REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DR. YAHIA FARÈS DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE ET DE L'INFORMATIQUE



MÉMOIRE

*présenté en vue de l'obtention du*

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

**Spécialité :** Recherche Opérationnelle

*par*

**Ahlem CHIROUD & Amel LARBI**

---

# SUR LE CALCUL COMBINATOIRE DES q-ANALOGUES

---

*Soutenu le 08 juillet 2019 devant le jury composé de :*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mr. Mourad RAHMANI | MCA | USTHB | **Président** |
| Mr. Diffalah LAISSAOUI | MCA | U.YF.M | **Promoteur** |
| Mr. Kamel TABLENNEHAS | MAA | U.YF.M | **Examinateur** |
| Mme. Ghania GUETTAI | MAA | U.YF.M | **Examinatrice** |
| Mr. Madjid SEBAOUI | | U.YF.M | **Invité** |

**ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2018-2019**

# Remerciements

Avant tout nous remercions **ALLAH** tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

Nous remercie notre parents, pour tout leur amour et leur encouragement.

Au terme de ce travail :

Nous voudrions exprimer nos sincères remerciements à Monsieur **D. LAISSAOUI** pour sa gestion, sa patience et sa soutien moral tout au long du travail.

Nous exprimons notre profonde remerciement à Monsieur **M. RAHMANI** d'avoir accepté de présider le jury.

Nous remercions également Monsieur **K. TABLENNEHAS** et Madame **G. GUETTAI** pour l'honneur qu'ils nous ont donné en les acceptants de faire partie du jury.

Enfin, nous ne pouvons pas oublier de remercier tous nos enseignants et tous ceux qui ont contribué d'une manière ou d'une autre au succès de ce travail.

# Dédicase

---

**J***e dédie ce modeste travail*

**À** *ma très chère mère* ***Mme LARBI Baya****, Les sacrifices que tu avais consentis pour ma réussite m'ont permis de vivre. Ce jour. Les mots me manquent pour exprimer toute la reconnaissance, la fierté et le profond amour que je vous porte. Puisse la tout puissante santé, bonheur et longue vie. je t'aime.*

**À** *mes soeurs* ***Amina*** *et* ***Hafida.***

**À** *mon mari* ***Mohamed Aissa*** *et sa famille.*

**À** *mon petit neveu,* ***Yakoub****.*

**À** *ma chère binôme* ***Ahlem*** *et sa famille.*

**À** *tous ceux qui nous ont aidés à élaborer ce projet.*

**À** *tous, je dédie ce travail.*

***LARBI Amel***

# Dédicase

---

**J***e dédie ce modeste travail, aux deux êtres les plus chers sur cette terre,*

**À *mon cher père,*** *qui m'a toujours encouragée, a cru en moi et m'a fait confiance, merci beaucoup papa, je t'aime.*

**À *ma chère mère***. *Tu m'as comblé avec ta tendresse et affection tout au long de mon parcours. Tu n'as cessé de me soutenir et de m'encourager durant toutes les années de mes études. Tu es la meilleure mere, je t'aime à l'éternité.*

**À** *mes chères frères :* ***Mohamed seddik*** *et* ***Abd elfattah***.

**À** *mes chères sœurs:* ***Salima*** *et* ***Rokia.***

**À** *mon grand père.*

**À** *mes grandes mères.*

**À** *ma chère binôme* ***Amel*** *et sa famille.*

**À** *tous mes amies et mes collègues très particulièrement* ***Amina, Fethia, Chahinaz, Nour elhoda, Nawel et Imen***.

**À** *tous ceux qui m'ont aimé et qui ne méritent pas d'être oubliés.*

**À** *tous, je dédie ce travail.*

***CHIROUD Ahlem***

# Résumé

Notre intérêt est d'étudier le calcule combinatoire des q-analogues, nous avons défini coefficient binomial, fonctions génératrices, q-factorielles et coefficients q-binomiaux, Identité q-binomiale, Nombres de q-Stirling et q-analogue de la matrice de Seidel.

Le but de cette étude est de généraliser un théorème, une identité ou une expression impliquant un nouveau paramètre q et qui se spécialise en le théorème originel lorsque l'on prend la limite quand q tend vers 1.

**Mots-Clés :** Triangle de Pascal. Identité binomiale. Nombres de Stirling. Matrice d'Euler Seidel.

# Abstract

Our interest is to study the combinatorial calcul of q-analogues, we have defined binomial coefficient, generating functions, q-factorials and q-binomial coefficients, q-binomial identity, q-Stirling numbers and q-analog of the matrices of Seidel.

The purpose of this study is to generalize a theorem, an identity or an expression implying a new parameter q and who specializes in the original theorem when we take the limit when q tends to 1.

**Keywords :** Paschal triangle. Binomial identity. Stirling numbers. Euler Seidel matrix.

# Table des matières

**Introduction** **1**

**1 NOTIONS DE COMBINATOIRE CLASSIQUE** **3**

1.1 Dénombrement . . . . . 3

1.1.1 $r$-permutation . . . . . 3

1.1.2 $r$-combinaison . . . . . 3

1.1.3 Factorielle descendante . . . . . 4

1.1.4 Factorielle montante . . . . . 4

1.1.5 Coefficient binomial . . . . . 4

1.1.6 Triangle de Pascal . . . . . 5

1.2 Fonctions génératrices . . . . . 6

1.3 La formule de chu-Vandermonde . . . . . 7

1.4 Formule de binôme de Newton . . . . . 9

1.5 Formule de binôme négative de Newton . . . . . 10

1.6 Formule de binôme génerale de Newton . . . . . 11

1.7 Les nombres de Stirling . . . . . 12

1.7.1 Nombre de Stirling de la première espèce . . . . . 12

1.7.2 Nombre de Stirling du deuxième espèce . . . . . 13

**2 CALCUL COMBINATOIRE DES $q$-ANALOGUES** **15**

2.1 $q$-factorielles et coefficients $q$-binomiaux . . . . . 15

2.2 Formule de $q$-Vandermonde et $q$-Cauchy . . . . . 23

2.3 Formule $q$-binôme et $q$-binôme négatif . . . . . 28
2.4 Formule $q$-binôme générale . . . . . 35
2.5 Nombres de $q$-Stirling . . . . . 37

**3 LA GÉNÉRALISATION DE LA MATRICE D'EULER-SEIDEL 46**
3.1 Matrice d'Euler-Seidel . . . . . 46
3.1.1 Les identités combinatoires . . . . . 47
3.1.2 Les fonctions génératrices de la matrice d'Euler-Seidel . . . . . 49
3.2 $q$-analogue de la matrices de Seidel . . . . . 53

**Conclusion 64**

**Bibliographie 65**

# Introduction

Par définition un $q$-analogue d'un théorème, d'une identité ou d'une expression est une généralisation impliquant un nouveau paramètre q (= quantum) et qui se spécialise en le théorème originel lorsque l'on prend la limite quand q tend vers 1.

Considérons, par exemple, la série binomiale, qui a été étudié pour la première fois par Newton

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha\left(\alpha+1\right)\ldots\left(\alpha+n-1\right)}{n!}x^n. \tag{1}$$

Elle est solution de l'équation différentielle

$$\left(1-x\right)y'-\alpha y=0$$

ce qui permet de démontrer le théorème binomial :

$$f\left(x\right):=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha\left(\alpha+1\right)\cdots\left(\alpha+n-1\right)}{n!}x^n=\frac{1}{\left(1-x\right)^{\alpha}}.$$

Il existe un q-analogue de cette identité, donnée par Cauchy en 1843. En effet, la série binomiale (1) peut être généralisé de la façon suivante :

$$F_q\left(x\right):=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(a;q\right)_n}{\left(q;q\right)_n}x^n, \tag{2}$$

où l'on a posé, pour $q\in\mathbb{C}$, $|q|<1$ et $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$

$$\begin{aligned}\left(a;q\right)_n&=\prod_{i=0}^{n}\left(1-aq^i\right)\\&=\left(1-a\right)\left(1-aq\right)\left(1-aq^2\right)\cdots\left(1-aq^n\right).\end{aligned}$$

La série (2) c'est une généralisation de (1) en ce sens que, si l'on impose $a=q^{\alpha}$, alors les coefficients de la série (2) tendent terme à terme vers ceux de (1) lorsque $q\longrightarrow 1$.Par ailleurs, elle est solution de l'équation aux $q$-différences

$$\left(1-ax\right)y\left(qx\right)-\left(1-x\right)y\left(x\right)=0,$$

ce qui permet de démontrer le théorème $q$-binomiale

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} x^n = \frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty}.$$

L'idée de généralisation peut être précisée comme suit : pour $|x| < 1$, la fonction $F_q(x)$ tend vers la fonction $f(x)$ lorsque $q \to 1$. L'un des problèmes auxquels on se heurte lorsqu'on s'intéresse aux $q$-analogues est qu'en général il n'existe pas un mais plusieurs $q$-analogues possibles d'un objet donné. Les propriétés

de ce dernier se généralisent tantôt à l'un, tantôt à l'autre de ses $q$-analogues. Il n'existe donc pas de $q$-analogue "naturel".

Par exemple, Euler à proposé deux $q$-analogues pour la série exponentielle suivante :

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

A savoir

$$e_q(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(1;q)_n} = \frac{1}{(x;q)_\infty}, \quad |x| < 1, \quad |q| < 1$$

et

$$e_{\frac{1}{q}}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{q^{\binom{n}{2}} x^n}{(1;q)_n} = (-x;q)_\infty, \quad 0 < |q| < 1$$

La deuxième fonction $e_{\frac{1}{q}}(x)$ est une fonction entière, tout comme la fonction exponentielle habituelle.

Bien qu'il n'existe pas une théorie générale pour la construction des $q$-analogues des suites classiques de nombres, on peut toutefois dégager des règles fondamentales. On sait qu'on obtient des résultats intéressants lorsqu'on remplace par exemple la dérivée

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{d}{dx} f(x),$$

par la q-dérivée

$$\lim_{q\to 1} \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} = \frac{d}{dx} f(x).$$

Ce mémoire, intitulé "Sur le calcul combinatoire des $q$-analogues" s'intéresse aux $q$-analogues de l'analyse combinatoire classique. Il est constitue de trois chapitre principaux ; Notions de combinatoire classique, Calcul combinatoire des q-analogues et la généralisation de la matrice d'Euler-Seidel.

Au premier chapitre, nous présentons des préliminaires sur l'analyse combinatoire classique et un peut de la théorie des probabilités.

Le chapitre deux concerne le calcul combinatoire des $q$-analogues et ces propriétés remarquables. Le dernier chapitre concerne la matrice d'Euler-Seidel et son $q$-analogues. A la fin de ce mémoire, on présente le code Maple pour ces matrices.

Chapitre 1

# NOTIONS DE COMBINATOIRE CLASSIQUE

Ce chapitre est consacré aux définitions des objets combinatoires les plus simples que nous avons besoin dans les chapitres qui suivent. Pour des notions plus précise et détaillées, le lecteur pourra consulter [1, 4, 5, 7]

## 1.1 Dénombrement

### 1.1.1 $r$-permutation

**Définition 1.1** *Soit* $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ *un ensemble à* $n$ *objets distincts pour* $0 \leq r \leq n$,
*un* $r$*-permutation de* $[n]$ *est la façon d'arranger* $r$ *objet de* $[n]$ *en une liste, lorsque* $r = n$
*un* $n$*-permutation est simplement appelée une permutation.*
*Le nombre de* $r$*-permutation de* $[n]$, *noté* $P_r^n$ *vaut*

$$P_r^n = n\,(n-1)\cdots(n-r+1)\,.$$

*Si nous utilisons la notation* $n! = n\,(n-1)\cdots 2.1$, *alors*

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!},$$

*par convention, nous posons* $0! = 1$ *nous notons* $P_0^n = 1$ *et* $P_n^n = n!$.

### 1.1.2 $r$-combinaison

**Définition 1.2** *Soit* $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ *un ensemble à* $n$ *objets distincts pour* $0 \leq r \leq n$,

*une $r$-combinaison de $[n]$ est un sous ensemble de $[n]$ à $r$ éléments.*
*Le nombre de $r$-combinaison d'un ensemble $[n]$ vaut*

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{P_r^n}{r!}.$$

*En particulier*

$$\binom{n}{0} = 1,$$

$$\binom{n}{n} = 1.$$

### 1.1.3 Factorielle descendante

**Définition 1.3** *Soit $x$ un nombre réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction factorielle descendante d'ordre $n$, notée $(x)_n$, est définie par :*

$$(x)_n = x\,(x-1)\cdots(x-n+1) \quad \text{si } n \geq 1 \text{ et } (x)_0 = 1.$$

*Notons que pour $x, y \in \mathbb{C}$ et $k, r \in \mathbb{Z}$, on a*

$$(x)_{k+r} = (x)_k\,(x-k)_r \text{ et } (x+n-1)_n = (-1)^n\,(-x)_n$$

*et pour $k \in \mathbb{N}^*$, nous posons*

$$(x)_{-k} = \frac{1}{(x+k)_k}.$$

### 1.1.4 Factorielle montante

**Définition 1.4** *Soit $x$ un nombre réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction factorielle montante d'ordre $n$, notée $(x)^n$, est définie par :*

$$(x)^n = x\,(x+1)\cdots(x+n-1) \text{ si } n \geq 1 \text{ et } (x)^0 = 1.$$

*Nous avons*

$$(-x)_n = (-1)^n\,(x)^n \text{ et } (-x)^n = (-1)^n\,(x)_n\,.$$

### 1.1.5 Coefficient binomial

**Définition 1.5** *Pour tout réel ou complexe $x$ et pour tout entier $k$, le coefficient binomial d'ordre $k$ noté $\binom{x}{k}$, est défini par :*

$$\binom{x}{k} = \frac{(x)_k}{k!}.$$

*avec*

$$\binom{x}{0} = 1.$$

Les coefficients binomiaux satisfont aux relations suivantes :

1. Si $x = n$, et $n$ est un entier tel que $k \leq n$, alors le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est égal à
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{n!\,(n-k)!}.$$
2. Si $x = n$, et $n$ est un entier tel que $0 \leq k \leq n$, alors on a
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$
3. Formule de Pascal :
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$
avec $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, pour tous $.n \geq 0$.

### 1.1.6 Triangle de Pascal

**Définition 1.6** *On appelle triangle de Pascal le tableau infini obtenu en disposant chaque* $\binom{n}{k}$ *à la croisée de la* $n^{ème}$ *ligne et de la* $k^{ème}$ *colonne, avec* $n,k \geq 0$

| $n\backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | | ⋮ |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | | | | | |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | | | | | |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | | | | |
| 7 | 1 | 7 | 21 | 35 | 35 | 21 | 7 | 1 | | | |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 56 | 70 | 56 | 28 | 8 | 1 | | |
| 9 | 1 | 9 | 36 | 84 | 126 | 126 | 84 | 36 | 9 | 1 | |
| ⋮ | ... | | | | | | | | | | |

## 1.2 Fonctions génératrices

**Définition 1.7** *Soit $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes et soit $x$ une indéterminée sur $\mathbb{C}$.*
*une série formelle sur $\mathbb{C}$ à une indéterminée $x$ est l'expression :*

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n, \tag{1.1}$$

*où $a_0$, $a_1$, ... sont des nombres réels.*
*Si*

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n,$$

*alors $a_n$ le $n^{ème}$ coefficient de $A(x)$, pour lequel nous écrivons*

$$a_n = [x^n]\, A(x).$$

**Définition 1.8** *Une série formelle $A(x)$ est dite réversible s'il existe une série formelle notée $A^{-1}(x)$ (appelée réciproque de $A$) tel que*

$$A(A^{-1}(x)) = A^{-1}(A(x)) = x.$$

**Définition 1.9** *La fonction génératrice **ordinaire** de la suite $\{a_0,\ a_1, \ldots, a_k, \ldots\}$ des nombres réels est la série formelle*

$$O(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

**Définition 1.10** *La fonction génératrice **exponentielle** de la suite $\{a_0,\ a_1, \ldots, a_k, \ldots\}$ des nombres réels est la série formelle :*

$$E(a_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} = O\left(\frac{a_k}{k!}\right).$$

Pour les suites doubles indices nous avons les définitions suivantes :

**Définition 1.11** *La fonction génératrice **ordinaire double** (bivariée ordinaire) de la suite $\{a_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ des nombres réels est la série infinie*

$$ED(a_{n,m}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} x^m z^n.$$

**Définition 1.12** *La fonction génératrice **exponentielle double** (bivariée exponentielle) de la suite $\{a_{n,m}\}_{n,m\in\mathbb{N}}$ des nombres réels est la série infinie*

$$ED(a_{n,m}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \frac{x^m}{m!}\frac{z^n}{n!}.$$

## 1.3 La formule de chu-Vandermonde

**Théorème 1.1** *Soient $x$ et $y$ des nombre réels et $n$ un entier positif. Alors*

$$(x+y)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k (y)_{n-k}. \tag{1.2}$$

