

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr. Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences

Département MI

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

En : Mathématiques Appliquées

Spécialité : Recherche opérationnelle

Par

BELHADJER RAIHANE

Thème

Récapitulation sur les jeux à deux joueurs

Soutenu pupliquement, le 13/07/2021, devant le jury composé de :

B. ALLECHE	PROFESSEUR	U.D.Y.F-MÉDÉA	Président.
M. ZEMIR	M.A.A	U.D.Y.F-MÉDÉA	Examinateur.
A. SAHRAOUI	M.A.A	U.D.Y.F-MÉDÉA	Encadreur.
N. MEKDECHE	M.A.A	U.D.Y.F-MÉDÉA	Examinateur.

Table des matières

Table des matières **2**

Résumé **ii**

Abstract **iii**

Introduction générale **i**

Introduction générale **ii**

Chapitre 1 : Notions fondamentales sur la théorie des jeux **1**

1 Présenter les fondements de la théorie des jeux **1**

2 Introducton **2**

3 Définition d'un jeu **3**

4 Typologie (Types de jeux) **3**

4.1 Jeux coopératif et non coopératif 4

4.2 Jeux à somme nulle et jeux à somme non nulle 4

4.3 la nature de l'information 5

4.3.1 Information complète/incomplète 6

4.3.2 Mémoire(information) parfaite et mémoire(information) imparfaite 6

4.3.3 exemples sur la nature d'information 7

4.4 Jeux simultanés/Jeux séquentiel 7

4.5 Jeux finis et infini 9

5 Quelque notion du base sur les graphes **9**

5.1 Gaphes orientés 9

5.2 Chaînes et Cycles 10

5.3 Graphes particuliers 10

6 La domination dans les graphes **11**

La domination dans les graphes **12**

Chapitre 2 : LA MODÉLISATION DES JEUX **13**

1 Représentations des jeux **14**

2 Problèmes étudiés **14**

3 JEUX SOUS FORME NORMALE **15**

3.1 Préliminaires 15

3.2 Jeux à somme nulle 17

3.3 Jeux à somme non nulle 18

3.3.1 Équilibres de Nash 18

3.3.2 Un théorème d'existence 18

4 Jeu sous forme extensive **19**

4.1 Arbre du jeu 20

4.2 Jeux à information parfaite 21

5 Le problème stratégique : **22**

6 Stratégies dominées **23**

6.1 Equilibre en stratégies strictement dominantes 24

6.2 Equilibre itératif en stratégies strictement dominantes . . . 24

7 Equilibre de Nash **25**

8 La optimums **26**

8.1 optimum de pareto . . . 26

8.2 optimum de Nash . . . 27

8.2.1 existence . . . 27

8.2.2 Unicité . . . 28

Unicité **29**

Chapitre 3 : Jeux à deux joueurs et à somme nulle **30**

1 Jeux à deux joueurs et à somme nulle **30**

1.1 EXEMPLES . . . 31

1.2 Jeux à somme nulle en stratégies pures . . . 31

1.3 Buts des joueurs dans un jeu à deux joueurs et à somme nulle . . . 32

1.4 Cas particuliers . . . 33

1.5 EXEMPLES . . . 33

1.6 Questions posées . . . 34

1.7 Valeur en stratégies pures . . . 35

1.8 Caractérisation de $\underline{v}$ et $\overline{v}$ . . . 36

1.9 Garantir un paiement . . . 36

1.10 Interprétation de $\underline{v}$ et $\overline{v}$ . . . 37

1.11 Jeu de valeur . . . 37

1.12 Stratégie Optimales . . . 38

1.13 Théorème du minmax . . . 38

1.14 Les équilibres 39
1.15 Exemples de jeux synchrones à somme nulle 39
1.15.1 Un modèle militaire 41

2 Jeux combinatoires impartiaux à information parfaite 42
2.1 Récapitulations 42
2.2 Des jeux sur les graphes 42
2.3 Les jeux de Nim 43

3 Présentation du jeu de domination 45

***Présentation du jeu de domination* 47**

***conclusion* 47**

***conclusion* 48**

Références 49

Remerciements

Avant tout nous remercions Allah tout puissant de nous avoir donnés le courage et la patience pour terminer ce travail.

Nous remercions tout d'abord Mr. SAHRAOUI ABDELKADER Maître Assistant à l'université Dr. Yahia Farès de Médéa, d'avoir accepté d'encadrer notre mémoire, ainsi ses précieux conseils, ses stimulants encouragements et sa disponibilité, nous avons pu mener à bien ce travail dans des conditions favorables. il nous'a également permis d'approfondir mes connaissances et acquérir un savoir faire.

Mes remerciements à Professeur B. ALLECHE de l'honneur qu'il nous'a fait en acceptant de présider le jury et de l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Bien évidemment, nous remercions M. ZEMIR et N. MEKDECHE de l'honneur qu'ils nous font d'être les examinateurs de ce mémoire, du temps et du soin qu'ils ont apporté à la rédaction de leurs rapports.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui nous voudrions témoigner toute mes reconnaissances.

Enfin, je remercie ma famille, et surtout mes parents, qui m'ont toujours soutenu durant mes etudes.

Résumé

Un jeu à **deux joueurs** et à **somme nulle** est un triplet (A, B, g) avec A et B les deux ensembles des **stratégies** des **deux joueurs** et g une application de $A \times B$ dans $\mathbb{R}$ appelée **gains** ou **utilité** des joueurs. Nous présentons quelque travaux , sur le problème d'un jeu à **somme nulle** où la somme des gains et des pertes de tous les joueurs est égale à 0. Cela signifie donc que le **gain** de l'un constitue obligatoirement une **perte** pour l'autre.

Ce mémoire porte sur **les jeux à de joueurs et à somme nulle**. Notre but est de donner certains outils et résultats fondamentaux de la théorie des jeux. Mon travail est répartitionné en trois chapitres. **Le premier** est consacré aux généralités et notions de base, **le second** résume les jeux normale et les jeux extensive et le **troisième** représente une récapitulation sur les jeux à deux joueurs et à somme nulle .

Mots clés : **Jeux à somme nulle, jeux à deux joueurs, jeux normale, jeux extensive, stratégie, théorie des jeux.**

Abstract

A **two-player, zero-sum** game is a triplet (A, B, g) with A and B the two sets of the two players strategies and g a map of $A \times B$ into $\mathbb{R}$ called player earnings or utility. Some works , on the problem of a zero-sum game where the sum of the gains and losses of all the players is equal to 0. This there fore means that the gain of one necessarily constitutes a loss for the other.This thesis deals with zero-sum and zero-sum games. Our goal is to provide some fundamental tools and results of game theory.

