simeq \sum_{i=0}^{N} c_i b_i\,(t) = C^T B\,(t)\,, \tag{3.1.3}$$

$$g(t) \simeq \sum_{i=0}^{N} g_i b_i\,(t) = G^T B\,(t)\,, \tag{3.1.4}$$

où $G = [g_0, g_1, ..., g_N]^T$ est un vecteur connu et $C = [c_0, c_1, ..., c_N]^T$ est un vecteur inconnu. En utilisant les équations (2.3.5) et (3.1.3) nous aurons

$$D^{\mu} y(t) \simeq C^T D^{\mu} B(t) \simeq C^T \mathbf{D}^{(\mu)} B(t) \tag{3.1.5}$$

$$D^{\beta_j} y(t) \simeq C^T D^{\beta_j} B(t) \simeq C^T \mathbf{D}^{(\beta_j)} B(t) \tag{3.1.6}$$

En utilisant les équations (3.1.3)-(3.1.6), le résidu d' équation (3.1.1) peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} R_M(t) &\simeq C^T \mathbf{D}^{(\mu)} B(t) - a_1 C^T \mathbf{D}^{(\beta_1)} B(t) ... - a_k C^T \mathbf{D}^{(\beta_k)} B(t) - a_{k+1} C^T B(t) - a_{k+2} G^T B(t) \\ &= \left(C^T \mathbf{D}^{(\mu)} - \sum_{j=1}^{k} a_j C^T \mathbf{D}^{(\beta_j)} - a_{k+1} C^T - a_{k+2} G^T \right) B(t). \end{aligned}$$

En appliquant la méthode tau comme dans [4] :

$$< R_m(t), b_j(t) >= \int_0^1 R_m(t) b_j(t) dt = 0, \quad j = 0, 1, ..., N - n - 1. \tag{3.1.7}$$

Remplaçant les deux équations (2.3.3) et (3.1.3) dans (3.1.2) nous obtenons :

$$\begin{aligned} y(0) &= C^T B(0) = d_0 \\ y^{(1)}(0) &= C^T \mathbf{D}^{(1)} B(0) = d_1 \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ y^{(n)}(0) &= C^T \mathbf{D}^{(n)} B(0) = d_n \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

Les équations (3.1.7) et (3.1.8) nous donnent un système de $M + 1$ équations linéaires. Ce système linéaire peut être résolu pour les coefficients inconnus c_i du vecteur C. Par conséquent, $y(t)$ donné dans l'équation (3.1.3) peut être calculé.

3.1.2 Cas d'une équation différentielle fractionnaire non linéaire

Considérons l'équation différentielle fractionnaire non linéaire :

$$D^{\mu} y(t) = F(t, y(t), D^{\beta_1} y(t), D^{\beta_2} y(t)....., D^{\beta_k} y(t)) \tag{3.1.9}$$

Avec les conditions initiales :

$$y^{(i)}(0) = d_i \; i = 0, ..., n, \tag{3.1.10}$$

tels que $n < \mu \leq n+1$, $0 < \beta_1 < \beta_1 < ..... < \beta_k < \mu$,et D^{μ} désigne la dérivée fractionnaire aux sens de Caputo, on peut noter que F, peut être non linèaire.

Pour résoudre ce problème par la matrice opérationnelle de Bernoulli, on doit d'abord approximer $y(t)$, $D^{\mu}y(t)$ et $D^{\beta_j}y(t)$, $j = 0, ..., k$, par (3.1.3), (3.1.5) et (3.1.6) respectivement. En substituant ces équations dans l'équation (3.1.9) pour trouver la solution. D'où

$$C^T \mathbf{D}^{(\mu)} B(t) \simeq F(t, C^T B(t), C^T \mathbf{D}^{(\beta_1)} B(t), C^T \mathbf{D}^{(\beta_2)} B(t), ..., C^T \mathbf{D}^{(\beta_k)} B(t)) \tag{3.1.11}$$

Où $C = [c_0.....c_n]$ est un vecteur inconnu. Afin de trouver la solution de (3.1.9), nous collocons l'équation (3.1.11) à $M - n$ points de collocation. Pour des points de collocation appropriés, nous utilisons les premières $(M - n)$ racines de polynôme Legendre décalé $P_{M+1}(t)$. Ces équations, avec l'équation (3.1.10) génèrent un systéme de $M + 1$ équations non linéaire, qui peut être résolu en utilisant la méthode itérative de Newton (en utilisant Matlab). Par conséquence $y(t)$ donné dans l'équation (3.1.3) peut être calculé.

3.2 Exemples

3.2.1 Équations différentielles fractionnaires linéaires

Exemple 3.1 *Considérons le problème de valeur initiale suivant :*

$$\begin{cases} D^2y(t) + D^{\frac{1}{2}}y(t) + y(t) = g(t) \\ g(t) = t^2 + 2 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}}t^{1.5} \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

La solution exacte de ce probléme est $y(t) = t^2$. En appliquant la technique décrite à la section 3.1.1 avec $M = 2$, nous développons en séries de polynômes de Bernoulli les éléments suivants :

$$\begin{aligned} y(t) &= C^T B(t), \\ D^2y(t) &= C^T \mathbf{D}^{(2)} B(t), \\ D^{\frac{1}{2}}y(t) &= C^T \mathbf{D}^{(\frac{1}{2})} B(t), \\ g(t) &= G^T B(t). \end{aligned}$$

Avec

$$B(t) = [b_0(t), b_1(t), b_2(t)]^T.$$

D'apre (2.3.5) nous avons

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

Et

$$\mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un algorithme (Matlab) voir (3.2.2) nous permetons de calculer la matrice $D^{(\frac{1}{2})}$, nous obtenons :

$$\mathbf{D}^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3\sqrt{\pi}} & \frac{8}{3\sqrt{\pi}} & \frac{8}{7\sqrt{\pi}} \\ -\frac{4}{15\sqrt{\pi}} & \frac{8}{7\sqrt{\pi}} & \frac{4}{15\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}.$$

L'aproximation de $g(t)$ *est donnée par :*

$$G = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} + \frac{16}{15\sqrt{\pi}} \\ 1 + \frac{96}{35\sqrt{\pi}} \\ 1 + \frac{32}{21\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}.$$

Soit $C = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ *En appliquant la méthode* ***tau*** [4] *nous obtient :*

$$\int_0^1 [C^T \mathbf{D}^{(2)} B(t) + C^T \mathbf{D}^{(\frac{1}{2})} B(t) + C^T B(t) - G^T B(t)] dt = 0 \tag{3.2.2}$$

Avec

$$R_m \simeq (C^T \mathbf{D}^{(2)} + C^T \mathbf{D}^{(\frac{1}{2})} + C^T - G^T) B(t)$$

En utilisant l'équation (3.2.1) *nous avons :*

$$\begin{cases} c_0 - \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{6} c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 = 0 \end{cases} \tag{3.2.3}$$

D'après (3.2.2) *nous avons :*

$$c_0 + \frac{4}{315\sqrt{\pi}} c_1 + (2 - \frac{4}{15\sqrt{\pi}}) c_2 - (\frac{7}{3} + \frac{16}{15\sqrt{\pi}}) = 0 \tag{3.2.4}$$

En résolvant les équations du système (3.2.3) *et* (3.2.4) *nous obtenons :*

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc la solution $y(t)$ *est donnée par*

$$y(t) = [\tfrac{1}{3}; 1; 1] \begin{pmatrix} 1 \\ t - \frac{1}{2} \\ t^2 - t + \frac{1}{6} \end{pmatrix} = t^2$$

Qui est la solution exacte de ce problème.