**Preuve.** On utilise la démonstration par récurrence pour démontrer la formule (1.2)
• ***Initialisation*** **:** pour $n = 1$, la formule (1.2) est vraie.
•***Hérédité*** : supposons que (1.2) est vrai pour $n-1$, c'est à dire

$$(x+y)_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x)_k (y)_{n-k-1}.$$

On montre que (1.2) est aussi vrai pour $n$.avec $x+y$ au lieu de $x$ et l'hypothèse d'induction, nous avons

$$\begin{aligned}(x+y)_n &= (x+y-n+1)(x+y)_{n-1} \\ &= (x+y-n+1)\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x)_k (y)_{n-k-1}.\end{aligned}$$

Puisque

$$(x+y-n+1)(x)_k (y)_{n-k-1} = (x)_k (y)_{n-k} + (x)_{k+1} (y)_{n-k-1},$$

nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}(x+y)_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x)_k (y)_{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x)_{k+1} (y)_{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (x)_k (y)_{n-k} + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} (x)_k (y)_{n-k} \\ &= (y)_n + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right\} (x)_k (y)_{n-k} + (x)_n.\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant le triangle de pascal, on déduit,

$$(x+y)_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k (y)_{n-k}.$$

Donc (1.2) est vrai pour tout entier positif $n$. □

**Exemple 1.1** ***Moyenne des probabilités hypergéométrique***
*Une urne contient n boule (r boules blanches et s boules noir). On tire au hasard successivement sans remise n boules de l'urne, la probabilité de tirer k boules blanches parmi n est donnée par*

$$\begin{aligned} P(X=k) &= \frac{\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}}{\binom{r+s}{n}} \\ &= \frac{\frac{r!}{k!(r-k)!}\cdot\frac{s!}{(n-k)!(s-n+k)!}}{\frac{(r+s)!}{n!(r+s-n)!}} \\ &= \binom{n}{k}\frac{\alpha.\beta.(r+s-n)!}{\gamma.(r-k)!(s-n+k)!} \end{aligned}$$

*avec :* $\alpha = r(r-1)\cdots(r-k+1)(r-k)(r-k-1)\cdots$ ,
$\beta = s(s-1)\cdots(s-n+k+1)(s-n+k)(s-n+k-1)\cdots$ ,
$\gamma = (r+s)(r+s-1)\cdots(r+s-n+1)(r+s-n)(r+s-n-1)\cdots$ .
*Donc*

$$P_{n,k} = \binom{n}{k}\frac{(r)_k(s)_{n-k}}{(r+s)_n}, \qquad k=0,1,\ldots,n.$$

*Noter que* $p_{n,k} \geq 0$, $k=0,1,\ldots,n$, *et selon la formule de Vandermonde,*

$$\sum_{k=0}^{n} P_{n,k} = \frac{1}{(r+s)_n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(r)_k(s)_{n-k} = 1.$$

*Ce qui implique qu'il s'agit d'une fonction de masse de probabilité légitime, la moyenne du nombre des boules blanches tirée parmi n est donnée par la somme*

$$\mu = \sum_{k=1}^{n} k.P_{n,k} = \frac{1}{(r+s)_n}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(r)_k(s)_{n-k}.$$

*En utilisant les expressions*

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \quad (r)_k = r(r-1)_{k-1},$$

*où*

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{(r+s)_n}\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}r(r-1)_{k-1}(s)_{n-k} \\ &= \frac{nr}{(r+s)_n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(r-1)_{k-1}(s)_{n-k} \\ &= \frac{nr}{(r+s)(r+s-1)_{n-1}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(r-1)_{k-1}(s)_{n-k}. \end{aligned}$$

*Alors*

$$\mu = \frac{nr}{r+s}.$$

## 1.4 Formule de binôme de Newton

**Théorème 1.2** *Soient $x$ et $y$ des nombres réels et $n$ un entier positif, alors*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}. \tag{1.3}$$

**Preuve.** Par récurrence sur l'entier $n$.
• ***Initialisation*** **:** Lorsque $n = 0$, les deux membres sont égaux à 1 (avec le cas échéant la convention $0^0 = 1$).
•***Hérédité*** : Supposons la formule vraie au rang $n$, et montrons qu'elle est encore au rang $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n = (x+y)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k}x^{k+1}y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k+1} \\
&= \binom{n+1}{0}x^0 y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)x^k y^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1}x^{n+1}y^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n-k}.
\end{aligned}$$

□

La dernière égalité utilise la formule de Pascal pour l'addition des deux coefficients binomiaux.

**Corollaire 1.1** *On a les égalités suivantes :*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n \quad ; \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0.$$

**Exemple 1.2** ***Moyenne des probabilités binomiales***
*Une urne contient n boule (r boules blanches et s boules noir). On tire au hasard*

*successivement avec remise $n$ boules de l'urne, la probabilité de tirer $k$ boules blanches parmi $n$ est donnée par*

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

*Où $p = r/(r+s)$ et $q = s/(r+s)$, remarquer que $P_{n,k} > 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$, et selon la formule de binomiale de Newton,*

$$\sum_{k=0}^{n} P_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

*Ce qui implique qu'il s'agit d'une fonction de masse de probabilité légitime. La moyenne du nombre des boules blanches tirée parmi $n$ est donnée par la somme*

$$\begin{aligned}
\mu &= \sum_{k=1}^{n} k P_{n,k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} \\
&= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}.
\end{aligned}$$

*On pose $k - 1 = i$*

$$\begin{aligned}
\mu &= n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^{i+1} q^{n-i-1} \\
&= np \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i q^{(n-1)-i} \\
&= np\,(p+q)^{n-1} = np.
\end{aligned}$$

## 1.5 Formule de binôme négative de Newton

**Théorème 1.3** *Soient $x$ et $y$ des nombres réels, avec $y \neq 0$, $-1 < x/y < 1$ et $n$ entier positive, Alors*

$$(x+y)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^{-n-k} y^k. \tag{1.4}$$

**Preuve.** Par récurrence sur l'entier $n$.
•***Initialisation*** **:** Lorsque $n = 0$, les deux membres sont égaux à 1 donc (1.4) est vrai.
• ***Hérédité*** **:** Supposons la formule (1.4) est vrai pour $n$, et montrons qu'elle est vrai pour $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
(x+y)^{-n+1} &= (x+y)\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}x^{-n-k}y^k \\
&= n\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}x^{-n-k}y^k + y\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}x^{-n-k}y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}x^{-n-k+1}y^k + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{-n}{k}x^{-n-k}y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n}{k}x^{-n-k+1}y^k + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{-n}{k-1}x^{-n-k+1}y^k \\
&= \binom{0}{0}x^{-n+1}y^0 + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{-n}{k}x^{-n+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{-n}{k-1}x^{-n+1-k}y^k \\
&= \binom{0}{0}x^{-n+1}y^0 + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{-n+1}{k}x^{-n+1-k}y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-n+1}{k}x^{-n-k+1}y^k.
\end{aligned}$$

□

## 1.6 Formule de binôme génerale de Newton

**Théorème 1.4** *Soient $t$ et $x$ des nombres réels avec $-1 < t < 1$, alors*

$$(1+t)^x = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{x}{k}t^k. \tag{1.5}$$

**Corollaire 1.2** *Soient $x$ et $y$ des nombres réels et $n$ entier positive, alors*

$$\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}.$$

# 1.7 Les nombres de Stirling

## 1.7.1 Nombre de Stirling de la première espèce

**Définition 1.13** *La décomposition de* $(X)_n$ *de la base* $((X)_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sur la base canonique de* $X^n$ *s'écrit*

$$(X)_n = \sum_{k=0}^{\infty} s(n,k)\, X^k.$$

*La famille des coefficients* $(s(n,k))_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ *s'appelle famille des nombres de Stirling signé de première espèce.*

***Définition 1.14*** *Les nombre de Stirling de première espèce non signés* $|s(n,k)|$ *sont les coefficients du développement de la factorielle montante* $(X)^n$, *c'est à dire que :*

$$(X)^n = \sum_{k=0}^{n} |s(n,k)|\, X^k.$$

*On a :*

$$|s(n,k)| = (-1)^{n-k}\, s(n,k).$$

**Définition 1.15** *Le nombre* $(-1)^{n-k}\, s(n,k)$ *est le nombre de permu tations de l'ensemble* $[n]$ *ayant exactement* $k$ *cycles.*

***Proposition 1.1*** *Les nombres* $s(n,k)$ *sont aussi définis par la relation de récurrence*

$$\begin{cases} s(n,0) = s(0,k) = 0, \ \textit{sauf}\ \ s(0,0) = 1 \\ s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k) \qquad n,k \geq 1. \end{cases} \tag{1.6}$$

***Définition 1.16*** **(*Table des nombres de Stirling de première espèce*)** *Soit* $(s(n,k))_{0\leq k\leq n}$ *un triangle, alors d'aprés la relation de récurrence* (1.6) *on a cette illustration du triangle de Stirling de première espèce, telle que* $n$ *représenté les lignes et* $k$ *les colonnes :*

| $n\backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | | $\vdots$ |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 0 | −1 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 0 | 2 | −3 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 0 | −6 | 11 | −6 | 1 | | | | | | |
| 5 | 0 | 24 | −50 | 35 | −10 | 1 | | | | | |
| 6 | 0 | −120 | 274 | −225 | 85 | −15 | 1 | | | | |
| 7 | 0 | 720 | −1764 | 1624 | −735 | 175 | −21 | 1 | | | |
| 8 | 0 | −5040 | 13068 | −13132 | 6769 | −1960 | 322 | −28 | 1 | | |
| 9 | 0 | 40320 | 109584 | 118124 | −67284 | 22449 | −4536 | 549 | −36 | 1 | |
| $\vdots$ | $\cdots$ | | | | | | | | | | |

**Les fonctions génératrices des nombres de Stirling de première espèce**

La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de Stirling de première espèce est donnée par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} s\left(n,k\right)\frac{x^n}{n!}=\frac{\left(-1\right)^k\left(\ln\left(1-x\right)\right)^k}{k!}. \tag{1.7}$$

On en déduit la fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling de première espèce signés :

$$\sum_{n=k}^{\infty}\left(-1\right)^{n-k}s(n,k)\frac{x^n}{n!}=\frac{1}{k!}\left(\ln\left(1+x\right)\right)^k. \tag{1.8}$$

La fonction génératrice double est donnée par :

$$\sum_{n,k\geq 0}s(n,k)\frac{x^n}{n!}u^k=\left(1-x\right)^u. \tag{1.9}$$

## 1.7.2 Nombre de Stirling du deuxième espèce

**Définition 1.17** *la décomposition de $X^n$ sur la base $\left(\left(X\right)_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ s'écrit*

$$X^n=\sum_{k=0}^{\infty}S\left(n,k\right)\left(X\right)_k.$$

*La famille des coefficients $\left(S\left(n,k\right)\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ s'appelle famille des nombres de Stirling de deuxième espèce.*

**Définition 1.18** *Le nombre de Stirling de deuxième espèce, noté $\left\{{n\atop k}\right\}$, est le nombre de partitions de l'ensemble $[n]$ en $k$ sous-ensembles non vides, disjointes deux a deux,et la réunion de l'ensemble $[n]$.*

**Proposition 1.2** *Les nombres de Stirling de deuxième espèce vérifient la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases}\left\{{n\atop 0}\right\}=\left\{{0\atop k}\right\}=1 \quad sauf\ \left\{{0\atop 0}\right\}=1\\ \left\{{n\atop k}\right\}=\left\{{n-1\atop k-1}\right\}+k\left\{{n-1\atop k}\right\}, \quad n>1.\end{cases} \tag{1.10}$$

***Définition 1.19* (*Table des nombres de Stirling de deuxième espèce*)** *D'aprés la relation de récurrence (1.10) les premières valeurs des nombres $\left\{{n\atop k}\right\}$ sont*

*données dans la table suivante :*

| $n\backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | | | | | | $\vdots$ |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | | | | |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | | | | |
| 6 | 0 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | | | | |
| 7 | 0 | 1 | 63 | 301 | 350 | 140 | 21 | 1 | | | |
| 8 | 0 | 1 | 127 | 966 | 1701 | 1050 | 266 | 28 | 1 | | |
| 9 | 0 | 1 | 255 | 3025 | 7770 | 6951 | 2646 | 462 | 36 | 1 | |
| $\vdots$ | $\cdots$ | | | | | | | | | | |

**Exemple 1.3** *L'ensemble* $\{1,2,3,4\}$ *possède* 7 *partitions en deux sous-ensembles non vides,* $\{1,2,3\}\{4\}$, $\{1,2,4\}\{3\}$, $\{1,3,4\}\{2\}$, $\{2,3,4\}\{1\}$ *et aussi* $\{1,2\}\{3,4\}, 0pt$ $\{1,$ *et* $\{1,4\}\{2,3\}$. *Par conséquent* $\left\{ {4 \atop 2} \right\} = 7$.

### Fonctions génératrices des nombres de Stirling de deuxième espèce

La fonction génératrice ordinaire de la suite des nombres de Stirling de deuxième espèce est donnée par :

$$\sum_{n \geq k} \left\{ {n \atop k} \right\} x^{n-k} = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{(1-jx)}, \tag{1.11}$$

et la fonction génératrice exponentielle est donnée par :

$$\sum_{n \geq k} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(e^x - 1\right)^k. \tag{1.12}$$

Chapitre 2

# CALCUL COMBINATOIRE DES $q$-ANALOGUES

Dans ce chapitre, nous avons présenté en détail les $q$-suites et les $q$-fonctions de base, qui facilitent l'étude des $q$-distributions discrètes, Plus précisément, après avoir introduit les notions de $q$-puissance, de $q$-factorielle et de coefficient $q$-binomial d'un nombre réel, deux formules de $q$-Vandermonde (convolution $q$-factorielle) sont données. De plus, deux formules de $q$-Cauchy (convolution $q$-binomiale) sont présentées comme corollaire des deux formules de $q$-Vandermonde. En outre, les formules $q$-binomiale et négative $q$-binomiale sont obtenues. En outre, une formule générale $q$-binomiale est dérivée. Les nombres $q$-Stirling du premier et de la deuxième espèce, qui sont les coefficients des développements de $q$-factoriels en $q$-puissances et de $q$-puissances en $q$-factoriels. Ce chapitre est largement puisés de [2].

## 2.1 $q$-factorielles et coefficients $q$-binomiaux

Soient $x$ et $q$ des nombres réels, avec $q \neq 1$, et $k$ un entier. Le nombre

$$[x]_q = \frac{1-q^x}{1-q},$$

s'appelle $q$-*nombre* et en particulier $[k]_q$ s'appelle $q$-*entier*. Notez que

$$\lim_{q\to 1} [x]_q = x.$$

La base (paramètre) $q$, dans la théorie des distributions $q$-discrètes, varie dans l'intervalle
$0 < q < 1$ ou dans l'intervalle $1 < q < \infty$. Dans ces deux cas,

$$[x]_q \lesseqgtr [y]_q, \text{ si et seulement si } x \lesseqgtr y, \text{ respectivement.}$$

En particulier,

$$[x]_q \lesseqgtr 0, \text{ si et seulement si } x \lesseqgtr 0, \text{ respectivement.}$$

On suppose que $0 < q < 1$ ou $1 < q < \infty$.
La factorielle d'ordre $k$ du $q$-nombre $[x]_q$, est définie par

$$[x]_{k,q} = [x]_q [x-1]_q \cdots [x-k+1]_q , \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

est appelé *q-factorielle de x d'ordre k*. En particulier,

$$[k]_q ! = [1]_q [2]_q \cdots [k]_q , \qquad k = 1, 2, \ldots$$

est appelé $q$-factorielle de $k$.

