République Algérienne démocratique et populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieure et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE Dr. YAHIA FARES DE MEDEA

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie de la Matière
Filière Génie Civil

Mémoire de Fin d'Etude pour l'obtention du diplôme de Master
En Génie Civil
Option : Structures

THEME

Etude de la flexion des plaques minces par la méthode des différences finies

Dirigé par :

Dr.**Dj.AMAR BOUZID**

Etudié par :

Mr. **DAANOUNE Nabil**
Mr. **ZAOUALI Mustapha**

Promotion 2011-2012

REMERCIEMENTS

Nous remercions avant tout Allah de nous avoir gardés en bonne santé afin de mener à bien ce projet de fin d'étude.

Nous exprimons toutes nos profondes reconnaissances à notre encadreur ***M.Dr.Djellali Amar Bouzid,*** *qui nos a témoigné de sa confiance et de son aide scientifique et qui par son expérience et sa compétence.*

Nous adressons de chaleureux remerciements à tous les enseignants qui on contribue à notre réussite dans nos études, depuis notre première année scolaire jusqu'à la dernière année universitaire.

Nous remercions également les membres des jurys pour l'effort qu'ils feront dans le but d'examiner ce modeste travail.

Nous remercions aussi tous nos amis pour leur aide, leur patience, leur compréhension et leur encouragement.

Que tous ceux qui nous ont aidés de prés ou de loin à la réalisation de ce mémoire de fin d'études trouvent ici l'expression de notre profonde gratitude.

MERCI

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents qui a beaucoup souffert pour nous élever et qui ma soutenue moralement

A mes frères et mes sœurs

A mon binôme MUSTAPHA que j'estime énormément.

Et mes amies: AHMED–HAMZA –TOUFIK–RIAD–OMAR–

RAFIK–ALI– – KAMEL–MENAOUAR–

KALED

A toute la promotion de génie civil 2012

NABIL

DEDICACE

Je dédie ce modeste travail à mes très chers parents qui a beaucoup souffert pour nous élever et qui ma soutenue moralement

A mes frères et mes sœurs et leurs enfants

A mon binôme NABIL que j'estime énormément.

Et mes amies: AHMED–HAMZA –TOUFIK–RIAD–OMAR–RAFIK–ALI– MANSSOURI– KAMEL–MENAOUAR–KALED–OSSAMA-MOHAMED-SLIMANE,

A toute la promotion de génie civil 2012

MUSTAPHA

Résumé

Ce projet de fin d'étude a pour objet la comparaison entre la méthode des différences finies et les méthodes analytiques dans le calcul de la flexion des plaques, rencontrées essentiellement dans les planchers, les dalles pleines, plaques sur fondation élastique, plaques orthotropes, plaques raidies et divers domaines de génie civil.

Les deux premiers cas énumérés ci-avant ont fait l'objet d'une étude comparative entre les solutions analytiques données par les méthodes des séries convergentes et la méthode des différences finies soit à la main ou bien par un programme de calcul en MATLAB, tout en arrivant à une conclusion de l'utilisation de ces diverses méthodes.

Abstract

This project of end of study has as an aim the comparison between the finite differences method and the analytical methods for the computation of deflection of the thin plate, encountered primarily in the floors, plates on elastic foundation, orthotropic plates, stiffened plates and various fields of civil engineering.

The first two cases enumerated here before were the subject of a comparative study between the analytical solutions given by the methods of the convergent series and the method the finite differences is with the men or by a calculation program in MATLAB, while arriving at a conclusion of the use of these various methods.

ملخص

هذا المشروع النهائي هو دراسة مقارنة بين طريقة الفروق المحدودة والطرق التحليلية في حساب انحناء اللوحات، الملاحظة خاصة في الأرضيات، وألواح كاملة، لوحات على أساس مرن، لوحات متعامدة التغاير، لوحات مشدودة و مختلف مجالات الهندسة المدنية.

وكانت أول حالتين المذكورة أعلاه موضوعا لدراسة مقارنة بين الحلول التحليلية التي قدمتها طريقة السلاسل المتقاربة و طريقة الفروق المتناهية سواء يدويا أو باستخدام برنامج حساب

MATLAB **في حين تتوصل إلى نتيجة فعالية هذه الطرق.**

Table des matières

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I : Introduction a la théorie d'élasticité……3

I.1.relation entre le déplacement et la déformation …….…….3

I.1.1.déformations directes 3

I.1.2. Déformations de cisaillements …….……..3

I.2. Relation entre contraintes et déformation ……7

I.2.1.déformations planes ……..……15

I.2.2contraintes planes …..…….17

CHAPITRE II : Théorie des plaques minces et analyse bibliographie ……..19

II.1. Historique de la théorie des plaques minces ……..19

II.2.définition et hypothèses des plaques minces ……21

II.2.1.définition ……21

II.2.2 .hypothèses ……22

II.3.théorie des faibles déformations des plaques minces ……23

II.3.1.flexion pure des plaques ……23

A- relations entre les courbures et moments principaux ……..23

B-état de sollicitation en un point …….……..27

C- expression des moments de flexion et de torsion…….……..…….28

D- expression des contraintes normale et tangentielle maximales ……..30

II.3.2.flexion des plaques soumise a des charges transversales ……..30

A-élément de réduction des forces extérieures ……30

B-équilibre du parallélépipède élémentaire ……...……..32

C-expression des efforts tranchants ……33

D-équation différentielle des plaques d'épaisseur constante …..……..33

E- vibration d'une plaque ……...……..34

II.3.3.condition d'appuis de la plaque sur ses bords ……35

II.3.4.réaction d'appui d'une plaque ……..35

CHAPITRE.III. Méthodes de résolution analytique …………..37

III .1.introduction ……..37

III.2.méthode des séries doubles de Navier ……37

III.3. Méthode des séries simple (M.Maurice-Lévy) ……..……43

III.3.1.validation de la méthode de Lévy par la méthode Navier .……43

III.3.2. Plaque appuyée par ses quatre bords-problème de Navier .…….44

III .3.3 . plaque dont deux bords opposés sont libres et les deux autres bords appuyés …… .……49

III.3.4. Tableau récapitulatif de touts les cas traités par m .Lévy ……..53

CHAPITRE.IV. Résolution par la méthode des différences finies ……55

IV.1 : principe mathématique de la méthode des différences finies ……55

IV.1.1.définition ……..55

IV.1.2.maillage ……56

IV.2.formulation des équations de base en différences finies …… ;…….. 58

IV.3.Les conditions aux limites …… .……64

IV.4. Le traitement des points fictifs…… .……69

IV.5. Applications de la méthode des différences finies sur les plaques ……70

IV.5.1.plaque appuyées sur quatre cotes ……70

IV.5.2 .application sur un panneau de dalle en béton armé ……76

IV.5.3.plaque encastrés sur ces quatre bords ……..……81

CONCLUSION ……..92

Liste des figures

Figure. I.1 : déformation directe …… 4

Figure. I.2 : la déformation angulaire …… 5

Figure. I.3 : corps soumis à une contrainte uniaxiale ……7

Figure. I.4 : corps soumis à une contrainte tridimensionnelle ……8

Figure. I.5 : état de contrainte plan ……10

Figure. I.6 : cercle de Mohr ……...11

Figure. I.7 : problème de déformation plan ……..……..17

Figure. II.1 : les géométries déformables et indéformables des bords des plaques ……...20

Figure. II.2 : Déformation d'une plaque mince …….……..22

Figure. II.3 : plaque rectangulaire soumise à la flexion pure …….……..…...23

Figure II.4 : déformation d'un feuillet par rapport le feuillet moyen ……..……....25

Figure II.5 : la déformation d'une plaque sous forme cylindrique……..……27

Figure II.6 : représentation des moments et contraintes normales et tangentielles……..……28

Figure II.7 : représentation des déplacements angulaires. ……..…….29

Figure. II.8 : équilibre du parallélépipède élémentaire. ……..……31

Figure.III.1: plaque simplement appuyées sur quatre cotés……..……38

Figure. III.2 : déflexion d'une plaque rectangulaire……..……...42

Figure.III.3: plaque simplement appuyées sur deux cotés parallèles. ……..……43

Figure.III.4 : la variation de μ_x en fonction de ρ ……..……....49

Figure.III.5 : plaque appuyée sur deux bords opposés et libre sur les autres …...……....51

Figure. IV.13 : différentes sollicitation dans un bord libre. ……...66

FIG.IV.14 :exemple de numérotation d'un bord libre……71

Figure. IV.18 : déplacement maximal d'une plaque appuyée ……74

Figure. IV.19 : vue en plan du déplacement d'une plaque appuyée …….……...74

Figure. IV.20 : la variation du déplacement maximal en fonction du maillage ……..75

Figure. IV.21 : la variation du moment maximal en fonction du maillage ……76

Figure. IV.22 : la variation de μ_x en fonction de ρ ……..77

Figure. IV.23 : la variation de w en fonction de ρ ……...77

Figure. IV.24 : la variation de μ_x en fonction de ρ …….……78

Figure. IV.25 : variation de μ_x avec un changement de coefficient de poisson….……...81

Figure. IV.26 : maillage et numérotation de plaque …….……...82

Figure. IV.27 : déplacement maximal d'une plaque encastrée. …….……..85

Figure. IV.28 : vue en plan du déplacement d'une plaque encastrée. ……..……85

Figure. IV.29 : variation de w en fonction du maillage ……..……..87

FIG IV.30 : variation de μ_x au centre de la plaque…….……...90

FIG IV.31 : variation de μ_x au bord de la plaque…….……91

Liste des tableaux

Tableau .II.1 : Comparaison entre la plaque de Kirchhoff et la poutre de Bernoulli ……36

Tableau.III.1 : la variation de la série double en fonction des dimensions de la plaque ……...40

Tableau.III.2 : la variation de μ_x en fonction de ρ ……...49

Tableau.III.3.le déplacement maximal de touts les cas traités par M .Lévy …….54

Tableau. IV.1 : la variation du déplacement en fonction du maillage ……...75

Tableau. IV.2 : la variation de μ_x en fonction des dimensions de la dalle ……76

Tableau. IV.3 : la variation de μ_x en fonction des dimensions de la dalle ……78

Tableau IV.4 : la variation de μ_x à $\nu = 0\ et\ \nu = 0.2$ ……...79

Tableau IV.5 : la variation de μ_x vis-à-vis le changement de ν ……80

Tableau IV.6: la variation de μ_y vis-à-vis le changement de ν …….80

Tableau IV.7:variation de w en fonction du maillage ……..86

Tableau IV.8 : la variation de μ_x et μ_y pour **ν=0** ……..87

Tableau IV.9 : la variation de μ_x et μ_y pour **ν=0,1** ……..88

Tableau IV.10 : la variation de μ_x et μ_y pour **ν=0,2** ……88

Tableau IV.11 : la variation de μ_x et μ_y pour **ν=0,3** ……89

Tableau IV.12 : la variation de μ_x et μ_y pour **ν=0,4** ……89

Tableau IV.13 : la variation de μ_x et μ_y pour **ν=0,5** ……90

INTRODUTION

L'évolution des structures au fil du temps, a fait naitre des problèmes liés aux formes et spécificités de chaque structures, car il existe aujourd'hui des structures difficile d'étudier, avec l'évolution des sciences et la mise en place de l'outil informatique et ces diverses applications, on a trouvé des plusieurs méthodes d'approximations numérique et des programmes de calcul et des logiciels adaptés à chaque domaine, plusieurs solutions ont été apportées et ont permis de réaliser des structures plus complexes, plus performantes et plus économiques.

On peut citer la méthode des différences finies comme une méthode de calcul pour résoudre des problèmes très complexes dans les structures.

Dans notre projet de fin d'étude on a voulu faire une approche comparative entre les différentes méthodes de calcul analytique et la méthode des différences finies dans l'application de calcul des plaques en flexion.

Ce mémoire est scindé en quatre chapitres :

Le premier chapitre étudie les équations de base de la mécanique du solide. Les équations d'équilibre, les relations déplacements-déformations et déformations-contraintes sont traitées pour le cas général tridimensionnel ; d'où découlent les cas de déformations planes et contraintes planes.

Le deuxième chapitre présente la théorie des plaques. Les équations gouvernant le comportement des plaques minces en flexion.

Dans le troisième chapitre nous présentons les méthodes de résolutions analytiques de l'équation de Lagrange soit par les séries doubles de Navier ou bien par les séries simples de M-Lévy et on déduit les formules des moments fléchissant dans les deux directions.

Dans le quatrième et dernier chapitre nous présentons la méthode de résolution numérique en différences finies ; on transforme les équations différentielles de base de la théorie d'élasticité à la forme de différences finies pour l'application de ces équations sur différentes plaques, on fait une application manuel d'une plaque appuyée sur ces cotés et encastrée aussi pour donner un aidé sur le principe de travail de cette méthode et après on utilise un programme de calcul en MATLAB pour obtenir des résultats plus précis.

D'après les résultats qu'on a obtenus par le programme, on a comparé les résultats des déplacements et le moment fléchissant maximal d'une plaque appuyée avec ceux d'une dalle articulée sur leur contour par la méthode forfaitaire et les solutions analytiques.

En fin on a généralisé le travail pour les dalles simplement appuyées et encastrées sur leur contour avec différente coefficient de Poisson.

CHAPITRE I :

Introduction à la théorie d'élasticité

I.1.Relation entre le déplacement et la déformation :

Lorsqu'un corps est soumis à un système de forces, en général tous les points appartenant au corps changent de position. Le déplacement d'un point est défini comme étant la distance séparant sa position initiale de sa position finale. Les composantes de ce déplacement sont U, V et W, elles sont en général fonction de x,y et z. Ainsi un point situé initialement en (x,y,z) sera déplace en (U x + V y + W z).

On dit qu'un corps est déformé, quand, les positions relatives entre les points appartenant a ce corps changent en fonction du système de forces appliquées. Dans le cas général deux types de déformations se produisent, les longueurs parallèles aux directions x, y et z varient ainsi que les angles forment par ces longueurs.

I.1.1.Déformations directes:

La déformation directe dans une direction donnée est définie comme étant le rapport de la variation de longueur par la longueur, d'une fibre originalement orientée dans cette direction. Trois composantes indépendantes de déformation directe (normales) sont définies en chaque point ou :

- ε_x représente la déformation directe suivant la direction x
- ε_y représente la déformation directe suivant la direction y
- ε_z représente la déformation directe suivant la direction z

I.1.2. Déformations de cisaillements:

La déformation de cisaillement est définie comme étant la variation de l'angle droit formé par deux axes. Elle est associée à deux directions orthogonales. Trois composantes de déformation de cisaillement γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} en chaque point.

Avant de présenter les relations générales entre les déformations et les déplacements, considérons un modèle unidimensionnel, pour avoir une image claire de la déformation directe.

Soit une barre soumise a une contrainte uniaxiale.

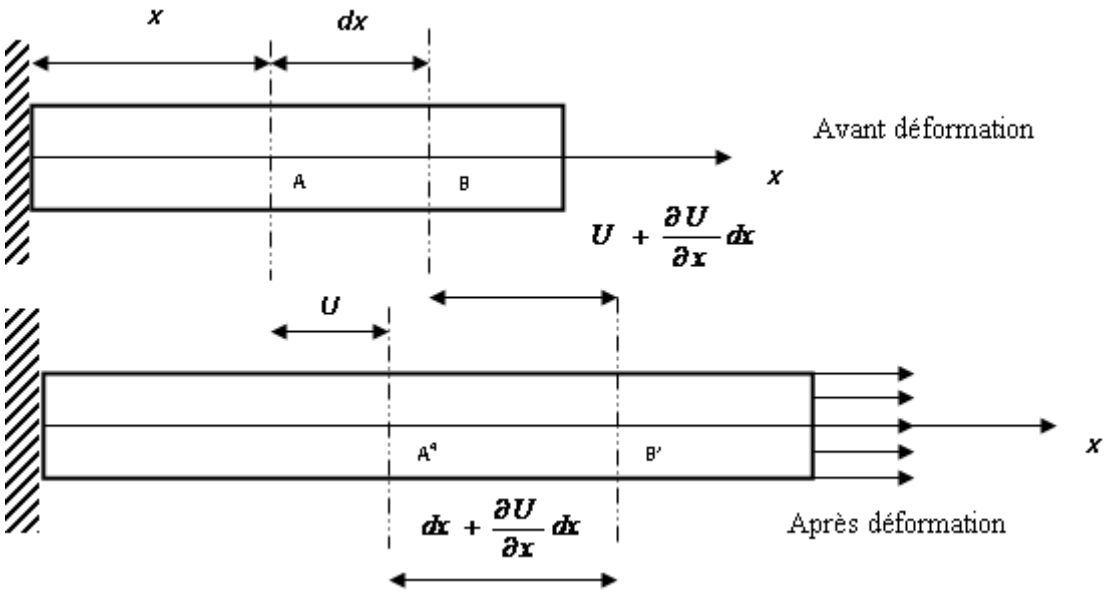


Figure. I.1 : déformation directe

Initialement, les points A et B sont situés sur la fibre centrale de la barre et sont distants de dx. Après la sollicitation le point A se déplacera de U et sa nouvelle position sera A', alors que B se déplacera de $U + \frac{\partial U}{\partial x}.dx$ et sa nouvelle position sera B'. Ainsi la

Variation de la longueur A B sera $\frac{\partial U}{\partial x}.dx$ D'ou la déformation directe sera:

$$\varepsilon_x = \frac{\frac{\partial U}{\partial x}.dx}{dx} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{..... (I.1)}$$

Avant de passer au cas général (tridimensionnel) considérons le problème de la déformation plane qui est défini par: U = U(x,y), V = V(x,y), W = 0

Il est à noter que pour ce cas de déformation tous les points situés initialement dans le plan xy restent dans ce plan après déformation. Soit un élément infinitésimal ABC D (Figure I.2).

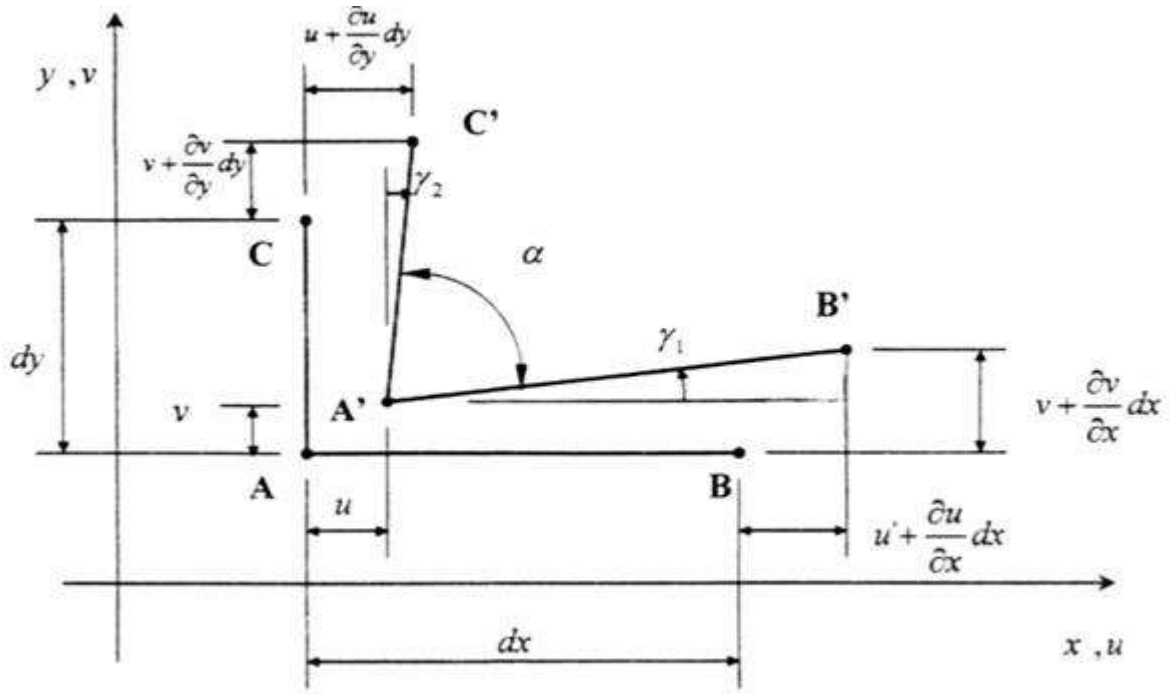


Figure. I.2 : la déformation angulaire

Après déformation de l'élément ABC on aura la configuration A'B'C'.

Ainsi les déformations directes suivant x et y seront:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \text{.....(I.2)}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \text{.....(I.3)}$$

L'angle γ_1 étant très petit on peut écrire :

$$\gamma_1 = \frac{\frac{\partial V}{\partial x}.dx}{dx+\frac{\partial U}{\partial x}.dx} = \frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{1+\frac{\partial U}{\partial x}}$$

En négligeant le terme $\frac{\partial U}{\partial x}$ (car il est très petit devant 1) on obtiendra:

$$\gamma_1 = \frac{\partial V}{\partial x} \text{.....(I.4)}$$

De même pour l'angle on aura:

$$\gamma_2 = \frac{\partial U}{dy} \text{.....(I.4)}$$

Ainsi la déformation de cisaillement sera:

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 - \gamma_2$$

Le signe négatif est du au fait que l'angle est mesuré suivante sens des aiguilles d'une montre qui représente par définition le sens négatif

D'où en remplaçant par leur valeur en obtiendra :

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \text{.....(I.5)}$$

Après avoir traité les cas unidimensionnels et bidimensionnels on peut passer au cas tridimensionnel ou l'élément considéré est, à l'origine un prisme rectangulaire

Les déformations seront:

Déformations directes

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} \end{cases} \text{..... (I.6)}$$

Déformations de cisaillements :

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \end{cases} \text{.....(I.7)}$$

Il est à noter que:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$$

I.2. Relation entre contraintes et déformation :

Sous l'action dune contrainte normale uniaxiale, la plupart des matériaux ont un comportement bien défini dans le domaine élastique. Ce comportement se traduit par la relation:

$$\boldsymbol{\sigma = E \cdot \varepsilon} \quad \text{.....(I.8)}$$

Cette relation est connue sous le nom de la loi de Hooke. La constante E est appelée module d'élasticité ou module de Young. Il est à noter que cette relation n'est valable que dans le domaine élastique.

Soit un élément tridimensionnel soumis a une contrainte uniaxiale (Figure I.3).

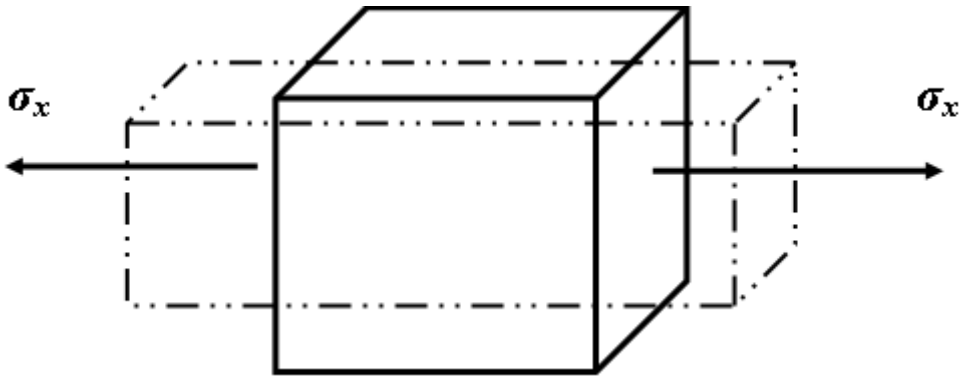


Figure. I.3 : corps soumis à une contrainte uniaxiale

La composante de déformation ε_x est donnée par:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{.....(I.9)}$$

En plus de cette déformation, l'élément aura des contractions suivant les directions y et z. De ces contractions il en résulte des déformations ε_x et ε_y qui sont:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu(\frac{\sigma_x}{E}) \quad \text{.....(I.10)}$$

Ou υ est appelée coefficient de Poisson; i1 est constant pour la plupart des matériaux.

Considérons maintenant un élément soumis à un état de contrainte tridimensionnel (Figure I.4).

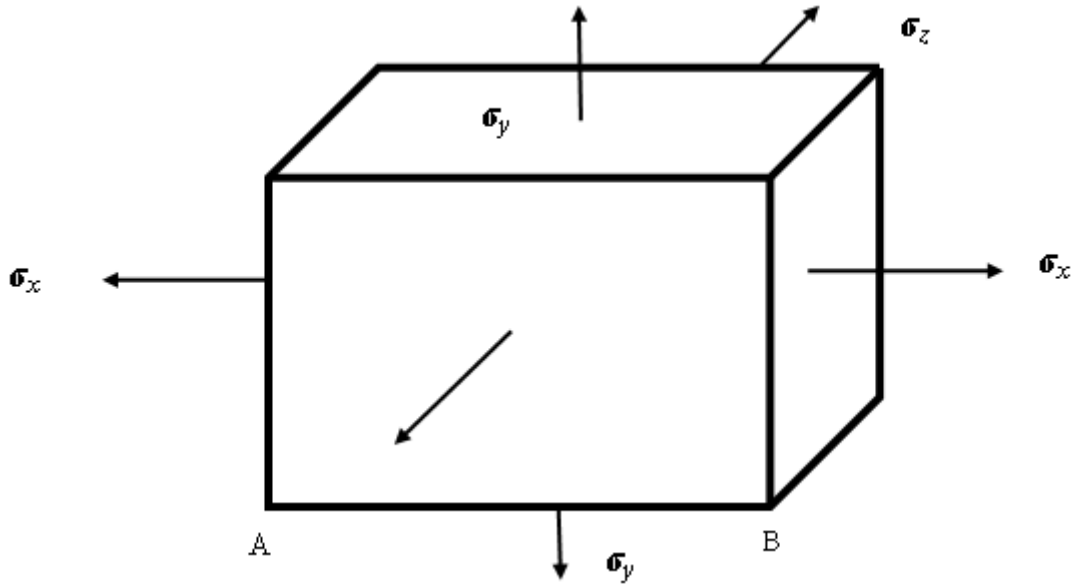


Figure. I.4 : corps soumis à une contrainte tridimensionnelle

Nous prenons la longueur initiale de AB égale à l'unité.

Supposons que la contrainte σ_x est appliquée en premier, ce qui va entrainer une variation de la longueur A B d'une valeur égale à (σ_x/E).

En second lieu, la contrainte σ_y est appliquée; ainsi la variation de AB égale à $(-\frac{\nu}{E}).\sigma_y.(1 + \frac{\sigma_x}{E})$ Mais comme $\frac{\sigma_x}{E}$ est une déformation élastique, elle est négligeable, devant 1.En dernier la contrainte σ_x est appliquée et la longueur AB va varier d'une quantité égale à :$\left(-\frac{\nu}{E}\right).\sigma_y$

La déformation totale dans la direction x est alors donnée par

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}.\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_x)\right] \quad \text{(I.11)}$$

De même les déformations totales dans les directions y et z seront:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}.\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right] \quad \text{(I.12)}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}.\left[\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)\right] \quad \text{(I.13)}$$

La relation, dans le domaine élastique entre les contraintes et les déformations pour un corps soumis à un état de contrainte de cisaillement pure bidimensionnel, a été trouvée expérimentalement et elle a la forme suivante:

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}.\tau_{xy} \quad \text{(I.14)}$$

De même pour le cas tridimensionnel, les deux autres composantes de déformation de cisaillement seront

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}.\tau_{yz} \quad \text{(I.15)}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}.\tau_{xz} \quad \text{(I.16)}$$

Ou la constante G représente le module d'élasticité de cisaillement appelé aussi le module de coulomb.