My work is divided into four chapters. The first is devoted to a generality and basic notions, the second summarizes the normal games, the third represents a summary on two-player games and at zero sum and the last concerns applications of game theory.

Keywords : **Zero-sum games, two-player games, normal games, extensive games, strategy, game theory.**

Introduction générale

La théorie des jeux est un domaine des mathématiques qui s'intéresse aux interactions stratégiques des agents (appelés « joueurs »). Les fondements mathématiques de la théorie moderne des jeux sont décrits autour des années 1920 par Ernst Zermelo dans l'article "Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels"[13], et par Émile Borel dans l'article « La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique ». Ces idées sont ensuite développées par Oskar Morgenstern et John von Neumann en 1944 dans leur ouvrage Theory of Games and Economic Behavior qui est considéré comme le fondement de la théorie des jeux moderne. Il s'agissait de modéliser les jeux à somme nulle où la somme des gains entre les joueurs est toujours égale à zéro. La théorie des jeux devient dès ce moment un outil théorique important de la microéconomie. Depuis 1944, 11 prix Nobel d'économie ont été décernés à des économistes pour leurs recherches sur la théorie des jeux. Outre le champ de l'économie, la théorie des jeux trouve des applications dans les sciences sociales, les sciences politiques, dans l'analyse stratégique comme en relations internationales ou en théorie des organisations et en biologie évolutionniste.

La theorie des jeux, comme toute théorie, est formée par un ensemble d'hypothèses de bases a savoir :

1. Chaque joueur cherche à maximiser ses gains, le gain de chacun dépend autant des decisions des autres que de sa propre decision.

2. Les joueurs disposent d'une information complete, a savoir que chaque joueur

connait tous les détails du modèle et pêut se mettre a la place du modélisateur.

Un peu d'histoire

- Cournot(1838), Borel(1921).
- Zermelo(1913).
- Von Neumann(1928).
- Theory of Games and Economic Behaviour, Von Neumann et Morgenstern (1944).
- Nash(1950).
- Selten(1965), Harsanyi (1967).

Chapitre

1

Notions fondamentales sur la théorie des jeux

Dans ce chapitre on va voir introduction de la théorie des jeux, les types des jeux, quelque notion du base sur les graphes et la domination.

1 Présenter les fondements de la théorie des jeux

La théorie des jeux, ce n'est pas que ça!

1. 

2. 

3. 

La théorie des jeux, est aussi ça!

1. 

2. 

3. 

2 Introducton

La théorie des jeux peut être définie comme l'étude mathématiques des interactions stratégiques entre plusieurs agents rationnels. Les mots encadré dans cette définition signifient :

1. Interaction : il y a plusieurs agents (appelés aussi joueurs, "decision makers", etc...), et ils interagissent : le contentement (appelé aussi paiement, gain, utilité, bien-être) de chacun ne dépend pas que de lui, mais aussi en partie des autres.

2. Stratégique : Les joueurs ont le choix entre plusieurs options.

3. Rationnel : un joueur ne joue pas n'importe comment, il cherche à optimiser son paiement.

Théorie des jeux



Sous-classe de	Théorie de la décision
Pratiqué par	Théoricien du jeu (d)
Objets	Agent (d) jeu (d)

3 Définition d'un jeu

Définition 3.0.1 *[2]1. Un jeu est une situation dans laquelle plusieurs individus appelés joueurs doivent prendre une décision appelée stratégie. Chacun reçoit ensuite un paiement (ou utilité) qui peut dépendre à la fois de leur décision et de la décision des autres.*

2. Le paiement exprime les préférences des individus sur les issues possibles du jeu. Ce n'est pas forcément une somme d'argent !

Définition 3.0.2 *[2]Un jeu est défini par la donnée des éléments suivants :*

— *Un ensemble de joueurs que l'on notera* $N = [1, 2, ..., i, ..., n]$*, qui sont les décideurs.*

Par information sur la strucutre même du jeu il faut d'abord comprendre la connaissance des éléments suivants :

— *l'ensemble des joueurs*

— *les préférences des différents joueurs*

— *la règle du jeu*

— *le type d'information qu'à chaque moment du jeu chaque joueur possède sur les actions entreprises par les autres joueurs au cours des phases précédentes du jeu.*

Jean Tirole reçoit le « prix Nobel d'économie » pour son « analyse du pouvoir de marché et de sa régulation » notes .

4 Typologie (Types de jeux)

La théorie des jeux classifie les jeux en catégories en fonction de leurs approches de résolution. Les catégories les plus ordinaires sont :

– Le nombre de joueurs est généralement 2. On peut néanmoins étudier des jeux multi- joueurs.

– Le jeu peut être **partial/partisan ou impartial**.

- Les coups des joueurs peuvent avoir lieu simultanément ou séquentiellement.
- Le jeu peut être à information parfaite ou non.
- Le nombre de positions, peut être **fini ou infini**.
- Les joueurs peuvent avoir **des intérêts communs, opposés, ou toute situation intermédiaire.**

4.1 Jeux coopératif et non coopératif

Définition 4.1.1 *[9]**les jeux coopératifs** sont des jeux dans lesquels on cherche la meilleure situation pour les joueurs sur des critères tels que la justice, l'entraide. On considère qu'ensuite les joueurs vont jouer ce qui aura été choisi, il s'agit d'une approche normative.*

Exemple 4.1.1 *À un croisement, chacun des deux automobilistes a la possibilité de passer ou non. Le code de la route impose sa stratégie à chacun des joueurs par une signalisation.*

Définition 4.1.2 *[9]**Le jeu non coopératif** à n joueurs est une simple généralisation du jeu à deux joueurs. Par contre, dans un jeu coopératif à deux personnes, il n'y a qu'une seule coalition, et même avec quatre joueurs, il n'y aura qu'une seule coopération puisque le principe du jeu coopératif est que les joueurs s'associent pour lutter contre le jeu lui-même. Sinon, on parlera peut être de jeu semi-coopératif coopétitif, où les joueurs peuvent former des coopérations temporaires contre les autres.*

4.2 Jeux à somme nulle et jeux à somme non nulle

La distinction fondamentale entre tous les jeux se fait au niveau du résultat final :

- **Jeux à somme nulle** : la somme des gains et des pertes est nulle (ce que gagne l'un est perdu par l'autre)

– **Jeux à somme non nulle** : la somme des gains et des pertes est différente de zéro (positive ou négative)

Les jeux à somme nulle sont faciles à saisir : la plupart des jeux de société sont des jeux à somme nulle, par exemple au Poker les gains de l'un sont les pertes de l'autre, etc. Dans la vie quotidienne, l'extorsion sous la menace est modélisable comme un jeu à somme nulle.