Exemple 3.2 *Considérons le problème de valeur aux limit linéaire suivant* [18] *:*

$$D^{\mu_1}y(t) - D^{\mu_2}y(t) = -1 - e^{t-1},\ 0 < t < 1,\ 1 < \mu_1 \leq 1,\ 0 < \mu_2 <\leq 1 \tag{3.2.5}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{3.2.6}$$

Si nous définons $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$ *et* $M = 2$, *le problème ci-dessus* (3.2.5) *et* (3.2.6) *devient*

$$C^t\mathbf{D}^{(1)}B\left(t\right) - C^t\mathbf{D}^{(2)}B\left(t\right) - G^TB\left(t\right) = 0 \tag{3.2.7}$$

$$C^tB\left(0\right) = 0 \tag{3.2.8}$$

Avec

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La solution exact de ce problème (3.2.5) *et* (3.2.6) *dans le cas correspondant à* $\mu_1 = 2$ *et* $\mu_2 = 1$ *est* $y = t(-1 - e^{t-1})$.

Dans le tableau ci dessous, nous comparons numériquement les résultats de $y(t)$, *en utilisant notre méthode d'écrit dans la section* (3.1.1) *ou* $M = 6$ *avec la solution exacte (voir figure* (3.4)*), et les solutions obtenus par d'autre méthodes numériques* [10] *:*

t	***Bernoulli wavelet [10]***	***Notre méthode*** $M = 6$	***Solution exact*** $\mu_1 = 2 et \mu_2 = 1$
0.1	0.05934279	0.05934279	0.05934303
0.2	0.11013431	0.11013412	0.11013420
0.3	0.15102443	0.15102473	0.15102440
0.4	0.18047575	0.18047575	0.18047534
0.5	0.19673476	0.19673472	0.19673467
0.6	0.19780804	0.19780761	0.19780797
0.7	0.18142748	0.18142688	0.18142724
0.8	0.14501561	0.14501541	0.14501539
0.9	0.08564683	0.08564654	0.08564632

tableau 1 : Résultats numériques

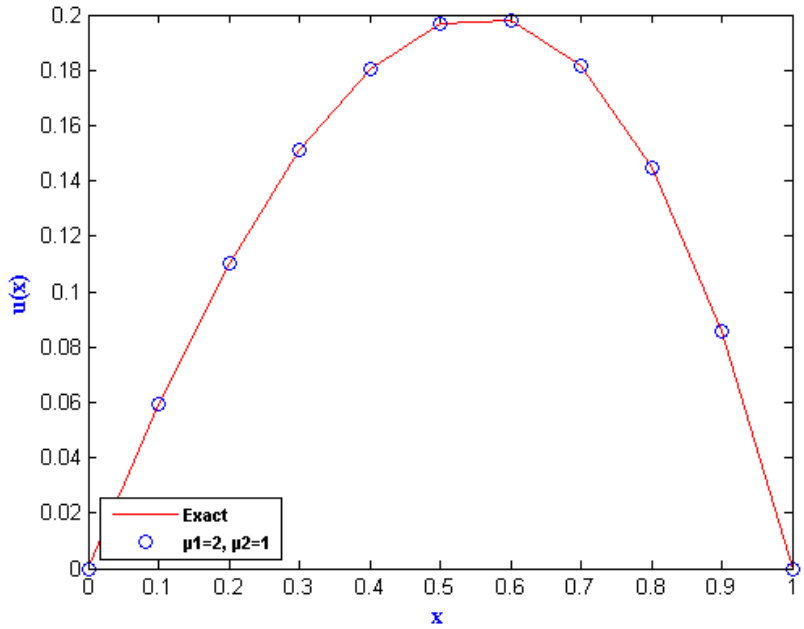


FIGURE 3.4 :Comparaisons de $y(t)$ ou (M=5) avec la solution exacte pour $\mu_1 = 2$ et $\mu_2 = 1$.

L'erreurs absolue l^∞ et l^2 pour la solution $y(t)$ est obtenue avec des différentes valeurs de $M = 2, 3, 5, 7, 9$ pour $\mu_1 = 2$ et $\mu_2 = 1$ montionnées dans le tableau ci-dessous

M	2	3	5	7	9
Erl_2	4.22×10^{-02}	1.47×10^{-02}	2.17×10^{-05}	2.66×10^{-08}	4.42×10^{-11}
Erl_∞	2.02×10^{-02}	7.28×10^{-03}	1.21×10^{-05}	1.52×10^{-08}	1.09×10^{-11}

tableau 1 : L'érreur absolue l^∞ ***et*** l^2

La figure (3.1) montre que les solutions approchées dans le cas ou $\mu_1 = 2$ *et pour les différentes valeurs de* μ_2 *proches de la valeur* 1 $(\mu_2 = 0.7, 0.8, 0.9, 1)$. *La figure (3.2) montre que les solutions approchées dans le cas ou* $\mu_2 = 1$ *et pour les différentes valeurs de* μ_1 *proches de la valeur* 2 $(\mu_1 = 1.7, 1.8, 1.9, 2)$. *Dans lequel les chiffres affirment que lorsque* μ *approchée a* 1, *notre résultat approchée à la solution exacte.*

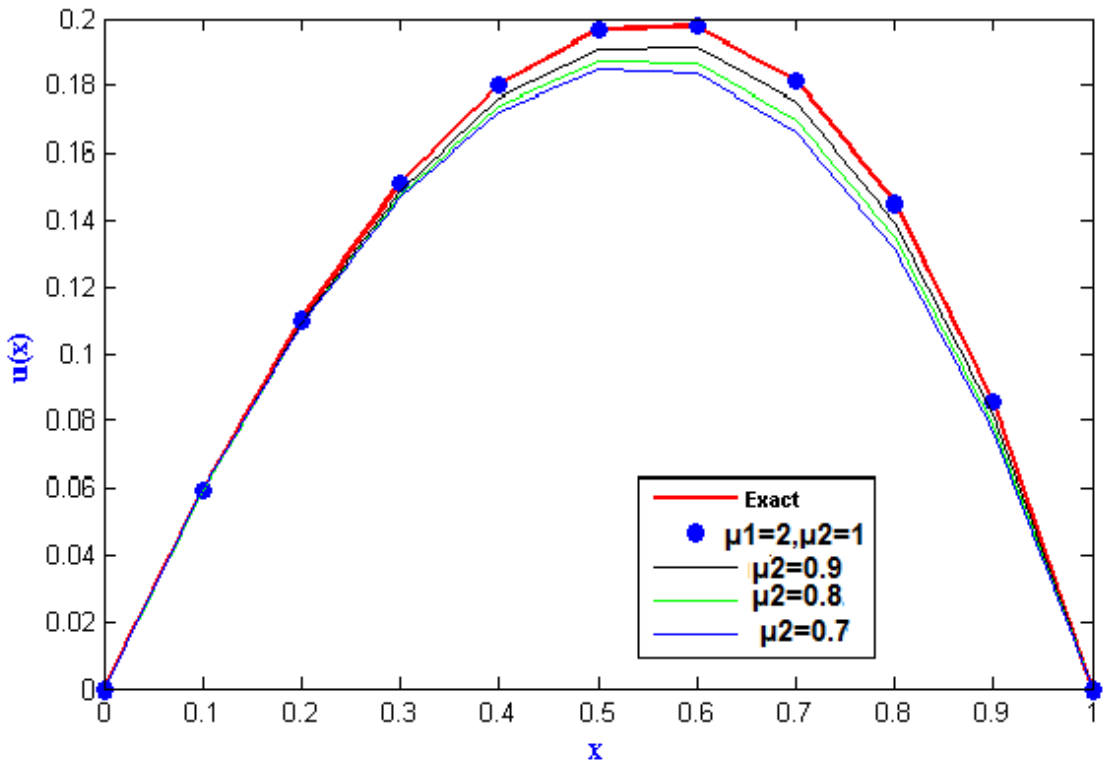


FIGURE 3.1 – Comparaisons les résultats numériques de $y(t)$ avec (M=6) dans le cas corresspondant de $\mu_1 = 2$ et $\mu_2 = 0.7, 0.8, 0.9, 1$ avec la solution exacte