Soit, l'état de contrainte plan (Figure I.5) définir par : $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

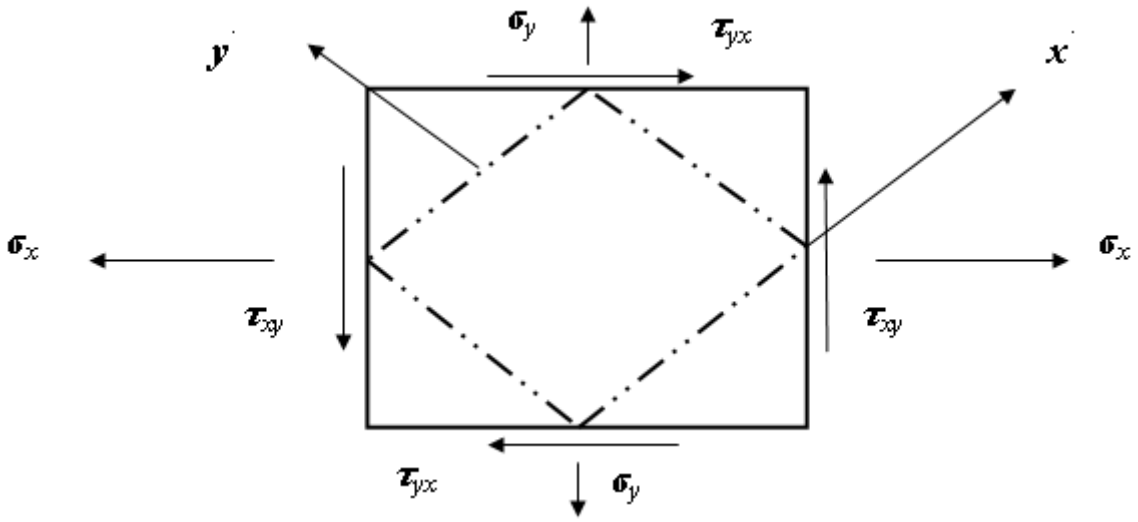


Figure. I.5 : état de contrainte plan

Les composantes de déformations dans le plan xy sont données par :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}.\left[\sigma_x - \nu\sigma_y\right] \dots\dots\dots \text{(a)} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}.\left[\sigma_y - \nu.\sigma_x\right] \dots\dots\dots \text{(b)} \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G}.\tau_{xy} \dots\dots\dots \text{(c)} \end{cases} \quad \text{.....(I.17)}$$

Pour trouver les contraintes dans le plan x'y', orienté d'un angle α par rapport à l'axe x, il suffit de tracer la cercle de Mohr.

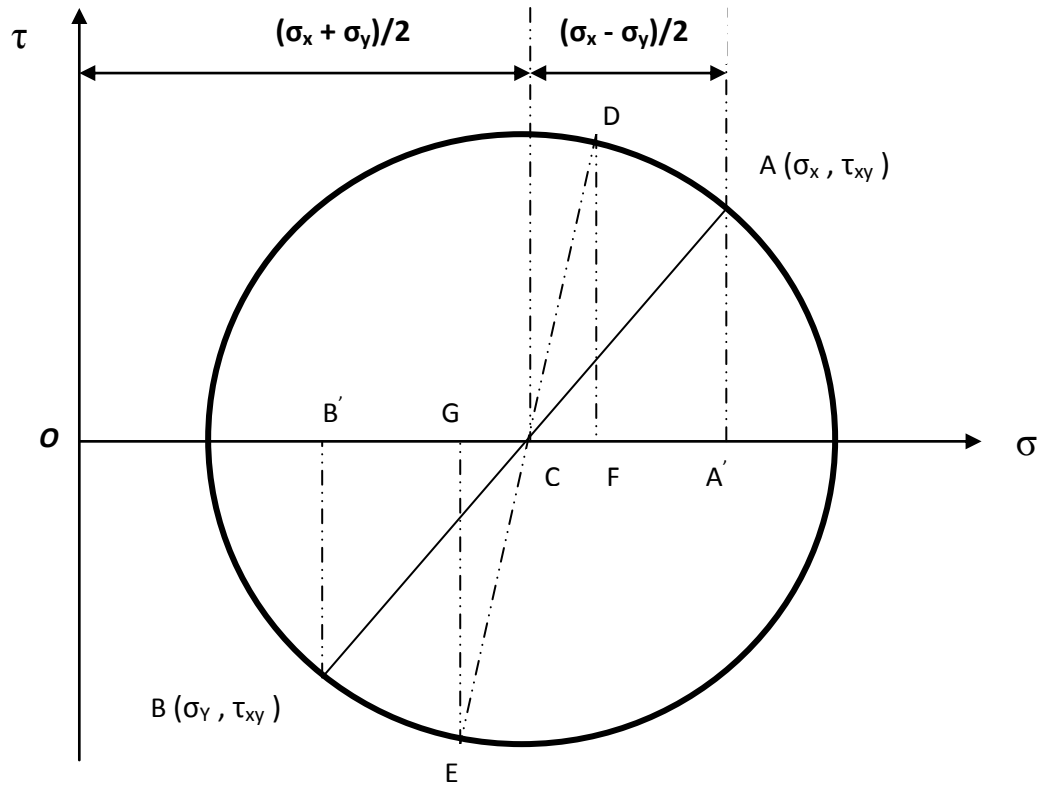


Figure. I.6 : cercle de Mohr

➢ **Principe de construction:**

- Tracer les axes orthogonaux oσ et oτ.
- Repérer les points A',B',A et B tel que

OA' = σ_x OB' = σ_y AA' = τ_{xy} BB' = τ_{xy}

- Joindre les points B et A (l'intersection de la droite BA avec l'axe Oσ nous donnera le point C.
- Tracer le cercle de centre C et de rayon CA.

Pour trouver les contraintes dans le plan x'y', tracer la droite DCE tel que l'angle ACD sera égal à 2α (l'angle 2α est mesure dans le sens contraire des aiguilles d'une montre).

- Repérer le point F en traçant une droite parallèle à l'axe oτ et passant par le point D.
- Repérer le point G en traçant une droite parallèle à l'axe oτ et passant par E.

Ainsi les contraintes σ_x σ_y τ_{xy} seront obtenues: $\sigma_{x'} = OF$ $\sigma_{y'} = OG$ $\tau_{x'y'} = DF$

D'autre part : OF = OC + CF

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + CD.\cos(2\alpha + 2\alpha_1) = \frac{1}{2}.(\sigma_x + \sigma_y) + CD.(\cos 2\alpha.\cos 2\alpha_1 - \sin 2\alpha.\sin 2\alpha_1)$$

$$CD.\cos 2\alpha_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

$$CD.\sin 2\alpha_1 = \tau_{xy}$$

D'où :

$$\sigma_{x'} = \frac{1}{2}.(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y).\cos 2\alpha - \tau_{xy}\sin 2\alpha.....(I.18)$$

OG = OC - GC

$$= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - CE.(\cos 2\alpha.\cos 2\alpha_1 - \sin 2\alpha.\sin 2\alpha_1)$$

D'où :

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}.\cos 2\alpha. + \tau_{xy}.\sin 2\alpha.....(I.19)$$

On peut également tracer le cercle de Mohr pour les déformations et on obtiendra:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}.\cos 2\alpha. + \frac{\gamma_{xy}}{2}.\sin 2\alpha.....(I.20)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}.\cos 2\alpha. + \frac{\gamma_{xy}}{2}.\sin 2\alpha.....(I.21)$$

Les relations entre les contraintes et les déformations suivant les directions x',y' sont :

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{x'} - \upsilon.\sigma_{y'}\right].....(I.22)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{y'} - \upsilon.\sigma_{x'}\right].....(I.23)$$

Substituons les équations (I.18), (I.19) et. (I.20) dans la relation (I.22) et (I.19), (I.21) et (I.19) dans la relation (I.23).En soustrayant les équations résultantes on obtiendra:

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_y).\cos 2\alpha + \gamma_{xy}.\sin 2\alpha = \frac{1}{E}\left[(\sigma_x - \sigma_y).(1+\upsilon).\cos 2\alpha + 2.\tau_{xy}.(1+\upsilon).\sin 2\alpha\right] \quad .....(I.24)$$

Soustrayons les équations (1.17a) et (1.17b) et multiplions le résultat par cos2α:

$$(\varepsilon_x - \varepsilon_y).\cos 2\alpha = \frac{1}{E}\left[(\sigma_x - \sigma_y).(1+\upsilon).\cos 2\alpha\right] \quad .....(I.25)$$

La soustraction de l'équation (I.25) de la relation (I.24) nous donnera:

$$\gamma_{xy} = \frac{2.(1+\upsilon)}{E}.\tau_{xy}$$

En comparant cette équation avec la relation (I.17c) nous déduirons que:

$$G = \frac{E}{2.(1+\upsilon)}$$

Ainsi on aura :

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon.(\sigma_y + \sigma_x)\right] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon.(\sigma_x + \sigma_z)\right] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \upsilon.(\sigma_x + \sigma_y)\right] \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy} \\
\gamma_{xz} &= \frac{1}{G}\tau_{xz} \\
\gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}
\end{aligned}\right\} \quad .....(I.26)$$

Les équations (I.26) peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}=\frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\upsilon & -\upsilon & 0 & 0 & 0\\ -\upsilon & 1 & -\upsilon & 0 & 0 & 0\\ -\upsilon & -\upsilon & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\upsilon) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\upsilon) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\upsilon)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \gamma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{Bmatrix}$$

La résolution du système d'équation (I.26) nous donnera :

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= 2.G.\varepsilon_x+\lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\\ \sigma_y &= 2.G.\varepsilon_y+\lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\\ \sigma_z &= 2.G.\varepsilon_z+\lambda(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\\ \tau_{xy} &= G.\gamma_{xy}\\ \tau_{xz} &= G.\gamma_{xz}\\ \tau_{yz} &= G.\gamma_{yz}\end{aligned}\right\}\text{.....}(I.27)$$

Avec : $\lambda=\dfrac{\upsilon.E}{(1+\upsilon).(1-2\upsilon)}$

Le système d'équations $(I.27)$ peut être écrit sous forme matricielle:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{yz}\end{Bmatrix}=\frac{E}{(1+\upsilon).(1-2.\upsilon)}\begin{bmatrix}1-\upsilon & \upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0\\ \upsilon & 1-\upsilon & \upsilon & 0 & 0 & 0\\ \upsilon & \upsilon & 1-\upsilon & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2.\upsilon) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2.\upsilon) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2.\upsilon)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\end{Bmatrix}$$

En substituant les équations (I.6) et (I.7) dans (I.27) on obtiendra:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2.G.\frac{\partial U}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)\\
\sigma_y &= 2.G.\frac{\partial V}{\partial y} + \lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)\\
\sigma_z &= 2.G.\frac{\partial W}{\partial z} + \lambda\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)\\
\tau_{xy} &= G.\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\right)\\
\tau_{xz} &= G.\left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\right)\\
\tau_{yz} &= G.\left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \quad .....(I.28)$$

La substitution des équations (I.28) dans les équations d'équilibre :

$$\begin{cases}
\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0\\
\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \quad .....(I.29)\\
\dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0
\end{cases}$$

Avec $X\ Y\ Z$ *:* sont des contraintes massiques.

Nous donnera:

$$\left.\begin{aligned}
(2.G+\lambda)\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + G\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) + (\lambda + G)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + X = 0\\
(2.G+\lambda)\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + G\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) + (\lambda + G)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) + Y = 0\\
(2.G+\lambda)\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + G\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) + (\lambda + G)\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}\right) + Z = 0
\end{aligned}\right\} \quad .....(I.30)$$

I.2.1.Déformations planes :

On peut dire qu'on est en présence d'un problème de déformation plane lorsqu'on a un corps dont Tune des dimensions est très importante par rapport aux deux autres. (Figure I.7)

Un tel problème est défini par:

$$\left.\begin{array}{l} U = U(x,y) \\ V = V(x,y) \\ W = 0 \end{array}\right\} \text{.....} (I.31)$$

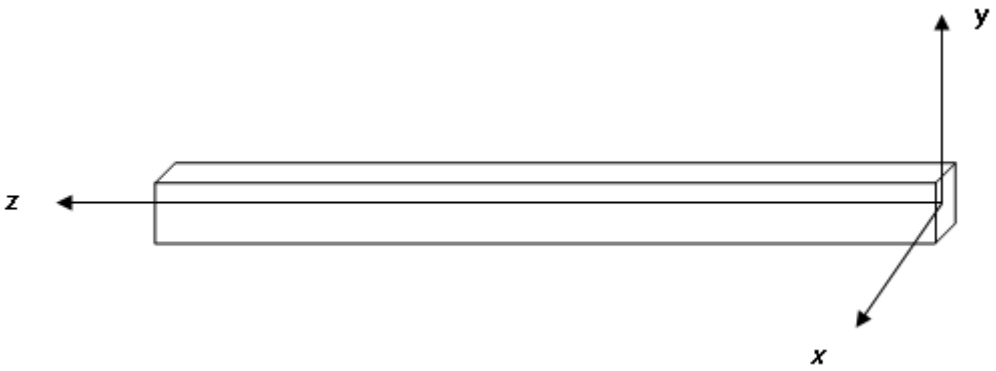


Figure. I.7 : problème de déformation plan

Les relations entre les déformations et les déplacements sont:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_x = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ \gamma_{xz} = \dfrac{1}{G}\tau_{xz} \\ \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \end{array}\right\} \text{.....} (I.32)$$

Les contraintes agissant sur un tel corps sont obtenues à partir de l'équation (I.27).

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_x = 2.G.\varepsilon_x + \lambda.(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \sigma_y = 2.G.\varepsilon_y + \lambda.(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \sigma_z = \lambda.(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \tau_{xy} = G.\gamma_{xy} \end{array}\right\} \text{.....} (I.33)$$

Et les équations d'équilibre seront:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0\\&\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0\\&\frac{\partial\sigma_x}{\partial z}+Z=0\end{aligned}\right\}\text{.....}(I.24)$$

I.2.2Contraintes planes :

Contrairement à la condition de déformation plane, qui stipule que: la dimension longitudinale dans la direction z est importante par rapport aux dimensions suivant x et y; la condition de contrainte plane est caractérisée par le fait que la dimension suivant la direction z est très petite par rapport aux deux autres.

Dans ce cas les contraintes sont de la forme

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_x=\sigma_x(x,y)\\&\sigma_y=\sigma_y(x,y)\\&\tau_{xy}=\tau_{xy}(x,y)\\&\tau_{xz}=\tau_{yz}=\tau_z=0\end{aligned}\right\}\text{.....}(I.25)$$

Les équations d'équilibre sont alors :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0\\&\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0\end{aligned}\right\}\text{.....}(I.26)$$

D'autre part les relations entre les déformations et les contraintes sont :

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \upsilon.\sigma_y\right)\\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \upsilon.\sigma_x\right)\\ \varepsilon_z &= \frac{\upsilon}{E}\left(\sigma_x + .\sigma_y\right)\\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}\end{aligned}\right\} \quad \text{.....}(I.27)$$

Et :

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\varepsilon_x + \upsilon.\varepsilon_y\right)\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\upsilon^2}\left(\varepsilon_y + \upsilon.\varepsilon_x\right)\\ \tau_{xy} &= G.\gamma_{xy}\end{aligned}\right\} \quad \text{.....}(I.28)$$

Cependant les relations entre les déplacements et les déformations seront :

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial U}{\partial x}\\ \varepsilon_y &= \frac{\partial V}{\partial y}\\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\end{aligned}\right\} \quad \text{.....}(I.29)$$

En substituant les équations (I.28) dans les relations (I.28) on obtiendra:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\gamma^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \upsilon.\frac{\partial V}{\partial y}\right)\\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\gamma^2}\left(\frac{\partial V}{\partial y} + \upsilon.\frac{\partial U}{\partial x}\right)\\ \tau_{xy} &= G.\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \upsilon.\frac{\partial V}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \quad \text{.....}(I.30)$$

CHAPITRE II :

Théorie des plaques minces et analyse bibliographique

CHAPITRE II : Théorie des plaques minces et analyse bibliographique :

II.1. Historique de la théorie des plaques minces :

La plus simple théorie des plaques est la théorie classique de Kirchhoff (CPT) dans le cas de déformation pure les déplacements est égale comme suit **[1]**:

$$u(x,y,z,t) = -z\frac{\partial w_0}{\partial x} \text{..... (II.1)}$$

$$v(x,y,z,t) = -z\frac{\partial w_0}{\partial y} \text{.....(II.2)}$$

$$w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) \text{.....(II.3)}$$

Ou u, v, w sont les déplacements suivant les directions x, y, z respectivement et w_0 est la flèche transversale au point au milieu de la plaque (z=0)

Le déplacement (II. 3) implique que les lignes normales suivant x,y sont droites avant déformation

Et reste droites au milieu de surface après déformation.

L'hypothèse de Kirchhoff néglige l'effet de cisaillements transversaux et la déformation transversale.

Dans les l'hiérarchie la deuxième théorie est la déformation des plaque au cisaillement au premier ordre (Mindlin 1951 ou le déplacement comme suit :

$$\begin{cases} u(x,y,z,t) = z.\varphi_x(x,y,t) \\ v(x,y,z,t) = z\cdot\varphi_y(x,y,t) \\ w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) \end{cases} \text{..... (II.4)}$$

Ou φ_x et φ_y sont les rotations autour les axes y et x respectivement.

Cette théorie prolonge la première théorie et prise en considération la déformation transversale au cisaillement qui est supposée constante dans cette théorie le facteur de correction au cisaillement est introduite pour corriger la divergence entre les distributions de la force au cisaillement transversal actuel et le principe de cette théorie ce facteur ne dépend pas seulement au paramètre de géométrie mais aussi le chargement et les conditions aux limites des plaques.

Dans les deux théories les notions des contraintes planes et contraintes planes réduite sont utilisées la troisième théorie qui traite les plaques est la déformation au cisaillement des plaques du troisième

ordre (TSDT) a été porté par (raidi 1984a, 1984b, 1997a, 1999a) ou les déplacements sont comme suit :

$$\begin{cases} u(x,y,z,t) = z \cdot \varphi_x(x,y,t) + z^3\left(\frac{-4}{3h^2}\right) \cdot \left(\varphi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ v(x,y,z,t) = z \cdot \varphi_y(x,y,t) + z^3\left(\frac{-4}{3h^2}\right) \cdot \left(\varphi_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ w(x,y,z,t) = w_0(x,y,t) \end{cases} \quad \text{.....(II.5)}$$

Dans cette théorie le déplacement s'adapte avec la variation de déformation transversale au cisaillement et la dissipation des contraintes transversales au cisaillement dans les faces supérieures et inferieures de la plaque.

On addition cette théorie fournit une description suffisamment juste de la réponse globale des plaques minces vers des plaques légèrement épais donc elle a l'intérêt de déterminer la flèche maximale ,la charge critique de la déformation et les fréquence des vibrations libres

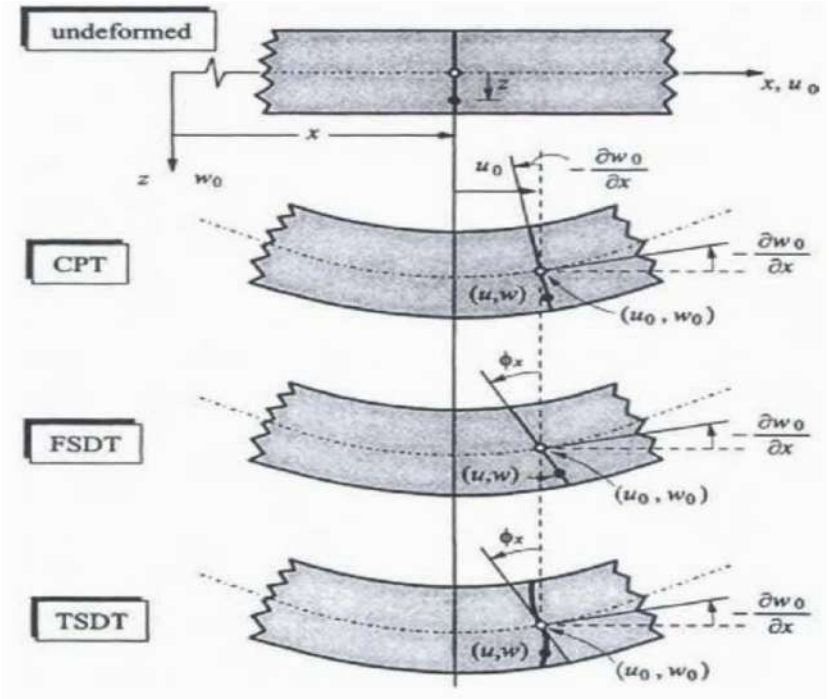


FIG:II.1 : les géométries déformables et indéformables des bords des plaques dans les différentes théories.

II.2.Définition et hypothèses des plaques minces :

II.2.1.Définition :

Une plaque est un solide délimitée par deux plans parallèles, les faces, et un cylindre au sens large (de section quelconque et pas nécessairement circulaire) dont l'axe est perpendiculaire aux faces. On définit :

- le plan moyen, ou plan médian : plan situé à équidistance entre les faces (c'est l'équivalent de la courbe moyenne des poutres) ;
- le feuillet neutre : élément de matière d'épaisseur infinitésimale situé autour du plan moyen (c'est l'équivalent de la fibre neutre des poutres) ; c'est le plan (O, *x*, *y*), d'équation $z = 0$;
- une fibre normale : ensemble des points situés sur une normale au plan médian, à un endroit (*x*, *y*) donné ; elle a pour direction *z*.

On appelle *h* l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan $z = -h/2$ et le plan supérieur est le plan $z = h/2$.

On se place dans le cas d'un matériau continu, élastique, homogène et isotrope.

Si, au repos, les faces ne sont pas planes, on parle de coque plutôt que de plaque.

On sépare l'étude en deux parties : pour l'étude de la flexion, on considère que les charges sont perpendiculaires aux faces, donc que les forces sont de la forme

$$\vec{F} = (0,0,F) \quad \text{.....(II.6)}$$

Et que les couples sont de la forme

$$\vec{M} = (M_x, M_y, 0) \quad \text{.....(II.7)}$$

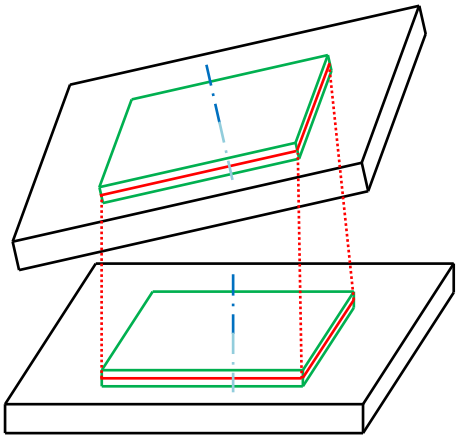


FIG.II.2 : Déformation d'une plaque mince

plaque mince (contour noir) avec mise en évidence du déplacement d'un élément de matière (contour vert), de son feuillet moyen (rouge) et de sa fibre normale (bleue).

Pour les charges situées dans le plan des faces, on parle de voile ou de membrane.

II.2.2 .Hypothèses :

Voici les hypothèses de Kirchhoff établies pour l'analyse d'une plaque située dans le plan *xy*, chargée perpendiculairement par rapport à son plan :

- matériau homogène, continu, isotrope et élastique.
- épaisseur *h* de la plaque constante.
- Les déformations dans le plan médian sont nulles (et donc il n'y a pas de Contraintes de membranes) ; les points du plan médian se déplacent uniquement perpendiculairement à ce plan.
- Les points qui se trouvent sur une normale au plan médian avant déformation, restent sur cette droite après déformation. Ce équivaut à dire que l'épaisseur de la plaque est faible par rapport aux autres dimensions. Une plaque mince répond au critère d'élancement (l_{min}/h) > 5, où l_{min} est la portée minimum.
- Les déplacements sont faibles par rapport aux dimensions de la plaque dans son plan : $w \leq h/5$.

Ceci signifie que la courbure dans une direction quelconque est donnée par la dérivée seconde de la déformée dans cette direction.

- Les contraintes de compression ou de traction sous les charges ou au-dessus des réactions aux points d'appuis sont négligées. De plus, on suppose que la Contrainte normale dans le plan médian est z=0.

II.3.Théorie des faibles déformations des plaques minces :

Dans ce chapitre la théorie linéaire des plaques sera présentée d'une façon inductive Entièrement parallèle à la théorie des poutres établie en résistance des matériaux. **[2]**

On établira par un raisonnement simple mais rigoureux la théorie de la flexion pure des plaques qui est parallèle à celle de la théorie de Navier.

Contrairement à ce qui à lieu pour les poutres cette théorie n'est valable que si les déplacements transversaux sont faible vis-à-vis de l'épaisseur de la plaque.

On développera ensuite la théorie technique classique des plaques chargées de forces transversales. cette théorie postule que les contraintes normales transversales σ_z et les efforts tranchants transversaux ont un effet négligeable sur la déformation de la plaque.

II.3.1.Flexion pure des plaques :

a- Relations entre les courbures et moments principaux :

Considérons une plaque rectangulaire fléchie par des moments uniformément distribués sur les cotés de cette plaque comme le montre la figure ci-dessous :

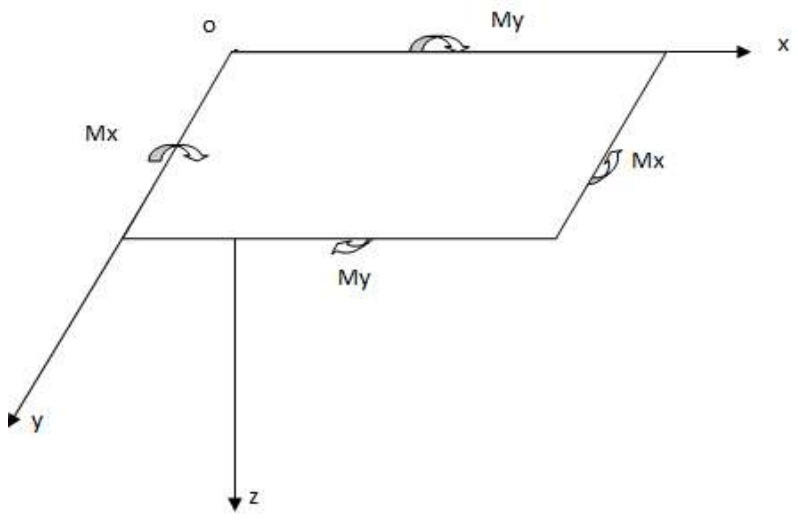


FIG II.3 : plaque rectangulaire soumise à la flexion pure.

Prenons comme plan des xy le plan moyen de la plaque, situé à égale distance des faces de celle-ci, et dirigeons les axes ox et oy selon les cotes se la plaque comme il est indiqué.

L'axe des z sera perpendiculaire au plan de la plaque et dirigé vers le bas.

Appelons :

e : L'épaisseur de la plaque, supposée faible par rapport à ses autres dimensions ;

M_x : Le moment de flexion par unité de longueur sur les cotés parallèles à oy ;

M_y: le moment de flexion par unité de longueur sur les cotés parallèles à ox .

Ces moments s'expriment, par exemple, en kgm par mètre courant et ont donc la dimension d'une force.

En accord avec la convention générale des signes utilisée, nous compterons ces moments positivement s'ils tendent à comprimer la face supérieure de la plaque et à tendre l'inferieure.

Considérons un élément découpé hors de la plaque par deux paires le plan parallèles aux plans coordonnés oxz et oyz respectivement.

Dans l'étude de flexion pure des poutres prismatiques, faite en résistance des matériaux ,on sais à l'aide de considérations de symétrie, que si la poutre était infiniment longue, ses sections droites restaient planes pendant la flexion et tournaient autour d'un axe neutre passant par leur axe de gravité. Dans le cas d'une plaque, qui s'étend indéfiniment en tous sens, on peut faire une démonstration tout à fait semblable. On peut donc affirmer que les cotés latéraux de l'élément dx dy dz restent plans au cours de la déformation et tournent autour des axes neutres correspondants « nn »de manière à rester normaux au feuillet moyen déformé de la plaque. On constate que, dans ce cas, ce feuillet ne subit aucune déformation et constitue par conséquent une surface neutre.