Les factorielles $q$-décalées sont définie par

$$(x;q)_n = (1-x)(1-qx)...\left(1-q^{n-1}x\right) \text{ et } (x;q)_\infty = \lim_{n\to\infty} (x;q)_n .$$

**La $q$-factorielle de x d'ordre négatif**. peut être définie comme suit.
On a

$$[x]_{r+k,q} = \underbrace{[x]_q [x-1]_q \cdots [x-r+1]_q}_{[x]_{r;q}} \underbrace{[x-r]_q [x-r-1]_q [x-r+2]_q \cdots [x-r-k+1]_q}_{[x-r]_{k,q}},$$

donc

$$[x]_{r+k,q} = [x]_{r;q} \cdot [x-r]_{k,q} , \qquad k = 1, 2, \ldots , \ r = 1, 2, \ldots$$

c'est *la propriété fondamentale* de la $q$-factorielle
pour $r = 0$ on a l'équation suivant

$$[x]_{k,q} = [x]_{0,q} \cdot [x]_{k,q} , \qquad k = 1, 2, \ldots$$

si $x \neq 0, 1, \ldots k-1$ et $[x]_{k,q} \neq 0$, cette équation implique

$$[x]_{0,q} = 1,$$

si $x = 0, 1, \ldots, k-1$, De plus, à partir de la propriété fondamentale, avec $k$ un entier positif et $r = -k$, nous concluons que

$$[x]_{-k,q} \cdot [x+k]_{k,q} = 1,$$

et pour $x \neq -1, -2, \ldots - k$,

$$[x]_{-k,q} = \frac{1}{[x+k]_{k,q}} = \frac{1}{[x+k]_q [x+k-1]_q \cdots [x+1]_q}, \qquad k = 1, 2, \ldots \ .$$

Remarquer que la dernière expression, pour $x = 0$, donne

$$[0]_{-k,q} = \frac{1}{[x]_q !}, \qquad k = 1, 2, \ldots \ .$$

Le *coefficient q-binomial* (ou *polynôme Gaussien*) est défini par

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[x]_{k,q}}{[k]_q!}, \qquad k = 0, 1, , \dots \ ,$$

et donc

$$\lim_{q \to 1} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{x}{k}, \qquad k = 0, 1, \dots \ ,$$

en remarquant

$$[x]_{q^{-1}} = \frac{1 - q^{-x}}{1 - q^{-1}} = \frac{q^{-x}}{q^{-1}} \cdot \frac{1 - q^x}{1 - q} = q^{-x+1} [x]_q ,$$

et puisque

$$\begin{aligned} [x]_{k,q^{-1}} &= \prod_{j=1}^{k} [x - j + 1]_{q^{-1}} = \prod_{j=1}^{k} q^{-x+j} [x - j + 1]_q \\ &= q^{-x+1} [x]_q \cdot q^{-x+2} [x - 1]_q \cdots q^{-x+k} [x - k + 1]_q \\ &= q^{-xk+1+2+\cdots+k} [x]_{k,q,} \end{aligned}$$

donc

$$[x]_{k,q^{-1}} = q^{-xk+\binom{k+1}{2}} [x]_{k,q} , \qquad [k]_{q^{-1}}! = q^{-\binom{k}{2}} \ [k]_q!$$

et

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_{q^{-1}} = \frac{[x]_{k,q^{-1}}}{[k]_{q^{-1}}!} = \frac{q^{-xk+\binom{k+1}{2}} [x]_{k,q}}{q^{-\binom{k}{2}} \ [k]_q!} = q^{-k(x-k)} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q , \qquad k = 0, 1, \dots \ .$$

Les deux $q$-analogues de la série exponentielle $e^t = \sum_{n \geq 0} t^n / n!$, sont définis par

$$e_q (t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{[n]_q!} = \frac{1}{((1 - q) t; q)_\infty}, \tag{2.1}$$

$$E_q (t) = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{\binom{n}{2}} t^n}{[n]_q!} = \frac{1}{(- (1 - q) t; q)_\infty}. \tag{2.2}$$

En utilisant ces expressions, peut être converti une formule comprend des $q$-nombres, $q$-factorielles et les coefficients $q$-binomiaux dans une base $q$ avec $1 < q < \infty$ à la formule similaire dans la base $p = q^{-1}$ avec $0 < p < 1$.

Deux versions utiles d'une relation de récurrence triangulaire pour le coefficient $q$-binomial, constituant un $q$-analogue du triangle de Pascal, sont dérivées dans le théorème suivant.

**Théorème 2.1** *Soient $x$ et $q$ des nombres réels avec $q \neq 1$ et $k$ un entier positif, le coefficient $q$-binomial $\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q$ satisfait la relation de récurrence triangulaire*

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} x - 1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{x-k} \begin{bmatrix} x - 1 \\ k - 1 \end{bmatrix}_q , \qquad k = 1, 2, \dots \ , \tag{2.3}$$

*avec condition initiale* $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1$. *Ou,*

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} x-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} x-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q, \qquad k = 1, 2, \dots \ , \tag{2.4}$$

**Preuve.** Puisque

$$[x]_{k,q} = [x]_q \underbrace{[x-1]_q \cdots [x-k+1]_q}_{[x-1]_{k-1,q}}$$
$$[x]_{k,q} = [x]_q [x-1]_{k-1,q},$$

et

$$[x-1]_{k-1,q}[x-k]_q = [x-1]_{k,q},$$

et

$$\begin{aligned}
[x]_q &= [x-k+k]_q \\
&= \frac{1-q^{x-k+k}}{1-q} \\
&= \frac{q^{x-k}\left(q^{-x+k} - q^k\right)}{1-q} \\
&= \frac{q^{x-k}\left(q^{-x+k} - q^k + 1 - 1\right)}{1-q} \\
&= \frac{q^{x-k}\left(q^{-x+k} - 1\right) + q^{x-k}\left(1 - q^k\right)}{1-q},
\end{aligned}$$

donc

$$[x]_q = [x-k]_q + q^{x-k}[k]_q,$$

d'où la $q$-factorielle de $x$ d'ordre $k$ satisfait la relation de récurrence triangulaire suivant

$$[x]_{k,q} = [x-1]_{k,q} + q^{x-k}\,[k]_q\,[x-1]_{k-1,q}\,,$$

avec la condition initiale $[x]_{0,q} = 1$. Ainsi, en divisant les deux nombres par $[k]_q!$ et en utilisant l'expression

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[x]_{k,q}}{[k]_q!}, \qquad k = 0, 1, \dots \ ,$$

on en déduit facilement la relation de récurrence triangulaire (2.3).

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[x-1]_{k,q} + q^{x-k}\,[k]_q\,[x-1]_{k-1,q}}{[k]_q!} \\
&= \frac{[x-1]_{k,q}}{[k]_q!} + q^{x-k}\frac{[k]_q\,[x-1]_{k-1,q}}{[k]_q!} \\
&= \begin{bmatrix} x-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{x-k}\begin{bmatrix} x-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q.
\end{aligned}$$

(2.3) peut être réécrit sous la forme (2.4).

Remarquer que la relation de récurrence triangulaire (2.4) peut être également donnée, indépendamment de (2.3), en utilisant l'expression

$$\begin{aligned}[x]_q &= [x+k-k]_q \\ &= \frac{1-q^{x+k-k}}{1-q} \\ &= \frac{q^k\left(q^{-k}-q^{x-k}\right)}{1-q} \\ &= \frac{q^k\left(q^{-k}-q^{x-k}+1-1\right)}{1-q} \\ &= \frac{q^k\left(q^{-k}-1\right)}{1-q} + \frac{q^k\left(1-q^{x-k}\right)}{1-q},\end{aligned}$$

donc

$$[x]_q = [k]_q + q^k[x-k]_q,$$

qui implique pour la $q$-factorielle de $x$ d'ordre $k$ la relation de récurrence triangulaire

$$[x]_{k,q} = [k]_q\,[x-1]_{k-1,q} + q^k\,[x-1]_{k,q}\,,$$

par conséquent, en divisant les deux nombres par $[k]_q!$,

$$\frac{[x]_{k,q}}{[k]_q!} = \frac{[k]_q\,[x-1]_{k-1,q} + q^k\,[x-1]_{k,q}}{[k]_q!},$$

on en déduit facilement la relation de récurrence triangulaire (2.4). □

**Remarque 2.1** *Le manque d'unicité d'expressions et de formules des q-analogues, comme*

$$[x+y]_q = [x]_q + q^x\,[y]_q \qquad et \qquad [x+y]_q = q^y[x]_q + [y]_q\,,$$

*où $0<q<1$ ou $1<q<\infty$, doit être remarqué dans le début de la présentation des q-formules. Remarquer que les deux formules peuvent être considérées comme équivalentes au sens où l'une implique l'autre en remplaçant la base $q$ par $q^{-1}$.*

Les cas particuliers des coefficients $q$-binomiaux $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ et $\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q$, avec $n$ et $k$ entiers positifs, admettent des interprétations $q$-combinatoires, qui sont déduites dans le théorème suivant, à partir d'une fonction génératrice d'un nombre de partitions d'un entier en parties de taille restreinte. Rappelons qu'une *partition* d'un entier positif $m$ en $k$ parties est une collection non ordonnée d'entiers positifs, $\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$, avec $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_k \geq 1$, pour $k = 1, 2, \ldots, m$, dont la somme est égale à $m$ . Dans une partition de $m$ en $k$ parties, soit $k_i \geq 0$, le nombre de parties égales à $i$, pour $i = 1, 2, \ldots, m$. Alors,

$$k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m = m, \qquad k_1 + k_2 + \cdots + k_m = k.$$

**Théorème 2.2** *Pour $n$ et $k$ des entiers positifs, le coefficient q-binomial $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ est égal aux k-combinaisons de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$, pondérées par $q^{m_1+m_2+\cdots+m_k-\binom{k+1}{2}}$,*

$$\sum_{1\leq m_1<m_2<\cdots<m_k\leq n} q^{m_1+m_2+\cdots+m_k-\binom{k+1}{2}} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q. \tag{2.5}$$

*De plus, pour n et k des entiers positifs, le coefficient q-binomial $\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q$ est égal aux k-combinaisons de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ avec répétition, $\{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$, pondéré par*
*$q^{r_1+r_2+\cdots\ +r_k-k}$,*

$$\sum_{1\leq r_1<r_2<\cdots<r_k\leq n} q^{r_1+r_2+\cdots\ +r_k-k} = \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q. \tag{2.6}$$

**Preuve.** Soit $p(m, k; n)$ le nombre de partitions de $m$ en $k$ parties dont chacune est inférieure ou égale à $n$ et considérons sa fonction génératrice bivariée

$$g_n(t, q) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} p(m, k; n) t^k q^m,$$

pour $n$ fixé. en utilisant la définition d'une partition de $m$ en $k$ parties, dont chacune est inférieure ou égale à $n$, elle peut être exprimée comme suit :

$$g_n(t, q) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \left( \sum t^{k_1+k_2+\cdots+k_m} q^{k_1+2k_2+\cdots+mk_m} \right),$$

où dans la somme interne, la somme s'étend sur toutes les solutions entières $k_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, et $k_i = 0$ pour $i = n+1, n+2, \ldots, m$, des équations $k_1 + 2k_2 + \cdots + mk_m = m$, et $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = k$. Puisque cette somme interne est additionnée pour tout $k = 0, 1, \ldots, m$ et $m = 0, 1, \ldots$, on conclut que

$$g_n(t, q) = \prod_{i=1}^{n} \left( \sum_{k_i=0}^{\infty} t^{k_i} q^{ik_i} \right) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - tq^i\right)^{-1}.$$

De plus, pour la séquence de fonctions génératrices univariées

$$g_{n,k}(q) = \sum_{m=k}^{\infty} p(m, k; n) q^m, \qquad k = 0, 1, ...,$$

en utilisant la relation $g_n(t, q) = \sum_{k=0}^{\infty} g_{n,k}(q) t^k$ et puisque

$$(1 - tq^{n+1}) g_n(tq, q) = (1 - tq) g_n(t, q),$$

on en déduit la relation de récurrence de premier ordre suivante

$$g_{n,k}(q) = q\frac{1-q^{n+k-1}}{1-q^k}g_{n,k-1}(q), \qquad k = 1, 2, ..., \quad g_{n,0}(q) = 1.$$

En appliquant à plusieurs reprises, on trouve l'expression

$$g_{n,k}(q) = \sum_{m=k}^{\infty} p(m,k;n)q^m = q^k \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q.$$

Puisque le nombre $p(m,k;n)$ de partitions de $m$ en $k$ parties dont chacune est inférieure ou égale à $n$, est égal au nombre de solutions en entiers positifs de l'équation $r_1+r_2+\cdots+r_k = m$, avec $1 \le r_k \le r_{k-1} \le \cdots \le r_1 \le n$, ou de manière équivalente (en remplaçant $r_{k-i+1}$ par $r_i$, pour $i = 1, 2, \ldots, k$), avec $1 \le r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_k \le n$, la dernière expression peut être écrite sous la forme

$$\sum_{1\le r_1<r_2<\cdots<r_k\le n} q^{r_1+r_2+\cdots+r_k} = q^k \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q,$$

ce qui implique facilement (2.6)

En outre, en remplaçant $n+k-1$ par $n$ dans (2.6) puis en fixant $m_i = r_i + i - 1$, pour $i = 1, 2, \ldots, k$ les inégalités $1 \le r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_k \le n-k+1$ sont transformés en
$1 \le m_1 < m_2 < \cdots < m_k \le n$ et $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_k - \binom{k}{2}$. En conséquence, l'expression (2.6) se transforme en

$$\sum_{1\le m_1<m_2<\cdots<m_k\le n} q^{m_1+m_2+\cdots+m_k} = q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q,$$

d'où on déduit (2.5). □

**Remarque 2.2** *Une expression alternative d'un coefficient q-binomial. Expression (2.6) du coefficient q-binomial* $\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q$, *peut être écrit alternativement comme suit. Soit* $k_i \ge 0$ *le nombre de variables (liées)* $r_1, r_2, \ldots, r_k$ *égales à* $i$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Ensuite,*
$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n$ *avec* $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$ *et*

$$\{(r_1, r_2, \ldots, r_k) : 1 \le r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_k \le n\}$$
$$= \{(k_1, k_2, \ldots, k_n) : k_i \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k\}.$$

*Par conséquent, l'expression (2.6) peut être exprimée par*

$$\sum_{\substack{k_i\ge 0,\ i=1,2,\ldots,n \\ k_1+k_2+\cdots+k_n=k}} q^{k_1+2k_2+\cdots+nk_n-k} = \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q. \tag{2.7}$$

*Dans l'exemple suivant, une variable aléatoire théorique est définie dans une séquence d'essais de Bernoulli indépendants et à distribution identique, et sa fonction de probabilité est exprimée par un q-nombre.*

**Exemple 2.1** ***Essais de Bernoulli et théorie des nombres***. *Considérons une séquence d'essais de Bernoulli indépendants avec une probabilité d'échec constante $q$, et prenons $X$ le nombre d'échecs jusqu'à l'apparition du premier succès. Clairement, la variable aléatoire $X$ suit une distribution géométrique avec une fonction de probabilité*

$$P\left(X=x\right)=\left(1-q\right)q^{x},\qquad x=0,1,\ldots\ ,$$

*où $0<q<1$. Aussi, considérons un entier positif fixe $n$ et soit*

$$C_{x}=\left\{x+kn:k=0,1,\ldots\right\},\qquad x=0,1,\ldots,n-1.$$

*Clairement, chacune des valeurs possibles de la variable aléatoire $X$ appartient à l'une de ces $n$ classes de congruence (ensembles disjoints par paires) $\{C_0,C_1,\ldots,C_{n-1}\}$. En outre, considérons une séquence d'essais de Bernoulli indépendants, avec une probabilité d'échec constante $q$, et soit $X_n$ l'indice de la congruence classe dans le nombre d'échecs . Puisque la variable aléatoire $X_n$ prend la valeur $x$ si et seulement si $X$ appartient à $C_x$ sa fonction de probabilité*

$$P\left(X_{n}=x\right)=P\left(X\in C_{x}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-q\right)q^{x+kn}=\lim_{k\to\infty}\left(1-q\right)q^{x}\frac{1-\left(q^{n}\right)^{k}}{1-q^{n}}=\frac{\left(1-q\right)q^{x}}{1-q^{n}},$$

*peut-être exprimé comme*

$$P\left(X_{n}=x\right)=\frac{q^{x}}{\left[n\right]_{q}},\qquad x=0,1,\ldots,n-1\qquad 0<q<1.$$

*Remarquer que la fonction de probabilité limite comme $q\to 1$*

$$\lim_{q\to1}P\left(X_{n}=x\right)=\frac{1}{n},\qquad x=0,1,\ldots,n-1,$$

*est la fonction de probabilité uniforme discrète sur l'ensemble $\{0,1,\ldots,n-1\}$. Pour cette raison, la distribution de $X_n$ est appelée distribution discrète de $q$-uniformes.*

*Il est à noter que la fonction de probabilité $P(X=x/X\leq n-1)$, puisque*

$$P\left(X=x/X\leq n-1\right)=\frac{P(X=x,X\leq n-1)}{P(X\leq n-1)}=\frac{P(X=x)}{P(X\leq n-1)},$$

*pour $x=0,1,...,n-1$,et*

$$P(X\leq n-1)=\sum_{x=0}^{n-1}\left(1-q\right)q^{x}=1-q^{n},$$

*en dédiant que*

$$P\left(X=x/X\leq n-1\right)=\frac{q^{x}}{\left[n\right]_{q}},\qquad x=0,1,...,n-1,\qquad 0<q<1.$$

## 2.2 Formule de $q$-Vandermonde et $q$-Cauchy

Deux versions de la formule de $q$-Vandermonde (convolution $q$-factorielle) sont donnée dans le théorème suivant

**Théorème 2.3** *Soit $n$ un entier positif et $x$, $y$ et $q$ des nombres réels, avec $q \neq 1$. Alors,*

$$[x+y]_{n,q} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{(n-k)(x-k)} [x]_{k,q} [y]_{n-k,q} . \tag{2.8}$$

*Ou,*

$$[x+y]_{n,q} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(y-n+k)} [x]_{k,q} [y]_{n-k,q} . \tag{2.9}$$

**Preuve.** Considérons la suite des sommes

$$s_n(x,y;q) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{(n-k)(x-k)} [x]_{k,q} [y]_{n-k,q} , \qquad n = 1, 2, ...,$$

avec valeur initiale

$$s_1(x,y;q) = q^x [y]_q + [x]_q = [x+y]_q .$$

En utilisant la relation de récurrence triangulaire (2.3) avec $x = n$, la séquence $s_n(x,y;q)$, $n = 1, 2, \ldots$, peut être exprimé par

$$\begin{aligned} s_n(x,y;q) &= \sum_{k=0}^{n} \left( \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \right) q^{(n-k)(x-k)} [x]_{k,q} [y]_{n-k,q} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{(n-k)(x-k)} [x]_{k,q} [y]_{n-k,q} + \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{(n-k)(x-k+1)} [x]_{k,q} [y]_{n-k,q} . \end{aligned}$$

Remplacer $k-1$ par $k$ dans la dernière somme

$$\begin{aligned} s_n(x,y;q) &= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{(n-k)(x-k)} [x]_{k,q} [y]_{n-k,q} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{(n-1-k)(x-k)} [x]_{k+1,q} [y]_{n-1-k,q} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{(n-1-k)(x-k)} q^{x-k} [x]_{k,q} [y]_{n-k,q} + \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{(n-1-k)(x-k)} [x]_{k+1,q} [y]_{n-1-k} \end{aligned}$$

puis utiliser la relation

$$q^{x-k} [x]_{k,q} [y]_{n-k,q} + [x]_{k+1,q} [y]_{n-1-k,q} = [x+y-n+1]_q [x]_{k,q} [y]_{n-1-k,q} ,$$

on conclut que

$$\begin{aligned} s_n(x,y;q) &= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{(n-1-k)(x-k)} q^{x-k} [x]_{k,q} [y]_{n-k,q} \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{(n-1-k)(x-k)} [x]_{k+1,q} [y]_{n-1-k,q} \\ &= [x+y-n+1]_q \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{(n-1-k)(x-k)} [x]_{k,q} [y]_{n-1-k,q} . \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $s_n(x,y;q)$ satisfait la relation de récurrence de premier ordre

$$s_n(x,y;q) = [x+y-n+1]_q \, s_{n-1}(x,y;q) \qquad n = 1,2,\ldots,$$

avec la condition initiale $s_1(x,y;q) = [x+y]_q$. En l'appliquant successivement on obtient $s_n(x,y;q) = [x+y]_{n,q}$ et donc (2.8) est montré. En outre, on changement $x$ par $y$ puis en remplaçant $k$ par $n-k$, la formule (2.8) est récrite sous la forme (2.9).