Définition 4.2.1 *Les jeux à somme non nulle sont moins évidents, mais beaucoup plus importants : ils sont à la base de tous les développements économiques et sociaux. Par exemple Le Dilemme du Prisonnier est un jeu à somme non nulle : il n'y a pas compensation des gains et des pertes entre les joueurs. Dans la vie quotidienne, tout échange de produits ou services non identiques est à somme non nulle, le plus souvent positive : le boulanger gagne à échanger son pain contre de l'argent et l'acheteur gagne à échanger son argent contre ce pain, tous les deux y ont gagné.*

4.3 la nature de l'information

Le critère touchant à la nature de l'information est le plus complexe. On distingue notamment (i) l'information parfaite vs imparfaite, (ii) l'information complète vs incomplète et (iii) l'information symétrique vs asymétrique selon le schéma suivant :

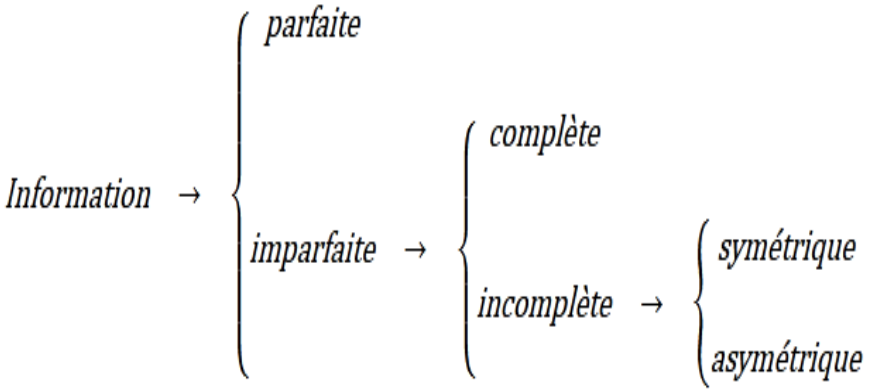


Schéma 1 : les différents concepts d'information

4.3.1 Information complète/incomplète

Information complète

Définition 4.3.1 *On dira qu 'un jeu est à* ***information complète*** *si chaque joueur connaît tous ces éléments, et à information incomplète dans le cas contraire. En d'autres termes un jeu est à information complète si chaque joueur connaît l'ensemble des joueurs, ses préférences et celles des autres joueurs, la règle du jeu et sait ce que lui-même et les autres joueurs connaîtront à chaque moment du jeu. Comme* ***les jeux d'échecs*** *sont à* ***information complète et parfaite.***

Les jeux à information incomplète

Définition 4.3.2 *[10]Les jeux à* ***information incomplète*** *sont des situations stratégiques où l'une des conditions suivantes n'est pas vérifiée :*

1/ Ses possibilités d'action

2/ Les possibilités d'action des autres joueurs

3/ Les gains résultant de ses actions

4/ Les motivations des autres joueurs.

Par exemple le poker est à **information incomplète**

4.3.2 Mémoire(information) parfaite et mémoire(information) imparfaite

Information parfaite

Définition 4.3.3 *[10]un jeu avec* ***information parfaite*** *si chaque ensemble d'information est réduit à un seul nœud, on retrouve la définition initiale de la stratégie car :Chaque ensemble d'information = un nœud de décision du joueur.*

Par ailleurs on parle de jeu à information parfaite dans le cas de jeu à mécanisme séquentiel, où chaque joueur a connaissance en détail de toutes les actions effectuées avant son choix.

Parfois, un joueur qui doit prendre une décision ne connait pas les choix effectués par les joueurs qui ont joué avant lui c'est à dire Il ne connait pas parfaitement le nœud auquel il se situe !

Définition 4.3.4 *[10]un jeu avec information imparfaite si au moins un ensemble d'information contient plus d'un nœud. Les jeux à mémoire imparfaite supposent une amnésie de la part des joueurs*

Exemple 4.3.1 *Les jeux de guerre sont des exemples de jeux à mémoire imparfaite si les commandements de zones opérationnelles ne parviennent pas à communiquer entre eux ou avec l'état-Major et donc n'ont pas trace des mouvements déjà effectués par les troupes alliées lorsqu'elles doivent décider de leurs propres mouvements.*

4.3.3 exemples sur la nature d'information

1. Aux échecs l'information est complète et parfaite.
2. Le poker est à information incomplète (les adversaires ont leurs cartes cachées) et imparfaite (car le hasard intervient dans les cartes, le tirage des cartes est assimilé à l'action d'un joueur fictif nommé « hasard »). On pourrait croire qu'il est parfait du fait qu'on connaît les actions des autres joueurs (check, fold, raise), mais l'intervention du hasard fait que le pokerest classé parmi les jeux à information imparfaite.
3. Pierre, papier, ciseaux est un jeu à information complète et imparfaite (car choix caché).
4. Le dilemme du prisonnier est également un jeu à information complète et imparfaite, car on ignore l'action de son adversaire. Les jeux à information à la fois imparfaite et incomplète sont de loin les plus intéressants et complexes.

4.4 Jeux simultanés/Jeux séquentiel

Jeux simultanés

Dans un jeu simultané, les joueurs décident en même temps de leur stratégie (exemple : le dilemme du prisonnier, le jeu pierre-feuille-ciseaux et le jeu du duopole de Cournot).

–Le jeu de pierre, papier, ciseaux est un jeu simultané, car les joueurs doivent montrer leur main en même temps.

–Le dilemme du prisonnier ou encore la guerre des sexes sont des jeux simultanés, car les décisions sont prises sans connaître le choix de l'autre.

Matrice du jeu « pierre-feuille-ciseaux » (1 point en cas de victoire, 0 sinon)

J_1/J_2	P	F	C
P	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$
F	$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,1)$
C	$(0,1)$	$(1,0)$	$(0,0)$

.