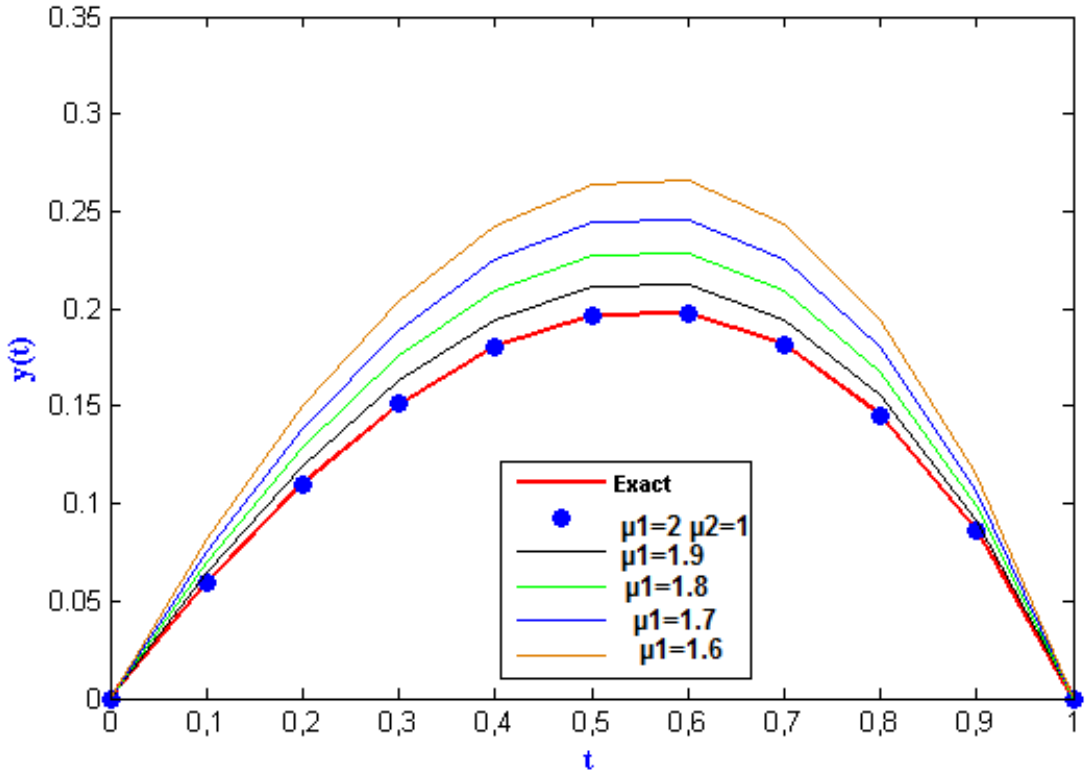


FIGURE 3.2 – Comparaisons les résultats numériques de $y(t)$ avec (M=6) dans le cas corresspondant de $\mu_2 = 1$ et $\mu_1 = 1.7, 1.8, 1.9, 2$ avec la solution exacte

Exemple 3.3 *Considérons l'équation différentielle fractionnaire linéaire de valeur initiale suivant :*

$$D^{\mu}y(t) + y(t) = -t^2 - \frac{2}{\Gamma(3-\mu)}t^{2-\mu}, 0 < \mu < 1 \tag{3.2.9}$$

Avec la condition initial :

$$y(0) = 0 \tag{3.2.10}$$

En appliquant notre technique pour résoudre l'équation.(3.2.9) *pour différentes valeurs de* μ. *En utilisant la technique décrite à la Section* (3.1.1), *en convertissant l'équation.* (3.2.9) *au système suivant :*

$$C^T(\mathbf{D}^{(\mu)} + 1)B(t) + t^2 + \frac{2}{\Gamma(3-\mu)}t^{2-\mu} = 0 \tag{3.2.11}$$

Si nous définons. $\mu = 0.5$ *et* $M = 2$, *le problème ci-dessus (3.2.9) devient :*

$$C^t(\mathbf{D}^{(\frac{1}{2})} + 1)B(t) + t^2 + \frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})}t^{\frac{3}{2}} = 0 \tag{3.2.12}$$

$$C^T B(0) = 0 \tag{3.2.13}$$

De (3.2.2) *nous avons :*

$$\mathbf{D}^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{3\sqrt{\pi}} & \frac{8}{3\sqrt{\pi}} & \frac{8}{7\sqrt{\pi}} \\ -\frac{4}{15\sqrt{\pi}} & \frac{8}{7\sqrt{\pi}} & \frac{4}{15\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}$$

En appliquant la méthode ***tau****, pour le cas* $M = 2$ *et* $\mu = \frac{1}{2}$ *le résidu de l'équation* (3.2.9) *peut être calculé par la formule :*

$$\int_0^1 [(C^t\mathbf{D}^{(\frac{1}{2})}+1)B(t)+t^2+\frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})}t^{\frac{3}{2}}]dt=0 \tag{3.2.14}$$

$$\int_0^1 [(C^t\mathbf{D}^{(\frac{1}{2})}+1)B(t)+t^2+\frac{2}{\Gamma(\frac{5}{2})}t^{\frac{3}{2}}](t-\frac{1}{2})dt=0 \tag{3.2.15}$$

En utilisant l'équation (3.2.13), (3.2.14) *et* (3.2.15) *nous obtenons :*

$$c_0-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{6}c_2 = 0 \tag{3.2.16}$$

$$c_0+\frac{4}{3\sqrt{\pi}}c_1-\frac{4}{15\sqrt{\pi}}c_2-(\frac{1}{3}+\frac{16}{15\sqrt{\pi}}) = 0 \tag{3.2.17}$$

$$(\frac{2}{15\sqrt{\pi}}+\frac{1}{12})c_1+\frac{2}{21\sqrt{\pi}}c_2-(\frac{1}{12}+\frac{8}{35\sqrt{\pi}}) = 0 \tag{3.2.18}$$

En résolvant les équations du système (3.2.16), (3.2.17) *et* (3.2.18) *nous obtenons :*

$$C=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Par conséquent l'approximation $y(t)$ *est donnée par :*

$$y(t)=[\tfrac{1}{3};1;1]\begin{pmatrix}1\\t-\frac{1}{2}\\t^2-t+\frac{1}{6}\end{pmatrix}=t^2$$

Qui est la solution exacte de ce problème .