Remarquer que la formule alternative (2.9) peut être donnée indépendamment de (2.8), en utilisant la relation de récurrence triangulaire (2.4) au lieu de (2.3) et

$$[x]_{k,q} [y]_{n-k,q} + q^{y-n+k+1} [x]_{k+1,q} [y]_{n-1-k,q} = [x+y-n+1]_q [x+y-n+1]_q [x]_{k,q} [y]_{n-1-k,q} ,$$

au lieu de

$$q^{x-k} [x]_{k,q} [y]_{n-k,q} + [x]_{k+1,q} [y]_{n-1-k,q} = [x+y-n+1]_q [x+y-n+1]_q [x]_{k,q} [y]_{n-1-k,q} .$$

La preuve du théorème est donc terminée. □

Deux versions de la formule de $q$-Cauchy (convolution $q$-binomiale), tel que

$$\begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[x]_{k,q}}{[k]_q!}, \qquad k = 0,1,...,$$

peuvent être considérées comme des reformulations des deux versions correspondantes de la formule de $q$-Vandermonde (convolution $q$-factorielle), sont décrites dans le corollaire suivant du théorème 2.3.

**Corollaire 2.1** *Soit $n$ un entier positif et $x$, $y$ et $q$ des nombres réels, avec $q \neq 1$. Alors,*

$$\begin{bmatrix} x+y \\ n \end{bmatrix}_q = \sum_{k=0}^{n} q^{(n-k)(x-k)} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} y \\ n-k \end{bmatrix}_q . \tag{2.10}$$

*Ou,*

$$\begin{bmatrix} x+y \\ n \end{bmatrix}_q = \sum_{k=0}^{n} q^{k(y-n+k)} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} y \\ n-k \end{bmatrix}_q . \tag{2.11}$$

Deux versions d'une formule négative de $q$-Vandermonde sont obtenues dans le prochain théorème.

**Théorème 2.4** *Soit $n$ un entier positif et $x$, $y$ et $q$ des nombres réels, avec $q \neq 1$. Alors,*

$$[x+y]_{-n,q} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix}_q q^{-(n+k)(x-k)} [x]_{k,q} [y]_{-n-k,q}, \tag{2.12}$$

*avec $|q^{-(x+y+1)}| < 1$. Ou*

$$[x+y]_{-n,q} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(y+n+k)} [x]_{k,q} [y]_{-n-k,q}, \tag{2.13}$$

*avec $|q^{(x+y+1)}| < 1$.*

**Preuve.** Considérons la suite des sommes

$$s_n(x,y;q) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix}_q q^{-(n+k)(x-k)} [x]_{k,q} [y]_{-n-k,q}, \qquad |q^{-(x+y+1)}| < 1, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

avec valeur initiale

$$\begin{aligned} s_1(x,y;q) &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{-(k+1)(x-k)} [x]_{k,q} [y]_{-k-1,q} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{-(k+1)x+\binom{k+1}{2}} [x]_{k,q} [y]_{-k-1,q}. \end{aligned}$$

Puisque

$$[x+y+1]_q [x]_{k,q} [y]_{-k-1,q} = q^{x-k} [x]_{k,q} [y]_{-k,q} + [x]_{k+1,q} [y]_{-k-1,q},$$

donc le premier terme de cette suite peut-être écrit comme

$$\begin{aligned} s_1(x,y;q) = \frac{1}{[x+y+1]_q} \Bigg\{ &\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q^{-kx+\binom{k}{2}} [x]_{k,q} [y]_{-k,q} \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} q^{-(k+1)x+\binom{k+1}{2}} [x]_{k+1,q} [y]_{-k-1,q} \Bigg\} \end{aligned}$$

et donc $s_1(x,y;q) = 1/[x+y+1]_q$. En utilisant la relation de récurrence triangulaire (2.3), avec $x = -n$, la séquence $s_n(x,y;q)$, $n = 1, 2, \ldots$, peut être exprimée par

$$\begin{aligned} s_n(x,y;q) = &\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{-(n+k)(x-k)} [x]_{k,q} [y]_{-n-k,q} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{-(n+k)(x-k+1)} [x]_{k,q} [y]_{-n-k,q}. \end{aligned}$$

Remplacer $k-1$ par $k$ dans la dernière somme, puis utiliser la relation

$$q^{x-k}[x]_{k,q}[y]_{-n-k,q} + [x]_{k+1,q}[y]_{-n-1-k,q} = [x+y+n+1]_q\,[x]_{k,q}[y]_{-n-1-k,q},$$

on conclut que

$$\begin{aligned} s_n(x,y;q) &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{-(n+1+k)(x-k)} q^{x-k}\,[x]_{k,q}\,[y]_{-n-k,q} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{-(n+1+k)(x-k)}\,[x]_{k+1,q}\,[y]_{-n-1-k,q} \\ &= [x+y+n+1]_q \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{-(n+1+k)(x-k)}\,[x]_{k,q}\,[y]_{-n-1-k,q} \\ &= [x+y+n+1]_q\, s_{n+1}(x,y;q). \end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $s_n(x,y;q), n=1,2,\ldots$ satisfait la relation de récurrence de premier ordre

$$s_{n+1}(x,y;q) = \frac{s_n(x,y;q)}{[x+y+n+1]_q}, \qquad n=1,2,...,$$

avec la condition initiale $s_1(x,y;q) = 1/[x+y+1]_q = [x+y]_{-1,q}$. En conséquence, $s_n(x,y;q) = 1/[x+y+n]_{n,q} = [x+y]_{-n,q}$ et donc (2.12) est montré. De plus, remplacer la base $q$ par $q^{-1}$ et utiliser les relations

$$[x+y]_{-n,q^{-1}} = q^{(x+y)n+\binom{n}{2}}[x+y]_{-n,q}, \qquad \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix}_{q^{-1}} = q^{k(n+k)} \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix}_q$$

et

$$[x]_{k,q^{-1}} = q^{-xk+\binom{k+1}{2}}[x]_{k,q}, \qquad [y]_{-n-k,q^{-1}} = q^{y(n+k)+\binom{n+k}{2}}\,[y]_{-n-k,q}\,,$$

la formule (2.12) peut être réécrite sous la forme (2.13).

Notez que l'expression alternative (2.13) peut être donnée indépendamment de (2.12), en utilisant la relation de récurrence triangulaire (2.4) au lieu de (2.3) et

$$[x]_{k,q}\,[y]_{-n-k,q} + q^{y+n+k+1}\,[x]_{k+1,q}\,[y]_{-n-1-k,q} = [x+y+n+1]_q\,[x]_{k,q}\,[y]_{-n-1-k,q}$$

au lieu de

$$q^{x-k}\,[x]_{k,q}\,[y]_{-n-k,q} + [x]_{k+1,q}\,[y]_{-n-1-k,q} = [x+y+n+1]_q\,[x]_{k,q}\,[y]_{-n-1-k,q}\,.$$

La preuve du théorème est donc terminée. □

**Remarque 2.3** *Autres expressions de la formule négative de q-Vandermonde. Les deux versions de la formule négative de q-Vandermonde* (2.12) *et* (2.13) *peuvent être réécrites comme suit :*

$$\frac{1}{[y]_{n,q}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{k(y-n+1)} \frac{[x]_{k,q}}{[x+y]_{n+k,q}}, \qquad |q^y|<1 \tag{2.14}$$

*et*

$$\frac{1}{[y]_{n,q}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{n(x-k)} \frac{[x]_{k,q}}{[x+y]_{n+k,q}}, \qquad \left|q^{-y}\right| < 1, \tag{2.15}$$

*respectivement.*
*La q-factorielle de $x = -n$ d'ordre $k$, avec $n$ entier positif, peut être exprimée par*

$$[-n]_{k,q} = (-1)^k \, q^{-nk-\binom{k}{2}} \, [n+k-1]_{k,q} \,,$$

*puisque*

$$[-j]_q = -q^{-j} \, [j]_q \,, \qquad j = n, n+1, ..., n+k-1,$$

*et*

$$n + (n+1) + \cdots + (n+k-1) = nk + (1 + 2 + \cdots + (k-1)) = nk + \binom{k}{2}.$$

*De manière équivalente, le coefficient q-binomial de $x = -n$, avec $n$ un entier positif, est définie comme*

$$\begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix}_q = (-1)^k \, q^{-nk-\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q .$$

*dans l'expression (2.12), en remplaçant $x + y + 1$ par $-y$ et en utilisant la dernière relation avec les relations*

$$[-y-1]_{-n,q} = \frac{1}{[-y+n-1]_{n,q}} = \frac{1}{(-1)^n \, q^{-ny+\binom{n}{2}} \, [y]_{n,q}},$$

*et*

$$\begin{aligned} [-x-y-1]_{-n-k,q} &= \frac{1}{[-x-y+n+k-1]_{n+k,q}} \\ &= \frac{1}{(-1)^{n+k} \, q^{-(n+k)(x+y)+\binom{n+k}{2}} \, [x+y]_{n+k,q}}, \end{aligned}$$

*peut-être écrit comme*

$$\frac{1}{q^{-ny+\binom{n}{2}} \, [y]_{n,q}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q \frac{q^{-nk-\binom{k}{2}-(n+k)(x-k)} \, [x]_{k,q}}{q^{-(n+k)(x+y)+\binom{n+k}{2}} \, [x+y]_{n+k,q}}.$$

*Enfin, en utilisant la relation $\binom{n+k}{2} = \binom{n}{2} + \binom{k}{2} + nk$, après les annulations dans les exposants de $q$, est réduite à (2.14). De même, l'expression (2.13) peut être réécrite sous la forme (2.15).*

***Exemple 2.2*** *Soit $n$ un entier positif et $x, y, q$ des nombres réels, avec $q \neq 1$. En utilisant la formule de q-Vandermonde (2.8), montrez que*

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{(n-k)(x-k)} \frac{[x]_{k,q}}{[y+k]_{k,q}} = \frac{[x+y+n]_{n,q}}{[y+n]_{n,q}}$$

*et conclure que*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{\binom{n-k}{2}}\frac{[x]_q}{[x-k]_q}=\frac{1}{\begin{bmatrix}x-1\\n\end{bmatrix}_q}$$

*et*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{\binom{k+1}{2}-n(y+k)}\frac{[y]_q}{[y+k]_q}=\frac{1}{\begin{bmatrix}y+n\\n\end{bmatrix}_q}.$$

*En remplaçant $y$ par $y+n$, dans la formule de q-Vandermonde (2.8), nous avons*

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{(n-k)(x-k)}\,[x]_{k,q}\,[y+n]_{n-k,q}=[x+y+n]_{n,q}\,.$$

*Multiplier les deux côtés par $[y]_{-n,q}$ et utiliser la relation de récurrence*

$$[y]_{-k,q}=[y]_{-n,q}[y+n]_{n-k,q},$$

*on a*

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{(n-k)(x-k)}\,[x]_{k,q}\,[y]_{-k,q}=[x+y+n]_{n,q}\,[y]_{-n,q}$$

*et puisque $[y]_{-k,q}=1/[y+k]_{k,q}$, en dédiant la formule requise,*

$$\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{(n-k)(x-k)}\frac{[x]_{k,q}}{[y+k]_{k,q}}=\frac{[x+y+n]_{n,q}}{[y+n]_{n,q}}.$$

*Fixer $y=-x$ et puisque*

$$[-x+k]_{k,q}=(-1)^k\,q^{\binom{k}{2}-kx}\,[x-1]_{k,q}\,,\qquad [-x+n]_{n,q}=(-1)^n\,q^{\binom{n}{2}-nx}\,[x-1]_{n,q}\,,$$

*et $\binom{n-k}{2}=\binom{n}{2}-\binom{k}{2}-k\,(n-k)\,$,on a*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{\binom{n-k}{2}}\frac{[x]_q}{[x-k]_q}=\frac{1}{\begin{bmatrix}x-1\\n\end{bmatrix}_q}.$$

*De même, en remplaçant $x$ par $-y$, nous concluons que*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q q^{\binom{k+1}{2}}\frac{[y]_q}{[y+k]_q}=\frac{1}{\begin{bmatrix}y+n\\n\end{bmatrix}_q}.$$

## 2.3 Formule $q$-binôme et $q$-binôme négatif

Le nombre $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q$ est appelé coefficient $q$-binomial, car c'est le coefficient du terme général d'une formule $q$-binomiale ($q$-binôme de Newton). Cette formule est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème 2.5** *Soit $n$ un entier positif et soient $t$ et $q$ des nombres réels, avec $q \neq 1$. Alors*

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 + tq^{i-1}\right) = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k. \tag{2.16}$$

**Preuve.** Les multiplications et additions dans le produit $\prod_{i=1}^{n} (1 + tq^{i-1})$ peuvent être effectuées dans les étapes suivant :
$(a)$ sélectionnant le terme $tq^{m_i-1}$, dans le facteur

$$a_{m_i}(t;q) = 1 + tq^{m_i-1},$$

pour $i = 1, 2, ..., k$, avec $\{m_1, m_2, ..., m_k\} \subseteq \{1, 2, ..., n\}$ ;
$(b)$ formant les produits

$$q^{m_1+m_2+...+m_k-k} t^k, \qquad \{m_1, m_2, ..., m_k\} \subseteq \{1, 2, ..., n\};$$

$(c)$ en additionnant ces produits, on déduit une somme de la forme $b_{n,k}(q)t^k$, pour $k = 0, 1, \ldots, n$, en utilisant (2.5) on obtient

$$b_{n,k}(q) = \sum_{1 \leq m_1 < m_2 < \cdots < m_k \leq n} q^{m_1+m_2+\cdots+m_k-k} = q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q.$$

Par conséquent, selon le principe de sommation on obtient l'expression (2.16).

Une autre dérivation algébrique de la formule $q$-binomiale (2.16). peut être réalisée comme suit. Considérons la suite des sommes

$$s_n(t;q) = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

En utilisant la relation de récurrence triangulaire (2.3) avec $x = n$, ainsi que la relation
$\binom{k}{2} = \binom{k-1}{2} + \binom{k-1}{1}$, on déduit pour la suite $s_n(t;q)$, $n = 1, 2, \ldots$, la relation de récurrence de premier ordre suivante :

$$s_n(t;q) = (1 + tq^{n-1}) s_{n-1}(t;q), \qquad n = 2, 3, \ldots ,$$

avec la condition initiale $s_1(t;q) = 1 + t$. Donc

$$s_n(t;q) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 + tq^{i-1}\right)$$

et (2.16) est montré. □

Une extension de la formule $q$-binomiale (2.16) à une formule négative $q$-binomiale est donnée dans le théorème suivant.