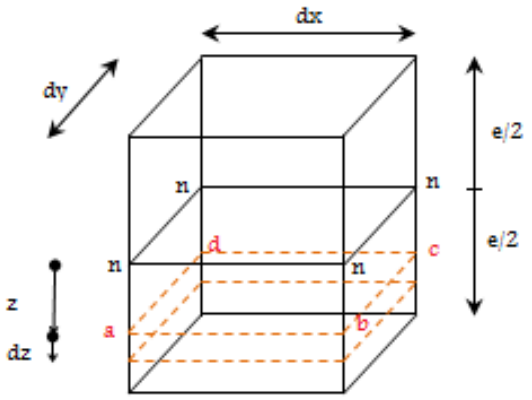


FIG II.4 : déformation d'un feuillet par rapport le feuillet moyen

Appelons χ_x et χ_y les courbures des sections faites dans cette surface neutre par les plans parallèles à oxz et oyz respectivement ; les dilatations dans les directions x et y d'une lame élémentaire abcd dans la figure ci-dessus :

$$\varepsilon_x = z.\chi_x \; ; \; \varepsilon_y = z.\chi_y \quad \text{.....(II.8)}$$

D'après la loi de Hooke, on a :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu.\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu.\sigma_x) \end{cases} \quad \text{.....(II.9)}$$

Et les contraintes dans la lama abcd valent :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E.z}{1-\nu^2} \cdot (\chi_x + \nu.\chi_y) \\ \sigma_y = \frac{E.z}{1-\nu^2} \cdot (\chi_y + \nu.\chi_x) \end{cases} \quad \text{..... (II.10)}$$

Elles sont proportionnelles à la distance z de lame abcd à la surface neutre et dépendant de la grandeur des deux courbures principales de la plaque fléchie.

Ecrivons maintenant que le parallélépipède $e \cdot dx \cdot dy$ est en équilibre, c'est-à-dire que les couples des forces intérieurs $M_x \cdot dy$ et $M_y \cdot dx$ agissant sur les faces latérales de l'élément ; il vient :

$$\int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_x \cdot z \cdot dy \cdot dz = M_x \cdot dy \quad \text{.....(II.11)}$$

$$\int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_y \cdot z \cdot dx \cdot dz = M_y \cdot dx \quad \text{.....(II.12)}$$

- En y remplaçant σ_x et σ_y par leurs valeurs (II.10), on trouve :

$$\begin{cases} M_x = D \cdot (\chi_x + \nu \cdot \chi_y) \\ M_y = D \cdot (\chi_y + \nu \cdot \chi_x) \\ et\ l'on\ à\ posé\ D = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \int_{-e/2}^{+e/2} z^2 \cdot dz = \frac{E \cdot e^3}{12 \cdot (1-\nu^2)} \end{cases} \quad \text{.....(II.13)}$$

On peut résoudre les formules (II.13) par rapport aux courbures ce qui donne :

$$\begin{cases} \chi_x = (M_x - \nu \cdot M_y)/\, D' \\ \chi_y = (M_y - \nu \cdot M_x)/D' \\ avec\ D' = \frac{E \cdot e^3}{12} = (1-\nu^2) \cdot D \end{cases} \quad \text{.....(II.14)}$$

$$\begin{cases} \chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{cases} \quad \text{..... (II.15)}$$

Remplaçant dans l'équation (II.13) nous obtenons :

$$\begin{cases} M_x = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \end{cases} \quad \text{.....(II.16)}$$

Ces équations définissent la forme que prend après déformation le feuillet moyen de la plaque quand on donne les moments M_x et M_y.

- Dans le cas particulier ou $M_y = 0$,la plaque est fléchie comme une poutre ;par l'équation (II.16) on a dans ce cas :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{.....(II.17)}$$

Si l'on fléchit la plaque de manière à lui donner une forme cylindrique, sa courbure dans le sens des y est nulle et les formules (II.13) deviennent :

$$\begin{cases} M_x = D \cdot \chi_x = \frac{E \cdot e^3}{12 \cdot (1-\nu^2)} \cdot \chi_x \\ M_y = \nu \cdot D \cdot \chi_x \end{cases} \quad \text{.....(II.18)}$$

Si l'on avait considéré une bande isolée de largeur unitaire $b_0 = 1$ figure II.5

Et appliqué à cette bande la formule classique de la flexion des poutres, on aurait trouvé :

$$M_x = \frac{E \cdot e^3}{12} \cdot \chi_x \quad \text{.....(II.18)}$$

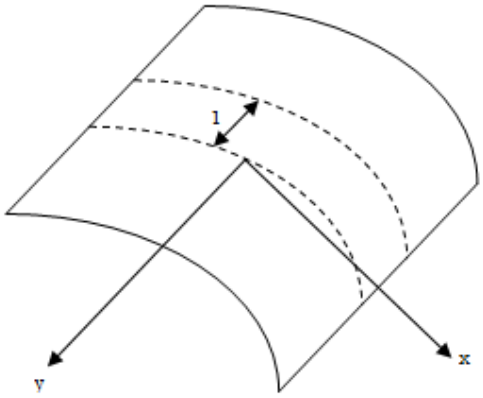


FIG II.5 : la déformation d'une plaque sous forme cylindrique.

Puisque le moment d'inertie de la bande est $I = \frac{1 \cdot e^3}{12}$

Si on compare les deux formules on trouve que la plaque est plus rigide que la poutre

Si $M_x = M_y = M$,les courbures du feuillet moyen dans les deux directions perpendiculaires sont égales et la plaque prend une forme sphérique ; la courbure de cette sphère est, par l'équation (II .1) :

$\chi = \frac{M}{D(1+\nu)}$

b-Etat de sollicitation en un point :

Considérons à présent les contraintes agissant sur une section parallèle à l'axe oz et inclinée sur les axes ox et oy (FIG II.5) soit α l'angle entre la normale n à cette section et l'axe des x, angle compté positivement dans le sens horlogique.

Si acd représente une portion de lame abcd de la FIG II.2 coupée par une telle section, cette lame est en état plan de contrainte sous l'effet des contraintes principales

$$\sigma_1 \quad , \quad \sigma_2.$$

Par conséquent, les grandeurs des contraintes normale et tangentielle sur la section ac sont données par les formules suivant :

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot cos^2\alpha + \sigma_y \cdot sin^2\alpha \quad \text{..... (II.19)}$$

$$\tau_{nt} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cdot sin2\alpha \quad \text{.....(II.20)}$$

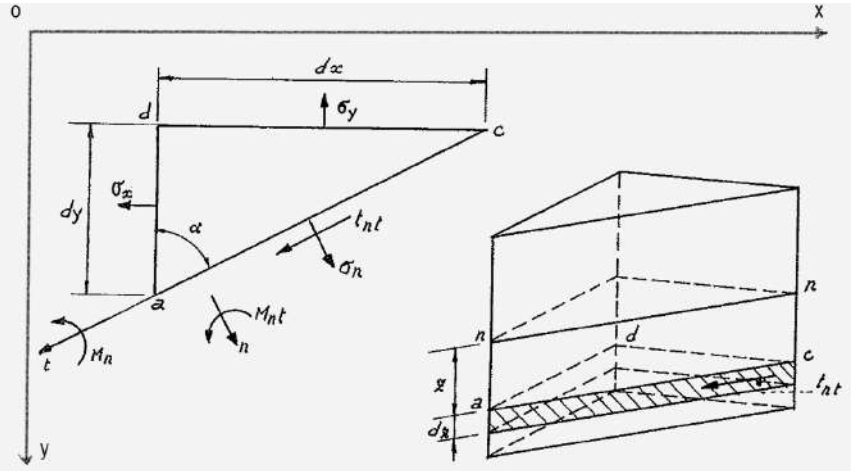


FIG II.6 : représentation des moments et contraintes normales et tangentielles.

Considérons maintenant toutes les lames telles que acd empilées sur l'épaisseur e de la plaque et cherchons les moments résultants des contraintes $\sigma_n \; et \; \tau_{nt}$:

$$M_n = \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_n \cdot z \cdot dz = M_x \cdot cos^2\alpha + M_y \cdot sin^2\alpha \text{.....(II.21)}$$

$$M_{nt} = \int_{-\frac{e}{2}}^{+e/2} \tau_{nt} \cdot z \cdot dz = \frac{1}{2} sin2\alpha \cdot (M_x - M_y) \text{..... (II.22)}$$

Les signes de M_n et M_{nt} sont choisis de maniére que les valeurs positives de ces moments soient représentées par des vecteurs dirigés dans les directions positives n et t (FIG II.6)

En particulier, les moments de torsion sur deux sections perpendiculaires sont égaux et opposés $(M_{nt} = -M_{tn})$

On appelle les moments principaux M_1 et M_2 dans lesquelles n'agissent que des moments de flexion M_x et M_y et les moments de torsions $M_{nt} = 0$.

c- Expression des moments de flexion et de torsion en fonction des déplacements :

on a la courbure χ_n d'un section quelconque liée aux courbures χ_x et χ_y par l'équation de la surface suivant :

$$\chi_n = \chi_x \cdot cos^2\alpha + \chi_y \cdot sin^2\alpha \quad \text{..... (II.23)}$$

De même si on change $\alpha\ par\ (\alpha + \frac{\pi}{2})$:

$$\chi_{n+\frac{\pi}{2}} = \chi_t = \chi_y \cdot cos^2\alpha + \chi_x \cdot sin^2\alpha \text{..... (II.24)}$$

On remplace les formules précédentes dans la formule (II.4) :

$$M_n = D \cdot [(\chi_x \cdot cos^2\alpha + \chi_y \cdot sin^2\alpha) + \nu(\chi_y \cdot cos^2\alpha + \chi_x \cdot sin^2\alpha)] \text{.....(II.25)}$$

$M_n = D \cdot (\chi_n + \nu \cdot \chi_t)$ et on a :

$$\begin{cases} \chi_n = -\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \\ \chi_t = -\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \text{.....(II.26)}$$

Sa donne la formule suivant :

$$M_n = -D \cdot (\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) \text{.....(II.27)}$$

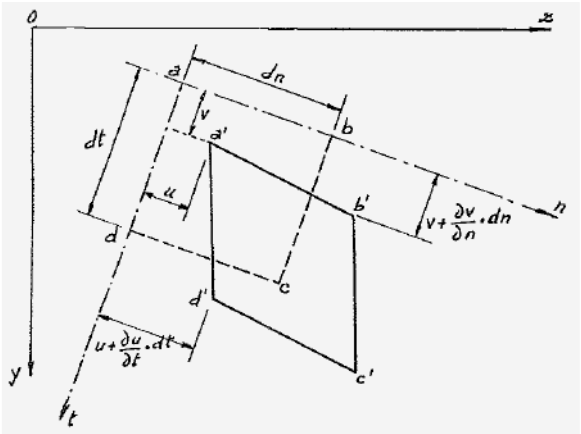


FIG II.7 : représentation des déplacements angulaires.

D'après la FIG II.7 on a la déformation angulaire prend la formule :

$$\gamma_{nt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n} \text{.....(II.28)}$$

Et d'après les lois de Hooke la contrainte tangentielle : $\tau_{nt} = G \cdot (\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial n})$

$$\begin{cases} u = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial n} \\ v = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial t} \end{cases} \text{.....(II.29)}$$

Si l'on remplace les déplacements u et v par la formule de contrainte tangentielle on trouve :

$$M_{nt} = \int_{-e/2}^{+e/2} \tau_{nt} \cdot z \cdot dz = \frac{G \cdot e^3}{6} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t} = D \cdot (1 - \nu^2) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial n \partial t}$$

d- Expression des contraintes normale et tangentielle maximales dans les plaques :

$$\sigma_x = \frac{E \cdot z}{1 - \nu^2} \cdot \frac{M_x}{D} = \frac{12 \cdot z \cdot M_x}{e^3}$$

$$\sigma_y = \frac{12 \cdot z \cdot M_y}{e^3}$$

Les contraintes normales maximales se produisent dans les surfaces supérieure et inférieure de la plaque et valent :

$$\sigma_x^{max} = \pm \frac{6M_x}{e^2}$$

$$\sigma_y^{max} = \pm \frac{6M_y}{e^2}$$

Si ces contraintes sont de signes opposés, la contrainte tangentielle maximale agit dans le plan bissectant l'angle compris entre les plans xz et yz et vaut :

$$\tau^{max} = \frac{\sigma_x^{max} - \sigma_y^{max}}{2} = \pm \frac{3(M_x - M_y)}{e^2}$$

Si au contraire, les contraintes σ_x^{max} et σ_y^{max} sont de même signe, la contrainte tangentielle maximale agit dans le bissectant l'angle des plans xy et xz est égale à $\frac{1}{2}\sigma_y^{max}$ ou $\frac{1}{2}\sigma_x^{max}$ selon celle de ces deux quantités qui est la plus grand.

II.3.2.Flexion des plaques soumise à des charges transversales :

a- Elément de réduction des forces extérieures sur des sections parallèles à ox et oy :

Appelons p l'intensité par unité d'aire de la charge appliquée à la surface supérieure de la plaque, cette intensité variera en général avec le point considéré et doit être considérée comme une fonction de x et de y , découpons encore dans la plaque un parallélépipède élémentaire par deux paires de plans parallèles aux plans coordonnée oxz et oyz respectivement (FIG.II.7) .

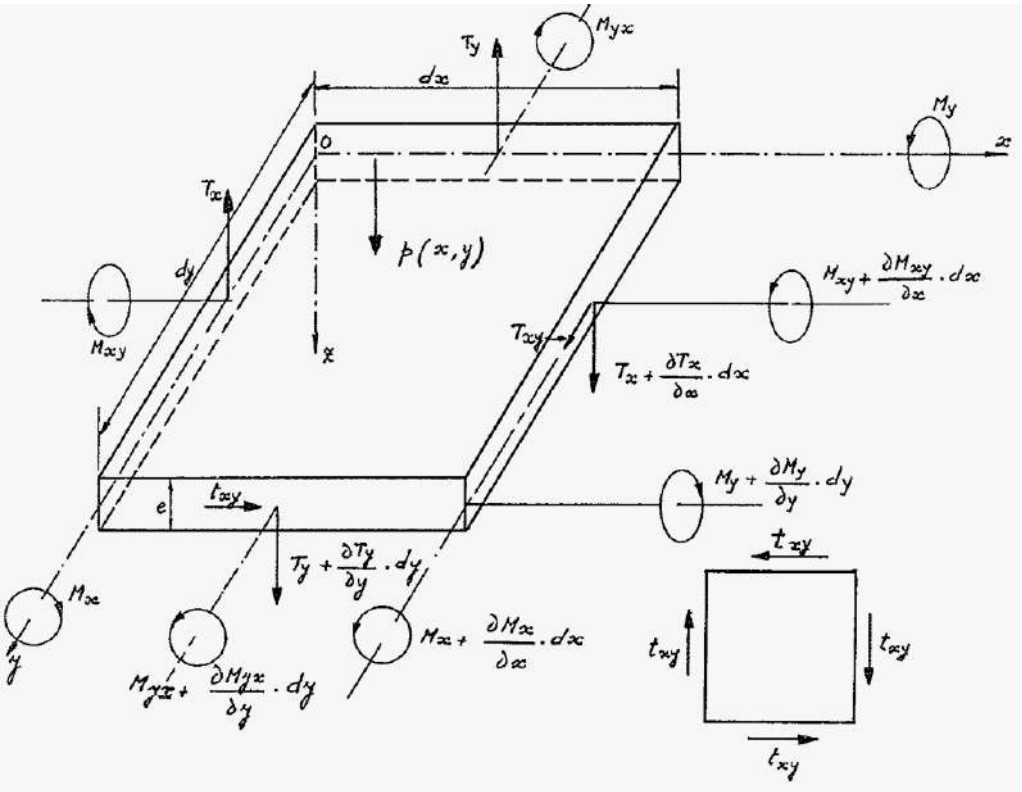


FIG.II.8 : équilibre du parallélépipède élémentaire.

La dimension des efforts tranchants est :$F \cdot L^{-1}$

$$T_x = \int_{-e/2}^{+e/2} \tau_{zx} \cdot dz \text{.....(II.30)}$$

$$T_y = \int_{-e/2}^{+e/2} \tau_{zy} \cdot dz \text{.....(II.31)}$$

Pour les moments de flexion et de torsion elles prennent une dimension d'une force :

$$M_x = \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_x \cdot z \cdot dz \text{.....(II.32)}$$

$$M_y = \int_{-e/2}^{+e/2} \sigma_y \cdot z \cdot dz \text{.....(II.33)}$$

$$M_{xy} = \int_{-e/2}^{+e/2} -\tau_{xy} \cdot z \cdot dz \text{.....(II.34)}$$

$$M_{yx} = -M_{xy} \int_{-e/2}^{+e/2} \tau_{xy} \cdot z \cdot dz \text{.....(II.35)}$$

Toutes ces grandeurs sont des fonctions de x et de y. par conséquent, elles subissent d'une face à l'autre du parallélépipède les variations élémentaires :

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} \cdot dx \ , \frac{\partial M_x}{\partial x} \cdot dx \text{.....(II.36)}$$

Ces variations sont indiquées sur la FIG.II .8.

b-Equilibre du parallélépipède élémentaire :

Exprimons à présent que le parallélépipède élémentaire est en équilibre sous l'effet des forces et moments qui le sollicitent et remarquons de suite que toutes les forces sont parallèle à l'axe des z, et tous les couples représentés par des vecteurs perpendiculaires à cet axe. Par conséquent, les six équations de la statique se réduisent à 3,à savoir l'équation de projection parallèlement à oz et les équations autour des axes ox et oy.

D'après la figure II.8 l'équation de projection parallèlement à oz s'écrit :

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial T_y}{\partial y} \cdot dy \cdot dx + p \cdot dxdy = 0 \text{.....(II.37)}$$

Où après simplification :

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p = 0 \text{.....(II.38)}$$

Le poids propre de la plaque étant supposé inclus dans la valeur de p.

De même, en prenant les moments par rapport aux axes des x et des y de toutes les forces agissant sur l'élément, on trouve respectivement :

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + T_y = 0 \text{.....(II.39)}$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - T_x = 0 \text{.....(II.40)}$$

On peut obtenir une équation d'équilibre unique ne faisant intervenir que les composantes M_x, M_y, M_{xy} du tenseur moment en éliminant les efforts tranchants $T_x \ et \ T_y$, entre les relations.

On trouve ainsi :

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} = -p \quad \text{.....(II.41)}$$

c-Expression des efforts tranchants :

Comme stipulé dans l'introduction, nous admettons que les efforts tranchants $T_x \; et \; T_y$ ont un effet négligeable sur les courbures de la plaque.

Dés lors, nous pouvons utiliser dans le cas actuel les équations établies dans le cas de la flexion pure et écrire :

$$M_x = -D \cdot (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \quad \text{.....(II.42)}$$

$$M_y = -D \cdot (\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \quad \text{.....(II.43)}$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D \cdot (1 - \nu^2) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{.....(II.44)}$$

Tirons $T_x \; et \; T_y$ des équations d'équilibre puis remplaçons-y les moments $M_x, M_y, et \; M_{xy}$ par leur expressions il vient :

$$T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = D \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 w) \quad \text{.....(II.45)}$$

$$T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = D \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = -\frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 w) \quad \text{.....(II.46)}$$

d-Equation différentielle des plaques d'épaisseur constante :

Remplaçant maintenant $T_x$et $T_y$par ces valeur dans l'équation d'équilibre de translation ; nous obtenons l'équation de Lagrange :

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad \text{.....(II.47)}$$

Elle est l'analogie de deux dimensions de l'équation de flexion des poutres :

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q}{E \cdot I} \quad \text{.....(II.48)}$$

e- Vibration d'une plaque :

Si la plaque ne supporte aucune force extérieure, mais qu'elle vibre, on peut obtenir l'équation gouvernant le phénomène en invoquant le principe de d'Alembert. Ce principe nous indique qu'il faut remplacer la force superficielle q par la force d'inertie **[1]** :

$$-m\vec{\gamma} = -m \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \text{.....(II.49)}$$

Où m(x, y) est la masse de la plaque par unité d'aire.

Substituant dans l'équation de Lagrange, on trouve l'équation des vibrations libres d'une plaque d'épaisseur constante :

$$D \cdot \nabla^4 w + m \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \text{.....(II.50)}$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + m \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \text{.....(II.51)}$$

Dans le cas d'une plaque simplement supportée sur tous ces bords, en régime de temps harmonique, le déplacement transversal $w(x, y, t)$est de la forme :

$$w(x, y, t) = w_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t) \text{.....(II.52)}$$

Ou ωest la pulsation, $k_x \; et \; k_y$ sont les nombres d'ondes associés aux directions (ox) et (oy), liés au nombre d'onde k par la relation : $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

En faisant usage de l'équation (II.7), sans terme force, et en utilisant l'expression du déplacement $w(x, y, t)$ précédente, on peut écrire l'équation de dispersion pour cette plaque mince simplement supportée comme :

$$\omega^2 = k^4 \frac{D}{\rho h} \text{.....(II.53)}$$

II.3.3.Condition d'appuis de la plaque sur ses bords :

- **Bord encastré :**

Le long du bord, le déplacement et la pente normale au bord sont nuls, de sorte que :

$$w = 0 \quad \text{.....(II.54)}$$

$$et \ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{.....(II.55)}$$

- **Bord simplement appuyée :**

Le long du bord, le déplacement et le moment fléchissant M_n, sont nuls, de sorte que :

$$w = 0 \text{.....(II.56)}$$

$$et \ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \cdot \frac{d\psi}{ds}\frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ .....(II.57)}$$

Cette relation peut encore s'écrire si le bord est rectiligne :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0 \ et \ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \text{.....(II.58)}$$

Le deuxiéme condition de bord appuyé peut enccore s'écrire :

$$\nabla^2 w = 0 \text{.....(II.59)}$$

- **Bord libre :**

Les conditions aux limites pour un bord libre sont à présent :

$$M_n = 0 \text{.....(II.60)}$$

$$R_n = T_n + T_n' = T_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0 \text{.....(II.61)}$$

II.3.4.Réaction d'appui d'une plaque :

La réaction d'appui d'une plaque chargée transversalement dirigée positivement vers le bas en haut dans un bord rectiligne définie comme suite :

$$R_n = -D[\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial n \partial s^2}] \text{ .....(II.62)}$$

Pour illustrer ce qui précéde, considération,figure , une paque rectangulaire de dimensions a, b, supportée d'une façon qulconque le long de son contour et chargée de forces transversales. Cette plaque reçoit de structure qui sopporte , non seulement des réactions réparties sur ce contour et de valeurs :

$$R_x = -D[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}] \text{ .....(II.63)}$$

$$R_y = -D[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}] \text{ .....(II.64)}$$

Tableau .II.1 : Comparaison entre la plaque de Kirchhoff et la poutre de Bernoulli **[2]** :

Valeurs	Plaque unités	Poutre unités
Charges	Charge répartie q(x,y) kN/m^2	Charge répartie q(x) kN/m
Déformée	$w(x,y)$ m	$f(x)$ m
Equation fondamentale	$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$	$\frac{d^4 f}{dx^4} = \frac{q}{E \cdot I}$
Rigidité flexionnelle	$D = \frac{EI}{1-\nu^2}$, $I = \frac{e^3}{12}$	$D = EI$, $I = \frac{bh^3}{12}$
Moment de flexion	$M_x = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$ kN $M_y = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$ kN	$M = -D \frac{d^2 f}{dx^2}$ $kN \cdot m$
Moment de torsion	$M_{xy} = D \cdot (1-\nu^2) \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ kN	$M_{xy} = 0$ $kN \cdot m$
Efforts tranchants	$T_x = D \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$ kN/m $T_y = D \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$ kN/m	$T = -D \frac{d^3 f}{dx^3}$ kN
Relation T- M	$T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ $T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$	$T = \frac{\partial M_x}{\partial x}$
Relation T-q	$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q = 0$	$\frac{\partial T}{\partial x} + q = 0$
Relation M-q	$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} = -q$	$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -q$

CHAPITRE III :

Méthode de résolution analytique pour les plaques rectangulaires

Chapitre.III. Méthodes de résolution analytique pour les plaques rectangulaires d'épaisseur constante :

III .1.Introduction :

D'après ce que nous venons de voir, la recherche de la sollicitation et de la déformation d'une plaque dont la forme, le mode d'appui et la mise en charge sont donnés, se ramène au problème au mathématique suivant :

On trouve la solution de l'équation de Lagrange :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{D} \quad \text{.....(III.1)}$$

Nombreux mathématiciens et ingénieurs ont tenté de résoudre ce problème et l'on connait ; à l'heure actuelle, une vaste collection de solutions de l'équation qui présentent un intérêt pratique.

- Nous examinerons dans ce chapitre deux grandes méthodes de calcul utilisées pour les plaques rectangulaires, à savoir :

-la méthode des séries doubles de Navier .

-la méthode des séries simples de Lévy.

III.2.Méthode des séries doubles de Navier :

Le problème des plaques rectangulaires simplement appuyées a été résolu par Navier en 1820.le principe de sa méthode consiste dans l'emploi d'un développement de Fourier de sinus pour représenter la fonction q(x,y) qui définit l'intensité de la charge.

Navier développe l'intensité de la charge q(x,y) en série double de Fourier de la forme**[3]** :

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad \text{.....(III.2)}$$

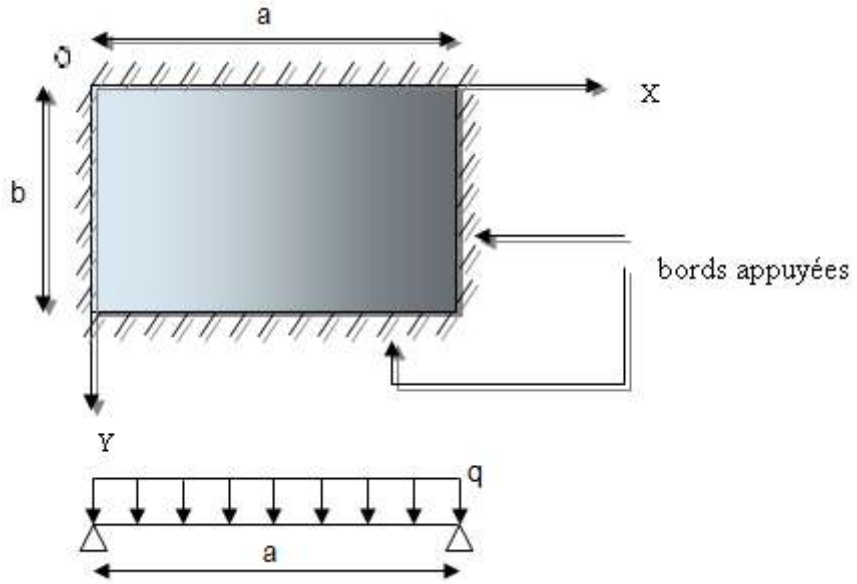


FIG.III.1: plaque simplement appuyées sur quatre cotés.

Où $a\ et\ b$ sont les dimensions de la plaque

$$q_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^b \int_0^a q(x,y)\cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad \text{(III.3)}$$

Si l'on remplace la charge q par son expression dans l'équation de Lagrange, celle-ci s'écrit :

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{1}{D}\cdot q_{mn}\cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad \text{(III.4)}$$

Pour une plaque chargée uniformément sur la surface $q(x,y) = q_0$

On trouve : $q_{mn} = \frac{4q_0}{mn\,\pi^2}\cdot(1-\cos m\pi)(1-\cos n\pi) = \frac{16q_0}{mn\,\pi^2}$ $pour\ m,n$ sont des nombres impairs.