Définition 4.4.1 *[10]Dans les jeux simultanés, les joueurs prennent leurs décisions sans connaître celles prises par les autres joueurs ou les joueurs prennent leurs décisions en même temps. Ce type de jeux est appelé jeu synchrone .Un jeu simultané est représenté le plus souvent sous forme normale .*

Jeux séquentiels

Dans les jeux séquentiels, les joueurs jouent les uns après les autres, connaît l'historique du jeu et l'action de l'adversaire au moment de formuler son choix. Ce type de jeux est appelé jeu asynchrone. Un jeu séquentiel est représenté sous forme extensive

–Le jeu d'échecs ou le jeu de go sont des jeux séquentiels, car les joueurs jouent l'un après l'autre.

Définition 4.4.2 *Dans un jeu séquentiel, on peut spécifier l'ordre des décisions de sorte qu'un joueur peut décider de sa stratégie conditionnellement à ce qu'ont joué les autres joueurs précédemment .*

4.5 Jeux finis et infini

EXEMPLE : dilemme du prisonnier(Parle silence)

Deux prisonnier interrogés séparément

•Deux possibilités : parler (accuser l'autre) ou se taire.

•Si les deux se taisent (S,S), pas de preuve, peine minimale d'un an chacun

•Si un des deux accuse l'autre, il est libéréet l'autre a la peine maximum (8 ans)

•Si les deux s'accusent, peine moyennepour les deux (5 ans)

•Que vont faire les prisonniers ?

•Quels sont les solutions du jeu ?

	parle	*silence*
parle	$(-5,-5)$	$(0,-8)$
silence	$(-8,0)$	$(-1,-1)$

Définition 4.5.1 *[10]On dit qu'un jeu est fini lorsque l'ensemble des stratégies de chacun des joueurs est **fini**. Le **dilemme du prisonnier** est un **jeu fini** car chacun des joueurs n'a que deux stratégies possibles. En revanche, le **jeu du duopole de Cournot n'est pas un jeu fini**, car chaque entreprise choisit la quantité de bien qu'elle produit dans l'ensemble des réels positifs.*

5 Quelque notion du base sur les graphes

5.1 Gaphes orientés

Définition 5.1.1 *En donnant un sens aux arêtes d'un graphe, on obtient un graphe orienté. Un graphe orienté fini $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble fini $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ ($|V| = n$) dont les éléments sont appelés **sommets**, et par l'ensemble fini $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ ($|E| = m$) dont les éléments sont appelés **arcs**. Un **arc** e de l'ensemble E est défini par une paire **ordonnée** de sommets. Lorsque $e = (u, v)$, on dira que l'arc e va de u à v. On dit aussi que u est l'extrémité **initiale** et v l'extrémité finale de e.*

5.2 Chaînes et Cycles

Définition 5.2.1 (Chaîne) *Une* ***chaîne*** P_k *d'un graphe* $G = (V, E)$ *de longueur* $K-1$ *est une suite de sommets distincts* $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ *tel que pour chaque* $i \in \{1, ..., k-1\}$, $v_i v_{i+1}$ *est une arête de* G. *Les sommets* v_1 *et* v_k *sont appelés les extrémités de la chaîne, une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite* ***simple.*** *Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite* ***élémentaire****. Dans une chaîne* P, *une arête qui relie deux sommets non consécutifs est dite une* ***corde****. Une chaîne minimale induite par* n *sommets, notée par* P_n, *est une chaîne élémentaire* ***sans corde****.*

Définition 5.2.2 (Cycle) *On appelle* ***cycle*** C_k *dans un graphe* G, *une chaîne simple de longueur* k *dont les extrémités initiale et finale sont confondues ou bien un cycle* $c = (v_1, v_2, ..., v_k v_{k+1})$ *est un chemin simple finissant à son point de départ :* $v_1 = v_{k+1}$. *De la même manière, on définit cycle simple et cycle élémentaire.*

La ***longueur*** *d'un cycle est le nombre de ses arêtes.*

La ***maille*** *d'un graphe* G, *notée* $g(G)$, *est la longueur du plus petit cycle dans* G.

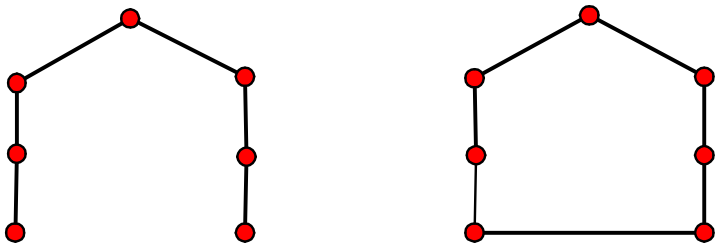


FIG. 5.1: **Une chaine P_7 et un cycle C_7**

5.3 Graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Définition 5.3.1 (Graphe connexe) *Un graphe est connexe si seulement s'il existe un chemin entre chaque paire de sommets. Un graphe ne possédant qu'une seule composante connexe est simplement un graphe connexe. Un sommet isolé (de degré 0) constitue toujours une composante connexe à lui seul. Un graphe G d'ordre n connexe comporte au moins $n-1$ arêtes. Le graphe nous servant d'illustration depuis le début est un graphe connexe.*

Définition 5.3.2 *[11]On appelle **arbre**, et on note par T , un graphe **connexe** et **sans cycle**. Il comporte exactement $(n-1)$ arêtes. On appelle **feuille** d'un arbre, un sommet de degré 1, dit aussi **sommet pendant**. Dans un arbre T, tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet **support**. La hauteur $h(T)$ de l'arbre T est la longueur du plus long chemin de la racine à une feuille. Voir la figure **« FIG. 1.10 »**.*

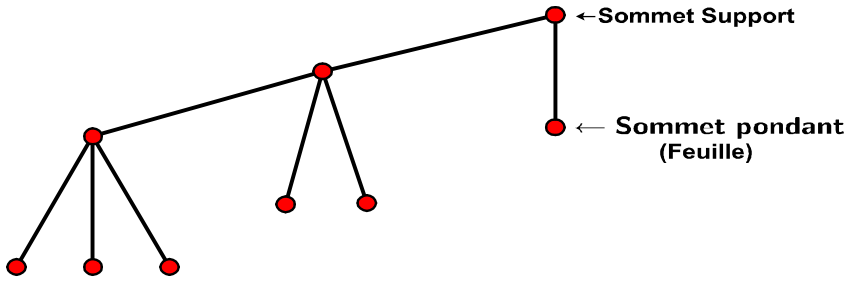


FIG. 5.2: **Un arbre** T

6 La domination dans les graphes

Le concept de domination trouve son origine dans le jeu d'échec. Le principe est de couvrir (dominer) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu. L'idée semble remonter au 16eme siecle en Inde. En 1862, De Jaenisch posa le problème suivant : Déterminer le nombre minimum de reines à placer sur l'échiquier de telle manière que chaque case soit occupée par une reine ou bien peut être occupée en un seul

mouvement par l'une des reines. Pour un échiquier 5×5 le nombre minimum est 3 et pour un échiquier 8×8 le nombre minimum est 5. Le nombre minimum pour un échiquier n n reste indéterminé jusqu'à présent. En 1958, Claude Berge donna une formulation de la domination dans les graphes orientés. Le nombre de domination s'appelait alors coef cient de stabilité externe.