**Théorème 2.6** *Soit $n$ un entier positif et soient $t$ et $q$ des nombres réels, avec $|t| < 1$ et $|q| < 1$ ou $|t| < |q|^{-(n-1)}$ et $|q| > 1$ Alors*

$$\prod_{j=1}^{n} \left(1 - tq^{j-1}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q t^k. \tag{2.17}$$

**Preuve.** Le terme général du produit $\prod_{j=1}^{n}(1-tq^{j-1})^{-1}$ peut être développé en une série géométrique comme suit :

$$a_j(t;q) = (1 - tq^{j-1})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k q^{(j-1)k}, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

Ainsi, les multiplications et les additions dans le produit $\prod_{j=1}^{n}(1-tq^{j-1})^{-1}$ peuvent être effectuées dans les étapes suivant :
$(a)$ sélectionnant le terme $t^{k_j}q^{(j-1)k_j}$, $k_j \geq 0$, dans le facteur

$$a_j(t;q) = 1 + tq^{j-1} + t^2q^{(j-1)2+} \cdots + t^k q^{(j-1)k} + \cdots \ ,$$

pour $j = 1, 2, \ldots, n$;
$(b)$ formant les produits

$$q^{(k_1+2k_2+\cdots+nk_n)-(k_1+k_2+\cdots+k_n)}t^{k_1+k_2+\cdots+k_n};$$

$(c)$ additionnant ces produits pour $k_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, avec $k_1+k_2+\cdots+k_n = k$, on déduit une somme de la forme $b_{n,k}(q)t^k$, pour $k = 0, 1, \ldots$, en utilisant (2.7) on obtient

$$b_{n,k}(q) = q^{-k} \sum_{\substack{k_j \geq 0,\ j=1,2,\ldots,n \\ k_1+k_2+\cdots+k_n=k}} q^{k_1+2k_2+\cdots+nk_n} = \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q.$$

Par conséquent, selon le principe de sommation on obtient l'expression (2.17).

Une autre dérivation algébrique de la formule négative du $q$-binomiale (2.17) peut être réalisée comme suit. Considérons la suite convergente

$$s_n\,(t;q) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q, \qquad n = 1, 2, ..., \qquad |t| < 1, \qquad |q| < 1.$$

Utilisation de la relation de récurrence triangulaire

$$\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n+k-2 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-1} \begin{bmatrix} n+k-2 \\ k-1 \end{bmatrix}_q,$$

on a

$$\begin{aligned} s_n(t;q) &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-2 \\ k \end{bmatrix}_q t^k + q^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-2 \\ k-1 \end{bmatrix}_q t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-2 \\ k \end{bmatrix}_q t^k + q^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q t^{k+1} \\ &= s_{n-1}(t;q) + tq^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q t^k \\ &= s_{n-1}(t;q) + tq^{n-1} s_n(t;q), \end{aligned}$$

donc la suite $s_n(t;q)$, $n = 1, 2, \ldots$, satisfait la relation de récurrence de premier ordre

$$s_n(t;q) = (1 - tq^{n-1})^{-1} s_{n-1}(t;q), \ \ n = 2, 3, \ldots \ ,$$

avec la condition initiale $s_1(t;q) = (1-t)^{-1}$ donc,

$$s_n\left(t;q\right) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - tq^{i-1}\right)^{-1}, \qquad n = 1, 2, ..., \qquad |t| < 1, \qquad |q| < 1,$$

et (2.17) est montré pour $n = 1, 2, \ldots$, $|t| < 1$ et $|q| < 1$.

Le cas $s_n(t;q)$, $n = 1, 2, \ldots$, pour $|t| < |q|^{-(n-1)}$ et $|q| > 1$, en fixant $p = q^{-1}$ et $u = tq^{n-1}$ et en utilisant la relation

$$\begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q = q^{(n-1)k} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_{q^{-1}} = p^{-(n-1)k} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_p,$$

déduire que

$$c_n\left(u;p\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q u^k, \qquad |u| < 1, \ |p| < 1, \ n = 1, 2, \ldots,$$

qui est exactement le cas précédent. □

Les coefficients $q$-binomiaux satisfont à une relation d'orthogonalité. Spécifiquement, le prochain théorème est montré.

**Théorème 2.7** *Soient $n$ et $k$ des entiers positifs et $q$ est un nombre réel avec $q \neq 1$. Alors, les relations d'orthogonalité suivantes sont vraies :*

$$\sum_{r=k}^{n} (-1)^{n-r} q^{\binom{n-r}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_q = \delta_{n,k}, \qquad \sum_{r=k}^{n} (-1)^{r-k} q^{\binom{r-k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_q = \delta_{n,k}, \quad (2.18)$$

*où $\delta_{n,k} = 1$ si $k = n$ et $\delta_{n,k} = 0$ si $k \neq n$, est le symbole de Kronecker.*

**Preuve.** La première relations d'orthogonalité (2.18), puisque

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[r]_q!\,[n-r]_q!} \cdot \frac{[r]_q!}{[k]_q!\,[r-k]_q!} = \frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!} \cdot \frac{[n-k]_q!}{[n-r]_q!\,[r-k]_q!} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-k \\ n-r \end{bmatrix}_q,$$

peut être exprimé comme

$$\sum_{r=k}^{n} (-1)^{n-r}\, q^{\binom{n-r}{2}} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \sum_{r=k}^{n} (-1)^{n-r}\, q^{\binom{n-r}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ n-r \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^{j}\, q^{\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ j \end{bmatrix}_q.$$

La dernière somme par la formule $q$-binomiale (2.16), est égale à $\delta_{n,k}$ et donc le premier de (2.18) est montré.

La deuxième relations d'orthogonalité (2.18), utilisant l'identité

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n-k \\ n-r \end{bmatrix}_q,$$

peut être montré de la même manière. □

De la théorème 2.5 on déduit une inversion utile de la formule $q$-binomiale (2.16) dans le corollaire suivant. Et comme cas particulier on déduit une autre formule utile.

**Corollaire 2.2** *Soit $n$ un entier positif et $t$ et $q$ des nombres réels, avec $q \neq 1$. Alors,*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}\, q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{i=1}^{n} \left(1 - tq^{-(i-1)}\right) = t^{n}. \tag{2.19}$$

*En particulier,*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k}\, (1-q)^{k}\, q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q [t]_{k,q} = q^{nt}. \tag{2.20}$$

**Preuve.** Dans la formule $q$-binomiale (2.16) en remplaçant $q$ par $q^{-1}$, $t$ par $-t$, $n$ par $k$, la variable fictive $k$ par $r$ et en utilisant la relation

$$\begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_{q^{-1}} = q^{-r(k-r)} \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_q,$$

est exprimé comme

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 - tq^{-(i-1)}\right) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{r}\, q^{-\binom{r}{2}-r(k-r)} \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_q t^{r}.$$

Multipliant les deux nombres de la dernière expression par $(-1)^k q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$, réduisant l'exposant de $q$ dans le terme général de la somme, en utilisant la relation

$$\binom{k-r}{2} = \binom{k}{2} - \binom{r}{2} - r\,(k-r)\,,$$

et en sommant l'expression résultante pour $k = 0, 1, \ldots, n$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \prod_{i=1}^{k} \left(1 - tq^{-(i-1)}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r}\, q^{\binom{k-r}{2}} \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_q t^r \\ &= \sum_{r=0}^{n} \left( \sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r}\, q^{\binom{k-r}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_q \right) t^r .\end{aligned}$$

Puisque, par (2.18),

$$\sum_{k=r}^{n} (-1)^{k-r}\, q^{\binom{k-r}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k \\ r \end{bmatrix}_q = \delta_{n,r},$$

l'expression (2.19) est facilement déduit. En remplaçant dans la dernière expression $t$ par $q^t$ et en utilisant la relation

$$\prod_{i=1}^{n} \left(1 - tq^{t-i+1}\right) = (1-q)^k\, [t]_{k,q}\,,$$

donc on obtient (2.20). □

L'inverse de la formule $q$-binomiale (2.19) et de son cas particulier (2.20) est récrit dans la remarque suivante.

**Remarque 2.4** *Les expressions de (2.19) et (2.20) peuvent être réécrit comme*

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^{n-k} \prod_{i=1}^{k} \left(1 - tq^{i-1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q t^k \prod_{i=1}^{n-k} \left(1 - tq^{i-1}\right) = 1 \tag{2.21}$$

*et*

$$\sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{(n-k)(t-k)}\, (1-q)^k\, [t]_{k,q} = 1, \tag{2.22}$$

*respectivement.*

*En effet, en remplaçant $t$ par $t^{-1}$ dans l'expression (2.19) et en utilisant la relation*

$$(-1)^k\, q^{\binom{k}{2}} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - t^{-1}q^{-(i-1)}\right) = t^{-k} \prod_{i=1}^{k} \left(1 - tq^{i-1}\right),$$

*est réécrit comme (2.21). Aussi, en remplaçant $q$ par $q^{-1}$ dans l'expression (2.20) et en utilisant la relation*

$$(-1)^k \left(1 - q^{-1}\right)^k q^{-\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^{-1}} [t]_{k,q^{-1}} = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{-k(t+n-k)}\, (1-q)^k\, [t]_{k,q}\,,$$

*on obtien (2.22).*

Certaines applications intéressantes de la formule $q$-binomiale et de la formule $q$-binomiale négative sont développées dans les exemples suivants.

**Exemple 2.3** *Pour $r$, $s$ et $n$ des entiers positifs et $q \neq 1$ un nombre réel, montrent que*

$$\sum_{k=0}^{n} q^{(n-k)(r-k)} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} s \\ n-k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} r+s \\ n \end{bmatrix}_q$$

*et conclure que*

$$\sum_{k=0}^{r-m} q^{(r-k)(r-k-m)} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} r \\ k+m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} 2r \\ r+m \end{bmatrix}_q, \qquad m = 0, 1, ..., r,$$

*L'expansion de l'identité*

$$\prod_{i=1}^{r} \left(1 + tq^{i-1}\right) \prod_{i=1}^{s} \left(1 + (tq^r)\, q^{i-1}\right) = \prod_{i=1}^{r+s} \left(1 + tq^{i-1}\right)$$

*en puissances de $t$, en utilisant la formule $q$-binomiale (2.16), donne*

$$\sum_{k=0}^{r} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_q t^k \sum_{j=0}^{s} q^{\binom{j}{2}+rj} \begin{bmatrix} s \\ j \end{bmatrix}_q t^j = \sum_{n=0}^{r+s} q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} r+s \\ n \end{bmatrix}_q t^n.$$

*Exécuter la multiplication à gauche, le terme général $a_n t^n$, pour tout $n = 0, 1, \ldots, r+s$, est formé en multipliant le terme $q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_q t^k$ du premier facteur par le terme $q^{\binom{n-k}{2}+r(n-k)} \begin{bmatrix} s \\ n-k \end{bmatrix}_q t^{n-k}$ du deuxième facteur pour toutes les valeurs $k = 0, 1, \ldots, n$. Donc, par le principe d'addition et en utilisant pour l'exposant de $q$ la relation $\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2} = \binom{n}{2} - k\,(n-k)$, on conclut que*

$$a_n = q^{\binom{n}{2}} \sum_{k=0}^{n} q^{(n-k)(r-k)} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} s \\ n-k \end{bmatrix}_q$$

*et*

$$\sum_{n=0}^{r+s} q^{\binom{n}{2}} \left( \sum_{k=0}^{n} q^{(n-k)(r-k)} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} s \\ n-k \end{bmatrix}_q \right) t^n = \sum_{n=0}^{r+s} q^{\binom{n}{2}} \begin{bmatrix} r+s \\ n \end{bmatrix}_q t^n.$$

*En comparant les coefficients de $t^n$ des deux côtés, on trouvons*

$$\sum_{k=0}^{n} q^{(n-k)(r-k)} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} s \\ n-k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} r+s \\ n \end{bmatrix}_q.$$

*remarquer que cette formule constitue un cas particulier, avec $x = r$ et $y = s$ entiers positifs, de la formule de $q$-Cauchy (convolution $q$-binomiale) (2.10). Substituer dans cette formule $s = r$, $n = r - m$ et depuis*

$$\begin{bmatrix} r \\ r-m-k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} r \\ k+m \end{bmatrix}_q, \qquad \begin{bmatrix} 2r \\ r-m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} 2r \\ r+m \end{bmatrix}_q,$$

*on concluons que*

$$\sum_{k=0}^{r-m} q^{(r-k)(r-k-m)} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} r \\ k+m \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} 2r \\ r+m \end{bmatrix}_q.$$

**Exemple 2.4** *Pour $r, s$ et $n$ entiers positifs et $q \neq 1$ un nombre réel, montrent que*

$$\sum_{k=0}^{n} q^{r(n-k)} \begin{bmatrix} r+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} s+n-k-1 \\ n-k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} r+s+n-1 \\ n \end{bmatrix}_q.$$

*L'expansion de l'identité*

$$\prod_{i=1}^{r} \left(1+tq^{i-1}\right)^{-1} \prod_{i=1}^{s} \left(1+\left(tq^{r}\right)q^{i-1}\right)^{-1} = \prod_{i=1}^{r+s} \left(1+tq^{i-1}\right)^{-1}, \qquad |t|<1,$$

*en utilisant la formule q-binomiale négative (2.17), donne*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} r+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q t^k \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} s+j-1 \\ j \end{bmatrix}_q q^{rj} t^j = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} r+s+n-1 \\ n \end{bmatrix}_q t^n$$

*et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} q^{r(n-k)} \begin{bmatrix} r+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} s+n-k-1 \\ n-k \end{bmatrix}_q t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} r+s+n-1 \\ n \end{bmatrix}_q t^n,$$

*pour $|t|<1$. Par conséquent,*

$$\sum_{k=0}^{n} q^{r(n-k)} \begin{bmatrix} r+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} s+n-k-1 \\ n-k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} r+s+n-1 \\ n \end{bmatrix}_q.$$

*Notez que cette formule constitue un cas particulier, avec $x=-r$ et $y=-s$ des entiers négatifs, de la formule de q-Cauchy (2.10).*

## 2.4 Formule $q$-binôme générale

Une formule générale $q$-binomiale et une formule générale négative $q$-binomiale sont données dans le théorème suivant.

**Théorème 2.8** *Soit $x$, $t$ et $q$ des nombres réels, avec $|t|<1$ et $|q|<1$. Alors,*

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+tq^{i-1}}{1+tq^{x+i-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x \\ k \end{bmatrix}_q t^k. \tag{2.23}$$

*Ou,*

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1-tq^{x+i-1}}{1-tq^{i-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q t^k. \tag{2.24}$$

**Preuve.** Considérons la série convergente

$$h\left(x;t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}x\\k\end{bmatrix}_q t^k,\qquad |t|<1,\qquad |q|<1$$

et on calculons la différence

$$h\left(x;t\right)-h\left(x-1;t\right)=\sum_{k=0}^{\infty}q^{\binom{k}{2}}\left\{\begin{bmatrix}x\\k\end{bmatrix}_q-\begin{bmatrix}x-1\\k\end{bmatrix}_q\right\}t^k,\qquad |t|<1,\qquad |q|<1.$$

En utilisant la relation de récurrence (2.3), on conclut que

$$\begin{aligned}h\left(x;t\right)-h\left(x-1;t\right)&=\sum_{k=1}^{\infty}q^{\binom{k}{2}+x-k}\begin{bmatrix}x-1\\k-1\end{bmatrix}_q t^k\\&=tq^{x-1}\sum_{k=1}^{\infty}q^{\binom{k-1}{2}}\begin{bmatrix}x-1\\k-1\end{bmatrix}_q t^{k-1}\\&=tq^{x-1}h\left(x-1;t\right).\end{aligned}$$

Aussi

$$\begin{aligned}h\left(x;t\right)-h\left(x;tq\right)&=\sum_{k=0}^{\infty}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}x\\k\end{bmatrix}_q\left(1-q^k\right)t^k\\&=t\left(1-q^x\right)\sum_{k=1}^{\infty}q^{\binom{k-1}{2}}\begin{bmatrix}x-1\\k-1\end{bmatrix}_q\left(tq\right)^{k-1}\\&=t\left(1-q^x\right)h\left(x-1;tq\right).\end{aligned}$$

Éliminer $h(x-1;tq)$ des expressions

$$h\left(x;tq\right)=\left(1-tq^x\right)h\left(x-1;tq\right)$$

et

$$h\left(x;t\right)-h\left(x;tq\right)=t\left(1-q^x\right)h\left(x-1;tq\right),$$

nous obtenons la relation

$$h\left(x;t\right)=\frac{1+t}{1+tq^x}h\left(x;tq\right).$$

Répéter cette relation $n-1$ fois, on trouve

$$h\left(x;t\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1+tq^{i-1}}{1+tq^{x+i-1}}h\left(x;tq^n\right).$$

Soit $n\to\infty$, et puisque $\lim_{n\to\infty}h(x;tq^n)=h(x;0)=1$, pour $|q|<1$, on en déduit l'expression

$$h\left(x;t\right)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1+tq^{i-1}}{1+tq^{x+i-1}},$$

qui montre (2.23). L'expression alternative (2.24) se déduit de (2.23), en remplaçant successivement $x$ par $-x$ et $t$ par $-tq^x$ et enfin en utilisant la relation

$$\begin{bmatrix} -x \\ k \end{bmatrix}_q = (-1)^k \, q^{-xk-\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} x+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q .$$