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}\cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad \text{(III.5)}$$

Si l'on remplace l'équation (III.5) dans l'équation d'équilibre on trouve :

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[D\cdot\left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)^2\cdot W_{mn} - q_{mn}\right]\cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = 0$$

$$W_{mn} = \frac{q_{mn}}{D\left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)^2} \quad \text{(III.6)}$$

$$w(x,y) = \frac{1}{D}\cdot\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{q_{mn}}{\left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)^2}\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad \text{(III.7)}$$

Les moments de flexion et de torsion **[3]** :

$$M_x = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\nu\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{\left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)^2}q_{mn}\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$M_y = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{\left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)^2}q_{mn}\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$M_{xy} = -(1-\nu)\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{\frac{m\pi}{a}\cdot\frac{n\pi}{b}}{\left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)^2}q_{mn}\cdot\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Les contraintes normales et tangentielles deviennent :

$$\sigma_x = \frac{E\cdot z}{1-\nu^2}\cdot\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\left(\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\nu\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right)\cdot W_{mn}\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$\sigma_y = \frac{E\cdot z}{1-\nu^2}\cdot\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\left(\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\nu\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right)\cdot W_{mn}\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{E\cdot z}{1+\nu}\cdot\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{m\pi}{a}\right)\cdot\left(\frac{n\pi}{b}\right)\cdot W_{mn}\cdot\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

Si on pose $\rho = a/b$:

$$w(x,y) = \frac{16\cdot q_0\cdot a^4}{\pi^6\cdot D}\cdot\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{mn(m^2+n^2\cdot r^2)^2}\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

On déduit par la symétrie de la géométrie et la symétrie du chargement que la flèche maximale se trouve au centre de la plaque et en faisant: $x = \frac{a}{2}\ et\ y = \frac{b}{2}$

$$w_{max} = w\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right) = \frac{16 \cdot q_0 \cdot a^4}{\pi^6 \cdot D} \cdot \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{mn(m^2+n^2 \cdot r^2)^2}$$

$$w_{max} = \frac{16 \cdot q_0 \cdot a^4}{\pi^6 \cdot D} \cdot F(\rho)$$

$F(\rho)$ la valeur de la série double.

Pour$\rho = 1\ on\ a\ F(\rho) = 0{,}2441$.

Le tableau suivant montre $F(\rho)$:

Tableau.III.1 : la variation de la série double en fonction des dimensions de la plaque

ρ	F (ρ)
0	0,7774
0,1	0,7824
0,2	0,7794
0,3	0,7521
0,4	0,6907
0,5	0,6086
0,6	0,5208
0,7	0,4370
0,8	0,3621
0,9	0,2979
1	0,2441

$$w_{max} \approx \frac{q_0 \cdot a^4}{246 \cdot D} \approx 0{,}0040624 \cdot \frac{q_0 \cdot a^4}{D}$$

Programm matlab de la solution exacte :

```
format long
tkmesh=40; % nombre des mailles
tlmesh=40; % the nombre des mailles
tk=tkmesh-1; % nombre des nœuds
tl=tlmesh-1; % nombre des nœuds
r=tkmesh/tlmesh
tx=1:tk+2; ty=1:tl+2; [tx,ty]=meshgrid(tx,ty);
for i=1:tk+2,
```

```
for j=1:tl+2,
W(i,j)=0;
end
end
for m=1:2:13,
for n=1:2:13,
for i=1:tk+2,
for j=1:tl+2,
mndd=m*n*(m^4+2*m^2*n^2*r^2+n^4*r^4);
W(i,j)=W(i,j)-(16/pi^6)*(sin(m*pi*(i-1)/tkmesh)*sin(n*pi*(j-1)/tlmesh)/mndd);
end
end
end
end
mesh(tx,ty,W);
surf(tx,ty,W);
shading flat
shading interp
xlabel ( 'x-axis' ),
ylabel( 'y-axis' ),
zlabel( 'z-axis'),
title(['Solution exacte. Wmax=' num2str(W(1+tkmesh/2, 1+tlmesh/2)) ' x qa^4/D'])
```

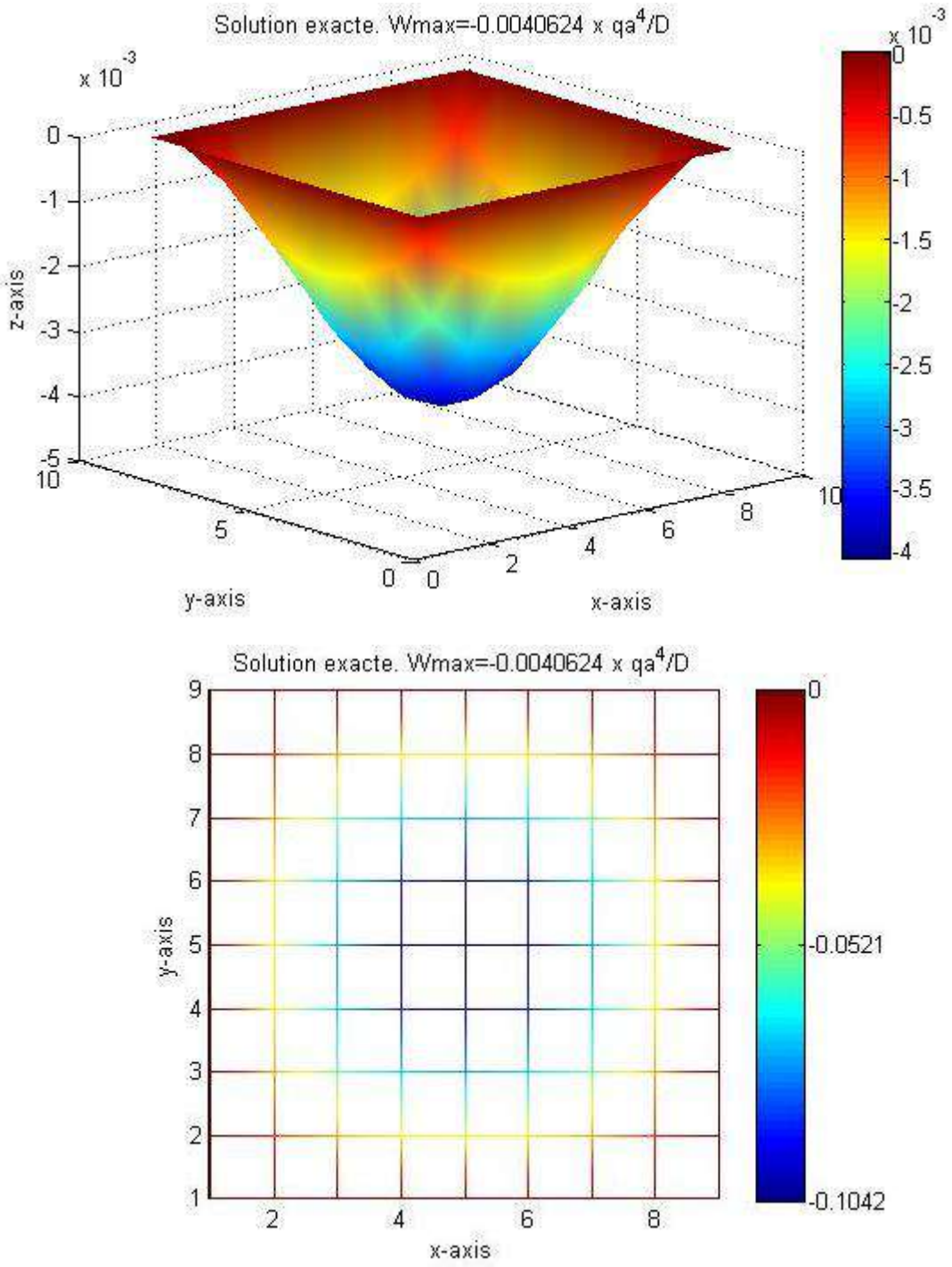


FIG III.2 : déflexion d'une plaque rectangulaire

Remarque : Cette solution n'est pas pratique, car elle exige le calcul de la somme des séries doubles qui ne convergent pas toujours rapidement. **[4]**

III.3. Méthode des séries simple (M.Maurice-Lévy) :

La méthode des séries simples s'applique aux plaques rectangulaires qui sont appuyées sur deux cotés parallèles à $x = 0\ et\ x = a$ et sont soumises à des conditions d'appui diverses sur les autres cotés $y = 0\ et\ y = b$, figure III.3.

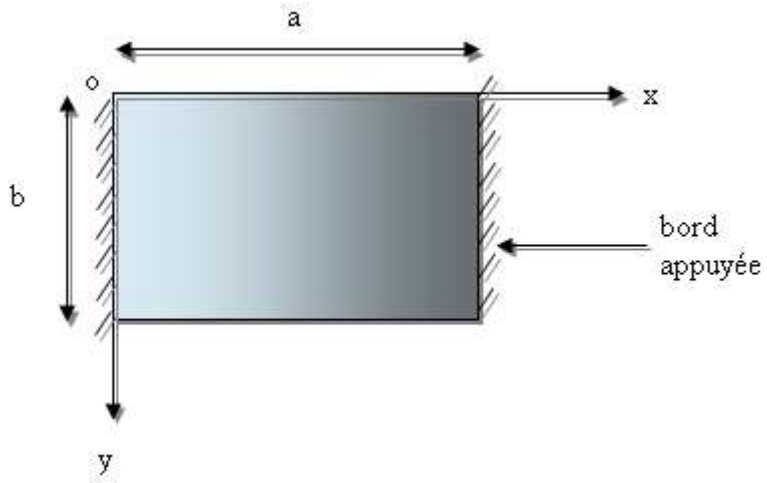


FIG.III.3: plaque simplement appuyées sur deux cotés parallèles.

III.3.1.validation de la méthode de Lévy par la méthode Navier :

On a la fonction de déplacement de Lévy **[5]:**

$$w = \sum_i^M Y_i \cdot sin\frac{i\pi x}{a} \quad \text{.....(III.8)}$$

Satisfait les conditions suivant :

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \ \ pour\ \ x = 0\ \ et\ \ x = a$$

Qui expriment que la plaque rectangulaire est simplement appuyée sur les bords $x = 0\ et\ x = a$.

Pour que la plaque soit également appuyée sur les deux autres bords $y = 0\ et\ y = b$, il faut que :

$$w = 0\ \ et\ \ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Pour ces valeurs de y d'où les conditions : $Y_i = 0\ \ et\ \ Y_i^{''} = 0,\ \ pour\ \ y = 0\ \ et\ \ y = b$, qui donne quatre relations permettent de déterminer les quatre constantes arbitraires : A_m, B_m, C_m, D_m.

Ces constantes étant ainsi déterminées, on montre que les deux fonctions :

$$w = \sum_i \sum_j A_{ij} \sin\frac{i\pi x}{a} \sin\frac{j\pi y}{b} \qquad et\ w = \sum_i Y_i \sin\frac{i\pi x}{a}$$

Sont identiques.

En effet si dans la première expression de w nous groupons les termes en i nous pouvons écrire :

$$w = \sum_i \sin\frac{i\pi x}{a} \sum_j A_{ij} \sin\frac{j\pi y}{b} \text{.....(III.9)}$$

Posant :

$$Y_i = \sum_j A_{ij} \sin\frac{j\pi y}{b} \text{.....(III.10)}$$

III.3.2. Plaque appuyée par ses quatre bords-problème de Navier :

Nous allons traiter le problème de Navier par la méthode de M. Maurice –Lévy. **[5]**

Adoptons pour w le développement en série simple,

$$w = \sum_i Y_i \sin\frac{i\pi x}{a} \text{.....(III.11)}$$

Y_i Étant une fonction de y.

Par la forme même de w, la plaque est appuyée sur les bords x=0, x=a ; pour qu'elle soit aussi appuyée sur les deux bords y=0, y=b, il faut que

$Y_i = 0 \quad , Y_i'' = 0,$ pou y=0et y=b .....(III.12)

Nous avons que Y_i doit satisfaire à l'équation différentielle

$$Y_i^{(4)} - 2\alpha^2 Y_i'' + \alpha^4 Y_i = \frac{15}{8EIa} \int_0^a q \sin\frac{i\pi x}{a} \text{.....(III.13)}$$

Dont l'intégrale générale est

$$Y_i = \varphi_i(y) + A_i sh\ \alpha y + B_i ch\ \alpha y + y(C_i sh\ \alpha y + D_i ch\ \alpha y) \text{.....(III.14)}$$

Ou'$\varphi_i(y)$ désigne une une intégrale particulière de l'équation.

En expliquant les conditions (III.12), nous avons pour déterminer les quatre constantes arbitrairesA_i , B_i , C_i, D_i, les équations :

$\varphi_i(0) + B_i = 0 \quad , \quad \varphi''_i(0) + B_i\alpha^2 + 2C_i\alpha = 0,$

$\varphi_i(b) + A_i sh\ \alpha b + B_i ch\ \alpha b + b(C_i sh\ \alpha b + D_i ch\ \alpha b) = 0,$

$\varphi''_i(b) + \alpha^2(A_i sh\ \alpha b + B_i ch\ \alpha b) + 2\alpha(C_i sh\ \alpha b + D_i ch\ \alpha b) + b\alpha^2(C_i sh\ \alpha b + D_i ch\ \alpha b) = 0,$

Des deux premières on tire,

$B_i = -\varphi_i(0), \qquad C_i = \frac{1}{2\alpha}[\varphi''_i(0) - \alpha^2\varphi_i(0)].$

En remplaçant dans les deux autresB_i, C_i parces valeurs et réduisant, on a, pour déterminer A_i , D_i, les équations

$A_i sh\ \alpha b + D_i b\ ch\ \alpha b = -\varphi_i(b) + \varphi_i(0)\ ch\ \alpha b + \frac{b}{2\alpha}\ sh\ \alpha b[\varphi''_i(0) - \alpha^2\varphi_i(0)] = m_i,$

$A_i\ \alpha^2 sh\ \alpha b + D_i(2\alpha sh\ \alpha b + b\alpha^2\ ch\ \alpha b) = -\varphi''_i(b) + \varphi''_i(0) ch\ \alpha b - \frac{\alpha b}{2}\ sh\ \alpha b[\alpha^2\varphi_i(0) -$

$\varphi''i0=ni,$

Ou' j'ai désigné par m_i et n_i les secondes membres de ces équations.

On a

$A_i sh\ \alpha b + D_i b\ ch\ \alpha b = m_i,$

$A_i\ \alpha^2 sh\ \alpha b + D_i(2\alpha sh\ \alpha b + b\alpha^2\ ch\ \alpha b) = n_i,$

D'où l'on tire facilement

$D_i = \frac{n_i - \alpha^2 m_i}{2\alpha sh\ \alpha b}, \qquad A_i = \frac{m_i(2\alpha sh\ \alpha b + b\alpha^2\ ch\ \alpha b) - b\ n_i ch\ \alpha b}{2\alpha\ sh^2\alpha b}.$

En développant ces calculs et posant, pour abréger,

$\varphi_i(0) = \varphi''_i(0) - \alpha^2\varphi_i(0),$

On peut écrire$D_i = \frac{\varphi_i(0)\ ch\ \alpha b - \varphi_i(b)}{2\alpha sh\ \alpha b},$

$A_i = \frac{1}{sh\ \alpha b}[\varphi_i(0)\ ch\ \alpha b - \varphi_i(b)] + \frac{b}{2\alpha\ sh^2\alpha b}[\varphi_i(b)\ ch\ \alpha b - \varphi_i(0)]\ ,$

Ce sont là les formules qui, dans chaque cas où la fonction $\varphi_i(y)$ sera déterminée, nous fourniront les valeurs des constantes.

- **Cas où la charge est uniformément répartie sur la plaque [5]:**

Dans ce cas, q est une constante et l'équation qui définit Y_i devient

$$Y_i^{(4)} - 2\alpha^2 Y_i'' + \alpha^4 Y_i = \frac{15q}{8EIa\alpha}(1-\cos i\pi) = \begin{cases} 0 \ pour\ i\ pair, \\ \frac{15q}{4EIa\alpha}\ pour\ i\ impair, \end{cases} \text{.....(III.15)}$$

On se bordera donc aux valeurs i=1=3=5…etc.

Une intégrale particulière de l'équation sera

$$\varphi_i(y) = \frac{15q}{4EIa\alpha^5} \text{ .....(III.16)}$$

φ_i étant une constante,il suit que φ''_i est nul ;par suite

Posons, pour abréger l'écriture,

$\frac{15q}{4EIa} = K_1$.

$\varphi_i = \frac{K_1}{\alpha^5}$.

Les constantesA_i, B_i, C_i, D_i ont pour valeur

$B_i = -\varphi_i(0) = -\frac{K_1}{\alpha^5}$, $\quad C_i = \frac{\alpha K_1}{2\alpha^5}$,

$D_i = \frac{K_1}{\alpha^5}\frac{\alpha^2(1-ch\ \alpha b)}{2\alpha sh\ \alpha b}$, $\quad A_i = \frac{K_1}{\alpha^5}\frac{(1-ch\ \alpha b)(b\alpha^2-2\alpha\ sh\ \alpha b)}{2\alpha\ sh^2\alpha b}$.

$$Y_i = \frac{K_1}{\alpha^5}\left\{1 + \frac{(1-ch\ \alpha b)(b\alpha^2-2\alpha\ sh\ \alpha b)}{2\alpha\ sh^2\alpha b}\ sh\ \alpha y - ch\ \alpha y + y\left[\frac{\alpha}{2}\ sh\ \alpha y + \frac{\alpha^2(1-ch\ \alpha y)}{2\alpha sh\ \alpha b}\ ch\ \alpha y\right]\right\} \text{ .....(III.17)}$$

Dan ce cas et celui d'une façon générale où q est indépendant de x,

$\int_0^a q \sin\frac{i\pi x}{a}$ est nul pour des valeurs paires de i, le seconde membre de l'équation qui définit Y_i et la solution disparait.

Nous n'avons qu'à considérer les valeurs impaires de i.

En multipliant Y_i par $\sin\frac{i\pi x}{a}$ et faisant la somme en donnant à i les valeurs impaires 1,3,5…on aura w exprimé par une série simple

$$w = \sum \sin\frac{i\pi x}{a}\ \frac{K_1}{\alpha^5}\left\{1 + \frac{(1-ch\ \alpha b)(b\alpha^2 - 2\alpha\ sh\ \alpha b)}{2\alpha\ sh^2 \alpha b}\ sh\ \alpha y - ch\ \alpha y + y\left[\frac{\alpha}{2}\ sh\ \alpha y + \frac{\alpha^2(1-ch\ \alpha y)}{2\alpha sh\ \alpha b}\ ch\ \alpha y\right]\right\}$$

- **Calcul de la flèche de courbure [5]:**

Supposons pour simplifier que la plaque soit carrée b=a.

Le point central a pour coordonnées $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$,

La valeur de *w* sera :

$$w = \sum_i \frac{K_1}{\alpha^5}\ (-1)^{\frac{i-1}{2}}\left[1 + \frac{(1-ch\ i\pi)(i\pi - 2\alpha\ sh\ i\pi)}{2\alpha\ sh^2 i\pi}\ sh\ \frac{i\pi}{2} - ch\ \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{4}\ sh\ \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{4}\frac{1-ch\ i\pi}{sh\ i\pi}\ ch\ \frac{i\pi}{2}\right].$$

Remarquons que

$$\frac{i\pi}{4}\ sh\ \frac{i\pi}{2} + \frac{i\pi}{4}\frac{1-ch\ i\pi}{sh\ i\pi}\ ch\ \frac{i\pi}{2}$$

S'écrit $\frac{i\pi}{4\ sh\ i\pi}(sh\ i\pi\ sh\frac{i\pi}{2} - chi\pi\ ch\frac{i\pi}{2} + ch\ \frac{i\pi}{2})$,

Qui est nul d'après le développement de $ch(i\pi - \frac{i\pi}{2})$.

Le premier terme de la série correspondant à i=1 s'écrira

$$\frac{15q}{4EI\pi^5}\left[1 + \frac{(1-ch\ \pi)(\pi - 2\ sh\ \pi)}{2\ sh^2\pi}\ sh\ \frac{\pi}{2} - ch\ \frac{\pi}{2}\right].$$

A l'aide des tables des fonctions hyperbolique, calculons sa valeur.

En remarque que $sh\ \frac{\pi}{2} = 2.301$, $sh\ \pi = 11.546$,

$$ch\ \frac{\pi}{2} = 2.509\ ,\ ch\ \pi = 11.589\ ,$$

On a pour la valeur de la parenthèse, 0.314

Et nous avons une première approximation de la flèche de courbure en prenant

$$w_1 = \frac{15qa^4}{4EI\pi^5}\ 0.314.$$

Calculons maintenant le second terme du développement de M. Lévy correspondant à i= 3

On a $sh\ \frac{3\pi}{2} = 55.635$, $sh\ 3\pi = 6191.5080$,

$ch\ \frac{3\pi}{2} = 55.644$, $ch\ 3\pi = 6191.5088$,

Et par suite la valeur de la parenthèse, dans l'expression de ce second terme, sera

$-\frac{1}{3^5}\frac{15qa^4}{4EI\pi^5}\left[1+\frac{(1-ch\ 3\pi)(3\pi-2\ sh\ 2\pi)}{2\ sh^2 3\pi}\ sh\ \frac{3\pi}{2} - ch\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Ou 1.004 ; en divisant par $\frac{1}{3^5}$ nous avons pour la valeur du second terme de la série :

$w_3 = -\frac{15qa^4}{4EI\pi^5}\ 0.004$.

Donc la valeur de la flèche de courbure sera

$w = \frac{15qa^4}{4EI\pi^5}\ (0.314 - 0.004)$,

Où

$w_{max} = \frac{15qa^4}{4EI\pi^5}\ 0.310$, $on\ a: D = \frac{EI}{1-\nu^2}$ et $\nu = 0{,}25$ on peut écrire :

$w_{max} = 0{,}0040623\frac{qa^4}{D}$

- **Les moments fléchissant [4]:**

Les moments fléchissant au centre de la plaque ont pour valeurs:

$M_x = qab[f(\rho) + \nu g(\rho)]$, $M_y = qab[\nu f(\rho) + g(\rho)]$ et $\rho = \frac{a}{b}$

On peut écrire : $M_x = \frac{1}{\rho}[f(\rho) + \nu g(\rho)]qa^2 = \mu_x qa^2$

$$\begin{cases} f(\rho) = \rho[\frac{1}{8} - \sum_{1,3,5}^{M}\frac{2}{m^3\pi^3}\left(\frac{2+\lambda th\lambda}{ch\lambda}\right)\sin\frac{m\pi}{2}] \\ g(\rho) = \sum_{1,3,5}^{M}\frac{1}{m^3\pi^3}\left(\frac{th\lambda}{ch\lambda}\right)\sin\frac{m\pi}{2}] \end{cases} \quad \text{.....(III.18)}$$

Pour $\rho = 1$ $M_x = M_y = qa^2[0{,}036836 + 0{,}2 \cdot 0{,}0036836] = 0{,}0442qa^2$

Tableau.III.2 : la variation de μ_x en fonction de ρ :

$\rho = \frac{a}{b}$	μ_x	
	$\nu = 0$	$\nu = 0.2$
0.4	**0.1100**	**0.1119**
0.5	**0.0965**	**0.0999**
0.6	**0.0821**	**0.0869**
0.7	**0.0683**	**0.0742**
0.8	**0.0561**	**0.0628**
0.9	**0.0456**	**0.0527**
1	**0.0368**	**0.0442**

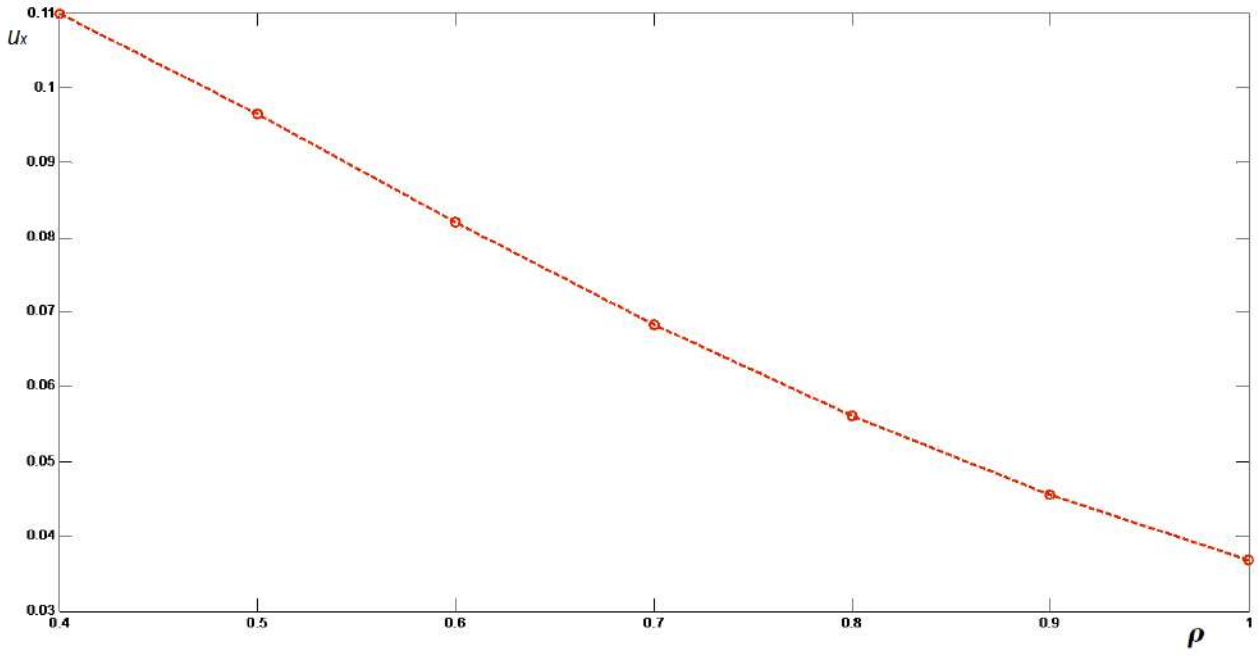


FIG.III.4 : la variation de μ_x en fonction de ρ

III .3.3 : Plaque dont deux bords opposés sont libres et les deux autres bords appuyés [5] :

Nous allons examiner le cas où la plaque a deux bords libres et voir que ce cas correspond à celui du déplacement du milieu de la plaque.