L'appelation actuelle du nombre de domination est due à Ore, en 1962. La domination n'a connue sa veritable expansion qu'après la parution de l'article de "Cockayne et Hedetniemi en 1977"[3].

Depuis, l'étude de la domination dans les graphes avec des propriétés additionnelles a donné naissance à plusieurs paramètres de domination dont la résolution est NP-Complet.

Définition 6.0.3 ***(domination)(Ore 1962)*** *:Soit $G = (V; E)$ un graphe simple. Un sous ensemble de sommets $D \subseteq V$ de G est dit ensemble dominant si tout sommet de $V__D$ est adjacent à au moins un sommet de D*

Définition 6.0.4 *Soit $G = (V; E)$ un graphe simple. Un ensemble dominant D est dit dominant minimal si aucun sous ensemble propre de D n'est un ensemble dominant.*

Chapitre

2

LA MODÉLISATION DES JEUX

Dans ce chapitre on va voir que les jeux étudiés dans la théorie des jeux sont des objets mathématiques bien définis. Un jeu consiste en un ensemble de joueurs, un ensemble de décisions disponibles pour chaque joueur et une spécification de gains pour chaque combinaison de stratégies possibles. Les deux types de représentation, normale et extensive, que nous allons voir plus en détails sont utilisés pour des jeux non-coopératifs. Nous aborderons les diférentes manières de modéliser les jeux à travers quelques exemples et définitions. Les méthodes de résolution seront détaillées par la suite. N'essayez donc pas pour l'instant prédire ce que les joueurs vont jouer mais uniquement de comprendre leur représentation .Afin de décrire ou de modéliser un jeu (c'est-à-dire une situation d'interaction décisionnelle) quatre éléments doivent être précisés :

- l'ensemble des joueurs (ou preneurs de décisions).
- les actions possibles pour chaque joueur.
- les règles du jeu spécifiant notamment l'ordre dans lequel les joueurs jouent et quand le jeu se termine ?
- le résultat du jeu pour chaque n possible et son implication en termes de "fonction de paiement" (pour cela il faut connaître les préférences des joueurs).

1 Représentations des jeux

Un jeu est défini par l'ensemble des joueurs, l'ensemble des stratégies possibles pour chacun des joueurs et la spécification des paiements ou des utilités des joueurs pour chaque combinaison de stratégies. Les jeux coopératifs sont généralement présentés sous la forme de fonction caractéristiques alors que les jeux non coopératifs sont représentés sous forme normale ou sous forme extensive.

2 Problèmes étudiés

Ci-dessous quelques exemples de situations rencontrées dans la vie de tous les jours qui correspondent à la définition d'un "jeu" :[5]

1. Des entreprises produisent des biens identiques et cherchent à les vendre (jeux de compétition)

2. Des particuliers cherchent à acquérir un bien au cours d'une enchère.

3. Des conducteurs cherchent à atteindre la même destination (jeux de congestion).

4. Des électeurs cherchent à faire élire la personne qui leur convient le mieux (jeux de vote),

5. Des animaux évoluant dans le même milieu cherchent à survivre (jeux évolutionnaires).

6. Quand un piéton pressé traverse une rue, son utilité dépend de sa stratégie mais également de ce que font les automobilistes.

7. Lors d'un départ en vacances, le temps de trajet dépend de votre stratégie (choix de la route, heure de départ) mais surtout de ce que font les autres

3 JEUX SOUS FORME NORMALE

3.1 Préliminaires

La définition d'un jeu en forme normale doit répondre aux trois questions suivantes :

1. Qui joue ?
2. Quelles sont les actions disponibles pour chaque joueur ?
3. Quelle est la valeur pour chaque joueur des diferents résultats possibles du jeu ?

Définition 3.1.1 *Un jeu sous forme normale est la donnée de l'ensemble des joueurs, de l'ensemble des stratégies pour chaque joueur et les paiements associés à toute combinaison possible de stratégies.*

Définition 3.1.2 *[10]**Un jeu en forme normale** est décrit par les éléments suivants :*

- Un ensemble de n joueurs : $I = \{1, 2, ..., n\}$
- pour chaque joueurs $i, i \in I$, un ensemble de statégies S_i = toutes les stratégies possibles de ce joueur.

$s_i \in S_i \longrightarrow$ une stratégie particulière du joueur i .

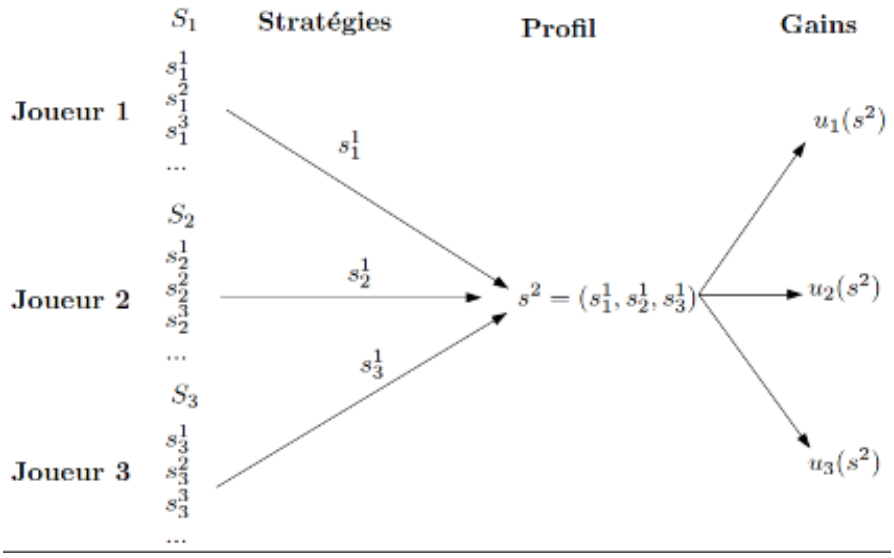
par conséquent, $S_i = \left\{s_i^1, s_i^2, ..., s_i^{k^i}\right\}$si k^i stratégies sont disponibles pour le joueur i.