3.2.2 Exemples d'une équation différentielle fractionnaire non linéaire

Exemple 3.4 *considéront le problème de valeure initiale non linièaire suivant :*

$$\mathbf{D}^3 y(t) + \mathbf{D}^{\frac{5}{2}} y(t) + y^2(t) = t^4 \tag{3.2.19}$$

Avec les condtions initials :

$$y(0) = y^{'}(0) = 0,\ y^{''}(0) = 2 \tag{3.2.20}$$

La solution de ce problème est $y(t) = t^2$.

Nous avons résolu le problème ci dessus (3.2.19)*, en appliquant la thechnique dècrite à la section* (3.1.2) *(cas non linéaire) ou* $M = 3$*, nous approchons d'une solution comme*

$$y(t) = \sum_{i=0}^{M-1} B_i(t) = C^T B(t)$$

En utilisant les formulès (3.1.5)*,* (3.1.6) *et* (3.1.8) *nous obtenons :*

$$\begin{cases} \mathbf{D}^3 y(t) = C^T \mathbf{D}^{(3)} B(t) \\ \mathbf{D}^{\frac{5}{2}} y(t) = C^T \mathbf{D}^{(\frac{5}{2})} B(t) \end{cases} \tag{3.2.21}$$

et

$$\begin{cases} y(0) = C^T B(0) = 0 \\ y^{'}(t) = C^T \mathbf{D}^{(1)} B(0) = 0 \\ y^{''}(t) = C^T \mathbf{D}^{(2)} B(0) = 2 \end{cases} \tag{3.2.22}$$

Nous avons

$$B(t) = [1; t - \tfrac{1}{2}; t^2 - t + \tfrac{1}{6}; t^3 - \tfrac{3}{2}t^2 + \tfrac{1}{2}]^T$$

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\mathbf{D}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{D}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un algorithme (Matlab) voir (3.2.2)(dans l'annexe) nous permetons de calculer la matrice $D^{(\frac{5}{2})}$*, nous obtenons :*

$$\mathbf{D}^{(\frac{5}{2})} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{8}{\sqrt{\pi}} & \frac{32}{3\sqrt{\pi}} & \frac{-48}{7\sqrt{\pi}} & \frac{32}{3\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}$$

Remplaçant (3.2.21) et les condtions initiales (3.2.22) dans (3.2.19) nous obtenons :

$$C^T\mathbf{D}^{(3)}B\left(t\right) + C^T\mathbf{D}^{(\frac{5}{2})}B\left(t\right) + \left[C^TB\left(t\right)\right]^2 - t^4 = 0 \tag{3.2.23}$$

$$C^TB\left(0\right) = C^T\mathbf{D}^{(1)}B\left(0\right) = 0,\ C^T\mathbf{D}^{(2)}B\left(0\right) = 2 \tag{3.2.24}$$

En utilisant l'équation (3.2.24) nous obtenons :

$$\begin{cases} c_0 - \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{6}c_2 = 0 \\ c_1 - c_2 + \frac{1}{2}c_3 = 0 \\ 2c_2 - 3c_3 = 2 \end{cases} \tag{3.2.25}$$

Maintenant, nous collectons le système ci-dessus (3.2.23) à la première racine de Polynômes de Legendre décalée. $t_0 = \frac{1}{2}$.

$$C^T D^{(3)} B\left(t_0\right) + C^T D^{(\frac{5}{2})} B\left(t_0\right) + \left[C^T B\left(t_0\right)\right]^2 - t_0^4 = 0 \tag{3.2.26}$$

En résolvant les équations du système (3.2.25) *et* (3.2.26) *en utilisant la méthode itérative de Newton.(en utilisant matlabe), nous obtenons :*

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc la solution approximative $y(t)$ *est donnée par :*

$$y(t) = [\tfrac{1}{3}; 1; 1; 0] \begin{pmatrix} 1 \\ t - \frac{1}{2} \\ t^2 - t + \frac{1}{6} \\ t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t \end{pmatrix} = t^2$$

Qui est la solution exacte.

Exemple 3.5 *Considérons le problème non-linéaire de valeur initiale de Riccati suivant* [9]

$$\mathbf{D}^{\mu} y(t) = 1 - y^2(t) \;\; 0 < \mu \leq 1 \tag{3.2.27}$$

Avec une condtion initial

$$y(0) = 0 \tag{3.2.28}$$

La solution exacte de ce problème lorsque $\mu = 1$ *est connue* ([9])

$$y(t) = \tfrac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$$

Nous avons appliquer la méthode operationnelle actuelle des polynôme de Bernoulli, pour résoudre l'équation. (3.2.27) *avec des différentes valeurs de* μ. *En utilisant la thechnique d'écrite à la Section* (3.1.2). *Nous convertissons l'équation* (3.2.27) *au système suivant :*

$$C^T \mathbf{D}^{(\mu)} B\left(t\right) + \left[C^T B\left(t\right)\right]^2 - 1 = 0 \;\; 0 < \mu \leq 1 \tag{3.2.29}$$

Maintenant on rassemble le système ci-dessous dans les zéros de polynômes de legendre pour trouver le vecteur C, en utilisant la méthode itérative de Newton (utilisant le Matlab), La solution obtenue par cette approche pour $\mu = 1$ *et* $M = 5$ *est présenté dans la figure suivante :*

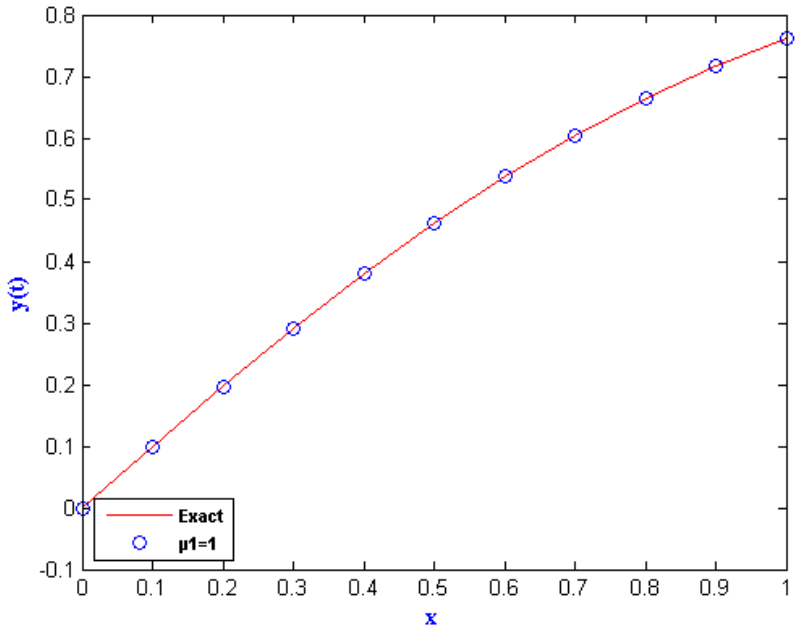


FIGURE 3.4 :Comparaisons de $y(t)$ *ou (M=5) avec la solution exacte pour* $\mu = 1$ *.*