Par conséquent, la preuve du théorème est terminée. □

## 2.5 Nombres de $q$-Stirling

Considérons le $q$-factorielle non centrale de $t$ d'ordre $n$ et le paramètre de non centralité $r$,

$$[t-r]_{n,q} = [t-r]_q[t-r-1]_q \cdots [t-r-n+1]_q,$$

avec $t, q$ et $r$ des nombres réels, $q \neq 1$ et $n$ un entier positif. En utilisant la relation

$$[t-r-j]_{n,q} = q^{-r-j}\left([t]_q - [r+j]_q\right), \qquad j = 0, 1, \dots ,$$

il peut être exprimé par

$$[t-r]_{n,q} = q^{-\binom{n}{2}-rn}\left([t]_q - [r]_q\right)\left([t]_q - [r+1]_q\right)\cdots\left([t]_q - [r+n-1]_q\right).$$

C'est un polynôme du $q$-nombre $[t]_q$ du degré $n$. En exécuter les multiplications et en arrangeant les termes dans l'ordre croissant des puissances de $[t]_q$, on obtient

$$[t-r]_{n,q} = q^{-\binom{n}{2}-rn} \sum_{k=0}^{n} s_q(n,k;r)\,[t]_q^k , \qquad n = 0, 1, \dots . \tag{2.25}$$

Inversement, la $n^{ième}$ puissance du $q$-nombre $[t]_q$ peut être exprimée sous la forme d'un polynôme de $q$-factorielles non centraux de $t$. Spécifiquement,

$$[t]_q^n = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}+rk} S_q(n,k;r)\,[t-r]_{k,q} , \qquad n = 0, 1, \dots , \tag{2.26}$$

ou équivalent

$$[t+r]_q^n = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}+rk} S_q(n,k;r)\,[t]_{k,q} , \qquad n = 0, 1, \dots . \tag{2.27}$$

Les coefficients $s_q(n,k;r)$ et $S_q(n,k;r)$ s'appellent des nombres de $q$-Stirling non centraux du premier et deuxième espèce, respectivement. Remarquer que pour $r = 0$, les nombres $q$-Stirling non centraux du premier et de la deuxième espèce sont réduisent à
$s_q(n,k;0) = s_q(n,k)$ et $S_q(n,k;0) = S_q(n,k)$, les nombres $q$-Stirling centraux des

premier et de deuxième espèces, respectivement.
De plus, considérons l'extension du $q$-factorielle croisant non central de $t$ d'ordre $n$ et du paramètre de non centralité $r$,

$$\begin{aligned}[t+r+n-1]_{n,q} &= [t+r]_q\,[t+r+1]_q\cdots[t+r+n-1]_q \\ &= q^{\binom{n}{2}+rn}\left([t]_q+q^{-1}\,[r]_{q^{-1}}\right)\cdots\left([t]_q+q^{-1}\,[r+n-1]_{q^{-1}}\right),\end{aligned}$$

en un polynôme de $[t]_q$.

$$[t+r+n-1]_{n,q}=q^{\binom{n}{2}+rn}\sum_{k=0}^{n}\left|s_{q^{-1}}(n,k;r)\right|[t]_q^k\,,\qquad n=0,1,\ldots\,, \tag{2.28}$$

pour $q\neq 0$. Alors

$$[t+r+n-1]_{n,q}=[-1]_q^n\,[-t-r]_{n,q^{-1}},\qquad [-t]_q=[-1]_q\,[t]_{q^{-1}}\,,$$

où $[-1]_q=-q^{-1}$, en utilisant (2.25), avec $-t$ au lieu de $t$ et $q^{-1}$ au lieu de $q$, on conclut que

$$\left|s_{q^{-1}}(n,k;r)\right|=[-1]_q^{n-k}\,s_{q^{-1}}(n,k;r)\,,$$

ou, équivalente, que

$$\left|s_q(n,k;r)\right|=[-1]_q^{-(n-k)}\,s_q(n,k;r)\,. \tag{2.29}$$

Le coefficient $|s_q(n,k;r)|$, qui pour $0<q<1$ ou $1<q<\infty$ et $r\geq 0$ est positif, est appelé *nombre de q-Stirling non central non signé (ou absolu) du premier espèce.*

Les nombres $q$-Stirling non centraux de premier et de deuxième espèce constituent une paire des suites orthogonales bivariées. Ceci est montré dans le théorème suivant.

**Théorème 2.9** *Les nombres q-Stirling du premier et de deuxième espèce satisfont les relations d'orthogonalité*

$$\sum_{m=k}^{n}s_q(n,m;r)\,S_q(m,k;r)=\delta_{n,k},\qquad \sum_{m=k}^{n}S_q(n,m;r)\,s_q(m,k;r)=\delta_{n,k}, \tag{2.30}$$

*où $\delta_{n,k}=1$ si $k=n$ et $\delta_{n,k}=0$ si $k\neq n$, est le symbole de Kronecker.*

**Preuve.** Développer, la $q$-factorielle non centrale de $t$ d'ordre $n$ et du paramètre de non-centralité $r$, $[t-r]_{n,q}$, en puissances de $[t]_q$, en utilisant (2.25), et dans l'expression résultante en développant les puissances de $[t]_q$ en $q$-factorielle non centraux $[t-r]_{k,q}$, pour $k=0,1,\ldots,n$, en utilisant (2.26), nous obtenons

$$\begin{aligned}[t-r]_{n,q} &= q^{-\binom{n}{2}-rn}\sum_{m=0}^{n}s_q(n,m;r)\,[t]_q^m \\ &= q^{-\binom{n}{2}-rn}\sum_{m=0}^{n}s_q(n,m;r)\sum_{k=0}^{m}q^{\binom{k}{2}+rk}S_q(m,k;r)\,[t-r]_{k,q}\,.\end{aligned}$$

De plus, en changement l'ordre de sommation, en dédiant la relation

$$[t-r]_{n,q}=\sum_{k=0}^{n}q^{-\binom{n}{2}+\binom{k}{2}-r(n-k)}\left\{\sum_{m=k}^{n}s_q\left(n,m;r\right)S_q\left(m,k;r\right)\right\}[t-r]_{k,q}\,,$$

ce qui implique le premier de (2.30). De même, élargir la $n^{ième}$ puissance du $q$-nombre $[t]_q$, $[t]_q^n$, en $q$-factorielles non centraux $[t-r]_{m,q}$, $m=0,1,\ldots,n$ et dans l'expression résultante en élargissant $q$-factorielles non centraux $[t-r]_{m,q}$, $m=0,1,\ldots,n$, en puissances de $[t]_q$, on déduisons la deuxième de (2.30). □

Les relations de récurrence triangulaires pour les nombres $q$-Stirling non centraux du premier et de deuxième espèce sont déduites dans le théorème suivant.

**Théorème 2.10** *Les nombres de q-Stirling non centraux du premier espèce* $s_q(n,k;r)$, $k=0,1,\ldots,n$, $n=0,1,\ldots$ *satisfont la relation de récurrence triangulaire*

$$s_q(n+1,k;r)=s_q(n,k-1;r)-[n+r]_q\,s_q(n,k;r), \tag{2.31}$$

*pour* $k=1,2,\ldots,n+1$ *et* $n=0,1,\ldots$, *avec les conditions initiales*

$$s_q(0,0;r)=1\ ,s_q(0,k;r)=0,\ \ k>0,\ \ s_q(n,0;r)=q^{\binom{n}{2}+rn}\,[-r]_{n,q}\,,\ \ n>0.$$

*De plus, les nombres q-Stirling non centraux du deuxième espèce* $S_q(n,k;r)$, $k=0,1,\ldots,n$, $n=0,1,\ldots$, *satisfont la relation de récurrence triangulaire*

$$S_q(n+1,k;r)=S_q(n,k-1;r)+[k+r]_q\,S_q(n,k;r), \tag{2.32}$$

*pour* $k=1,2,\ldots,n+1$ *et* $n=0,1,\ldots$, *avec les conditions initiales*

$$S_q(0,0;r)=1,\quad S_q(0,k;r)=0,\ \ k>0,\quad Sq(n,0;r)=[r]_q^n,\ \ n>0.$$

**Preuve.** Développer les deux nombres de la relation de récurrence

$$[t-r]_{n+1,q}=[t-(n+r)]_q[t-r]_{n,q}=q^{-n-r}([t]_q-[n+r]_q)[t-r]_{n,q},$$

en puissances de $[t]_q$, selon (2.25), nous obtenons la relation

$$q^{-\binom{n+1}{2}-r(n+1)}\sum_{k=0}^{n+1}s_q\left(n+1,k;r\right)[t]_q^k=q^{-\binom{n}{2}-rn-n-r}\left\{\sum_{j=0}^{n}s_q\left(n,j;r\right)[t]_q^{j+1}-\sum_{k=0}^{n}[n+r]_q\,s_q\left(n,k;r\right)[t]_q^k\right\}$$

ou équivalente, la relation

$$\sum_{k=0}^{n+1}s_q\left(n+1,k;r\right)[t]_q^k=\sum_{k=1}^{n+1}s_q\left(n,k-1;r\right)[t]_q^k-\sum_{k=0}^{n}[n+r]_q\,s_q\left(n,k;r\right)[t]_q^k,$$

ce qui implique (2.31). Les conditions initiales suivent directement de (2.25).

En outre, élargir les deux nombres de la relation de récurrence

$$[t+r]_q^{n+1} = [t+r]_q\,[t+r]_q^n$$

en factorielles du $q$-nombre $[t]_q$, selon (2.27), nous avons

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^{\binom{k}{2}+rk} S_q\left(n+1,k;r\right)[t]_{k,q} = \sum_{j=0}^{n} q^{\binom{j}{2}+rj} S_q\left(n,j;r\right)[t+r]_q\,[t]_{j,q}\,.$$

Puisque

$$[t+r]_q[t]_{j,q} = [(t-j)+(j+r)]_q[t]_{j.q} = (q^{j+r}[t-j]_q + [j+r]_q)[t]_{j,q},$$

d'où

$$[t+r]_q[t]_{j,q} = q^{j+r}[t]_{j+1,q} + [j+r]_q[t]_{j,q},$$

en déduit la relation

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+1} q^{\binom{k}{2}+rk} S_q\left(n+1,k;r\right)[t]_{k,q} \\
&= \sum_{j=0}^{n} q^{\binom{j+1}{2}+r(j+1)} S_q\left(n,j;r\right)[t]_{j+1,q} + \sum_{j=0}^{n} q^{\binom{j}{2}+rj}\,[j+r]_q\,S_q\left(n,j;r\right)[t]_{j,q} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} q^{\binom{k}{2}+rk} S_q\left(n,k-1;r\right)[t]_{k,q} + \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}+rk} + [k+r]_q\,S_q\left(n,k;r\right)[t]_{k,q},
\end{aligned}$$

ce qui implique (2.32). Les conditions initiales suivent directement (2.27). □

**Définition 2.1** ***Table des nombres de q-Stirling de première espèce***
*Soit $(s_q(n,k;r))_{0\le k\le n}$ un triangle, alors d'aprés la relation de récurrence (2.31) on a cette illustration du triangle de Stirling de première espèce, telle que $n$ représenté les lignes et $k$ les colonnes :*

| $n\backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | $\vdots$ |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 2 | 0 | $-1$ | 1 | | | |
| 3 | 0 | $1+q$ | $-(2+q)$ | 1 | | |
| 4 | 0 | $-1-2q-2q^2-q^3$ | $3+4q+3q^2+q^3$ | $-3-2q-q^2$ | 1 | |
| $\vdots$ | $\cdots$ | | | | | |

**Définition 2.2** ***Table des nombres de q-Stirling de deuxième espèce***
*Soit $(S_q(n,k;r))_{0\le k\le n}$ un triangle, alors d'aprés la relation de récurrence (2.32) on*

*a cette illustration du triangle de Stirling de deuxième espèce, telle que n représenté les lignes et k les colonnes :*

| $n\backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | $\vdots$ |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | |
| 3 | 0 | 1 | $2+q$ | 1 | | |
| 4 | 0 | 1 | $3+3q+q^2$ | $3+2q+q^2$ | 1 | |
| $\vdots$ | $\cdots$ | | | | | |

**Théorème 2.11** *La fonction génératrice de la suite du nombres de q-Stirling non-central de deuxième espèce $S_q(n,k;r), n=k,k+1,\ldots,$ pour k fixé, est donné par*

$$\varphi_k(u;q,r)=\sum_{n=k}^{\infty}S_q(n,k;r)u^n=u^k\prod_{j=0}^{k}\left(1-[r+j]_q\,u\right)^{-1} \tag{2.33}$$

*pour $|u|<1/[r+k]_q$ et $k=0,1,\ldots.$*

**Preuve.** Remarquons tout d'abord que la série dans (2.33) est convergente, puisque

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_q(n,k;r)}{[r+k]_q^n}\left([r+k]_q\,u\right)^n=\frac{1}{[k]_q!}\lim_{n\to\infty}\left([r+k]_q\,u\right)^n=0,$$

pour $|u|<1/[r+k]_q$. De plus, en multipliant la relation de récurrence triangulaire (2.32) par $u^{n+1}$ et en sommant l'expression résultante pour $n=k-1,k,\ldots,$ et puisque
$S_q(k-1,k;r)=0$, on obtient

$$\sum_{n=k-1}^{\infty}S_q(n+1,k;r)u^{n+1}=u\sum_{n=k-1}^{\infty}S_q(n,k-1;r)u^n+[k+r]_q\,u\sum_{n=k}^{\infty}S_q(n,k;r)u^n,$$

pour $k=1,2,\ldots.$ par conséquent

$$\varphi_k(u;q,r)=u\varphi_{k-1}(u;q,r)+[k+r]_q\,u\varphi_k(u;q,r),\qquad k=1,2,...$$

et donc

$$\varphi_k(u;q,r)=u\left(1-[k+r]_q\,u\right)^{-1}\varphi_{k-1}(u;q,r),\quad k=1,2,...\ .$$

En appliquant cette relation de récurrence plusieurs fois et puisque

$$\varphi_0(u;q,r)=\sum_{n=0}^{\infty}S_q(n,0;r)u^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left([r]_q\,u\right)^n=\left(1-[r]_q\,u\right)^{-1},$$

on déduit (2.33). □

Les expressions des nombres q-Stirling non centraux en termes de sommes multiples de produits de q-nombres, par rapport à des combinaisons d'entiers positifs, sont définis dans le théorème suivant.

**Théorème 2.12** *Le nombre de q-Stirling non-central de premier espèce* $s_q(n,k;r), k=1,2,\ldots,n,\ n=1,2,\ldots,$ *est donné par la somme multiple*

$$s_q(n,k;r)=(-1)^{n-k}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-k}\ \geq 0}[r+i_1]_q[r+i_2]_q\cdots[r+i_{n-k}]_q, \tag{2.34}$$

*où la somme est étendue à toutes les* $(n-k)$*-combinaisons* $\{i_1,i_2,\ldots,i_{n-k}\}$ *des* $n$ *entiers non négatifs* $\{0,1,\ldots,n-1\}$.

*De plus, le nombre non-central de q-Stirling du deuxième espèce* $S_q(n,k;r),\ k=1,2,\ldots,n,\ n=1,2,\ldots,$ *est donné par la somme multiple*

$$S_q(n,k;r)=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-k}\ \geq 0}[r+i_1]_q[r+i_2]_q\cdots[r+i_{n-k}]_q, \tag{2.35}$$

*où la somme est étendue à toutes* $(n-k)$ *les combinaisons* $\{i_1,i_2,\ldots,i_{n-k}\}$*, avec répétition, de* $k+1$ *entiers non négatifs* $\{0,1,\ldots,k\}$.

**Preuve.** Selon la définition (2.25), et puisque

$$[t-r]_{n,q}=q^{-\binom{n}{2}-rn}([t]_q-[r]_q)([t]_q-[r+1]_q)\cdots([t]_q-[r+n-1]_q),$$

on a

$$([t]_q-[r]_q)([t]_q-[r+1]_q)\cdots[t]_q-[r+n-1]_q=\sum_{k=1}^{n}s_q(n,k;r)\,[t]_q^k,$$

pour $n=2,3,\ldots$ Le $i^{ème}$ facteur du produit du côté gauche, $f_i(t;q)=[t]_q-[r+i]_q$, $i=0,1,\ldots,n-1$, est un monôme à terme constant $-[r+i]_q$. En exécutant les multiplications, la puissance du $k^{ième}$-ordre de $[t]_q$ est formée en multipliant les termes constants de $n-k$ facteurs $\{i_1,i_2,\ldots,i_{n-k}\}$, parmi les $n$ facteurs $\{0,1,\ldots,n-1\}$, ainsi que les termes de premier ordre $[t]_q$ des $k$ facteurs restants. Puisque le coefficient du terme de premier ordre $[t]_q$, dans tout facteur, est égal à un, par le principe de multiplication, (2.34) est déduit.

En outre, en développant chaque facteur dans (2.33) en utilisant la série géométrique, nous obtenons

$$\begin{aligned}\varphi_k(u;q,r)&=\sum_{n=k}^{\infty}S_q(n,k;r)\,u^n=u^k\prod_{j=0}^{k}\left(\sum_{j=0}^{\infty}[r+j]_q^{m_j}\,u^{m_j}\right)\\&=\sum_{n=k}^{\infty}\left\{\sum[r]_q^{m_0}\,[r+1]_q^{m_1}\cdots[r+k]_q^{m_k}\right\}u^n\end{aligned}$$

et donc

$$S_q(n,k;r)=\sum[r]_q^{m_0}\,[r+1]_q^{m_1}\cdots[r+k]_q^{m_k},$$

où la somme est étendue à tous les entiers $m_j\geq 0$, $j=0,1,\ldots,k$, avec $m_0+m_1+\cdots+m_k=n-k$. Cette expression est équivalente à (2.35). □

Les expressions des nombres $q$-Stirling non centraux sous la forme de sommations uniques de termes élémentaires sont données dans le théorème suivant.