- Chaque joueurs i choisit une stratégie $s_i \longrightarrow$ le résultat (ou profil de stratégies) : $s = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$
- Pour chaque joueur i , une fonction de gain, u_i :

$u_i : S = x_{i \in I} S_i \longrightarrow R$

$s = \{s_1, s_2, ..., s_n\} \longrightarrow u_i(s)$

Exemple 3.1.1 *[10]*



Autrement dit : un jeu sous forme normale ou jeu sous forme stratégique la donnée d'un ensemble N de joueurs, d'une famille d'ensembles de stratégies (ou d'actions)$(A^i)_{i\in N}$ et d'une famille de fonctions de paiements $(g^i)_{i\in N}$ avec $g^i : \Pi_{j\in N} A^j \rightarrow R$. L'ensemble des joueurs sera toujours supposé fini et non-vide. Les ensembles d'actions seront toujours supposés non vides et on parlera de jeu fini lorsque A^i est fini pour tout i. Un jeu sous forme normale représente une interaction entre joueurs rationnels : chaque joueur $i \in N$ choisit une action $a^i \in A^i$, les choix étant simultanés, et si $a = (a^i)_{i\in N}$ est le profil d'actions choisi, le joueur i reçoit le paiement $g^i(a)$. Tous les joueurs connaissent le jeu et le but du joueur i est d'obtenir un paiement le plus grand possible. e stratégie (exlante) est la donnée d'une liste des actions qu'un joueur projette de jouer à chacun des nœuds (ou ensembles d'information) où il aura potentiellement la main. On note l'ensemble des stratégies du joueur i pour le jeu donné.

Un jeu à un joueur est donc simplement un problème de maximisation. Dès qu'il y a au moins deux joueurs, le joueur i ne contrôle que partiellement son paiement et la notion de bonne stratégie n'est pas claire.

Représentation tabulaire

Si $N = 2$, alors le jeu sous forme normale peut-être representer par une matrice dont les lignes corespondent aux stratégies de premier joueur, les colonnes corespond

aux stratégies de second joueur et ses éléments sont les couples de paiments (g^1, g^2) de deux joueurs . Le joueur 1 choisit une ligne, le joueur 2 choisit une colonne et les paiements sera (g^1, g^2) .

Les exemples usuels suivants permettent de s'en convaincre. Les matrices ci-dessous représentent des jeux à deux joueurs dans les-quels le joueur 1 choisit la ligne, le joueur 2 la colonne et l'entrée dela matrice est le couple de paiements$(g1, g2)$.

Exemple 3.1.2 ***(Un jeu de coordination).***

— Deux amis veulent se rencontrer au lieu (A) ou au lieu (B). Leurs paiements sont égaux et valent 1 s'ils se rencontrent effectivement et 0 sinon. Ceci se représente par la matrice :

	A	B
A	$1, 1$	$0, 0$
B	$0, 0$	$1, 1$

Exemple 3.1.3 *Le jeu « Matching Pennies ».*

— Chaque joueur possède une pièce de monnaie et choisit secrètement de la mettre sur Pile (P) ou sur Face (F). Le joueur 1 gagne si son choix est le même que celui du joueur 2 et, dans ce cas, le joueur 2 perd. Dans le cas contraire c'est 2 qui gagne et 1 qui perd. Ceci se représente par le jeu :

	P	F
P	$1, -1$	$-1, 1$
F	$-1, 1$	$1, -1$

3.2 Jeux à somme nulle

Un jeu à somme nulle est un jeu à deux joueurs $G = (A^1, A^2, g^1, g^2)$tel que pour tous $(a^1, a^2) \in A, g^1(a^1, a^2) + g^2(a^1, a^2) = 0$. Pour cettepartie posons , $A^1 = S, A^2 = T, g^1 = g$. Ainsi, un jeu à somme nulle est déterminé par une application $g : S \times T \to R$. Dans la suite, parsouci de simplicité, nous supposeronsgbornée.[14]

3.3 Jeux à somme non nulle

La notion centrale de solution pour les jeux sous forme normale est l'équilibre de Nash (1950), qui généralise la notion de point selle. Soit $G = (N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ un jeu.[14]

3.3.1 Équilibres de Nash

Définition 3.3.1 *Un équilibre de Nash du jeu G est un profil de stratégies $a = (a^i)_{i\in N}$ tel que :$\forall i \in N, \forall b^i \in A^i, g^i(b^i, a^{-i}) \leq g^i(a)$*

Cette définition peut se reformuler de différentes façons. Par exemple, étant donné un profil de stratégies a, on dit que le joueur i a une déviation profitable par rapport à a, s'il existe b^i telle que $g^i(b^i,\ a^{-i}) > g^i(a)$. Un équilibre de Nash est un profil de stratégies pour le quel il n'existe pas de déviation profitable. C'est donc un point tel que, si tous les joueurs savent qu'on va jouera, alors chacun aeffectivement intérêt à le jouer. On peut remarquer que pour les jeux à somme nulle, équilibres de Nash et points selles coïncident. Une autre reformulation va suggérer une méthode de calcul et de démonstration d'existence.

3.3.2 Un théorème d'existence

La dernière reformulation suggère également une méthode de preuve d'existence d'équilibre : étant donné une correspondance de A dans A , c'est-à-dire une application F de A dans ses parties, on cherche un point fixe, c'est-à-dire un point a tel que $a \in F(a)$. Lorsque F est univoque : il existe une application $f : A \to A$ telle que, pour touta, $F(a) = \{f(a)\}$, ceci revient à trouver un point fixe de l'application f. Les deux théorèmes de point fixes les plus utilisés sont le théorème de Brouwer et ses généralisations par Kakutani (1941) et Glicksberg (1952).Généralise le theorème de Brouwer pour les fonctions multivoques.

Théorème 3.3.1 ***Théorème du MinMax, Von Neumann1928)****[14]*

Tout jeu fini (A^1, A^2, g) admet un point selle en stratégies mixtes.

En particulier le jeu admet une valeur v et les deux joueurs ont des stratégies optimales.