Dans le tableau ci dessous, nous comparons numériquement les résultats de $y(t)$*, en utilisant notre méthode d'écrit à la section* (3.1.2) *ou* $M = 5$ *avec la solution exacte et les solutions obtenus par d'autre méthodes numériques* [10] *:*

t	***Bernoulli wavelet [10]***	***Notre méthode*** $M = 5$	***Solution exact*** $\mu_1 = 2 et \mu_2 = 1$
0.1	0.099684	0.099658	0.099668
0.2	0.197417	0.197407	0.197377
0.3	0.291316	0.291333	0.291310
0.4	0.379912	0.379931	0.379945
0.5	0.462083	0.462083	0.462117
0.6	0.537057	0.537036	0.537053
0.7	0.604405	0.604387	0.604369
0.8	0.664052	0.664061	0.664032
0.9	0.716264	0.716289	0.716296

tableau 2 : Résultats numériques

L'erreur absolue pour la solution $y(t)$ *obtenue avec les valeurs différentes de* $M = 2, 4, 6, 8, 12$ *et* $\mu = 1$ *décrite dans le tableau :*

M	2	4	6	8	12	13
Erl_2	1.34×10^{-02}	1.42×10^{-04}	7.62×10^{-06}	2.50×10^{-07}	4.26×10^{-09}	7.58×10^{-11}
Erl_∞	8.05×10^{-02}	9.10×10^{-05}	4.24×10^{-06}	1.21×10^{-07}	2.37×10^{-09}	4.11×10^{-11}

tableau 2 : L'érreur absolue l^∞ ***et*** l^2

Dans la figure (3.5) *nous avons comparé les résultats obtenus par approche actuelle avec* $M = 10$ *pour* $\mu = 0.9, 0.75, 0.5$ *et la solution exacte. Dans lequel les chiffres affirement que lorsque* μ *approche de* 1 *notre résultat approche à la solution exacte.*

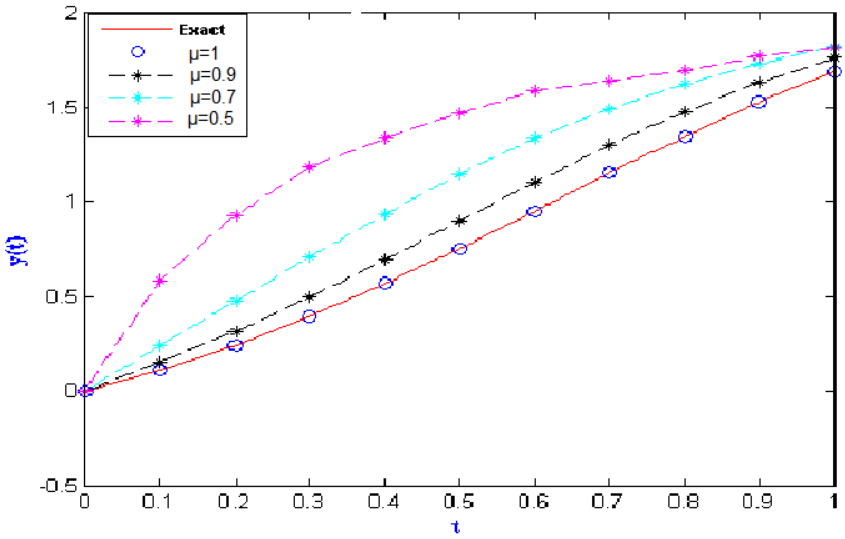


FIGURE 3.5- Comparaisons de $y(t)$ ou (M=10) avec la solution exacte pour $\mu = 0.9, 0.75, 0.5$.

Exemple 3.6 *On considére l équation différentielle d'ordre fractionnaire non-linéaire de Riccati suivante voir* [15], *[21] :*

$$\mathbf{D}^{\mu}y(t) = 2y(t) - y^2(t) + 1 \;\; 0 < \mu \leq 1 \tag{3.2.30}$$

Avec une condtion initial

$$y(0) = 0 \tag{3.2.31}$$

La solution exacte pour $\mu = 1$ *a été trouvé que* [15]

$$y(t) = 1 + \sqrt{2}\tanh[\sqrt{2t} + \tfrac{1}{2}\log(\tfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1})]$$

Pour résoudre l'équation (3.2.30) *en utilisant notre méthode d'écrite à la Section* (3.1.2),

$$y(t) = C^T B(t) \tag{3.2.32}$$

Alors

$$\mathbf{D}^{\mu}y(t) = C^T \mathbf{D}^{(\mu)} B\,(t) \tag{3.2.33}$$

On remplace (3.2.32) *et la condtion initiale* (3.2.33) *dans l'équation.* (3.2.30) *on trouve le système algébrique suivant :*

$$C^T \mathbf{D}^{(\mu)} B\,(t) - 2C^T B\,(t) + [C^T B\,(t)]^2 - 1 = 0 \;\; 0 < \mu \leq 1 \tag{3.2.34}$$

Maintenant on rassemble le système (3.2.34) *ci-dessous dans les zéros de polynômes de legendre pour trouver le vecteur* C, *on utilisant la méthode itérative de Newton,(utilisant le Matlab). La solution obtenue par cette approche pour* $\mu = 1$ *et* $M = 5$ *est présenté dans la figure suivante :*

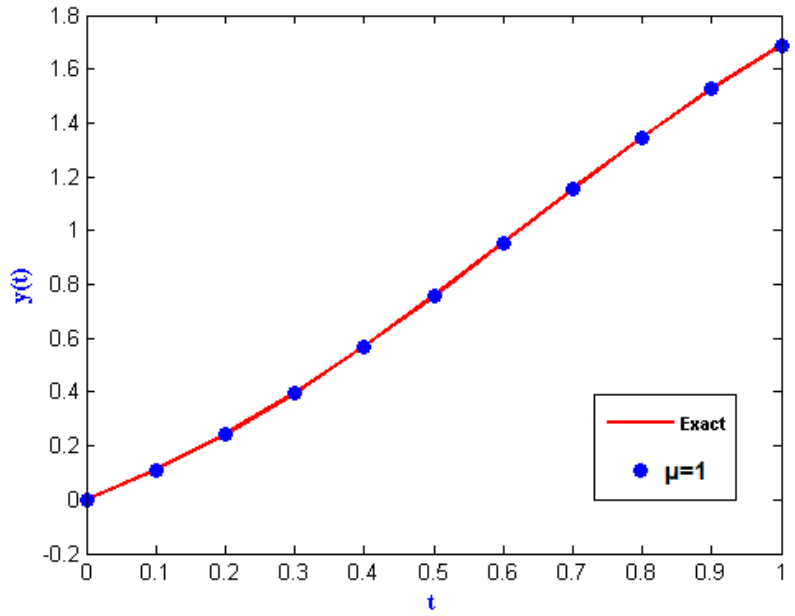


FIGURE 3.3 – Comparaison de $y(t)$ pour (M=5) avec la solution exacte pour $\mu = 1$

Dans le tabbleau ci dessous, nous comparons numériquement les résultats de $y(t)$, en utilisant notre méthode d'écrit à la section (3.1.2) ou $M = 10$ avec la solution exacte (voir figure 3.6). et les solutions obtenus par d'autre méthodes numériques [10] :

t	***Bernoulli wavelet [10]***	***Notre méthode***	***la solution exact pour*** $\mu = 1$
0	0.000001	0	0
0.1	0.110295	0.110295	0.110295
0.2	0.241977	0.241976	0.241976
0.3	0.395105	0.395104	0.395104
0.4	0.567812	0.567812	0.567812
0.5	0.756015	0.756014	0.756014
0.6	0.953566	0.953566	0.953566
0.7	1.152949	1.152949	1.152948
0.8	1.346364	1.346363	1.346363
0.9	1.526911	1.526911	1.526911
1	1.689497	1.6894983	1.6894983

tableau 3 : Résultats numériques

L'erreur absolue de la solution $y(t)$ *est obtenue par les valeurs différentes de* $M = 2, 4, 6, 8, 10, 12$ *et* $\mu = 1$, *montionée dans le tableau :*