**Théorème 2.13** *Le nombre q-Stirling non central du premier espèce* $s_q(n,k;r)$, $k = 1,2,\ldots,n$, $n = 1,2,\ldots,$ *est donné par*

$$s_q(n,k;r) = \frac{1}{(1-q)^{n-k}} \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k}\, q^{\binom{n-j}{2}+r(n-j)} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q \binom{j}{k}. \tag{2.36}$$

*De plus, le nombre q-Stirling non central du deuxième espèce* $S_q(n,k;r)$, $k = 1,2,\ldots,n$, $n = 1,2,\ldots,$ *est donné par*

$$S_q(n,k;r) = \frac{1}{(1-q)^{n-k}} \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k}\, q^{r(j-k)} \binom{n}{j} \begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q. \tag{2.37}$$

*En outre,*

$$S_q(n,k;r) = \frac{1}{[k]_q!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j}\, q^{\binom{j+1}{2}-(r+j)k} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q [r+j]_q^n. \tag{2.38}$$

**Preuve.** Dans la formule $q$-binomiale (2.16), en remplaçant successivement $q$ par $q^{-1}$, $t$ par $-q^{t-r}$, $k$ par $j$ et $n$ par $k$, devient

$$\prod_{i=1}^{k} \left(1 - q^{t-r} q^{-(i-1)}\right) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j\, q^{-\binom{j}{2}} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_{q^{-1}} q^{tj-rj}.$$

De plus, en utilisant les relations

$$\prod_{i=1}^{k} \left(1 - q^{t-r} q^{-(i-1)}\right) = (1-q)^n\, [t-r]_{n,q}, \qquad \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_{q^{-1}} = q^{-j(n-j)} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q,$$

il est exprimé comme

$$[t-r]_{n,q} = \frac{1}{(1-q)^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, q^{-\binom{j}{2}-j(n-j+r)} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{jt}. \tag{2.39}$$

Multipliant les deux nombres de (2.39) par $q^{\binom{n}{2}+rn}$, réduisant l'exposant de $q$ en utilisant la relation $\binom{n-j}{2} = \binom{n}{2} - \binom{j}{2} - j\,(n-j)$, et en développant la relation $q$-fonction
$q^{jt} = (1-(1-q)[t]q)^j$ dans les puissances du $q$-nombre $[t]_q$, on obtient

$$q^{\binom{n}{2}+rn}\, [t-r]_{n,q} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j\, q^{\binom{n-j}{2}+r(n-j)} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} \frac{(1-q)^k}{(1-q)^n} [t]_q^k.$$

De plus, en intervertissant l'ordre de sommation, on retrouve le développement.

$$q^{\binom{n}{2}+rn}\, [t-r]_{n,q} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \frac{1}{(1-q)^{n-k}} \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k}\, q^{\binom{n-j}{2}+r(n-j)} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q \binom{j}{k} \right\} [t]_q^k.$$

En comparant cette expansion à (2.25), on en déduit facilement (2.36).

En outre, en augmentant la $n^{ième}$ puissance du $q$-nombre de $t+r$, en puissances de $q^t$, on a

$$[t+r]_q^n = \frac{(1-q^{t+r})^n}{(1-q)^n} = \frac{1}{(1-q)^n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{n}{j} q^{jr} q^{jt}.$$

Ensuite, en développant les puissances de $q^t$ en factorielles, en utilisant (2.20), nous obtenons

$$\begin{aligned}[t+r]_q^n &= \frac{1}{(1-q)^n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j q^{jr}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{j}(-1)^k (1-q)^k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q [t]_{k,q} \\ &= \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}}\left\{\frac{1}{(1-q)^{n-k}}\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k} q^{jr}\binom{n}{j}\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q\right\}[t]_{k,q}.\end{aligned}$$

En comparant cette expansion à (2.27), on en déduit facilement (2.37). La dernière expression peut être transformée en (2.38) en utilisant l'expression

$$\begin{bmatrix} j \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{1}{[k]_q!\,(1-q)^k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i q^{\binom{i+1}{2}-ik}\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_q q^{ij},$$

ce qui se déduit de (2.39) en remplaçant $n$ par m, la variable liée $j$ par $i$, fixant $t=j$, $r=0$ et divisant les deux nombres de l'expression résultante par $[k]_q!$. Spécifiquement, nous obtenons

$$\begin{aligned}S_q(n,k;r) &= \frac{1}{[k]_q!}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j-k}\binom{n}{j}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i q^{\binom{i+1}{2}-k(r+i)}\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_q \frac{q^{(r+i)j}}{(1-q)^n} \\ &= \frac{1}{[k]_q!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i} q^{\binom{i+1}{2}-k(r+i)}\begin{bmatrix} k \\ i \end{bmatrix}_q \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{q^{(r+i)j}}{(1-q)^n}.\end{aligned}$$

Depuis, par la formule binomiale classique,

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{q^{(r+i)j}}{(1-q)^n} = \frac{(1-q^{r+i})^n}{(1-q)^n} = [r+i]_q^n,$$

la dernière expression implique (2.38). □

Les expressions explicites des nombres $q$-Stirling des premier et deuxième espèces, (2.36) et (2.37), avec $r=0$, peuvent être inversées pour exprimer les coefficients binomiaux en termes de coefficients $q$-binomiaux et inversement. Ces inversions sont obtenues dans le corollaire suivant du théorème 2.13.

**Corollaire 2.3** *Soit $k$ et $j$ des entiers positifs et $q$ un nombre réel, avec $q \neq 1$. Ensuite,*

$$\binom{k}{j} = \sum_{m=j}^{k}(-1)^{m-j}(1-q)^{m-j} s_q(m,j)\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}_q \tag{2.40}$$

*et*

$$\begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q = \sum_{m=j}^{k} (-1)^{m-j} (1-q)^{m-j} S_q(m,j) \binom{k}{m}. \tag{2.41}$$

**Preuve.** L'expression (2.36), avec $r = 0$, peut être inversée pour obtenir le coefficient binomial $\binom{k}{j}$ en termes de coefficients $q$-binomiaux, comme suit. Spécifiquement, dans (2.36), avec $r = 0$, nous remplaçons $n$ par $m$, la variable (fictive) liée $j$ par $i$ et multiplions l'expression résultante par

$$(-1)^{m-j} (1-q)^{m-j} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}_q.$$

Puis, en additionnant pour $m = j, j+1, \ldots, k$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{m=j}^{k} (-1)^{m-j} (1-q)^{m-j} s_q(m,j) \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}_q &= \sum_{m=j}^{k} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}_q \sum_{i=j}^{k} (-1)^{m-i} q^{\binom{m-i}{2}} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_q \binom{i}{j} \\ &= \sum_{i=j}^{k} \binom{i}{j} \left\{ \sum_{m=i}^{k} (-1)^{m-i} q^{\binom{m-i}{2}} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}_q \right\} \end{aligned}$$

et en utilisant la relation d'orthogonalité (2.18), nous déduisons l'expression (2.40).

De même, dans (2.37), avec $r = 0$, nous remplaçons $n$ par $m$, la variable liée $j$ par $i$ et multiplions l'expression résultante par

$$(-1)^{m-j} (1-q)^{m-j} \binom{k}{m}.$$

Puis, en additionnant pour $m = j, j+1, \ldots, k$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{m=j}^{k} (-1)^{m-j} (1-q)^{m-j} S_q(m,j) \binom{k}{m} &= \sum_{m=j}^{k} \binom{k}{m} \sum_{i=j}^{k} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_q \\ &= \sum_{i=j}^{k} \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_q \sum_{m=i}^{k} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} \binom{k}{m} \end{aligned}$$

et en utilisant la relation d'orthogonalité

$$\sum_{m=i}^{k} (-1)^{m-i} \binom{m}{i} \binom{k}{m} = \delta_{i,k},$$

on en déduit la relation (2.41). □

Chapitre 3

# LA GÉNÉRALISATION DE LA MATRICE D'EULER-SEIDEL

---

Ce chapitre concerne la matrice d'Euler-Seidel et son q-analogues. A la fin, on présente le code Maple pour ces matrices, voir [3, 6].

## 3.1 Matrice d'Euler-Seidel

Soit $(a_m)_{m\geq 0}$ une suite de nombres. On appelle matrice d'Euler-Seidel associée à la suite $(a_m)$, la suite double $(a_{n,m})_{n\geq 0,m\geq 0}$ donnée par

$$\begin{cases} a_{0,m} = a_m, & m \geq 0 \\ a_{n+1,m} = a_{n,m} + a_{n,m+1}, & n \geq 0,\ m \geq 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,m} & & a_{0,m+1} & \cdots \\ . & . & . & . & & . & . \\ . & . & . & . & & . & . \\ . & . & . & a_{n,m} & + & a_{n,m+1} & . \\ . & . & . & \downarrow & & . & . \\ . & . & . & a_{n+1,m} & & . & . \\ . & . & . & . & & . & . \end{pmatrix}.$$

La suite $(a_{0,m})$, première ligne de la matrice est la suite initiale. La suite $(a_{n,0})$, première colonne de la matrice est la suite finale.

Inversement, étant donnée une suite finale $(a_n)_{n\geq 0}$ la matrice d'Euler-Seidel associe à $(a_n)$, la suite $(a_{n,m})$ donnée par

$$\begin{cases} a_{n,0} = a_n, & n \geq 0 \\ a_{n,m+1} = a_{n+1,m} - a_{n,m}, & n \geq 0,\ m \geq 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & . & . & . & & . & . & \dots \\ a_{1,0} & . & . & . & & . & . & . \\ \vdots & . & . & . & & . & . & . \\ a_{n,0} & . & . & a_{n,m} & \longrightarrow & a_{n,m+1} & . & . \\ & & & \uparrow - & & . & & \\ a_{n+1,0} & . & . & a_{n+1,m} & & . & . & . \\ \vdots & . & . & . & & . & . & . \end{pmatrix}.$$

### 3.1.1 Les identités combinatoires

**Théorème 3.1** *Etant donnée une suite initiale* $(a_m)_{m\geq 0}$ *,nous définissons la suite* $(a_{n,m})_{n\geq 0,m\geq 0}$ *par* (3.1)*, alors :*

$$a_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{0,m+k.} \tag{3.3}$$

**Preuve.** Par récurrence sur $n$

• ***Initialisation*** : Lorsque $n = 0$ (3.3) est vraie.

• ***Hérédité*** : Supposons (3.3) est vraie pour $n$, et montrons que elle est vraie pour $n+1$

$$\begin{aligned} a_{n,m} + a_{n,m+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{0,m+k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{0,m+k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{0,m+k} + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a_{0,m+j} \\ &= a_{0,m} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_{0,m+k} + a_{0,m+n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a_{0,m+k} \\ &= a_{0,m} + a_{0,m+n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] a_{0,m+k} \\ &= a_{0,m} + a_{0,m+n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a_{0,m+k} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a_{0,m+k} \\ &= a_{n+1,m}. \end{aligned}$$

□

**Théorème 3.2** *Etant donnée une suite finale* $(a_n)_{n\geq 0}$ *,nous définissons la suite* $(a_{n,m})_{n\geq 0,m\geq 0}$ *par* (3.2)*, alors :*

$$a_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{n+k,0}. \tag{3.4}$$

**Preuve.** Par récurrence sur $m$

• ***Initialisation*** : Lorsque $m = 0$ (3.4) est vraie.

• ***Hérédité*** : Supposons (3.4) est vraie pour $m$, et montrons que elle est vraie pour $m+1$

$$\begin{aligned}
a_{n+1,m} - a_{n,m} &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{n+k+1,0} - \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{n+k,0} \\
&= \sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{m-k+1} \binom{m}{k-1} a_{n+k,0} - \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{n+k,0} \\
&= a_{n+m+1,0} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k+1} \binom{m}{k-1} a_{n+k,0} - \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{n+k,0} - (-1)^m a_{n,0} \\
&= a_{n+m+1,0} - (-1)^m a_{n,0} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k+1} \left[ \binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right] a_{n+k,0} \\
&= a_{n+m+1,0} + (-1)^{m-1} a_{n,0} + \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k+1} \binom{m+1}{k} a_{n+k,0} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^{m-k+1} \binom{m+1}{k} a_{n+k,0} \\
&= a_{n,m+1}.
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 3.1** *Pour tous* $n, m \geq 0$*, on a*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{0,m+k} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{n+k,0}. \tag{3.5}$$

**Exemple 3.1** *(Matrice de Leibniz).*
*Prenons la suite initiale*

$$a_{0,m} = \frac{(-1)^m}{m+1}.$$

Nous utilisons (3.1), on obtient

$$a_{n,m}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & & \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{30} & & & \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{20} & & & & \\ \frac{1}{5} & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

d'où la suite finale $a_{n,0}=\frac{1}{n+1}$. D'après (3.5), on a

$$a_{n,m}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{m+k}}{m+k+1}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\frac{1}{n+k+1}.$$

**Exemple 3.2** *Prenons la suite finale*

$$a_{n,0}=\frac{n!}{x\,(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Nous utilisons (3.2), on obtient

$$a_{n,m}=\begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{x+1} & \frac{1}{x+2} & -\frac{1}{x+3} & \cdots \\ \frac{1}{x(x+1)} & -\frac{1}{(x+1)(x+2)} & \frac{1}{(x+2)(x+3)} & & \\ \frac{2}{x(x+1)(x+2)} & -\frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)} & \frac{2}{(x+2)(x+3)(x+4)} & & \\ \frac{6}{x(x+1)(x+2)(x+3)} & -\frac{6}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} & & & \\ \frac{24}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} & & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}.$$

On obtient la suite initiale $a_{0,m}=\frac{(-1)^m}{x+m}$. D'où

$$a_{n,m}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{m+k}}{x+m+k}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}\frac{(n+k)!}{x\,(x+1)\cdots(x+n+k)}.$$

### 3.1.2 Les fonctions génératrices de la matrice d'Euler-Seidel

**Théorème 3.3** *Soit*

$$A_r(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{0,k+r}z^k,$$

*la fonction génératrice ordinaire de la suite $a_{0,m+r}$. Alors la fonction génératrice ordinaire de la suite $a_{n,r}$ de (3.1)*

$$\bar{A}_r(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,r}z^n$$

*Est donnée par*

$$\bar{A}_r(z) = \frac{1}{1-z} A_r\left(\frac{z}{1-z}\right). \tag{3.6}$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned}\bar{A}_r(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,r} z \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{0,r+k}\right) z^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,r+k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^n\right).\end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^n = \frac{z^k}{(1-z)^{k+1}}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\bar{A}_r(z) &= \frac{1}{1-z} \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k+r} \left(\frac{z}{1-z}\right)^k \\ &= \frac{1}{1-z} A_r\left(\frac{z}{1-z}\right).\end{aligned}$$

□

**Exemple 3.3** *(Matrice d'Euler). Prenons la suite initial* $a_{0,m} = \frac{(-1)^m}{2m+1}$ *dans* (3.1)

$$a_{n,m} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{9} & \cdots \\ \frac{2}{1.3} & -\frac{2}{3.5} & \frac{2}{5.7} & \frac{2}{7.9} & & \\ \frac{2.4}{1.3.5} & -\frac{2.4}{3.5.7} & \frac{2.4}{5.7.9} & & & \\ \frac{2.4.6}{1.3.5.7} & -\frac{2.4.6}{3.5.7.9} & & & & \\ \frac{2.4.6.8}{1.3.5.7.9} & & & & & \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$$

*On obtient rapidement que la suite finale*

$$a_{n,0} = \frac{2.4.\ldots.(2n)}{1.3.5.\ldots.(2n+1)}.$$

*Comme application,on montre que le développement en série de la fonction* $x \longrightarrow \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ *est*

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n\geq 0} \frac{2.4.\ldots.(2n)}{1.3.5.\ldots.(2n+1)} x^{2n}.$$

*En effet, la fonction génératrice ordinaire de la suite initiale est*

$$\begin{aligned} A_0(z) &= \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{2m+1} z^m \\ &= \frac{\arctan\sqrt{z}}{\sqrt{z}}. \end{aligned}$$

*D'après le théorème 3.3, ona*

$$\begin{aligned} \bar{A}_0(z) &= \sum_{n\geq 0} a_{n,0} z^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} \arctan\sqrt{\frac{z}{1-z}}. \end{aligned}$$

*En posant $z = x^2$, et en observant que*

$$\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

*On obtient le résultat.*

**Théorème 3.4** *Soit*

$$A_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,k+r} \frac{z^k}{k!},$$

*la fonction génératrice exponentielle de la suite $a_{0,m+r}$. Alors la fonction génératrice exponentielle de la suite $a_{n,r}$ de (3.1)*

$$\tilde{A}_r(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,r} \frac{z^n}{n!}.$$