De plus, $v = max\sigma^1 \in \Delta(A^1)mina^2 \in A^2 g(\sigma^1, a^2) = min\sigma^2 \in \Delta(A^2)maxa^1 \in A^1 g(a^1, \sigma^2)$

Preuve. L'existence de valeur et de stratégies optimales pour les deux joueurs découle directement du théorème de Sion. Les ensembles de stratégies mixtes sont convexes et compacts et les extensions mixtes des fonctions de paiement sont multilinéaires, donc continues et possèdent les propriétés requises de quasi-concavité.De plus, si l'on fixe une stratégie mixte σ^1du joueur 1, $g(\sigma^1, \sigma^2)$estune application linéaire sur le polytope $\Delta(A^2)$. Elle atteint donc son minimum en un point extrême, c'est-à-dire en une stratégie pure.

Théorème 3.3.2 ***(Théorème de Nash, 1950).****[14]*

■

Tout jeu fini $G = (N, (A^i)_{i\in N}, (g^i)_{i\in N})$ admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Preuve. De la même façon, les ensembles de stratégiesmixtes sont convexes et compacts et les extensions mixtes des fonctions de paiement sont multilinéaires, donc continues et possèdent les propriétés requises de Jeux à quasi-concavité. ■

4 Jeu sous forme extensive

La forme normale est surtout adaptée à la représentation des jeux simultanés.

Nous allons maintenant nous intéresser à des jeux séquentiels où les décisions sont prises à des moments différents et chaque joueur peut être amené à jouer plusieurs fois.

Pour représenter ces jeux où le déroulement du temps est important, nous allons utiliser la forme extensive ou l'arbre du jeu.[14]

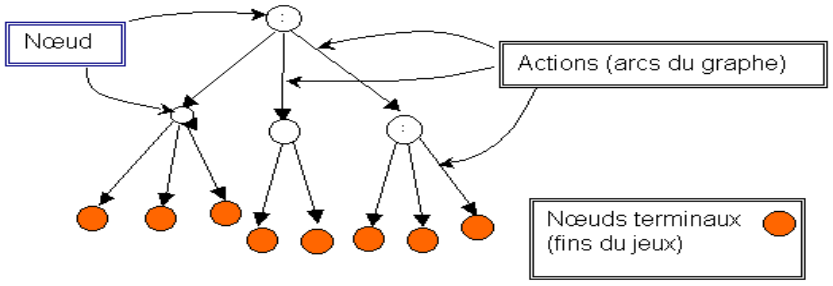
4.1 Arbre du jeu

Définition 4.1.1 *[4]• arbre (graphe connexe sans cycle) représentant les déroulements possibles du jeu.*

• à chaque noeud non terminal est associé un joueur : arrivé à ce point du jeu c'est à son tour de jouer.

• Chaque arc représente chacune des actions (coups autorisés par la règle) que ce joueur peut prendre à ce point du jeu.

• à chaque noeud terminal correspond un résultat du jeu donné de manière générale par un vecteur dit vecteur des paiements (liste des gains attribués à chaque joueur).



Exemple 4.1.1 *: **Le pilote et le terroriste**[4]*

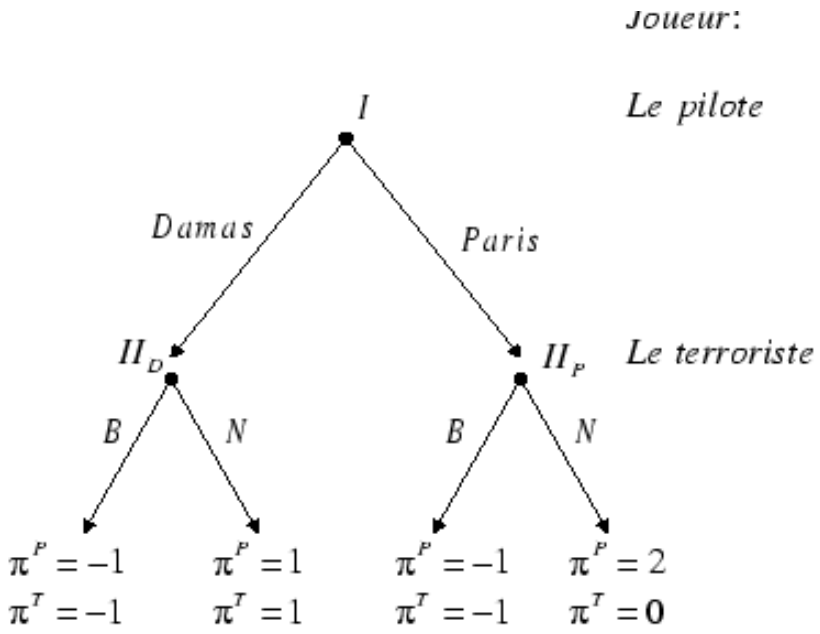
Un terroriste monte sur l'avion Strasbourg-Paris.

Après $10mn$ de vol, quand le terroriste s'approche du pilot et le menace de faire exploser l'avion s'il ne n'atterritatterit pas à Damas.

Le pilote a le choix entre continuer le vol vers Paris ou d'adopter la direction de Damas : $A^P = \{P, D\}$.

Après avoir observé le choix du pilote, le terroriste a le choix entre faire exploser la bombe ou abandonner : $a^T\{B, N\}$.

L'arbre suivant représente ce jeu :



Le premier noeud de cet arbre représente la décision du premier joueur.

A la suite de chacun de ses choix, la possibilité est donnée au joueur suivant d'effectuer son choix.

Une fois que tous les joueurs ont pris leurs décisions, on arrive à un résultat du jeu au quel les gains correspondants sont associés.

Ainsi l'arbre permet-il de faire apparaître les gains associés aux différents résultats possibles.

4.2 Jeux à information parfaite

Définition 4.2.1 *Nous décrivons ici une classe de jeux contenant* ***les jeux de plateaux traditionnels (échecs, dames, jeu de Go)*** *: ce sont les jeux à information parfaite dans les quels les joueurs jouent* ***séquentiellement (et non pas simultanément)*** *en ayant pleinement connaissance de l'état de la partie au moment de jouer. Ces interactions sont modélisées par des arbres de décision.*

5 Le problème stratégique :

Ayant ainsi défini un jeu sous forme extensive puis sous forme normale, la première question qui se pose est simple : peut-on raisonnablement prédire les comportements qui vont être adoptés par les joueurs ? Le caractère « interactif » d'un jeu implique que la réponse à cette question n'est pas immédiate. Dans un jeu à deux joueurs par exemple, [5]chaque joueur se pose la question de savoir quelle stratégie sera adoptée par l'autre pour réagir en conséquence. Mais il sait que l'autre est dans la même situation.