M	2	4	6	8	10	12
Erl_2	9.60×10^{-02}	3.62×10^{-03}	1.32×10^{-04}	5.37×10^{-06}	1.64×10^{-07}	3.69×10^{-8}
Erl_∞	4.75×10^{-02}	1.85×10^{-03}	7.47×10^{-05}	3.03×10^{-06}	1.09×10^{-07}	2.75×10^{-8}

tableau 3 : L'érreur absolue l^∞ ***et*** l^2

Cet exemple est résolu par l'approche par $M = 10$ *pour* $\mu = 0.9, 0.75, 0.5$ *On compare les résultats numériques à celui de la solution exacte dans la figure* (3.7). *Ce qui est affirmé dans la figure lorsque* μ *approche de* 1 *notre résultat approche à la solution exacte.*

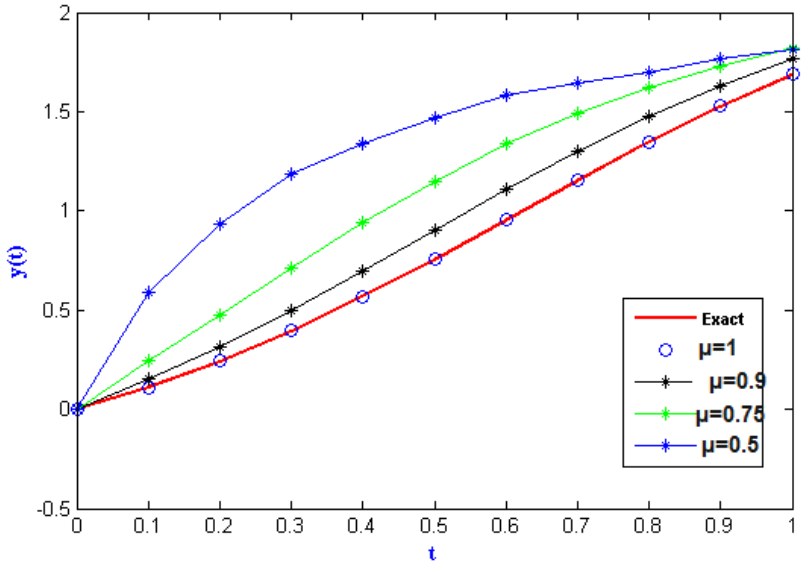


FIGURE 3.7 :Comparaisons de $y(t)$ *ou (M=10) avec la solution exacte pour*$\mu = 0.9, 0.75, 0.5$.

Annexe.

Les programmes en matlabe utilisé

Programme Matlab pour calcule La matrice operationnell de Berrnoulli

```
function DD= D_alpham(x,t,B,D,M,mu,ub)
syms s
%%%%%%%%%%%%%%%%%% Calculation of crj %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
cr=zeros(x,M);
for r=ub:M-1
          muu=r-mu;
          g=t^muu
          G=g*B;
          F=int(G,0,1);
          C=F.'*(D^(-1));
          cr=[cr;C]
end
cr;
% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  calcule b_(i,r)% %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 bernoulli=[1 -1/2 1/6 0 -1/30 0 1/42 0 -1/30 0 5/66 0 -691/2730 0 7/6 0
     -3617/510 0 43867/798 0 -174611/330];
bb=zeros(M);
  for i=0:M-1
     for r=0:M-1
          if i>=r

bb(i+1,r+1)=(factorial(i)*bernoulli(i-r+1))/(factorial(i-r)*gamma(r+1-mu));
```

```
      end
    end
  end
  bb;
  %%%%%%%% matrice opérationnelle de dérivation %%%%%%%%
DD=zeros(M);
for i=1:M
    for j=1:M
       if i<=ub
           DD(i,j)=0;
       else
           for i=(ub+1):M
              s=0;
               for r=(ub+1):i
                 s=bb(i,r)*cr(r,j)+s;
               end
               DD(i,j)=s;
           end
       end
    end
end
end
```

L'approximation des fonctions par la base de polynôme de Bernoulli

```
syms t i j
B=[1;t-1/2;t^2-t+1/6;t^3-(3/2)*t^2+(1/2)*t];
%t=0:0.1:1;
D=int(B*B.',0,1);
f=exp(t);
F=[int(f*B(1),0,1);int(f*B(2),0,1);int(f*B(3),0,1);int(f*B(4),0,1)];
k=inv(D);
CT=F.'*inv(D);
F=CT*B;
F=exp(1) - (1000*exp(1) - 2720)*(t - 1/2) + (210*exp(1) - 570)*(t.^2 - t +
1/6) - (9940*exp(1) - 27020)*(t.^3 - (3*t.^2)/2 + t/2) - 1

plot(t,f,'r',t,F,'bo')
legend({'Exact','F'},'Location','southEast',...
      'FontSize',8,'FontWeight','bold')
  %Légende du tracé avec le texte à afficher se trouvant entre {}
 xlabel('t','FontSize',10,...          %Nom de l'axe des abscisses du tracé
       'FontWeight','bold','FontName',...
       'Times New Roman','Color','b')
ylabel('f(t)','FontSize',10,...      %Nom de l'axe des ordonnées du tracé
       'FontWeight','bold','FontName',...
       'Times New Roman','Color','b')
```