Les conditions au contour qui déterminent les constantes arbitraires A_i, B_i, C_i, D_i de l'intégrale générale de l'équation qui définit Y_i sont $4Y_i'' - \alpha^2 Y_i = 0$, $4Y_i''' - 7\alpha^2 Y_i' = 0$ pour les deux bords

y=0 et y=b,ce qui nous donne quatre équations pour déterminer A_i, B_i,C_i , D_i.en remplaçant Y_i, $Y_i^{'}$, $Y_i^{''}$, $Y_i^{'''}$ par leurs expressions qui sont comme suit :

$Y_i = \varphi_i(y) + A_i\ sh\ \alpha y + B_i\ ch\ \alpha y + y(C_i\ sh\ \alpha y + D_i\ ch\ \alpha y).$

On déduit

$Y_i^{'} = \varphi_i^{'}(y) + sh\ \alpha y(\alpha B_i + C_i) + ch\ \alpha y(\alpha A_i + D_i) + \alpha y(C_i\ ch\ \alpha y + D_i\ sh\ \alpha y),$

$Y_i^{''} = \varphi_i^{''}(y) + sh\ \alpha y(\alpha^2 A_i + 2\alpha D_i) + ch\ \alpha y(\alpha^2 B_i + 2\alpha C_i) + \alpha^2 y(C_i\ sh\ \alpha y + D_i\ ch\ \alpha y),$

$Y_i^{'''} = \varphi_i^{'''}(y) + sh\ \alpha y(\alpha^3 B_i + 3\alpha C_i) + ch\ \alpha y(\alpha^3 A_i + 3\alpha D_i) + \alpha^3 y(C_i\ sh\ \alpha y + D_i\ ch\ \alpha y),$

Simplifiant et supposant la charge uniformément répartie sur la plaque, ces équations peuvent s'écrire :

$3\alpha B_i + 8C_i = \alpha\varphi_i(0),\ 3\alpha A_i = 5D_i\ ,$

$3\alpha\ sh\ \alpha b\ A_i + (3\alpha b\ ch\ \alpha b + 8\ sh\ \alpha b)D_i + 3\alpha\ ch\ \alpha b\ , B_i + (3\alpha b\ sh\ \alpha b + 8\ ch\ \alpha b\ )C_i = \alpha\varphi_i(0),$

$$3\alpha\ ch\ \alpha b\ A_i + (3\alpha b\ sh\ \alpha b - 5ch\ \alpha b)D_i + 3\alpha\ ch\ \alpha b\ B_i + (3\alpha b\ ch\ \alpha b - 5\ sh\ \alpha b\ )C_i = 0$$

En tirant $D_i = \frac{3\alpha}{5}\ A_i$, $C_i = \frac{\alpha}{8}\varphi_i(0) - \frac{3\alpha}{8}\ B_i$ des deux première et portant dans les deux dernières on a

$$\frac{A_i}{5}(39\ sh\ \alpha b + 9\alpha^2\ b\ ch\ \alpha b) - B_i\frac{9\alpha b}{8}\ sh\ \alpha b = \varphi_i(b) - \frac{\varphi_i(0)}{8}(3\alpha b\ sh\ \alpha b + 8\ ch\alpha b),$$

$A_i\ \frac{9\alpha^2\ b}{5}\ sh\ \alpha b + \frac{B_i}{5}\ (39\alpha\ sh\ \alpha b - 9\alpha^2\ b\ ch\ \alpha b) = \frac{\alpha\varphi_i(0)}{8}(5\ sh\ \alpha b - 3\alpha b\ ch\ \alpha b),$

D'où l'on déduit pour A_i et B_i les valeurs

$A_i = \frac{5\varphi_i(0)(1-ch\ \alpha b)}{39\alpha\ sh\ \alpha b - 9\alpha b},\quad B_i = \frac{3\varphi_i(0)(65sh^2\alpha b - 9\alpha^2\ b^2 - 24\alpha\ sh\ \alpha b}{39^2 sh^2\alpha b - 81\ \alpha^2\ b^2},$

Et par suite

$C_i = \frac{3\alpha\varphi_i(0)\ sh\ \alpha b}{39\ sh\ \alpha b - 9\alpha b},\qquad C_i = \frac{3\alpha\varphi_i(0)(1-ch\ \alpha b)}{39\ sh\ \alpha b - 9\alpha b},$

Or

$$\varphi_i(b) = \varphi_i(0) = \frac{15qa^4}{4EIi^5\pi^5}$$

En remplaçant dans l'expression de Y_i ,

$Y_i = \varphi_i(y) + A_i sh\ \alpha y + B_i ch\ \alpha y + y(C_i sh\ \alpha y + D_i ch\ \alpha y),\ \varphi_i, A_i, B_i, D_i,$

Par ces valeurs, on obtient

$Y_i = \frac{15qa^4}{4EIi^5\pi^5}\left[1 + \frac{5(1-ch\ \alpha b)}{39\alpha\ sh\ \alpha b - 9\alpha b}\ sh\ \alpha y + \frac{3(13*5sh^2\alpha b - 9\alpha^2\ b^2 - 24\alpha\ sh\ \alpha b)}{39^2 sh^2\alpha b - 81\ \alpha^2\ b^2} + y(\frac{9\alpha(1-ch\ \alpha b)}{39\ sh\ \alpha b - 9\alpha b}\ ch\ \alpha y + 3\alpha sh\ \alpha b\ 39\ sh\ \alpha b - 9\alpha b\ sh\ \alpha y)\right.$.

Par raison de symétrie la valeur du déplacement *w* sera la même en deux points A et B (fig III.4) situés sur les deux cotés libres sur une parallèle aux cotés appuyés, c'est-à- dire correspondant à une même valeur de x

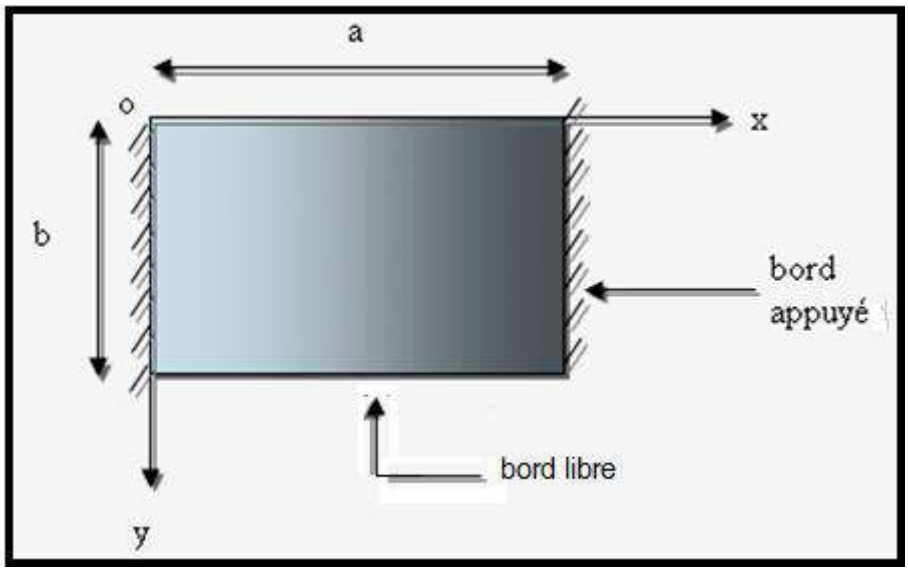


Fig.III.5 : plaque appuyée sur deux bords opposés et libre sur les autres

Il est d'ailleurs facile de le vérifier :

On a

$$w = \sum_i Y_i \sin\frac{i\pi x}{a}$$

Calculons la valeur de Y_i aux deux points A et B. Nous aurons, pour le point A,

$Y_i(0) = \frac{15qa^4}{4EIi^5\pi^5}(1 + \frac{195\ sh^2\alpha b - 27\alpha^2\ b^2 - 72\alpha\ sh\ \alpha b}{39^2 sh^2\alpha b - 81\ \alpha^2\ b^2}),$

Si l' on remplace y par b dans $Y_i(y)$ on a, pour le point B,

$$Y_i(b) = \frac{15qa^4}{4EIi^5\pi^5}\ \frac{1716\ sh^2\alpha b - 108\alpha^2\ b^2 - 72\alpha\ sh\ \alpha b}{39^2 sh^2\alpha b - 81\ \alpha^2\ b^2} \quad \text{.....(III.19)}$$

Qui est la même expression que celle de$Y_i(0)$.

Cela étant, le déplacement d'un point situé sur l'un ou l'autre des cotés libres de la plaque et correspondant à une abscisse à x sera

$$w = \sum_i \frac{15qa^4}{4EIi^5\pi^5}\ \frac{1716\ sh^2\alpha b - 108\alpha^2\ b^2 - 72\alpha\ sh\ \alpha b}{39^2 sh^2\alpha b - 81\ \alpha^2\ b^2} \sin\frac{i\pi x}{a}$$

Comme application numérique supposons la plaque carrée b=a et calculons le déplacement du centre de la plaque de coordonnées $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$.

En tenant compte de ces hypothèse, le premier terme du développement de w correspond à i=1 sera

$$Y_1 = \frac{15qa^4}{4EIi^5\pi^5}\left[1 + \frac{10(1-ch\ \pi)}{2(39\ sh\ \pi - 9\pi)}\ sh\ \frac{\pi}{2} + \frac{6\left(65\ sh^2\pi^2 - 9\pi^2 - 24\pi\ sh\ \pi\right) + 3\pi(1-ch\ \pi)(39\ sh\ \pi - 9\pi)}{2(39^2 sh^2\pi - 81\ \pi^2)}\ ch\frac{\pi}{2}\right].$$

Si l'on remplace sh π, ch $\pi, sh\ \frac{\pi}{2}, ch\frac{\pi}{2}$,par ses valeurs on obtient

$$w_1 = \frac{15qa^4}{4EI\pi^5}\ 0.998$$

On trouverait de même le terme correspondant à i=3

$$w_3 = -\frac{15qa^4}{4EI\pi^5}\ 0.004$$

Par suite, en se bornant à ces deux premiers termes, le déplacement du centre a pour valeur

w=$\frac{15qa^4}{4EI\pi^5}\ o.994, on\ a: D = \frac{EI}{1-\nu^2}$ et $\nu = 0{,}25$ on peut écrire :

$$w_{max} = 0{,}01234\frac{qa^4}{D}$$

Calculons maintenant le déplacement du milieu d'un coté libre. Pour ce point $x = \frac{a}{2}$,y=a, par suite, la valeur du déplacement est

$$w = \sum_i \frac{15qa^4}{4EIi^5\pi^5}\ \frac{1716\ sh^2 i\pi - 108i^2\ \pi^2 - 72i\pi\ sh\ i\pi}{39^2 sh^2 i\pi - 81\ i^2\ \pi^2} \sin\frac{i\pi}{2}.$$

Le premier terme de la série correspondant à i=1 sera

$$\frac{15qa^4}{4EIi^5\pi^5}\,\frac{1716\,sh^2\pi - 108\,\pi^2 - 72\pi\,sh\,\pi}{39^2 sh^2\pi - 81\;\pi^2}$$

En remplaçant les quantités par leurs valeurs numériques on a

$w_1 = \frac{15qa^4}{4EI\pi^5}\ 1.114$.

En calculons de même le second terme de série correspondant à i=3, on aurait

$w_3 = -\frac{15qa^4}{4EI\pi^5}\ 0.004$.

D'où la valeur du déplacement du milieu d'un bord libre est

$w = \frac{15qa^4}{4EI\pi^5}\ 1.110$, $on\ a: D = \frac{EI}{1-\nu^2}$ et $\nu = 0{,}25$ on peut écrire :

$$w_{max} = 0{,}01451\,\frac{qa^4}{D}$$

Ce déplacement est plus grand que celui du centre. La ligne médiane de la plaque qui joint les milieux des cotés libres s'infléchit donc au centre pour se révéler sur les bords. La forme que prend la surface de la plaque est à courbures opposées et rappelle celle d'une voile rectangulaire de navire gonflée par le vent et fixée par deux cotés opposés à deux vergues.

III.3.4. Tableau récapitulatif de touts les cas traités par M .Lévy :

Le tableau suivant permet de comparer les valeurs de la flèche de courbure d'une même plaque carrée supportant une charge uniformément répartie sur sa surface et dont les conditions au contour sont différentes. **[5]**

Tableau.III.3.le déplacement maximal de touts les cas traités par M .Lévy **:**

Conditions d'appuis	$w_{max} = \cdots \frac{qa^4}{D}$
Plaque dont les quatre bords sont appuyés	**0,0040624**
Plaque dont deux bords opposés sont libres et les deux autres bords appuyés	**Centre de la plaque : 0,01234** **Au milieu du bord libre : 0,01451**
Plaque encastrée dans deux bords opposés et appuyée sur les deux autres	**0,00175**
Plaque ayant deux bords opposés appuyés, un libre et l'autre encastré	**Centre de la plaque : 0,00562** **Au milieu du bord libre : 0,0107**
Plaque appuyée dans trois bords et l'autre libre	**Centre de la plaque : 0,007869** **Au milieu du bord libre : 0,01196**
Plaque appuyée dans trois bords et l'autre encastré	**0,00277**

Remarque : on constate que pour une même plaque carrée, la valeur des flèches de courbure va en croissant avec le degré de liberté de la plaque. **[5]**

CHAPITRE IV :

Résolution par la méthode des différences finies

IV.1 : Principe mathématique de la méthode des différences finies :

IV.1.1.Définition :

En mathématiques, plus précisément en calcul différentiel, une équation aux dérivées partielles ou équation différentielle partielle (EDP) est une équation dont les solutions sont les fonctions inconnues vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles. C'est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante (w dans les cas suivants) des variables indépendantes $(x, y) \in R^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles qu'on peut écrire sous la forme:

$$F\left(x, y, \dots\dots, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \dots\right) = 0$$

Les méthodes numériques passent toujours par des discrétisations des problèmes analytiques en des problèmes numériques et qu'il existe une infinité des méthodes de discrétisation d'une équation. Nous ne pouvons jamais les énumérer toutes mais les plus couramment utilisées pour la résolution des équations aux dérivées partielles sont:

1. La méthode des différences finies

2. La méthode des éléments finis

3. la méthode des volumes finis

4. la méthode des caractéristiques

Mais sachez que nous n'utiliserons ici que la méthode des *différences finies*.

La méthode consiste à remplacer les dérivées partielles par des différences divisées ou combinaisons de valeurs ponctuelles de la fonction en un nombre fini de points discrets ou nœuds du maillage.

L'avantage de cette méthode est qu'il y a une grande simplicité d'écriture et un

faible cout de calcul. Elle est couramment pratique et facile d'accès. Elle repose sur deux notions:

- La discrétisation des opérateurs de dérivation ou différentiation
- La convergence du schéma numérique ainsi obtenu.

Son inconvénient est qu'on se limite à des géométries simples, et qu'il y a des difficultés de prise en compte des conditions aux limites.

Cette méthode consiste à approximer les dérivées partielles d'une équation au moyen des développements de Taylor et ceci se déduit directement de la définition de la dérivé

IV.1.2.Maillage :

On appelle maillage un ensemble de points du domaine de définition sur lequel on va appliquer la méthode des différences finies. Pour une application définie sur un segment de R, on ajoutera en général les deux extrémités du segment; pour un maillage en dimension supérieure, on sera amené à choisir, éventuellement, des points du contour du domaine de définition. On appelle le pas du maillage la distance entre deux points successifs du maillage voisins. En dimension 1 cela se simplifie en différence des abscisses. Ce pas n'est pas nécessairement constant, il peut même être judicieux de ne pas le fixer comme tel. Le pas (global) de l'approximation peut être défini comme le plus grand pas du maillage. Ainsi, si ce pas global tend vers 0, cela veut dire que la répartition des points du maillage dans l'intervalle choisi tend à se faire sur tout le domaine d'étude par densité.

f(*x;y*) une fonction continue et dérivable de classeC^{∞}, alors la dérivée partielle première de

f par rapport `a *x* est calculée par la formule:

$$f_x^{'}(x,y) = \lim_{h_x \to 0} \frac{f(x+h_x,y) - f(x,y)}{h_x}$$

Si $h_x \ll 1$,le développement de taylor au voisinage de 0 de $f(x+h_x,y)$donne :

$f(x+h_x,y) = f(x,y) + h_x \frac{\partial f}{\partial x} + \theta(h_x) \approx f(x,y) + h_x \frac{\partial f}{\partial x}$ avec une erreur de l'ordre deh_x.

Implique que : $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx \frac{f(x+h_x,y)-f(x,y)}{h_x}$ ……..(IV.1)

Ceci est appelé le *schéma avant*.

De la même manière, nous pouvons aussi donner le *schéma arrière* qui est de la forme:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h_x \to 0} \frac{f(x,y) - f(x-h_x,y)}{h_x}$$

Avec la formule de Taylor, ceci nous donne :

$f(x,y) = f(x-h_x,y) + h_x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \theta(h_x) \approx f(x-h_x,y) + h_x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ avec une erreur de h_x.

Implique que :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx \frac{f(x,y)-f(x-h_x,y)}{h_x} \text{.....(IV.2)}$$

La somme de ces deux schémas nous donne le *schéma centré* suivant:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx \frac{f(x+h_x,y)-f(x-h_x,y)}{2h_x} \text{.....(IV.3)}$$

En résumé, on a les trois approximations suivantes pour la dérivée partielle première de *f*(*x*;*y*) par rapport à *x* avec la formule de Taylor:

$$f_x'(x,y) = \lim_{h_x \to 0} \frac{f(x+h_x,y) - f(x,y)}{h_x} \approx \begin{cases} \dfrac{f(x+h_x,y) - f(x,y)}{h_x} & schéma\ avant \\ \dfrac{f(x,y) - f(x-h_x,y)}{h_x} & schéma\ arriére \\ \dfrac{f(x+h_x,y) - f(x-h_x,y)}{2h_x} & schéma\ centré \end{cases}$$

La dérivée seconde f_x''de $f(x,y)$sera alors de la forme :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{\frac{f(x_{i+1},y_j)-f(x_i,y_j)}{h_x} - \frac{f(x_i,y_j)-f(x_{i-1},y_j)}{h_x}}{h_x} =$$

$$\frac{f(x_{i+1},y_j)-2f(x_i,y_j)+f(x_{i-1},y_j)}{{h_x}^2} \text{.....(IV.4)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f(x_i,y_{j+1})-2f(x_i,y_j)+f(x_i,y_{j-1})}{{h_y}^2} \text{.....(IV.5)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{f(x_{i+1},y_{j+1}) - f(x_{i+1},y_{j-1}) - f(x_{i-1},y_{j+1}) + f(x_{i-1},y_{j-1})}{4h_x h_y} \quad \text{(IV.6)}$$

Nous utiliserons tour à tour ces égalités dans la suite pour approximer les dérivées partielles.

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{f(x_{i+2},y_j) - 2f(x_{i+1},y_j) + 2f(x_{i-1},y_j) + f(x_{i-2},y_j)}{2{h_x}^3} \quad \text{(IV.7)}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{f(x_i,y_{j+2}) - 2f(x_i,y_{j+1}) + 2f(x_i,y_{j-1}) + f(x_i,y_{j-2})}{2{h_y}^3} \quad \text{(IV.8)}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = \frac{f(x_{i+2},y_j) - 4f(x_{i+1},y_j) + 6f(x_i,y_j) - 4f(x_{i-1},y_j) + f(x_{i-2},y_j)}{{h_x}^4} \quad \text{(IV.9)}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = \frac{f(x_i,y_{j+2}) - 4f(x_i,y_{j+1}) + 6f(x_i,y_j) - 4f(x_i,y_{j-1}) + f(x_i,y_{j-2})}{{h_y}^2} \quad \text{(IV.10)}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} =$$

$$\left(\frac{1}{{h_x}^2 {h_y}^2}\right) \cdot \left(4f(x_i,y_j) - 2\left(f(x_{i+1},y_j) + f(x_{i-1},y_j) + f(x_i,y_{j+1}) + f(x_i,y_{j-1})\right) + \right.$$

$$fxi+1,yj+1+fxi+1,yj-1+fxi-1,yj+1+fxi-1,yj-1 \quad \text{(IV.11)}$$

IV.2.Formulation des équations de base en différences finies :

Pour exprimer les dérivés de $w(x,y)$en différences finies, on doit poser $w(x_i,y_j) = w_{m,n}$ (comme notation indicielle). Où $h_x = x_{m+1} - x_m = x_m - x_{m-1}$

Pour une fonction w(x, y), la première dérivée par rapport à x ou y peut être aussi exprimée dans cette centrale sous forme de différence. Se référant à la figure IV.1

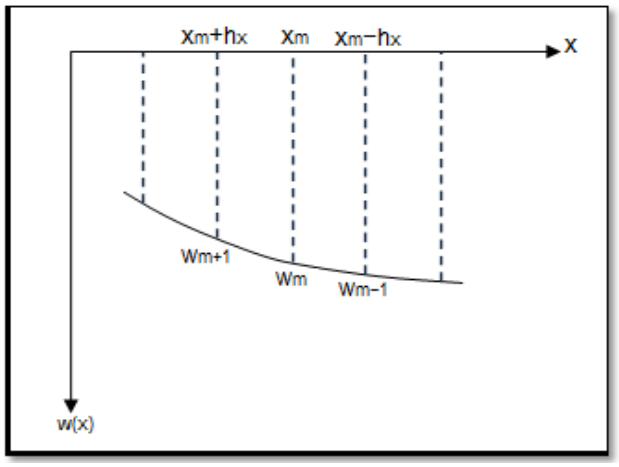


FIG IV.1

On a chaque point m,n dans la différence est reliée au plus des points illustrer dans la figure ci-dessous :

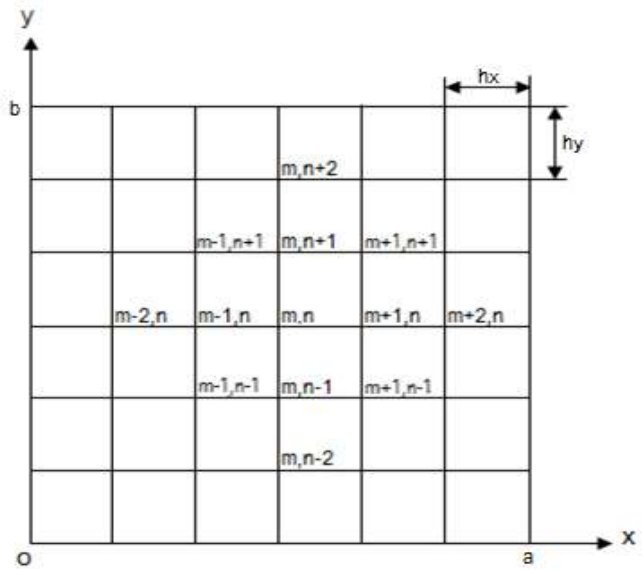


FIG.IV.2

On appelle le point m, n le centre de différence.

Ces expressions sont données comme suit:

$$\frac{\partial w_{m,n}}{\partial x} = \frac{1}{2h_x}\left(w_{m+1,n} - w_{m-1,n}\right)$$

$$\frac{\partial w_{m,n}}{\partial y} = \frac{1}{2h_y}\left(w_{m,n+1} - w_{m,n-1}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w_{m,n}}{\partial x^2} = \frac{w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}}{{h_x}^2}$$

$$\frac{\partial^2 w_{m,n}}{\partial y^2} = \frac{w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1}}{{h_y}^2}$$

$$\frac{\partial^2 w_{m,n}}{\partial x \partial y} = \frac{w_{m+1,n+1} - w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n+1} + w_{m-1,n-1}}{4{h_x}^2}$$

$$\frac{\partial^4 w_{m,n}}{\partial x^4} = \frac{w_{m+2,n} - 4w_{m+1,n} + 6w_{m,n} - 4w_{m-1,n} + w_{m-2,n}}{{h_x}^4}$$

$$\frac{\partial^4 w_{m,n}}{\partial y^4} = \frac{w_{m,n+2} - 4w_{m,n+1} + 6w_{m,n} - 4w_{m,n-1} + w_{m,n-2}}{{h_y}^4}$$

$$\frac{\partial^4 w_{m,n}}{\partial x^2 \partial y^2} = \left(\frac{1}{{h_x}^2 {h_y}^2}\right) \cdot \left(4w_{m,n} - 2\left(w_{m+1,n} + w_{m-1,n} + w_{m,n+1} + w_{m,n-1}\right) + w_{m+1,n+1} + w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n+1} + w_{m-1,n-1}\right)$$

Maintenant, nous pouvons utiliser les formulaires des différences centrales pour exprimer la base de l'équation de Lagrange discutée dans le chapitre précédent. Pour maille carrée $h = h_x = h_y$.

L'équation qui régit au point de pivotement (m, n) exprimé sous forme de différence finie est :

$$(q)_{m,n} = \frac{D}{h^4}(20w_{m,n} - 8\left(w_{m+1,n} + w_{m-1,n} + w_{m,n+1} + w_{m,n-1}\right) + 2\left(w_{m+1,n+1} + w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n-1} + w_{m-1,n-1} + w_{m+2,n} + w_{m-2,n} + w_{m,n+2} + w_{m,n-2}\right.$$ ………………………………..(IV.12)

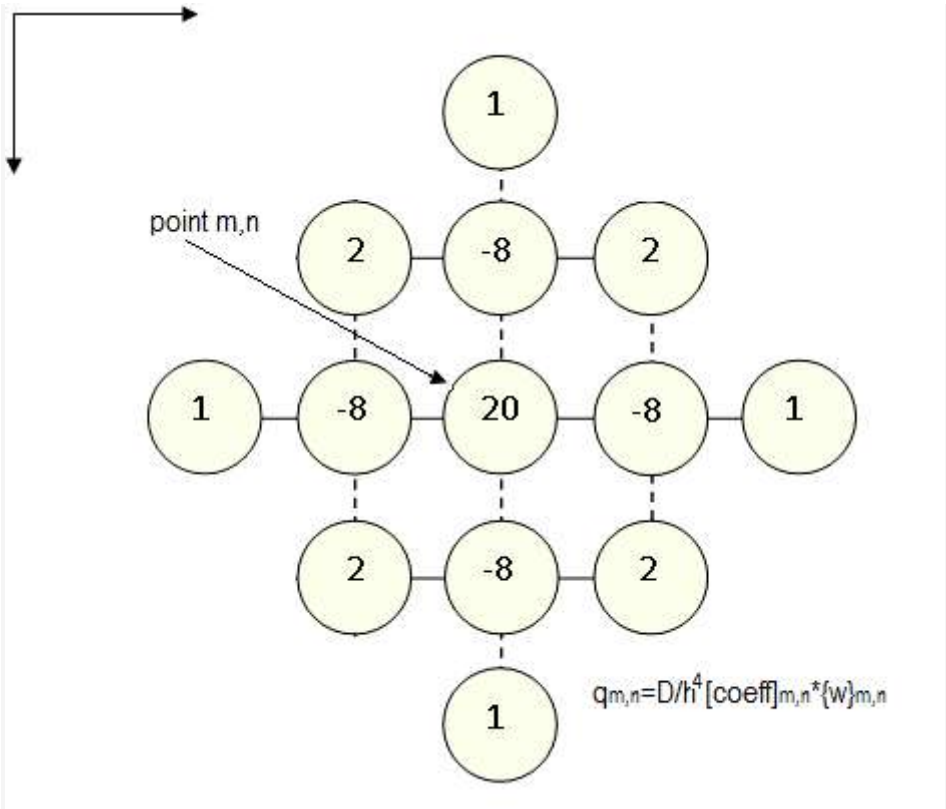


FIG IV.3

On a l'équation : $(q)_{m,n} = \frac{D}{h^4}[coefficient]_{m,n} \cdot \{w\}_{m,n}$

De même, on peut obtenir plusieurs équations de base se forme de différence finie :

$$(M_x)_{m,n} = -\frac{D}{h^2}\left(\left(w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}\right) + \nu\left(w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1}\right)\right)$$ .....(IV.13)

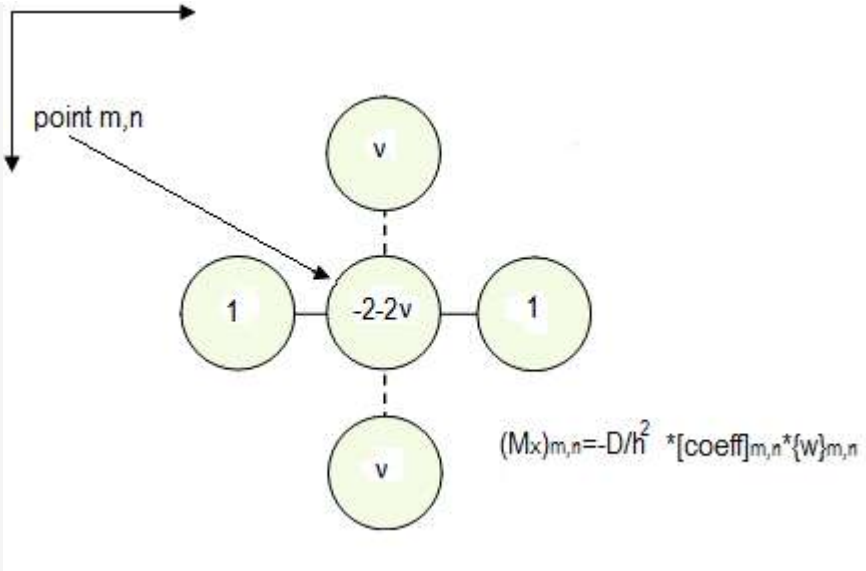


FIG IV.4

$$(M_y)_{m,n} = -\frac{D}{h^2}\left(\left(w_{m,n+1} - 2w_{m,n} + w_{m,n-1}\right) + \nu\left(w_{m+1,n} - 2w_{m,n} + w_{m-1,n}\right)\right)$$.....(IV.14)