*Est donnée par*

$$\tilde{A}_r(z) = e^z A_r(z).$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} \tilde{A}_r(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,r} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{0,r+k} \right) \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,r+k} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{z^n}{n!} \right) \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{z^n}{n!} = e^z \frac{z^k}{k!}$$

On obtient

$$\begin{aligned}\tilde{A}_r(z) &= e^z \sum_{k=0}^{\infty} a_{0,r+k} \frac{z^k}{k!} \\ &= e^z A_r(z).\end{aligned}$$

□

**Théorème 3.5** *Soit*

$$\bar{A}_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{r+k,0} z^k,$$

*la fonction génératrice ordinaire de la suite* $a_{n+r,0.}$ *Alors la fonction génératrice ordinaire de la suite* $a_{r,m}$ *de* (3.2)

$$A_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{r+k,0} z^k.$$

*Est donnée par*

$$A_r(z) = \frac{1}{1+z} \bar{A}_r\left(\frac{z}{1+z}\right).$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned}A_r(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{r,m} z^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{r+k,0} \right) z^m \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} z^m \right) a_{r+k,0}.\end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} z^m = \frac{z^k}{(1+z)^{k+1}}.$$

On obtient

$$\begin{aligned}A_r(z) &= \frac{1}{1+z} \sum_{k=0}^{\infty} a_{r+k,0} \left(\frac{z}{z+1}\right)^k \\ &= \frac{1}{1+z} \bar{A}_r\left(\frac{z}{1+z}\right).\end{aligned}$$

□

**Théorème 3.6** *Soit*

$$\tilde{A}_r(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{r+k,0} \frac{z^k}{k!},$$

*la fonction génératrice exponentielle de la suite $a_{n+r,0}$. Alors la fonction génératrice exponentielle de la suite $a_{r,m}$ de (3.2)*

$$A_r(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{r,m} \frac{z^m}{m!}$$

*Est donnée par*

$$A_r(z) = e^{-z} \tilde{A}_r(z).$$

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} A_r(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{r,m} \frac{z^m}{m!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} a_{r+k,0} \right) \frac{z^m}{m!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \frac{z^m}{m!} \right) a_{r+k,0}. \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{m=0}^{n} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} \frac{z^m}{m!} = e^{-z} \frac{z^k}{k!}$$

On obtient

$$\begin{aligned} A_r(z) &= e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} a_{r+k,0} \frac{z^k}{k!} \\ &= e^{-z} \tilde{A}_r(z). \end{aligned}$$

□

## 3.2 $q$-analogue de la matrices de Seidel

**Définition 3.1** *soit $(a_m(x,q))_{m>0}$ une suite d'éléments dans un anneau commutatif, on appelle la matrice q-Seidel associée à $(a_m(x,q))$, la suite double $(a_{n,m}(x,q))_{n>0,m>0}$ donnée par la relation de récurrence suivant :*

$$\begin{cases} a_{0,m}(x,q) = a_m(x,q) & m \geq 0, \\ a_{n,m}(x,q) = xq^m a_{n-1,m}(x,q) + a_{n-1,m+1}(x,q) & n \geq 1,\ m \geq 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

*De plus*$(a_{0,m}(x,q))$ *est appelée la suite initiale et* $(a_{m,0}(x,q))$ *la suite finale de la matrice q-Seidel.*

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,m} & & a_{0,m+1} & \cdots & . \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & . & & & . & . \\ . & . & . & a_{n-1,m} & \times (xq^m) + & a_{n-1,m+1} & . & . \\ . & . & . & \downarrow & & . & . & . \\ . & . & . & a_{n,m} & & . & . & . \\ . & . & . & . & & . & . & . \end{pmatrix}$$

**Lemme 3.1** *On peut écrire* $(a_m(x,q))$ *en termes de suite initiale*

$$a_{n,m}(x,q) = \sum_{i=0}^{n} (xq^m)^{n-i} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q a_{0,m+i}(x,q). \tag{3.8}$$

**Preuve.** On a

$$\begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} m-1 \\ n \end{bmatrix}_q + q^{m-1} \begin{bmatrix} m-1 \\ n-1 \end{bmatrix}_q$$

On utilise la démonstration par récurrence, clairement (3.8) est vrai pour $k = 1$.

supposons que (3.8) est vrai pour $n-1$, on a alors

$$\begin{aligned}
a_{n,m}(x,q) &= xq^m \sum_{i=0}^{n-1} (xq^m)^{n-1-i} \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}_q a_{0,m+i}(x,q) \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \left(xq^{m+1}\right)^{n-1-i} \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}_q a_{0,m+1+i}(x,q) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}_q \left( (xq^m)^{n-i} a_{0,m+i}(x,q) + \left(xq^{m+1}\right)^{n-1-i} a_{0,m+1+i}(x,q) \right) \\
&= (xq^m)^n a_{0,m}(x,q) + \sum_{i=1}^{n-1} (xq^m)^{n-i} \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}_q a_{0,m+i}(x,q) \\
&+ \sum_{i=0}^{n-2} \left(xq^{m+1}\right)^{n-1-i} \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}_q a_{0,m+1+i}(x,q) + a_{0,m+n}(x,q) \\
&= (xq^m)^n a_{0,m}(x,q) + \sum_{i=1}^{n-1} (xq^m)^{n-i} \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}_q a_{0,m+i}(x,q) \\
&+ \sum_{i=1}^{n-1} \left(xq^{m+1}\right)^{n-i} \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix}_q a_{0,m+i}(x,q) + a_{0,m+n}(x,q) \\
&= (xq^m)^n a_{0,m}(x,q) + \sum_{i=1}^{n-1} (xq^m)^{n-i} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q a_{0,m+i}(x,q) + a_{0,m+n}(x,q) \\
&= \sum_{i=0}^{k} (xq^m)^{n-i} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q a_{0,m+i}(x,q),
\end{aligned}$$

donc ( 3.8 ) est vrai pour $k$. □

En utilisant la formule d'inversion de gauss, nous obtenons des relations entre la suite initiale et la suite finale :

$$a_{m,0}(x,q) = \sum_{i=0}^{m} x^{m-i} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} a_{0,i}(x,q) \tag{3.9}$$

$$a_{0,m}(x,q) = \sum_{i=0}^{m} (-x)^{m-i} q^{\binom{m-i}{2}} \begin{bmatrix} m \\ i \end{bmatrix} a_{i,0}(x,q) \tag{3.10}$$

On définissons les fonctions génératrices comme suit :

$$a(t) = \sum_{m\geq 0} a_{0,m}(x,q)\, t^m, \qquad \bar{a} = \sum_{m\geq 0} a_{m,0}(x,q)\, t^m, \tag{3.11}$$

et

$$A(t) = \sum_{m\geq 0} a_{0,m}(x,q) \frac{t^m}{[m]_q!}, \qquad \bar{A} = \sum_{m\geq 0} a_{m,0}(x,q) \frac{t^m}{[m]_q!}. \tag{3.12}$$

**Proposition 3.1** *Les fonctions génératrices des suites initiale et finale sont liées par les équations suivantes :*

$$\bar{a} = \sum_{m\geq 0} a_{0,m}(x,q)\,\frac{t^m}{(xt;q)_{m+1}}, \tag{3.13}$$

$$\bar{A} = e_q(xt)\,A(t). \tag{3.14}$$

**Preuve.** Remarquons que

$$\frac{1}{(t;q)_{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}_q t^n.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{m\geq 0} a_{0,m}(x,q)\,\frac{t^m}{(xt;q)_{m+1}} &= \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} \begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix}_q a_{0,m}(x,q)\,x^n t^{m+n} \\
&= \sum_{k\geq 0} t^k \sum_{m=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ k-m \end{bmatrix}_q x^{k-m} a_{0,m}(x,q) \\
&= \sum_{k\geq 0} t^k \sum_{m=0}^{k} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix}_q x^{k-m} a_{0,m}(x,q) \\
&= \sum_{k\geq 0} a_{k,0}(x,q)\,t^k \\
&= \bar{a}
\end{aligned}$$

On remarquons $\begin{bmatrix} i+j \\ i \end{bmatrix}_q = \frac{[i+j]_q!}{[i]_q![j]_q!}$ et par (2.1) et (3.12) nous avons

$$\begin{aligned}
e_q(xt)\,A(t) &= \sum_{i,j\geq 0} \frac{a_{0,i}(x,q)\,t^i}{[i]_q!}\cdot\frac{x^j t^j}{[j]_q!} \\
&= \sum_{i,j\geq 0} \begin{bmatrix} i+j \\ i \end{bmatrix}_q a_{0,i}(x,q)\,x^j \frac{t^{i+j}}{[i+j]_q!} \\
&= \sum_{n\geq 0} \left( \sum_{i=0}^{m} x^{m-i} \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q a_{0,i}(x,q) \right) \frac{t^m}{[m]_q!} \\
&= \sum_{n\geq 0} a_{m,0}(x,q)\,\frac{t^m}{[m]_q!} \\
&= \bar{A}.
\end{aligned}$$

la preuve de (3.14) est terminé. □

**Exemple 3.4** *Prenons la suite initiale*

$$a_{0,m}(x,q) = 1.$$

Nous utilisons (3.7), on obtient

$$a_{n,m}(x,q) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1+x & 1+xq & 1+xq^2 & & \\ 1+x+x^2+xq & 1+xq+xq^2+x^2q^2 & & & \\ 1+x+x^2+xq+x^3+x^2q+xq^2+x^2q^2 & & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}.$$

# CODES MAPLE

```
restart : with(linalg) : with(combinat) : with(gfun) :
U :=proc(n, m)
 if n = 0 then (-1)^m/(m+1) else
(x·U(n − 1, m) + U(n − 1, m + 1)) fi;
  end:
Aff1 :=proc(s)
 local n, m, AA;
for n from 0 to 10 do for m from 0 to 10 do AA[n, m] := (simplify(U(n, m))) od:od:
 matrix(s, s, (i, j) →AA[i − 1, j − 1]);
 end:
x := 1 : Aff1(5)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{60} & \frac{1}{105} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{60} & -\frac{1}{140} & \frac{1}{280} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{105} & -\frac{1}{280} & \frac{1}{630} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

```
IU :=proc(n, m)
 if m = 0 then 1/(n+1) else
simplify( ( IU(n + 1, m − 1) − x·IU(n, m − 1))) fi;
  end:
iAff1 :=proc(s)
 local n, m, AA;
 for n from 0 to 10 do for m  from 0 to 10 do AA[n, m] := (simplify(IU(n, m))) od:od:
 matrix(s, s, (i, j) →AA[i − 1, j − 1]);
 end:
iAff1(5)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{60} & \frac{1}{105} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{60} & -\frac{1}{140} & \frac{1}{280} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{105} & -\frac{1}{280} & \frac{1}{630} \end{bmatrix} \quad \textbf{(2)}$$

```
a :=proc(n, m)
```

```
 if n = 0 then (-1)^m/(m+1) else
simplify( add(binomial(n, k)·x^(n-k)·a(0, k+m), k=0..n) );
 fi;
 end;
proc(n, m)                                                              (3)
    if n = 0 then
        (-1)^m/(m+1)
    else
        simplify(add(combinat:-binomial(n, k) * x^(n-k) * a(0, k+m), k=0..n))
    end if
end proc
 knuth1 := proc(s)
 local n, m, AA;
for n from 0 to 10 do for m from 0 to 10 do AA[n, m] := (simplify(a(n, m))) od:od:
 matrix(s, s, (i, j) -> AA[i-1, j-1]);
 end:
matadd(knuth1(5), -Aff1(5))
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

```
 b := proc(n, m)
  if m = 0 then 1/(n+1) else
 add( (-x)^(m-k)·binomial(m, k)·b(n+k, 0), k=0..m);
 fi;
 end:
knuth2 := proc(s)
 local n, m, AA;
for n from 0 to 10 do for m from 0 to 10 do AA[n, m] := (simplify(b(n, m))) od:od:
 matrix(s, s, (i, j) -> AA[i-1, j-1]);
 end:
x := 1 : knuth2(5)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{30} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{30} & -\frac{1}{60} & \frac{1}{105} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{20} & \frac{1}{60} & -\frac{1}{140} & \frac{1}{280} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{105} & -\frac{1}{280} & \frac{1}{630} \end{bmatrix} \quad \textbf{(5)}$$

$matadd(iAff1(5), -knuth2(5))$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(6)}$$

```
restart : with(QDifferenceEquations) : with(linalg) : with(combinat) : with(gfun) :
U := proc(n, m, q)
 if n = 0 then 1 else
(x·q^m·U(n − 1, m, q) + U(n − 1, m + 1, q)) fi;
  end:
Aff1 := proc(s)
 local n, m, AA;
for n from 0 to 10 do for m from 0 to 10 do AA[n, m] := (simplify(U(n, m, q))) od:od:
 matrix(s, s, (i, j) → AA[i − 1, j − 1]);
 end:
Aff1(3)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & q\,x+1 & q^2\,x+1 \\ q\,x+x^2+x+1 & q^2\,x^2+q^2\,x+q\,x+1 & q^4\,x^2+q^3\,x+q^2\,x+1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

```
a := proc(n, m, q)
  if n = 0 then 1 else
simplify( add(expand(QBinomial(n, k, q))·x^(n−k)·q^(m·(n − k))·a(0, k + m, q), k = 0..n));
 fi;
 end:
 knuth1 := proc(s)
 local n, m, AA;
for n from 0 to 10 do for m from 0 to 10 do AA[n, m] := (simplify(a(n, m, q))) od:od:
 matrix(s, s, (i, j) → AA[i − 1, j − 1]);
 end:
knuth1(3)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & q\,x+1 & q^2\,x+1 \\ q\,x+x^2+x+1 & q^2\,x^2+q^2\,x+q\,x+1 & q^4\,x^2+q^3\,x+q^2\,x+1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

```
IU := proc(n, m, q)
 if m = 0 then a(n, 0, q)  else
simplify( ( IU(n + 1, m − 1, q) − x·q^(m − 1)·IU(n, m − 1, q))) fi;
  end:
iAff1 := proc(s)
 local n, m, AA;
 for n from 0 to 10 do for m  from 0 to 10 do AA[n, m] := (simplify(IU(n, m, q))) od:od:
 matrix(s, s, (i, j) → AA[i − 1, j − 1]);
 end:
iAff1(3)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & q\,x+1 & q^2\,x+1 \\ q\,x+x^2+x+1 & q^2\,x^2+q^2\,x+q\,x+1 & q^4\,x^2+q^3\,x+q^2\,x+1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

```
matadd(knuth1(5), -Aff1(5))
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

```
b := proc(n, m, q)
 if m = 0 then a(n, 0, q) else
add((-x)^(m-k)·q^(binomial(m-k, 2))·expand(QBinomial(m, k, q))·b(n+k, 0, q), k = 0..m);
fi;
 end:
knuth2 := proc(s)
 local n, m, AA;
for n from 0 to 10 do for m from 0 to 10 do AA[n, m] := (simplify(b(n, m, q))) od:od:
 matrix(s, s, (i, j) → AA[i-1, j-1]);
 end:
knuth2(3)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+1 & q\,x+1 & q^2\,x+1 \\ q\,x+x^2+x+1 & q^2\,x^2+q^2\,x+q\,x+1 & q^4\,x^2+q^3\,x+q^2\,x+1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

```
matadd(iAff1(5), -knuth2(5))
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

# Conclusion

Le sujet de notre travail a été consacré aux calcul combinatoire des $q$-analogues. Cette théorie à une place importante dans les mathématiques, en particulier dans la combinatoire et la théorie des nombres.

Tout au long de ce mémoire, nous avons fait une étude sur l'analyse combinatoire classique avec quelques exemples en théorie des probabilités, nous avons aussi donné les principales propriétés des suites de nombres (séries génératrices, récurrences, etc ) dans le chapitre un.

Dans le deuxième chapitre, nous avons donné l'essentiel sur la théorie des $q$-analogues et nous avons prouver quelques propriétés élémentaires.

Le chapitre trois à été consacré à l'application de $q$-combinatoire à la matrice d'Euler-Seidel.

# Bibliographie


[1] **C. A. Charalambides.** Enumerative combinatorics. CRC Press Series on Discrete Mathematics and its Applications. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.

[2] **C A. Charalambides**. Discrete q-Distributions, A John Wiley & Sons, Inc. Publication, 2016.

[3] **D.Dumont**. Matrices d'Euler-Seidel. Semin. Lothar. Comb, (1981), B05c.

[4] **M.S. MAAMRA**,.Combinatoire de certaines classes de polynômes de partition. These de Doctorat d'état en Mathèmatiques, USTHB, 2016.

[5] **M. RAHMANI,** Etude Combinatoire et Analytique des Suites et des Polynômes**,** These de Doctorat d'état en Mathèmatiques, USTHB, 2013.

[6] **R. J. Clarke**, **G. N. Han, J. Zeng**, A combinatorial interpretation of the Seidel generation of q-derangement numbers, Ann. Comb., 4 (1997), 313–327.

[7] **TIGANE Meriem**,.Combinatoire des Nombres de Stirling et de Bell généralisés. These de Doctorat d'état en Mathèmatiques, USTHB, 2011.