Exemple 1.2

```
%%%%%%%%%%%%%% Exemple 1.2%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc
clear all
% format long
% format compact
 format long e
M=10;
% ub=3;mu=3;
syms t  c0 c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9 c10 c11 c12 c13 c14 c15 c16
C=[c0 c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9 c10 c11 c12 c13 c14 c15 c16];
C=C(1,1:M);
%%%%%%%%% polynomail functions %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
b0=@(t)0*t+1;
b1=@(t)t-1/2;
b2=@(t)t^2-t+1/6;
b3=@(t)t^3-(3/2)*t^2+(1/2)*t;
b4=@(t)t^4-2*t^3+t^2-1/30;
b5=@(t)t^5-5/2*t^4+5/3*t^3-1/6*t;
b6=@(t)t^6-3*t^5+5/2*t^4-1/2*t^2+1/42;
b7=@(t)t^7-7/2*t^6+7/2*t^5-7/6*t^3+1/6*t;
b8=@(t)t^8-4*t^7+14/3*t^6-7/3*t^4+2/3*t^2-1/30;
b9=@(t)t^9-9/2*t^8+6*t^7-21/5*t^5+2*t^3-3/10*t;
b10=@(t)t^10-5*t^9+15/2*t^8-7*t^6+5*t^4-3/2*t^2+5/66;
```

```
b11=@(t)t^11-11/2*t^10+55/6*t^9-11*t^7+11*t^5-11/2*t^3+5/6*t;
b12=@(t)t^12-6*t^11+11*t^10-33/2*t^8+22*t^6-33/2*t^4+5*t^2-691/2730;
b13=@(t)t^13-13/2*t^12+13*t^11-143/6*t^9+286/7*t^7
-429/10*t^5+65/3*t^3-691/210*t;
b14=@(t)t^14-7*t^13+91/6*t^12-1001/30*t^10+143/2*t^8
-1001/10*t^6+455/6*t^4-691/30*t^2+7/6;
b15=@(t)t^15-15/2*t^14+35/2*t^13-91/2*t^11+715/6*t^9
-429/2*t^7+455/2*t^5-691/6*t^3+35/2*t;
b16=@(t)t^16-8*t^15+20*t^14-182/3*t^12+572/3*t^10-429*t^8
+1820/3*t^6-1382/3*t^4+140*t^2-3617/510;
B=[b0(t); b1(t); b2(t); b3(t); b4(t); b5(t); b6(t); b7(t); b8(t); b9(t);
    b10(t); b11(t); b12(t); b13(t); b14(t); b15(t); b16(t)];
B=B(1:M,1);
%%%%%%%%% calculation of D %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D=int(B*B.',0,1);
 %%%%%%%%% calculation of f %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
         f=-1-exp(t-1);
         F=f*B;
         F=int(F,0,1);
         CF=F.'*(D^(-1))
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 D1= D_alpham(1,t,B,D,M,1,1);
```

```
  R=C*D2*B-C*D1*B-CF*B
  eq1=int(R,0,1);
  eq2=int(R*B(2),0,1);
  eq3=int(R*B(3),0,1);
  eq4=int(R*B(4),0,1);
  eq5=int(R*B(5),0,1);
  eq6=int(R*B(6),0,1);
  eq7=int(R*B(7),0,1);
  eq8=int(R*B(8),0,1);
%   eq9=int(R*B(9),0,1);
%   eq10=int(R*B(10),0,1);
%   eq11=int(R*B(11),0,1);
%   eq12=int(R*B(12),0,1);
%   eq13=int(R*B(13),0,1);
%   eq14=int(R*B(14),0,1);
%   eq15=int(R*B(15),0,1);

  eq16=C*subs(B,t,0);
%   c0-(1/2)*c1+(1/6)*c2-(1/30)*c4+(1/42)*c6-(1/30)*c8+(5/66)
%*c10-(691/2730)*c12+(7/6)*c14-(3617/510)*c16;
  eq17=C*subs(B,t,1);
%   c0+(1/2)*c1+(1/6)*c2-(1/30)*c4+(1/42)*c6-(1/30)*c8+(5/66)*c10-
%(691/2730)*c12+(7/6)*c14-(3617/510)*c16;
```

```
S1 = solve(eq1,eq2,eq3,eq4,eq5,eq6,eq7,eq8,eq16,eq17);
%  c16= S1.c16;
%  c15= S1.c15;
%  c14= S1.c14;
%  c13= S1.c13;
%  c12= S1.c12;
%  c11= S1.c11;
%  c10= S1.c10;
 c9= S1.c9;
 c8 = S1.c8;
 c7 = S1.c7;
 c6 = S1.c6;
 c5 = S1.c5;
 c4= S1.c4;
 c3 = S1.c3;
 c2 = S1.c2;
 c1 = S1.c1;
 c0 = S1.c0;
disp('----------coefficients --------------------')
    coefficients =[c0 c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9];
    C=coefficients
  disp('----------La solution--------------------')
u21=@(t)C*[1 ;t-1/2; t^2-t+1/6;t^3-(3/2)*t^2+(1/2)*t;t^4-2*t^3+t^2-1/30
```

```
t=0:0.1:1;
figure(1);%Numérotation de la figure (important si plusieurs figures)
grid on;    %Une grille de fond est affichée
l=length(t);
for i=1:l
   yy=@(t)t*(1-exp(t-1));
    u(i)=yy(t(i));
end
for i=1:l
    uq21(i)=u21(t(i));
end
plot(t,u,'r',t,uq21,'bo')
%Tracés des quatre fonctions cosinus sur le même graphe
legend({'Exact','µ1=2, µ2=1'},'Location','southwest',...
    'FontSize',8,'FontWeight','bold')
  %Légende du tracé avec le texte à afficher se trouvant entre {}
 xlabel('x','FontSize',10,...          %Nom de l'axe des abscisses du tracé
       'FontWeight','bold','FontName',...
       'Times New Roman','Color','b')
ylabel('u(x)','FontSize',10,...      %Nom de l'axe des ordonnées du tracé
       'FontWeight','bold','FontName',...
       'Times New Roman','Color','b')
u=uq21
```