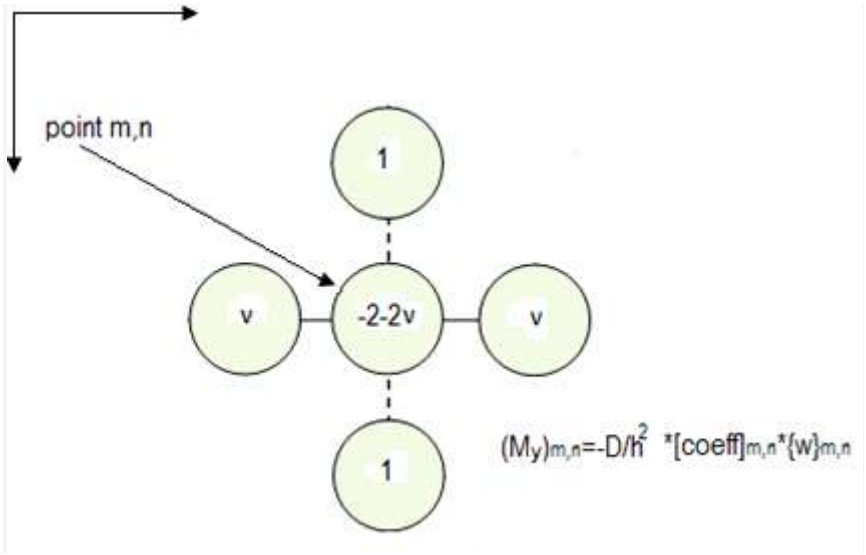


FIG IV.5

$$(M_{xy})_{m,n} = -\frac{D(1-\nu)}{4 \cdot h^2}\left(w_{m+1,n+1} - w_{m+1,n-1} - w_{m-1,n+1} + w_{m-1,n-1}\right)$$.....(IV.15)

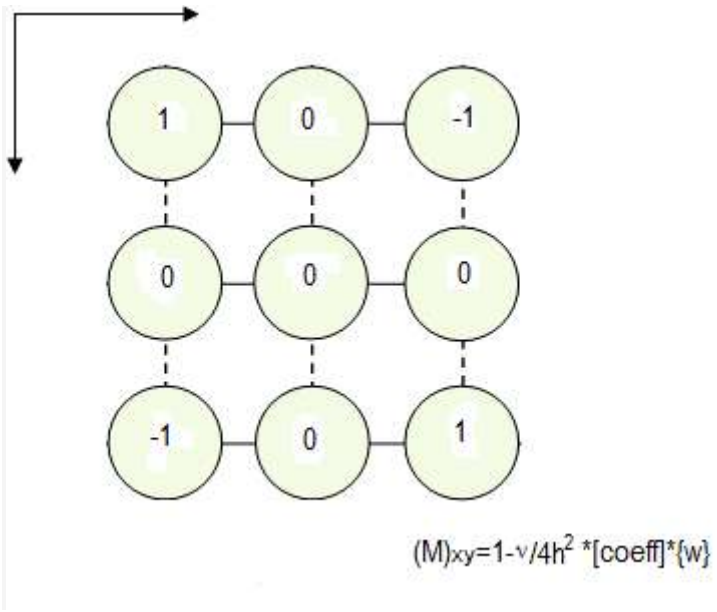


FIG IV.6

$$(T_x)_{m,n} = -\frac{D}{2h^3}\left((w_{m+2,n} - 2w_{m+1,n} + 2w_{m-1,n} - w_{m-2,n}) + (w_{m+1,n+1} - 2w_{m+1,n} + wm+1,n-1-wm-1,n+1+2wm-1,n-wm-1,n-1\right)$$ ……..(IV.17)

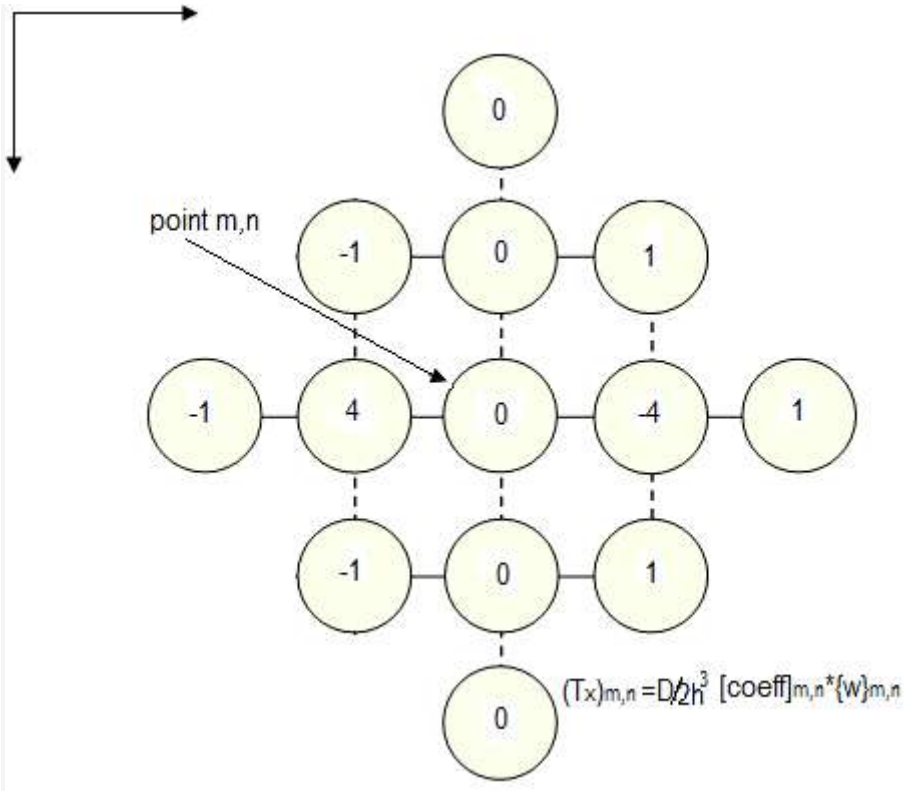


FIG IV.7

$$(T_y)_{m,n} = -\frac{D}{2h^3}\left((w_{m+1,n+1} - w_{m+1,n-1} - 2w_{m,n+1} - w_{m-1,n+1} + 2w_{m,n-1} - w_{m-1,n-1}) + wm,n+2-2wm,n+1+2wm,n-1-wm,n-2\right)$$ ……..(IV.18)

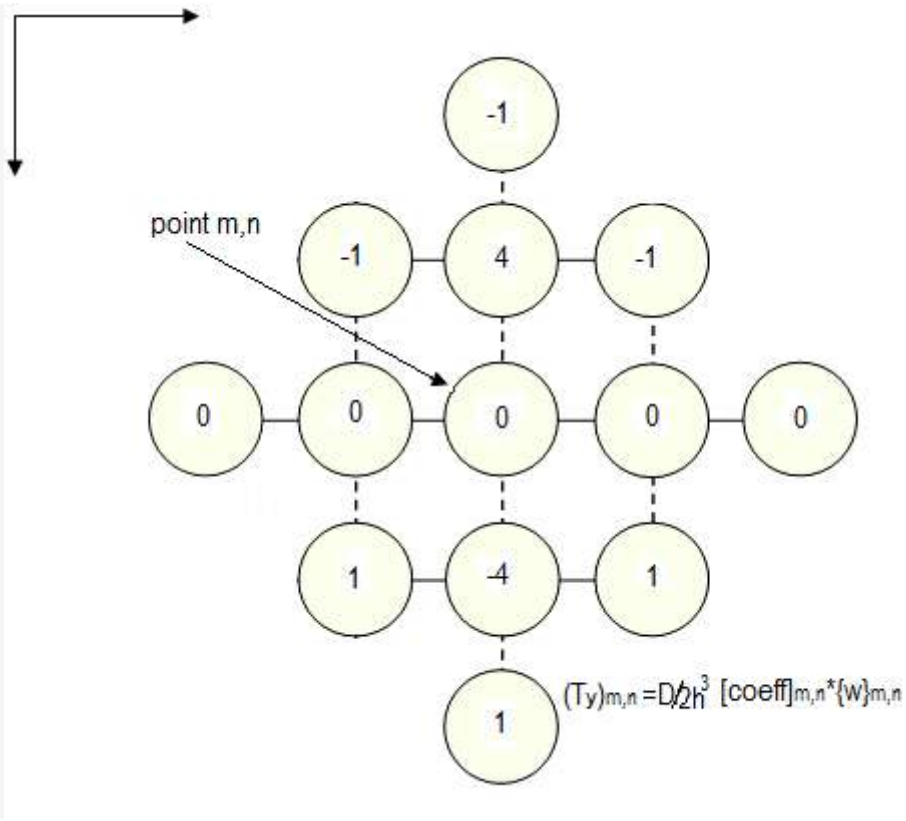


FIG IV.8

IV.3.Les conditions aux limites :

Les conditions aux limites que nous étudions sont:

- **Bord simplement appuyée :**

Pour : $x = 0, a$, on a $w = 0 \;\; et \;\; M_x = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0$

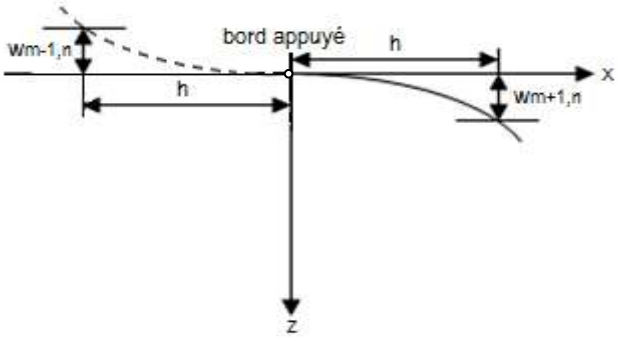


FIG.IV.9

Pour : $y = 0,\ b$, on a $w = 0\ et\ M_y = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0$

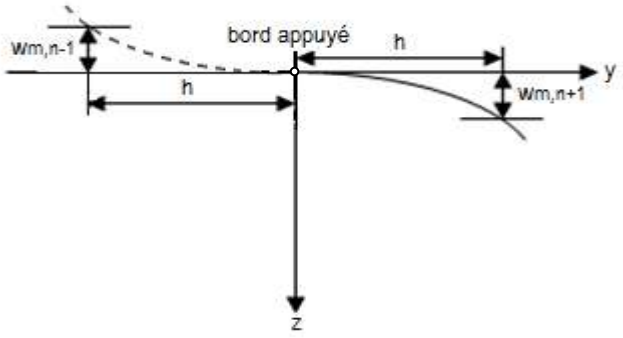


FIG.IV.10

- **Bord encastrée :**

Pour : $x = 0,\ a$, on a $w = 0\ et\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0$

C'est-à-dire on a :

$$\frac{\partial w_{m,n}}{\partial x} = \frac{1}{2h_x}\left(w_{m+1,n} - w_{m-1,n}\right) = 0 \leftrightarrow w_{m+1,n} = w_{m-1,n}$$

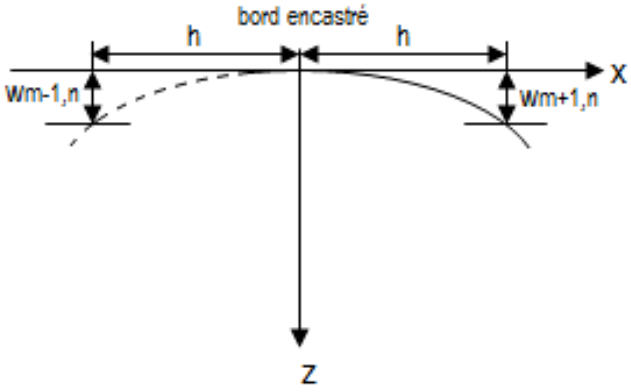


FIG.IV.11

Pour : $y = 0,\ b$, on a $w = 0\ et\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial w_{m,n}}{\partial y} = \frac{1}{2h_y}\left(w_{m,n+1} - w_{m,n-1}\right) = 0 \leftrightarrow w_{m,n+1} = w_{m,n-1}$$

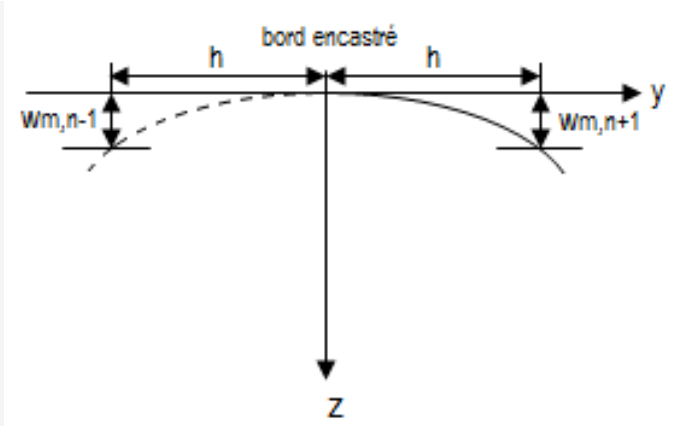


FIG.IV.12

- **Bord libre :**

Pour : $x = 0,\ a$, on a $M_x = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \ \ et \ \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + T_x = 0$

Pour : $y = 0,\ b$, on a $M_y = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \ \ et \ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + T_y = 0$

Où :

M_x,M_y, M_{xy}: le moment résultant (Fig.13).

R_x, R_y: La résultante des forces (Fig.13).

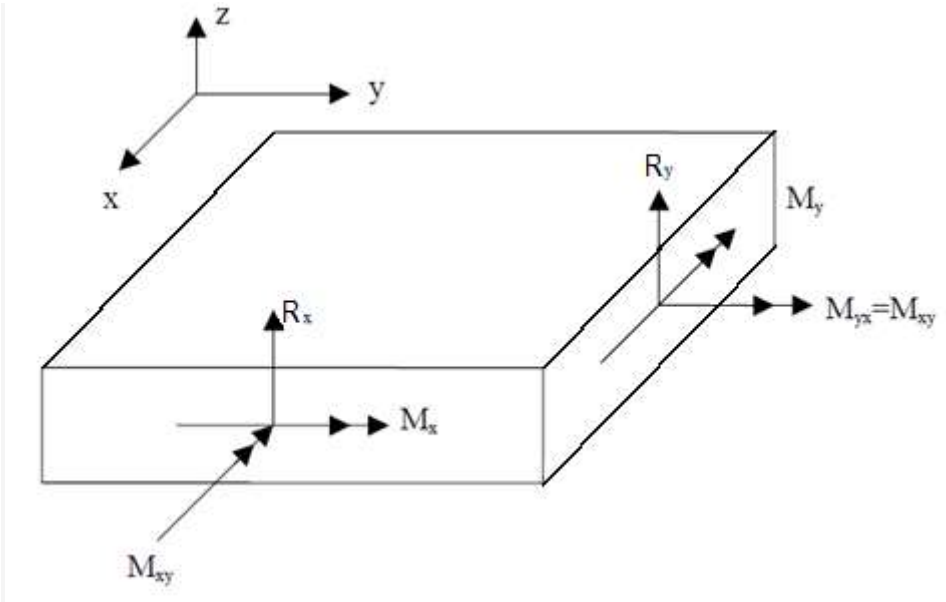


FIG.IV.13 : différentes sollicitation dans un bord libre.

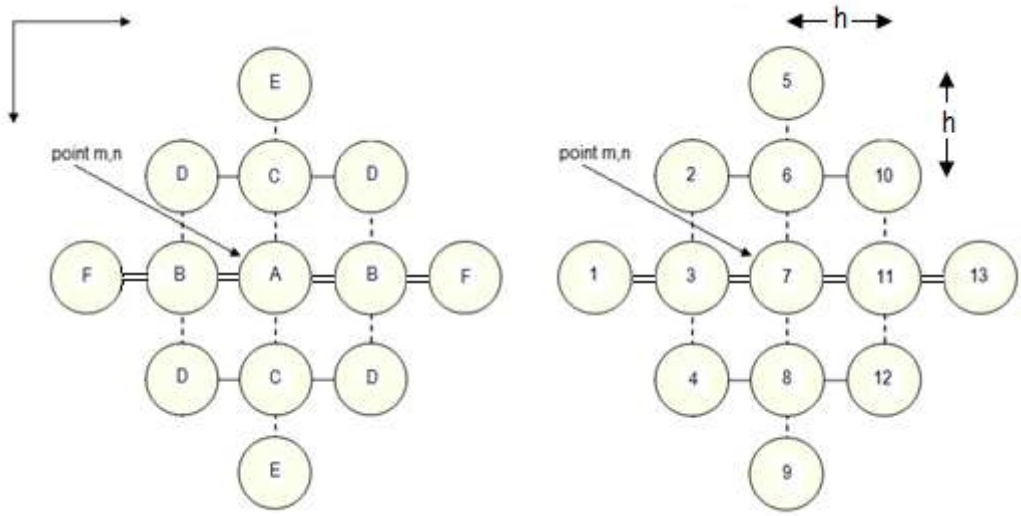


FIG.IV.14 : exemple de numérotation d'un bord libre.

Coefficients A, B, ... sont définis après l'introduction des conditions aux limites et le traitement des points fictif, Le nœud m, n représenté par le numéros7.
L'équation aux différences finies appliqués au point 7 est :

$$\frac{D}{h^4}\,[F\ D\ B\ D\ E\ C\ A\ C\ E\ D\ B\ D\ F]\cdot\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}, w_{11}, w_{12}, w_{13}\}^T = q_7$$

Pour le nœud m, n dans la Figure. IV.14 (C'est-7), nous donner à ses expressions de différence :

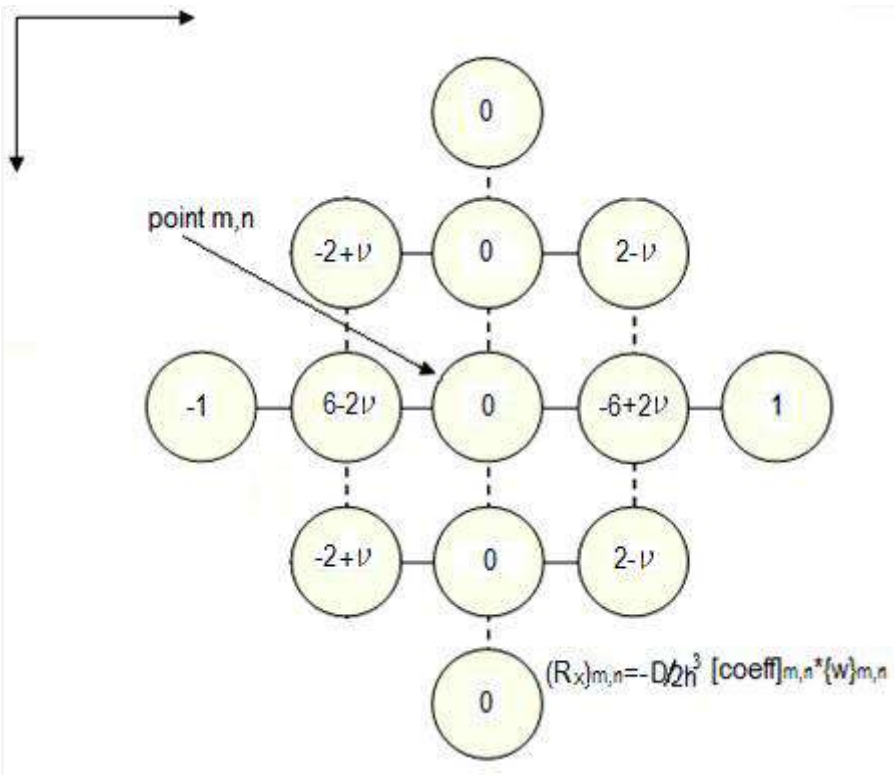


FIG. IV.15

$$(R_y)_{m,n} = -\frac{D}{2h^3}\left(w_{m,n+2} - (2-\nu)w_{m+1,n-1} + (6-2\nu)w_{m,n-1} - (2-\nu)w_{m-1,n-1} + 2-\nu wm+1,n+1-6-2\nu wm,n+1+2-\nu wm-1,n+1-wm,n-2\right)$$ .....(IV.19)

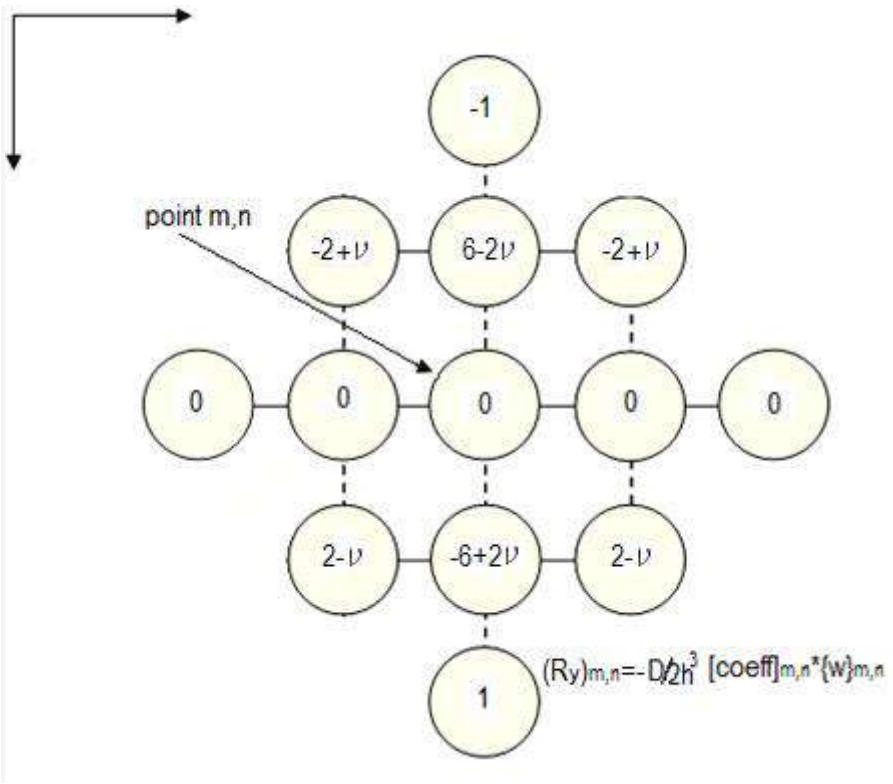


FIG. IV.16

$$(R_y)_7 = -\frac{D}{2h^3}(w_5 - (2-\nu)w_2 + (6-2\nu)w_6 - (2-\nu)w_{10} + (2-\nu)w_4 - (6-2\nu)w_8 + (2-\nu)w_{12} + w_9)$$

Tell que :

$$R_x = \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + T_x \text{ et } R_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + T_y$$

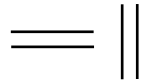
IV.4. Le traitement des points fictifs:

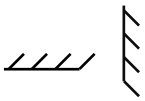
L'équation de différences finies peut être appliquée à un nœud ou un nœud intérieur qui se trouve sur ou à proximité de la limite. Lorsqu'il est appliqué à un nœud intérieur, les coefficients sont présentés dans FIG IV.3

Quand appliqué à un nœud d'être sur ou à proximité des limites, les coefficients doivent être réécrits pour satisfaire les conditions aux limites présentes dans la FIG.IV.9 et FIG.IV.10 dans un bord appuyé et FIG.IV.11 et FIG.IV.12 dans un bord encastré.

Nous ajoutons des nœuds fictifs (4, 8, 12,9) dans la Figure IV.14 et ensuite appliquer les formes de différences finies des conditions aux limites pour éliminer la déviation des nœuds fictifs, on peut éliminer les quatre nœuds fictifs avec les quatre équations précédents.

Nous avons désigné par :

 : Les bords libres.

 : Les bords appuyés.

 : Les bords encastrés.

IV.5. Applications de la méthode des différences finies sur les plaques :

IV.5.1.Plaque appuyées sur quatre cotes :

On a une plaque carrée appuyée sur ces quatre bords et soumise à une densité de charge surfacique uniformément répartie q .

On fait une numérotation de manière symétrique c'est à dire les points de même déplacement est de même numéros.

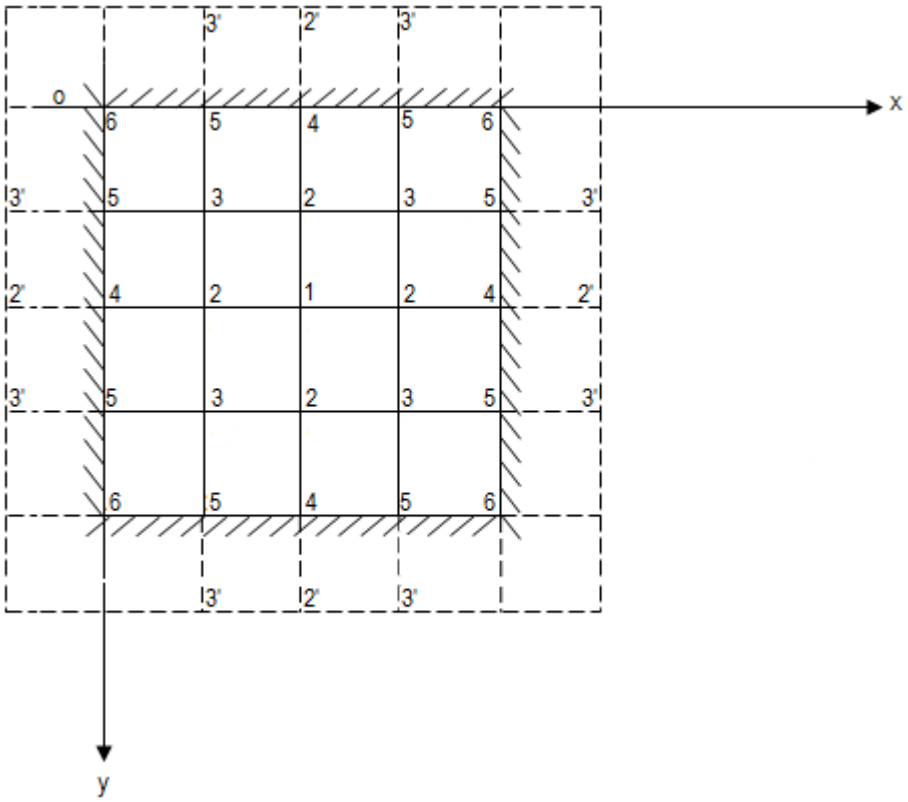


FIG. IV.17

❖ **Introduction des conditions aux limites et traitement des points fictifs :**

Dans les quatre bords appuyées on a :$w = 0$ donc $w_4, w_5, w_6 = 0$

$$w_2 = -w_{2'} \quad et \quad w_3 = -w_{3'}$$

On applique l'équation de différence finie de la charge pour chaque point et on résoudre le système d'équation suivant :

$$[M]\{w\} = \{F\} \text{ ..... (IV.20)}$$

On a :

- la matrice M
- vecteur du déplacement $w = \frac{D}{h^4}\{w_1, w_2, w_3\}^T$
- vecteur du chargement $F = q \cdot \{1 \ 1 \ 1\}^T$ tell que $h = \frac{a}{4} \rightarrow \frac{h^4}{D} = \frac{a^4}{256D}$

On trouve à la main : $[M] = \frac{D}{h^4} \cdot \begin{bmatrix} 20 & -32 & 8 \\ -8 & 24 & -16 \\ 2 & -16 & 20 \end{bmatrix}$

$$\{w\} = [M^{-1}] \cdot \{F\}$$

$$w = \frac{qa^4}{D} \cdot \{0.00403; 0.00293; 0.00214\}$$

$$M_x = M_y = -\frac{D}{h^2}((2+2\nu)w_2 - (2+2\nu)w_1) = 0{,}044 \cdot qa^2$$

$$M_x^{exact} = 0{,}046 \cdot qa^2$$

On fait un exemple numérique avec une procédure automatique en matlab :

$$\frac{D}{h^4}[coefficients]\{w_1, w_2, \dots\dots\dots, w_{5\times5}\}^T = q\{1{,}1, \dots\dots\dots, 1\}^T$$

Le programme prend en compte une numérotation des nœuds intérieurs de manière ordonnée et ne prend pas la symétrie en considération.