Exemple 1.5

```
%%%%%%%%%%%%%% Exemple 1.5 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clc
clear all
% format long
 format compact
% format long e
M=7;% ub=3;mu=3;
syms t  c0 c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9 c10 c11 c12 c13 c14 c15 c16
C=[c0 c1 c2 c3 c4 c5 c6 c7 c8 c9 c10 c11 c12 c13 c14 c15 c16];
C=C(1,1:M);
%%%%%%%%% polynomail functions %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
b0=@(t)0*t+1;
b1=@(t)t-1/2;
b2=@(t)t^2-t+1/6;
b3=@(t)t^3-(3/2)*t^2+(1/2)*t;
b4=@(t)t^4-2*t^3+t^2-1/30;
b5=@(t)t^5-5/2*t^4+5/3*t^3-1/6*t;
b6=@(t)t^6-3*t^5+5/2*t^4-1/2*t^2+1/42;
b7=@(t)t^7-7/2*t^6+7/2*t^5-7/6*t^3+1/6*t;
b8=@(t)t^8-4*t^7+14/3*t^6-7/3*t^4+2/3*t^2-1/30;
b9=@(t)t^9-9/2*t^8+6*t^7-21/5*t^5+2*t^3-3/10*t;
b10=@(t)t^10-5*t^9+15/2*t^8-7*t^6+5*t^4-3/2*t^2+5/66;
b11=@(t)t^11-11/2*t^10+55/6*t^9-11*t^7+11*t^5-11/2*t^3+5/6*t;
b12=@(t)t^12-6*t^11+11*t^10-33/2*t^8+22*t^6-33/2*t^4+5*t^2-691/2730;
```

```
b15=@(t)t^15-15/2*t^14+35/2*t^13-91/2*t^11+715/6*t^9-429/2*t^7+455/2*t^5
-691/6*t^3+35/2*t;
b16=@(t)t^16-8*t^15+20*t^14-182/3*t^12+572/3*t^10-429*t^8+1820/3*t^6-1382/3
*t^4+140*t^2-3617/510;
B=[b0(t); b1(t); b2(t); b3(t); b4(t); b5(t); b6(t); b7(t); b8(t); b9(t);
  b10(t); b11(t); b12(t);b13(t); b14(t); b15(t); b16(t)];
B=B(1:M,1);
%%%%%%%%%% calculation of D %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D=int(B*B.',0,1);
 %%%%%%%%%% calculation of f %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
         f=t^2;
         F=f*B;
         F=int(F,0,1);
         CF=F.'*(D^(-1));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%Calculation of V %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   V = aproximait_y2(M,D);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
D15= D_alpham(2,t,B,D,M,0.5,2)
D52= D_alpham(3,t,B,D,M,2.5,3);
D05= D_alpham(1,t,B,D,M,0.5,1)
D1=D_alpham(1,t,B,D,M,1,1)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
 R=C*D1*B+C*B*B.'*C.'-CF*B;
```

```
N=[1/6, 1/3, 1/2, 2/3, 5/6 , 1];
eq1=subs(R,t,N(1))
eq2=subs(R,t,N(2))
eq3=subs(R,t,N(3))
eq4=subs(R,t,N(4))
eq5=subs(R,t,N(5))
eq6=subs(R,t,N(6))
eq7=C*subs(B,t,0)
guess=1*ones(1,M);
C=fsolve(@myfun6,guess)
 C1=fsolve(@myfunrecati6,1*guess)
% %   C2=fsolve(@myfunrecati6,1*guess)
% %   disp('----------coefficients --------------------')
% %   coefficients =C
%   disp('----------La solution--------------------')
% %  y07 =@(t)C*[1 ;t-1/2; t^2-t+1/6 ;t^3-(3/2)*t^2+(1/2)*t; t^4-2*t^3+t^2
%-1/30; t^5-5/2*t^4+5/3*t^2-1/6*t];
% %  y08 =@(t)C1*[1 ;t-1/2; t^2-t+1/6 ;t^3-(3/2)*t^2+(1/2)*t; t^4-2*t^3+t^2
%-1/30; t^5-5/2*t^4+5/3*t^2-1/6*t];
   y09=@(t)C*[1 ;t-1/2; t^2-t+1/6;t^3-(3/2)*t^2+(1/2)*t;t^4-2*t^3+t^2-1/30;
   t^5-5/2*t^4+5/3*t^3-1/6*t;t^6-3*t^5+5/2*t^4-1/2*t^2+1/42];
 t=0:0.1:1;
figure(1);%Numérotation de la figure (important si plusieurs figures)
grid on;    %Une grille de fond est affichée
```

```
l=length(t);
for i=1:l
%    yy=@(t)1+(sqrt(2)*tanh(sqrt(2)*t+1/2*(log((sqrt(2)-1)/(sqrt(2)+1)))));
    yy=@(t)(exp(2*t)-1)/(exp(2*t)+1);
    y(i)=yy(t(i));
end
for i=1:l
%     yq07(i)=y07(t(i));
%     yq08(i)=y08(t(i));
     yq09(i)=y09(t(i));

end
plot(t,y,'r',t,yq09,'bo')
%Tracés des quatre fonctions cosinus sur le même graphe
legend({'Exact','µ1=1'},'Location','southwest',...
      'FontSize',8,'FontWeight','bold')
%Légende du tracé avec le texte à afficher se trouvant entre {}
 xlabel('x','FontSize',10,...          %Nom de l'axe des abscisses du tracé
       'FontWeight','bold','FontName',...
       'Times New Roman','Color','b')
ylabel('y(t)','FontSize',10,...       %Nom de l'axe des ordonnées du tracé
       'FontWeight','bold','FontName',...
       'Times New Roman','Color','b')
   y-yq09
```

Conclusion

Dans ce mémoire, La matrice opérationnelle de dérivation fractionnaire de Bernoulli a été présentée pour résoudre des équations différentielles fractionnaires EDFs, Les dérivés fractionnaires sont décrits au sens de Caputo. Cette matrice est utilisée pour approximer la solution numérique de EDFs. Notre approche était basée sur la méthode tau pour les équations linéaires et sur la méthode de collocation pour les équations non-linéaires . Dans la limite, comme approche une valeur entière, le schéma fournit une solution pour les équations différentielles d'ordre entier. La solution obtenue à l'aide de la méthode proposée montre que cette approche peut résoudre le problème efficacement. En outre, seul un petit nombre de polynômes de Bernoulli est nécessaire pour obtenir un résultat satisfaisant. L'un des avantages de cette méthode est que la solution numérique de l'équation EDF peut être convertie en système d'équations algébriques linéaires. Un autre avantage considérable de cette méthode est d'obtenir des solutions analytiques si l'équation EDF a une solution exacte qui est une fonction polynomiale.

Bibliographie

[1] R. T. Baillie, Long memory processes and fractional integration in econometrics. Journal of Econometrics 73 : 5–59, 1996.

[2] R.L. Bagley, P. J. Torvik, Fractional calculus in the transient analysis of viscoelastically damped structures. AIAA Journal 23 : 918–925, 1985.

[3] A.H. Bhrawy , E. Tohidi , F. Soleymani ,A new Bernoulli matrix method for solving high-order linear and nonlinear Fredholm integro-differential equations with piecewise intervals,

[4] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer, New York, 1988.

[5] T. S. Chow, Fractional dynamics of interfaces between soft–nanoparticles and rough substrates. Physics Letters A 342 : 148–155, 2005.

[6] S. Das, Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls, Springer, New York, 2008.

[7] Denis Matignon,An Introduction to Fractional Calculus :,February 2010

[8] E.H, Doha, A.H. Bhrawy, S.S. A, Ezz-Eldien, Chebyshev spectral method based on operational matrix for initial and boundary value problems of fractional order. Comput. Math. Appl. 2011, 62, 2364 2373.

[9] H. Jafari, S. Das, H. Tajadodi, Solving a multi-order fractional differential equation using homotopy analysis method, J. King Saud Univ. Sci. 23 (2011) 151155.

[10] E. Keshavarz, Y.Ordokhani, M. Razzaghi, Bernoulli wavelet operational matrix of fractional-order integration and its applications in solving the fractional-order differential equations. Appl. Math. Model. 2014, 38, 60386051.

[11] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, San Diego, 2006.

[12] A. Lotfi , M. Dehghan et S. A. Yousefi, A numerical technique for solving fractional optimal control problems. Computers and Mathematics with Applications 62 : 1055–1067, 2011.

[13] A. Lotfi,S. A. Yousefi et M. Dehghan, Numerical solution of a class of fractional optimal control problems via the Legendre rthonormal basis combined with the operational matrix and the Gauss quadrature rule. Journal of Computational and Applied Mathematics 250 : 143–160, 2013.

[14] F. Mainardi, Fractional calculus : "Some basic problems in continuum and statistical mechanics". In : Carpinteri A and Mainardi F (eds) Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. New York : Springer-Verlag, pp. 291–348, 1997.

[15] Z. Odibat, S. Momani, Modified homotopy perturbation method : application to quadratic

[16] K.B. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus. New York : Academic Press, 1974.

[17] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, 1999.

[18] M. Rehman, R. Ali khan, The Legendre wavelet method for solving fractional differential equations, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 16 (2011).

[19] Y. A. Rossikhin, M. V. Shitikova, Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids. Applied Mechanics Reviews 50 : 15–67, 1997.

[20] A. Saadatmandi, M. Dehghan, A new operational matrix for solving fractional-order dif- ferential equations, Comput. Math. Appl. 59 (2010) 1326 1336.

[21] Y. Li, Solving a nonlinear fractional differential equation using Chebyshev wavelets, Com- mun. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 15 (2010) 2284 - 2292. Riccati differential equation of fractional order, Chaos Solitons Fract., 36(2008) 167-174.

[22] C. Tricaud, Y. Q. Chen, An approximation method for numerically solving fractional order optimal control problems of general form. Computers and Mathematics with Applications 59 : 1644–1655, 2010.

[23] C. Tricaud, Y. Q. Chen, Time-optimal control of systems with fractional dynamics. International Journal of Differential Equations 2010 : 1–16, 2010.