Chaque fois on a calculé la matrice *M* on a observé une répétition des coefficients suivants :

A =20; B =-8; Cc =-8; Dd = 2; Ee = 1; F = 1; G =19; gg =19; Mm =18.

$$M =$$

18	-8	1	0	0	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-8	19	-8	1	0	2	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-8	19	-8	1	0	2	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	-8	19	-8	0	0	2	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	-8	18	0	0	0	2	-8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-8	2	0	0	0	19	-8	1	0	0	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-8	2	0	0	-8	20	-8	1	0	2	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	2	-8	2	0	1	-8	20	-8	1	0	2	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	2	-8	2	0	1	-8	20	-8	0	0	2	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	2	-8	0	0	1	-8	19	0	0	0	2	-8	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	-8	2	0	0	0	19	-8	1	0	0	-8	2	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	2	-8	2	0	0	-8	20	-8	1	0	2	-8	2	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	1	-8	20	-8	1	0	2	-8	2	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	1	-8	20	-8	0	0	2	-8	2	0	0	0	1
0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	0	0	1	-8	19	0	0	0	2	-8	0	0	0	0	1

0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-8	2	0	0	0	19	-8	1	0	0	-8	2	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	0	-8	20	-8	1	0	2	-8	2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	1	-8	20	-8	1	0	2	-8	2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	1	-8	20	-8	0	0	2	-8	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	0	0	1	-8	19	0	0	0	2	-8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-8	2	0	0	0	18	-8	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	0	-8	19	-8	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	1	-8	19	-8	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	1	-8	19	-8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-8	0	0	1	-8	18

$$w =$$

$$\begin{matrix}
-0.001137687325474 \\
-0.001905002715700 \\
-0.002177743780256 \\
-0.001920952431488 \\
-0.001154557517622 \\
-0.001905002715700 \\
-0.003208894485210 \\
-0.003680066734872 \\
-0.003248376020742 \\
-0.001948227348169 \\
-0.002177743780256 \\
-0.003680066734872 \\
-0.004235862314880 \\
-0.003757336407181 \\
-0.002268512036584 \\
-0.001920952431488 \\
-0.003248376020742 \\
-0.003757336407181 \\
-0.003374502113225 \\
-0.002090205510434 \\
-0.001154557517622 \\
-0.001948227348169 \\
-0.002268512036584 \\
-0.002090205510434 \\
-0.001399854269010
\end{matrix}$$

Le résultat du déplacement maximal :

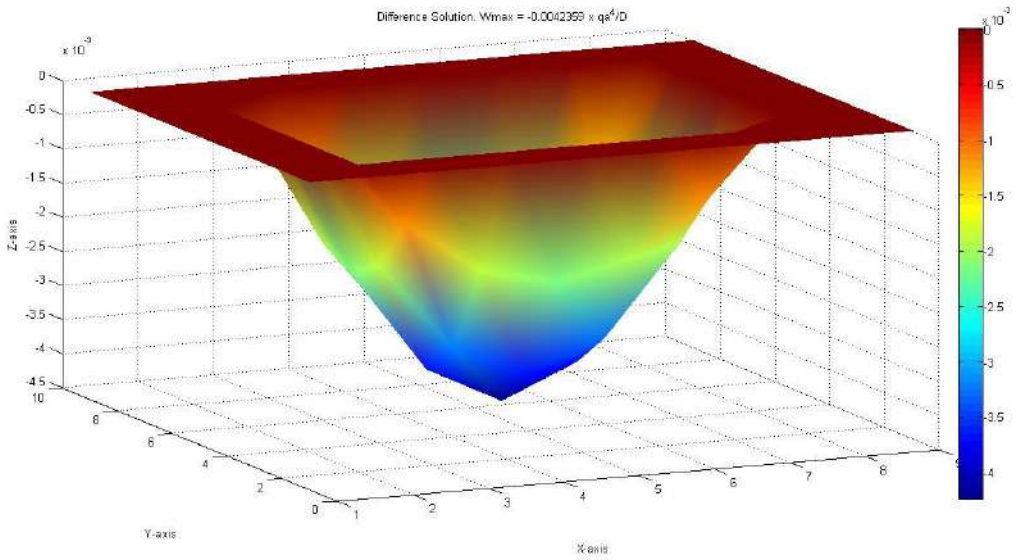


FIG. IV.18 : déplacement maximal d'une plaque appuyée.

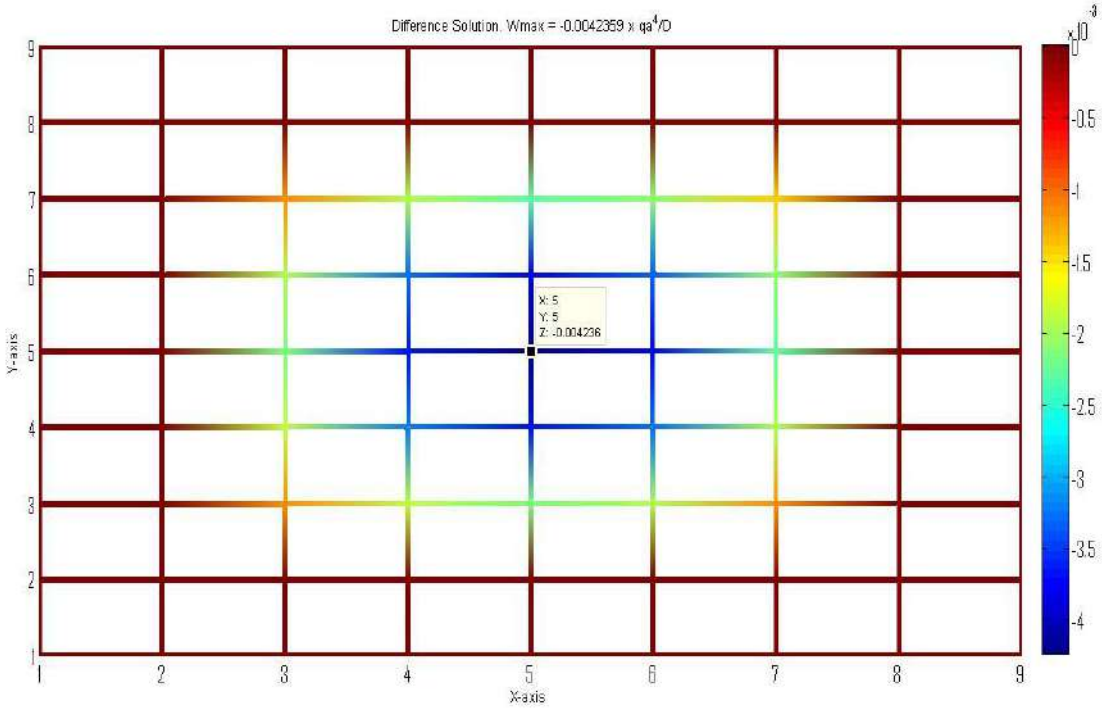


FIG. IV.19 : vue en plan du déplacement d'une plaque appuyée

Le résultant du moment fléchissant: pour ν=0,25

$$M_x = M_y = 0.04468 \cdot qa^2$$

Tableau. IV.1 : la variation du déplacement en fonction du maillage.

maillage	***Déplacement maximal***	***Moment maximal***	$err = \frac{w_{appro} - w_{exat}}{w_{exat}} \cdot 100$	$err = \frac{M_{appro} - M_{exat}}{M_{exat}} \cdot 100$
6 × 6	0,004236	0.04654	4,13%	1,17%
8 × 8	0,004194	0.04658	3,24%	1,26%
10 × 10	0 ,004159	0,04648	2,38%	1,04%
16 × 16	0 ,004107	0 ,04627	1,10%	0,59%
30 × 30	0,004076	0,04612	0,33%	0,26%
40 × 40	0,004070	0,04609	0,19%	0,2%
60 × 60	0,004066	0,04606	0,09%	0,13%

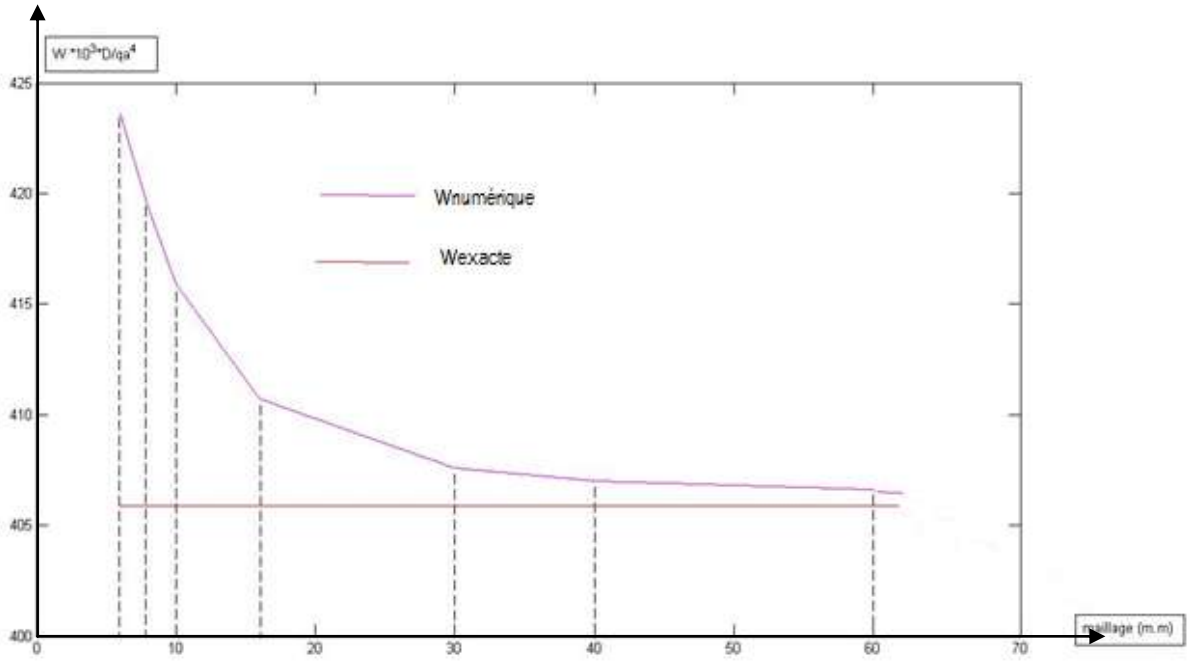


FIG. IV.20 : la variation du déplacement maximal en fonction du maillage

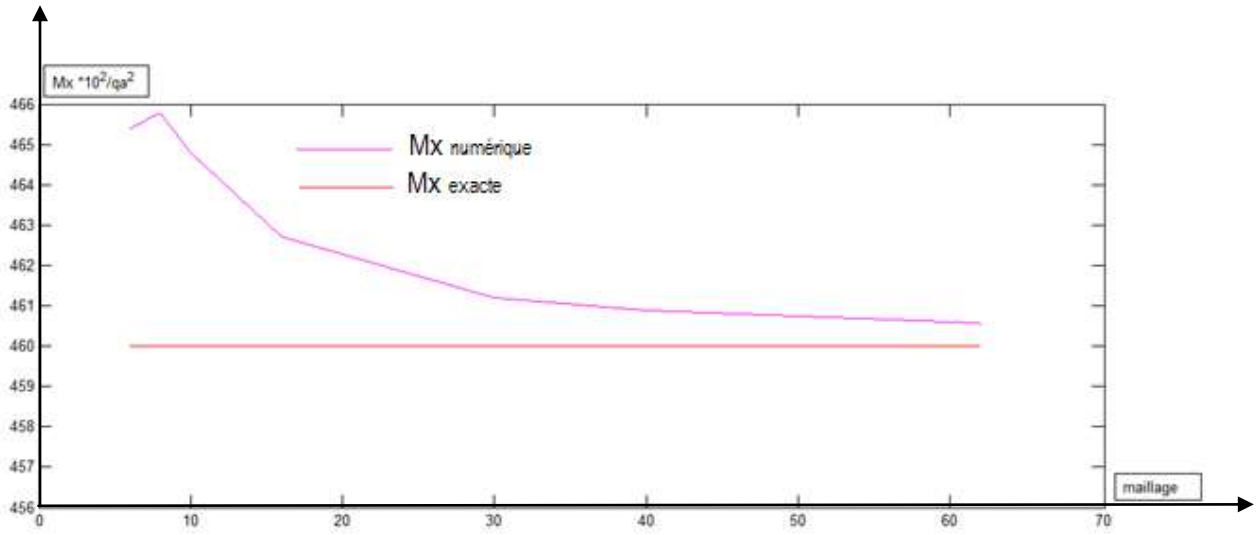


FIG. IV.21 : la variation du moment maximal en fonction du maillage

IV.5.2 .Application sur un panneau de dalle en béton armé appuyée sur ces cotes :

- **Calcul par la méthode de différences finies :**

Généralement en béton armé en prend $\nu = 0$ à l'état limite ultime et $\nu = 0{,}2$ à l'état limite de service.

$$M_x = \mu_x \cdot qa^2$$

Pour $\nu = 0$:

Tableau. IV.2 : la variation de μ_x en fonction des dimensions de la dalle

$\rho = \frac{a}{b}$	μ_x	$w_{max} \cdot \frac{D}{qa^4}$
0 .4	***0.1100***	***0.0117***
0.5	***0.0965***	***0.0101***
0.6	***0.0822***	***0.0087***
0.7	***0.0684***	***0.0073***
0.8	***0.0561***	***0.0060***
0.9	***0.0456***	***0.0050***
1	***0.0369***	***0.0040***

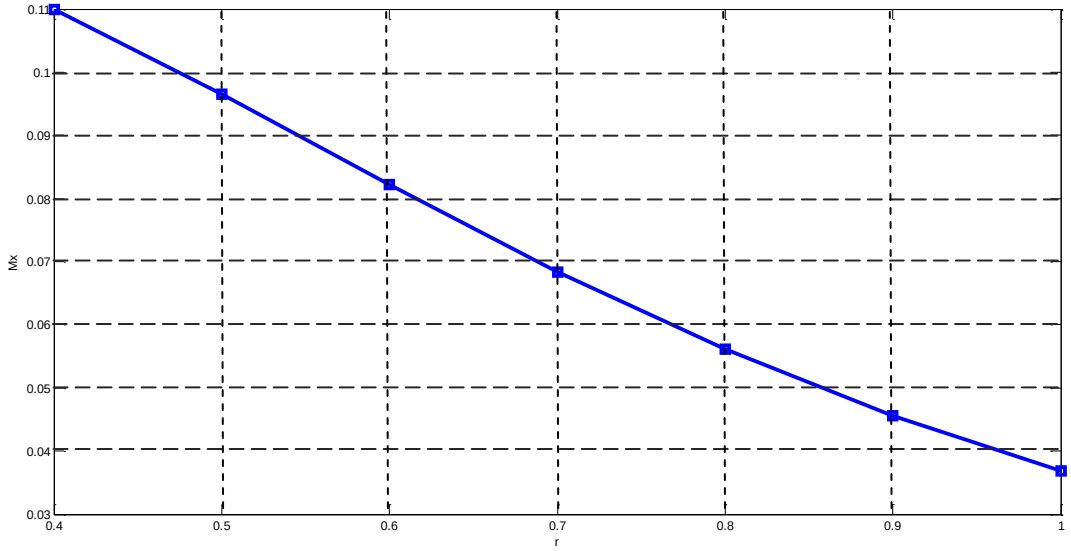


FIG. IV.22 : la variation de μ_x en fonction de ρ

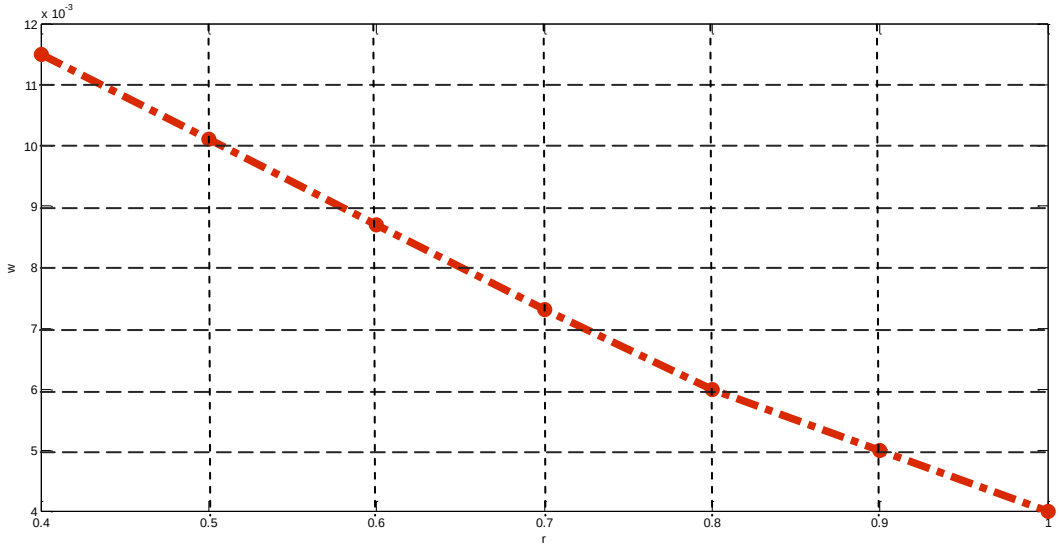


FIG. IV.23 : la variation de w en fonction de ρ

Pour $\nu = 0.2$:

Tableau. IV.3 : la variation de μ_x en fonction des dimensions de la dalle

$\rho = \frac{a}{b}$	μ_x	$w_{max} \cdot \frac{D}{qa^4}$
0 .4	***0.1320***	***0.0115***
0.5	***0.1158***	***0.0101***
0.6	***0.0986***	***0.0087***
0.7	***0.0821***	***0.0073***
0.8	***0.0674***	***0.0060***
0.9	***0.0548***	***0.0050***
1	***0.0442***	***0.0040***

Remarque : si on n'intéresse pas le module de rigidité à la flexion ***D*** on remarque que le déplacement n'a aucune relation avec le coefficient de poisson $\boldsymbol{\nu}$.

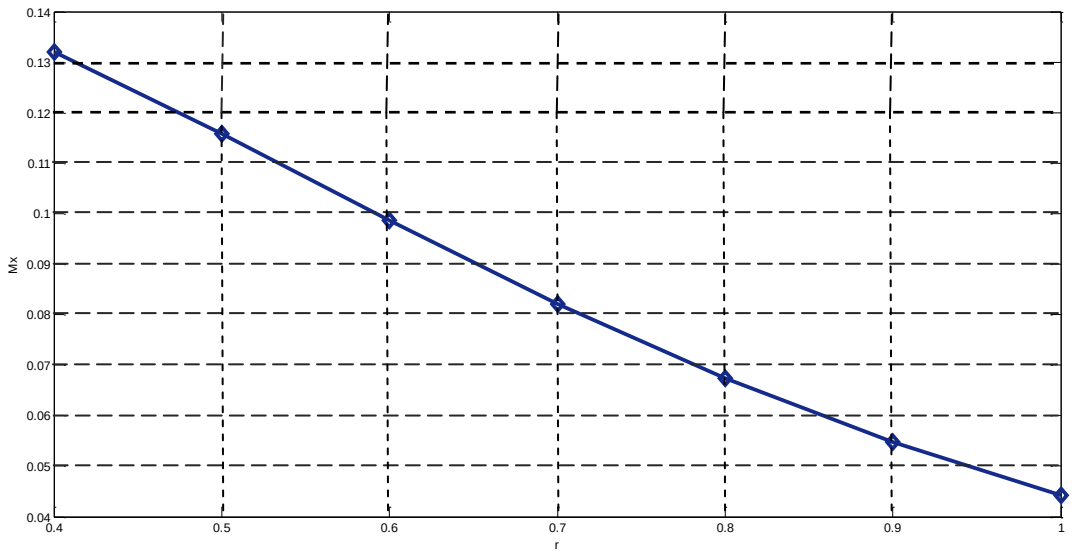


FIG. IV.24 : la variation de μ_x en fonction de ρ

- **Les résultats de la méthode forfaitaire :**

On fait la partie des dalles rectangulaire articulées sur leur contour chargée uniformément et travaillant suivant deux directions **[6]** :$\rho = [0.4; 1]$

$$M_x = \mu_x \cdot qa^2$$

Tableau IV.4 : la variation de μ_x à $\nu = 0\ et\ \nu = 0.2$:

$\boldsymbol{\rho = \frac{a}{b}}$	$\boldsymbol{\mu_x}$	
	$\boldsymbol{\nu = 0}$	$\boldsymbol{\nu = 0.2}$
0.4	***0.1101***	***0.1121***
0.5	***0.0966***	***0.1000***
0.6	***0.0822***	***0.0870***
0.7	***0.0684***	***0.0743***
0.8	***0.0561***	***0.0628***
0.9	***0.0456***	***0.0528***
1	***0.0368***	***0.0441***

Conclusion : par l'analyse des résultats de la méthode des différences finies et la méthode forfaitaire ; on constate que les valeurs de $\boldsymbol{\mu_x}$ sont presque les mêmes ça devient de dire que la méthode des différences finies est une méthode plus efficace pour le calcul de la flexion des dalles, donc on peut généraliser le travail pour différents matériaux ($\boldsymbol{\nu}$ quelconque).

Remarque : pour le calcul précédent soit par la méthode de différences finies ou bien le tableau de la méthode forfaitaire on a considéré que la petite dimension est a .

Tableau IV.5 : la variation de μ_x vis-à-vis le changement de ν.

$\rho = \frac{a}{b}$	μ_x					
	$\nu = 0$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.2$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.4$	$\nu = 0.5$
0.1	**0.1250**	**0.1375**	**0.1500**	**0.1625**	**0.1750**	**0.1875**
0.2	**0.1245**	**0.1370**	**0.1494**	**0.1619**	**0.1743**	**0.1868**
0.3	**0.1200**	**0.1320**	**0.1441**	**0.1561**	**0.1681**	**0.1801**
0.4	**0.1100**	**0.1210**	**0.1320**	**0.1430**	**0.1540**	**0.1650**
0.5	**0.0965**	**0.1062**	**0.1158**	**0.1255**	**0.1351**	**0.1448**
0.6	**0.0822**	**0.0903**	**0.0986**	**0.1067**	**0.1149**	**0.1231**
0.7	**0.0684**	**0.0752**	**0.0821**	**0.0889**	**0.0957**	**0.1025**
0.8	**0.0561**	**0.0617**	**0.0674**	**0.0729**	**0.0785**	**0.0841**
0.9	**0.0456**	**0.0502**	**0.0548**	**0.0593**	**0.0638**	**0.0684**
1	**0.0369**	**0.0405**	**0.0442**	**0.0479**	**0.0516**	**0.0553**

Tableau IV.6: la variation de μ_y vis-à-vis le changement de ν.

$\rho = \frac{a}{b}$	μ_y					
	$\nu = 0$	$\nu = 0.1$	$\nu = 0.2$	$\nu = 0.3$	$\nu = 0.4$	$\nu = 0.5$
0.1	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**	**0.0000**
0.2	**0.0004**	**0.0004**	**0.0005**	**0.0005**	**0.0006**	**0.0006**
0.3	**0.0036**	**0.0099**	**0.0043**	**0.0047**	**0.0050**	**0.0054**
0.4	**0.0099**	**0.0109**	**0.0119**	**0.0129**	**0.0139**	**0.0149**
0.5	**0.0174**	**0.0191**	**0.0209**	**0.0226**	**0.0244**	**0.0261**
0.6	**0.0242**	**0.0266**	**0.0291**	**0.0315**	**0.0339**	**0.0363**
0.7	**0.0296**	**0.0326**	**0.0356**	**0.0385**	**0.0415**	**0.0445**
0.8	**0.0335**	**0.0368**	**0.0401**	**0.0435**	**0.0468**	**0.0502**
0.9	**0.0358**	**0.0393**	**0.0429**	**0.0465**	**0.0501**	**0.0537**
1	**0.0369**	**0.0405**	**0.0442**	**0.0479**	**0.0516**	**0.0553**

variation de μ_x en fonction de ρ avec un changement de coefficient de poisson au centre de la plaque .

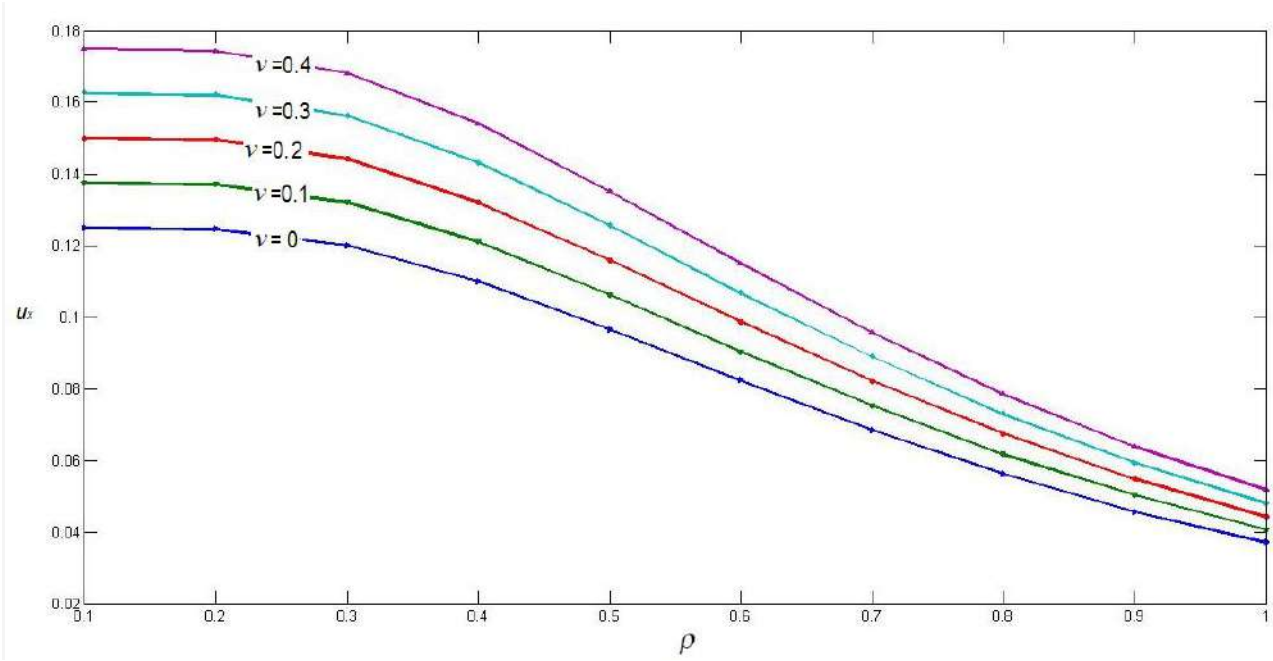


FIG.IV.25 : variation de μ_x avec un changement de coefficient de poisson

Conclusion : on constate que le moment fléchissant augmente dans le sens de la petite dimension.

IV.5.3.Plaque encastrés sur ces quatre bords :

Dans cette partie, nous allons donner un cas pour montrer comment utiliser la méthode des différences finies pour trouver le déviation maximale d'une plaque uniformément chargée carré avec des conditions aux limites encastrée de ces quatre cotés .
Nous sélectionnons le maillage même différence finie (h = a / 4).

Dans ce cas on fait le traitement de la symétrie et l'introduction des conditions aux limites et les points fictifs avant l'application des équations de différences finies.

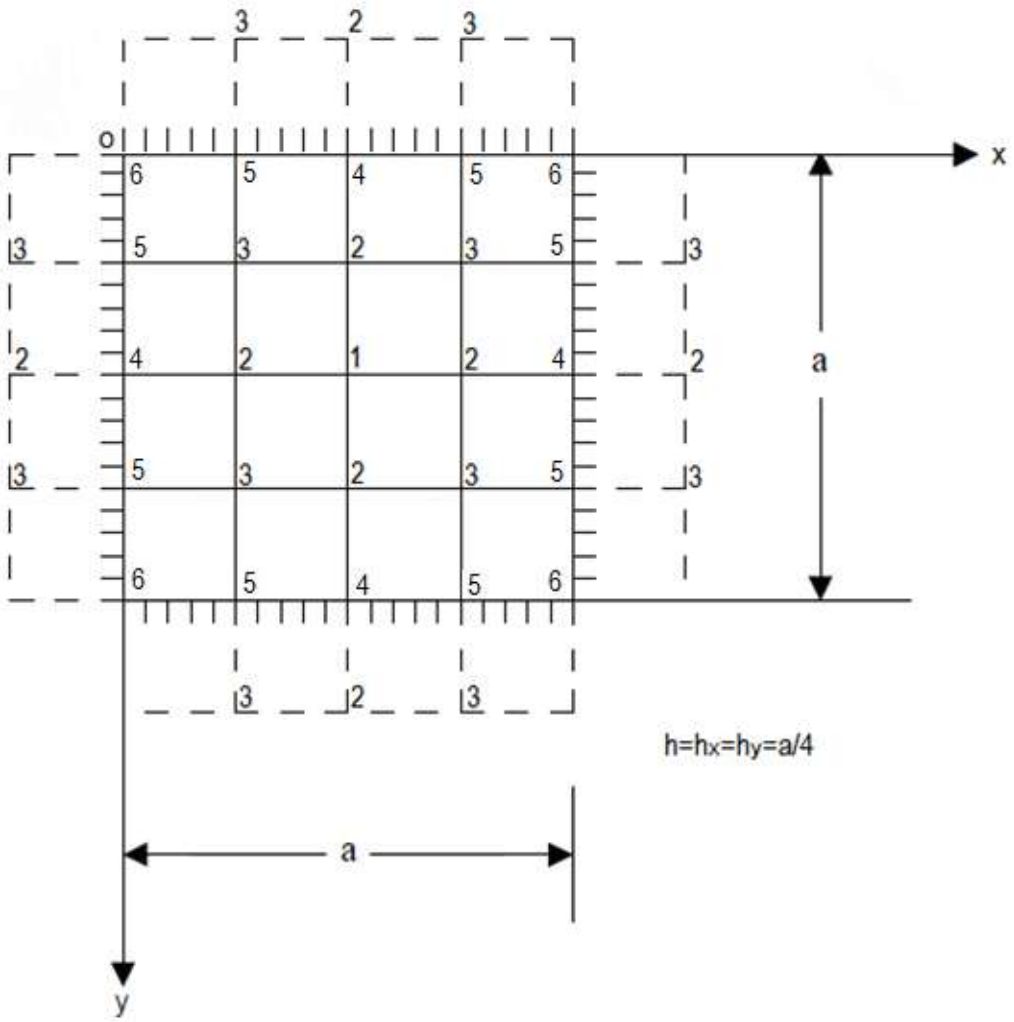


FIG IV.26 : maillage et numérotation de plaque.

On obtient :

Au point 1 : $20w_1 - 32w_2 + 8w_3 = \frac{qa^4}{256D}$

Au point 2 : $-8w_1 + 26w_2 - 16w_3 = \frac{qa^4}{256D}$

Au point 3 : $2w_1 - 16w_2 + 24w_3 = \frac{qa^4}{256D}$

Les solutions de ces équations à la main donnent :

$$w_1 = 0.00180\frac{qa^4}{D}, \qquad w_2 = 0.00120\frac{qa^4}{D}, \qquad w_3 = 0.000820\frac{qa^4}{D}$$

Par l'équation de moment fléchissant en différences finies on trouve :

$$(M_x)_1 = (M_y)_1 = -\frac{D}{h^2}((2+2v)w_2 - (2+2v)w_1) = 0.0192 \cdot qa^2$$

$$M_4 = -0{,}0192qa^2$$

$$M_5 = -0{,}0128qa^2$$

Si on compare le résultat de déplacement obtenu avec la solution exacte (par la méthode énergétique) **[7]**:

$w_{exat}^{max} = 0{,}00126\frac{qa^4}{D}$, on trouve que l'erreur $\approx 43\%$

En diminuant la largeur de maille h, et on suit la variation de w.

$$\frac{D}{h^4}[coefficients]\{w_1, w_2, \dots\dots\dots, w_{5\times5}\}^T = q\{1{,}1, \dots\dots\dots, 1\}^T$$

Les coefficients suivants :

A =20; B =-8; Cc =-8; Dd = 2; Ee = 1; F = 1; G =21; gg =21; Mm =22.

Exemple numérique: on fait un maillage (6*6):

$M =$

22	-8	1	0	0	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-8	21	-8	1	0	2	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-8	21	-8	1	0	2	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	-8	21	-8	0	0	2	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	-8	22	0	0	0	2	-8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-8	2	0	0	0	21	-8	1	0	0	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-8	2	0	0	-8	20	-8	1	0	2	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	2	-8	2	0	1	-8	20	-8	1	0	2	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	2	-8	2	0	1	-8	20	-8	0	0	2	-8	2	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	2	-8	0	0	1	-8	21	0	0	0	2	-8	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	-8	2	0	0	0	21	-8	1	0	0	-8	2	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	2	-8	2	0	0	-8	20	-8	1	0	2	-8	2	0	0	0	1	0	0

0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	1	-8	20	-8	1	0	2	-8	2	0	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	1	-8	20	-8	0	0	2	-8	2	0	0	0	1	0
0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	0	0	1	-8	21	0	0	0	2	-8	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-8	2	0	0	0	21	-8	1	0	0	-8	2	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	0	-8	20	-8	1	0	2	-8	2	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	1	-8	20	-8	1	0	2	-8	2	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	1	-8	20	-8	0	0	2	-8	2
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	0	0	1	-8	21	0	0	0	2	-8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-8	2	0	0	0	22	-8	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	0	-8	21	-8	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	1	-8	21	-8	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	-8	2	0	1	-8	21	-8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	-8	0	0	1	-8	22

$$W =$$

$$-0.000262100830191$$

$$-0.000524150884420$$

$$-0.000622729740984$$

$$-0.000524973272959$$

$$-0.000262780531200$$

$$-0.000524150884420$$

$$-0.001073170671406$$

$$-0.001285057088104$$

$$-0.001076308414155$$

$$-0.000527121004768$$

$$-0.000622729740984$$

$$-0.001285057088104$$

$$-0.001543890808952$$

$$-0.001293208626670$$

$$-0.000631840904401$$

$$-0.000524973272959$$

$$-0.001076308414155$$

$$-0.001293208626670$$

-0.001092661952713

-0.000548081748827

-0.000262780531200

-0.000527121004768

-0.000631840904401

-0.000548081748827

-0.000305624914076

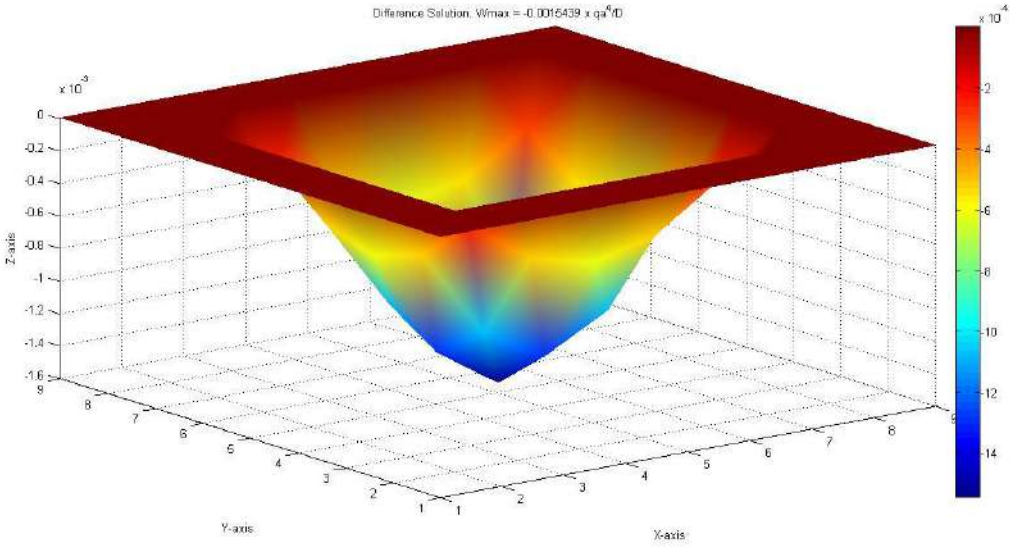


FIG. IV.27 : déplacement maximal d'une plaque encastrée.

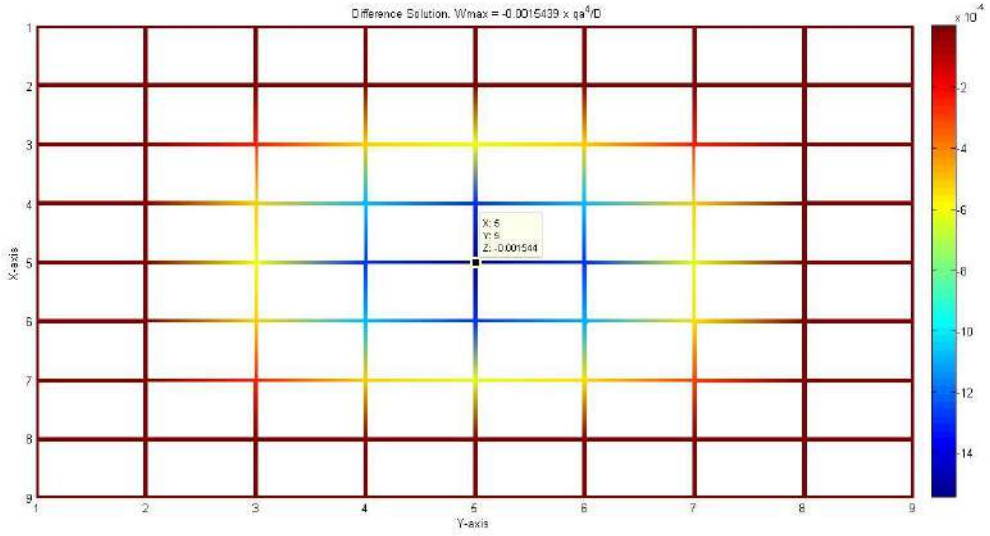


FIG. IV.28 : vue en plan du déplacement d'une plaque encastrée.

$Mx =$

0	-0.0094	-0.0189	-0.0224	-0.0189	-0.0095	0
-0.0024	0.0000	0.0006	0.0003	0.0005	-0.0001	-0.0024
-0.0047	0.0057	0.0152	0.0183	0.0151	0.0055	-0.0047
-0.0056	0.0067	0.0188	0.0229	0.0187	0.0065	-0.0057
-0.0047	0.0057	0.0153	0.0185	0.0155	0.0057	-0.0049
-0.0024	0.0000	0.0006	0.0006	0.0016	0.0028	-0.0028
0	-0.0095	-0.0190	-0.0227	-0.0197	-0.0110	0

$M_y =$

0	-0.0024	-0.0047	-0.0056	-0.0047	-0.0024	0
-0.0094	0.0000	0.0057	0.0067	0.0057	0.0000	-0.0095
-0.0189	0.0006	0.0152	0.0188	0.0153	0.0006	-0.0190
-0.0224	0.0003	0.0183	0.0229	0.0185	0.0006	-0.0227
-0.0189	0.0005	0.0151	0.0187	0.0155	0.0016	-0.0197
-0.009	-0.0001	0.0055	0.0065	0.0057	0.0028	-0.0110
0	-0.0024	-0.0047	-0.0057	-0.0049	-0.0028	0

Tableau IV.7:variation de w en fonction du maillage

Nombre des mailles	$w_{max} = \cdots * \frac{qa^4}{D}$	**Erreur=**$\frac{w_{appr} - w_{exacte}}{w_{exacte}} * 100$
6×6	0,00154	22,22%
8×8	0,00143	13,49%
10×10	0,00137	8,73%
14×14	0,00132	4,76%
22×22	0,00129	2,38%
30×30	0,00128	1,59%
38×38	0,00127	0,79%

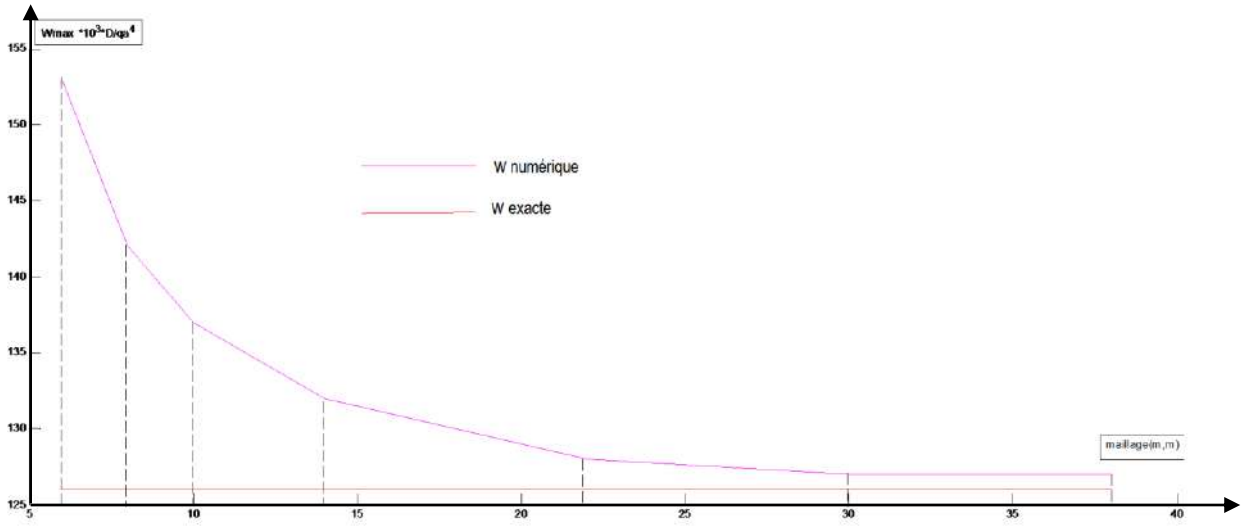


FIG IV.29 : variation de w en fonction du maillage

$$M_x = \mu_x \cdot qa^2$$

$$M_y = \mu_y \cdot qa^2$$

Donc on peut généraliser le travail pour différents matériaux (***ν*** quelconque).

Tableau IV.8 : la variation de μ_x et μ_y pour **ν=0**

$\rho = \frac{a}{b}$	***μ au centre de la plaque***		***μ au bord de la plaque***	
	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y
0,1	**0,0440**	**0,0000**	**-0,0000**	**-0,0000**
0,2	**0,0422**	**0,0000**	**-0,0000**	**-0,0000**
0,3	**0,0421**	**0,0000**	**-0,0000**	**-0,0000**
0,4	**0.0418**	**0.0010**	**-0,0000**	**-0,0000**
0,5	**0,0401**	**0,0038**	**-0,0000**	**-0,0000**
0 ,6	**0,0367**	**0,0076**	**-0,0000**	**-0,0000**
0,7	**0,0321**	**0,0114**	**-0,0000**	**-0,0000**
0,8	**0,0271**	**0 ,0144**	**-0,0000**	**-0,0000**
0,9	**0,0221**	**0,0165**	**-0,0000**	**-0,0000**
1	**0,0176**	**0,0176**	**-0,0000**	**-0,0000**

Tableau IV.9 : la variation de μ_x et μ_y pour **ν=0,1**

$\rho = \frac{a}{b}$	***μ au centre de la plaque***		***μ au bord de la plaque***	
	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y
0,1	**0,0484**	**0,0000**	**-0,0040**	**-0,0093**
0,2	**0,0465**	**0,0000**	**-0,0115**	**-0,0127**
0,3	**0,0463**	**0,0000**	**-0,0062**	**-0,0419**
0,4	**0.0460**	**0.0011**	**-0,0069**	**-0.0863**
0,5	**0,0441**	**0,0042**	**-0,0002**	**-0,2297**
0 ,6	**0,0404**	**0,0084**	**-0,0010**	**-0,2441**
0 0,7	**0,0354**	**0,0125**	**-0,0020**	**-0,1747**
0,8	**0,0298**	**0 ,0159**	**-0,0025**	**-0,0873**
0,9	**0,0244**	**0,0182**	**-0,0026**	**-0,0231**
1	**0,0194**	**0,0194**	**-0,0026**	**-0,0026**

Tableau IV.10 : la variation de μ_x et μ_y pour **ν=0,2**

$\rho = \frac{a}{b}$	***μ au centre de la plaque***		***μ au bord de la plaque***	
	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y
0,1	**0,0528**	**0,0000**	**-0,0080**	**-0,0185**
0,2	**0,0507**	**0,0000**	**-0,0229**	**-0,0255**
0,3	**0,0505**	**0,0000**	**-0,0123**	**-0,0838**
0,4	**0.0501**	**0.0012**	**-0,0137**	**-0.1726**
0,5	**0,0481**	**0,0046**	**-0,0004**	**-0,4594**
0 ,6	**0,0440**	**0,0092**	**-0,0020**	**-0,4882**
0,7	**0,0386**	**0,0137**	**-0,0040**	**-0,3494**
0,8	**0,0325**	**0 ,0173**	**-0,0050**	**-0,1747**
0,9	**0,0266**	**0,0198**	**-0,0053**	**-0,0462**
1	**0,0212**	**0,0212**	**-0,0051**	**-0,0051**

Tableau IV.11 : la variation de μ_x et μ_y pour **ν=0,3**

$\rho = \frac{a}{b}$	***μ au centre de la plaque***		***μ au bord de la plaque***	
	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y
0,1	**0,0572**	**0,0000**	**-0,0120**	**-0,0278**
0,2	**0,0549**	**0,0000**	**-0,0344**	**-0,0382**
0,3	**0,0547**	**0,0000**	**-0,0185**	**-0,1257**
0,4	**0.0543**	**0.0014**	**-0,0206**	**-0.2588**
0,5	**0,0521**	**0,0050**	**-0,0005**	**-0,6891**
0 ,6	**0,0477**	**0,0099**	**-0,0030**	**-0,7324**
0,7	**0,0418**	**0,0148**	**-0,0060**	**-0,5241**
0,8	**0,0352**	**0 ,0188**	**-0,0075**	**-0,2620**
0,9	**0,0288**	**0,0215**	**-0,0079**	**-0,0693**
1	**0,0229**	**0,0229**	**-0,0077**	**-0,0077**

Tableau IV.12 : la variation de μ_x et μ_y pour **ν=0,4**

$\rho = \frac{a}{b}$	***μ au centre de la plaque***		***μ au bord de la plaque***	
	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y
0,1	**0,0616**	**0,0000**	**-0,0160**	**-0,0370**
0,2	**0,0591**	**0,0000**	**-0,0458**	**-0,0509**
0,3	**0,0589**	**0,0000**	**-0,0246**	**-0,1677**
0,4	**0.0585**	**0.0015**	**-0,0275**	**-0.3451**
0,5	**0,0561**	**0,0054**	**-0,0007**	**-0,9188**
0 ,6	**0,0514**	**0,0107**	**-0,0039**	**-0,9765**
0,7	**0,0450**	**0,0159**	**-0,0080**	**-0,6987**
0,8	**0,0379**	**0 ,0202**	**-0,0100**	**-0,3493**
0,9	**0,0310**	**0,0231**	**-0,0106**	**-0,0924**
1	**0,0247**	**0,0247**	**-0,0103**	**-0,0103**

Tableau IV.13 : la variation de μ_x et μ_y pour **ν=0,5**

$\rho = \frac{a}{b}$	***μ au centre de la plaque***		***μ au bord de la plaque***	
	μ_x	μ_y	μ_x	μ_y
0,1	**0,0660**	**0,0000**	**-0,0200**	**-0,0463**
0,2	**0,0634**	**0,0000**	**-0,0573**	**-0,0637**
0,3	**0,0631**	**0,0000**	**-0,0308**	**-0,2096**
0,4	**0.0627**	**0.0016**	**-0,0344**	**-0.4314**
0,5	**0,0601**	**0,0058**	**-0,0009**	**-1,1486**
0 ,6	**0,0550**	**0,0114**	**-0,0049**	**-1,2206**
0,7	**0,0482**	**0,0171**	**-0,0100**	**-0,8734**
0,8	**0,0407**	**0 ,0216**	**-0,0125**	**-0,4366**
0,9	**0,0332**	**0,0248**	**-0,0132**	**-0,1156**
1	**0,0264**	**0,0264**	**-0,0128**	**-0,0128**

Remarque : pour le calcul précédent on a considéré que la petite dimension est a .

- Variation de $\boldsymbol{\mu_x}$ en fonction de ρ avec un changement de coefficient de poisson au centre de la plaque.

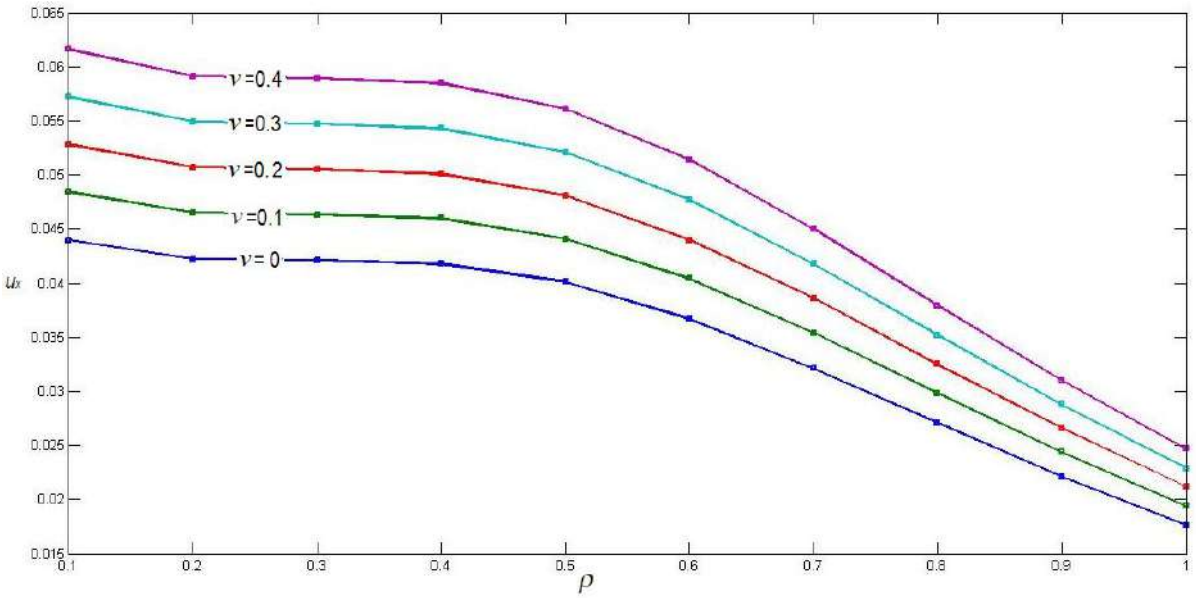


FIG IV.30 : variation de μ_x au centre de la plaque.

- Variation de $\boldsymbol{\mu_x}$ en fonction de ρ avec un changement de coefficient de poisson au bord de la plaque.

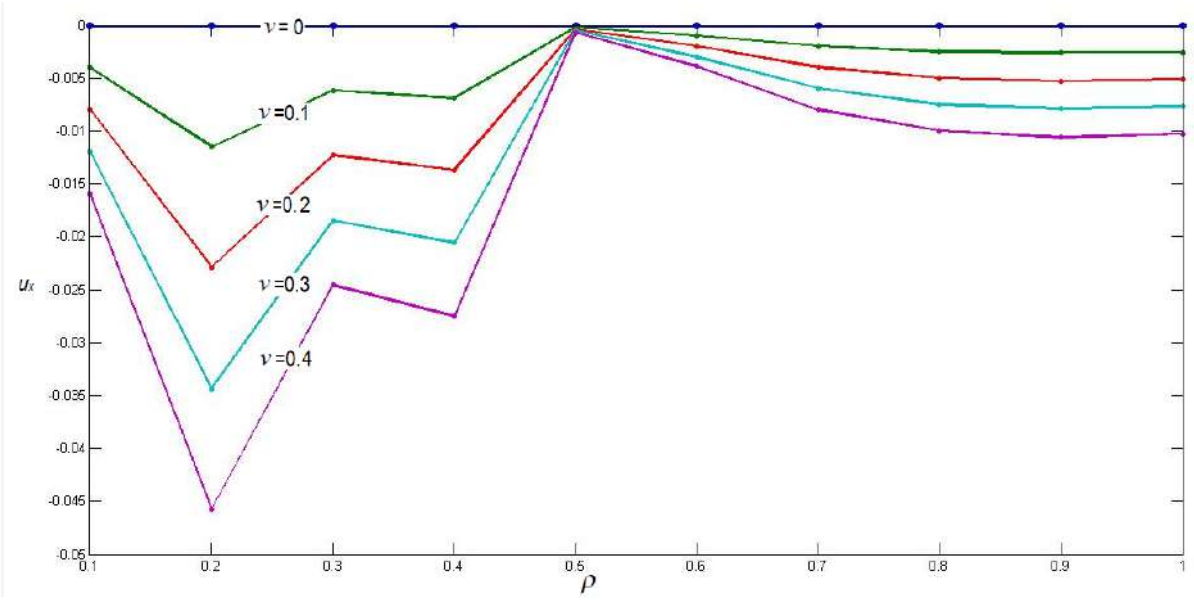


FIG IV.31 : variation de μ_x au bord de la plaque.

Conclusion

En conclusion de notre projet de fin d'étude, on est arrivé aux résultats suivants:

- Dans Le calcul des déplacements vertical des plaques en flexion par les méthodes analytiques exacte ; la méthode de M-Lévy converge plus rapidement que la méthode de Navier et elle est plus généraliser.
- La méthode des différences finies converge vers la solution exacte quand on augmente le maillage.
- La méthode des différences finies donne un résultat plus proche que la méthode forfaitaire pour le calcul des dalles en béton armé.
- Le calcul des dalles en béton armé par la méthode forfaitaire basé sur les méthodes analytiques des séries convergente.
- la méthode analytique des séries convergente ne donne pas un résultat pour une plaque rectangulaire encastrée sur ces quatre cotes.

A la fin il y'a lieu de dire que la méthode des différences finies est une méthode plus efficace pour le calcul des structure qu'ont des formules différentielles.

References bibliographies:

[1].C.M.Wang-shear deformable beams and plates .*relationships with classical solutions.*

[2]. Jean-François Remacle-Mécanique des Structures.

[3]. **Victor birman**- plate structures.

[4]. **Jean COURBON** et **Jean-Noël THEILLOUT ''**Résistance des matériaux **''**article, technique de l'ingénieur.

[5]. **M.E.Estanave**- contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire mince.

[6].CBA. **Annexe F**.

[7]. **Salvadori, M. G., and Baron, M. L.**, Numerical Methods in Engineering, Prentice-Hall. Inc.Englewood Cliffs, N.J., 1961.

[8]. **Jean COURBON ''** Plaques minces élastiques **''A**rticle, technique de l'ingénieur.

[9]. **Faculty of the College of engineering and Technology Ohio University**-the lateral deflexions of plates with elastic support.

[10]. **Bohe Wang**- the application of finite difference method and Matlab in engineering plates.

[11]. **Eduard Ventsel Theodor Krauthammer**-Thin Plates and Shells Theory, Analysis, and Applications.

[12]. Mémoire de fin d'étude **MEDDAH Mustapha-**analyses des plaques minces sous différentes conditions aux limites.