Comportement prudent L'analyse d'un jeu à somme nulle permet de mettre en évidence le type de problème rencontré.

Imaginons le raisonnement suivant du joueur 1. Si je joue la stratégie x et que l'autre le sache, il jouera en conséquence, c'est-à-dire qu'il adoptera une stratégie qui maximise son gain pour x . Comme le jeu est à somme nulle, il choisira une stratégie qui minimise en y $u_1(x, y)$ (en supposant qu'une telle stratégie existe). J'obtiendrai ainsi $v_1(x) = \min u_1(x, y)$. Mon choix est alors très simple : j'adopterai une stratégie qui maximise v_1 , et j'obtiendrai ainsi $\max_x \min_y u_1(x, y)$. Remarquons ici, que tout se passe comme si 1 jouait « en premier » et adopte la meilleure stratégie qui tienne compte de la réponse optimale de 2.

Définition 5.0.2 ***stratégies prudentes***

Dans un jeu à somme nulle, on appelle « paiement minimum garanti du joueur 1» la valeur de . C'est effectivement le paiement minimum garanti dans le sens ou il existe une stratégie qui assure ce paiement au joueur, cette stratégie , est appelée stratégie prudente.

Un autre raisonnement est cependant possible. Le joueur 1 peut parfaitement se dire que 2 tiendra exactement le raisonnement précédent ! Tout se passe alors comme si 1 jouait en second. Si 2 joue y j'ai intérêt à répondre une stratégie qui

maximise en x $u_1(x, y)$. J'obtiendrai alors $w_1(y) = \max u_1(x, y)$, alors que 2 obtiendra $v_2(y) = \min u_2(x, y) = -\max u_1(x, y)$. Je peux en déduire que 2 aura intérêt à jouer une stratégie qui maximise$v_2(y)$. 2 obtiendra alors $\alpha_2 = \max_y \min_x u_2(x, y) = \max_y(-\max_x u_1(x, y)) = -\min_y \max_x u_1(x, y)$, et j'obtiendrai donc $\beta_1 = \min_y \max_x u_1(x, y) = -\alpha_2$

Remarque 5.0.1 *il est facile de voir que l'on a*

$$\max_x \min_y u_1(x, y) = \alpha_{1\leq}\beta_1 = \min_y \max_x u_1(x, y) = -\max_y \min_x u_2(x, y) = -\alpha_2$$

Deux cas de figure peuvent alors se présenter. Si $\alpha_1 = \beta_1$, c'est-à-dire si $\max_x \min_y u_1(x, y) = \min_y \max_x u_1(x, y)$, les deux raisonnements sont « compatibles » et on peut imaginer que chacun des deux joueurs vont adopter une stratégie « prudente ». Sinon,$\alpha_{1<\beta_1}$, il y a conflit entre les deux raisonnements, chacun aimerait pouvoir jouer en second .

6 Stratégies dominées

Prédire le comportement est ainsi chose difficile. On peut cependant sérier les problèmes et tenter de proposer certains principes de comportement raisonnables.

D'une manière générale, on peut se poser une première question : existe-t-il des stratégies qui n'ont aucune chance d'être jouées rationnellement par les joueurs.[14]

Définition 6.0.3 *Dominance*

•La stratégie a^i du joueur i domine faiblement sa stratégie b^i lorsque : $u^i(a^i, a^{-i}) \geq u^i(b^i, a^{-i}), \forall a^{-i} \in A^{-i}$; (quelque soient les stratégies a^{-i} des autres joueurs, la stratégie a^i est meilleure ou égale que b^i.)

•elle la domine si elle la domine faiblementet que,de plus : $\exists c^{-i} \in A^{-i} t.q. u^i(a^i, c^{-i}) > u^i(b^i, c^{-i})$;(il y a au moins un cas, i.e. une réponse des autres joueurs, pour lequel a^i est meilleure que b^i)

•enfin , a^idomine strictement b^i lorsque : $u^i(a^i, a^{-i}) > u^i(b^i, a^{-i}), \forall a^{-i} \in A^{-i}$. (quelque soient les stratégies a^{-i} des autres joueurs, la stratégie a^i est meilleure strictement que b^i.) La stratégie a^i est dite faiblement dominante(resp. dominante,resp. strictement dominante) si elle domine faiblement (resp. domine, resp. domine strictement) tous les $b^i \in A^i \backslash \{a^i\}$.

6.1 Equilibre en stratégies strictement dominantes

On peut penser qu'un joueur rationnel ne choisira jamais une stratégie s'il dispose d'une autre stratégie lui assurant un gain supérieur quel que soit le comportement des autres joueurs. Si chaque joueur a une stratégie strictement dominante, il doit donc la jouer et le jeu est résolu. On dit alors qu'il existe un équilibre en stratégies strictement dominantes. C'est le cas pour (avouer, avouer) dans le premier dilemme du prisonnier ci-dessus. Remarquons que les joueurs obtiendraient tous deux plus qu'à cet équilibre en jouant (nier, nier) ; il n'est donc pas efficace du point de vue de larationalité collective, qui se caractérise par l'optimalité au sens de Pareto.[14]

6.2 Equilibre itératif en stratégies strictement dominantes

Quand il n'en existe pas, le jeu peut souvent etre simplifié par un processus itératif où chaque joueur, tablant sur la rationalité de ses adversaires, écarte les stratégies apparues commedominées à cette étape de son raisonnement.

Matrice du jeu :

	G	C	D
H	(2,5)	(4,8)	(1,3)
M	(1,4)	(2,5)	(3,6)
B	(3,7)	(5,8)	(2,9)

Il n'existe pas d'équilibre en stratégies strictement dominantes car aucune ligne

ne donne strictement plus, composante par composante, que toutesles autres lignes (il n'existe d'ailleurs pas non plus de colonne dominant strictement toutes les autres colonnes)[10]. Dans la recherche d'un équilibre itéré en stratégies strictement dominantes, on élimine successivement :

G strictement dominé par C $\rightarrow$

	C	D
H	$(4,8)$	$(1,3)$
M	$(2,5)$	$(3,6)$
B	$(5,8)$	$(2,9)$

; H strictement dominé par B

$\rightarrow$

	C	D
M	$(2,5)$	$(3,6)$
B	$(5,8)$	$(2,9)$

; C strictement dominé par D $\rightarrow$

	D
M	$(3,6)$
B	$(2,9)$

;

B strictement dominé par M $\rightarrow$

	D
M	3,6

;(M,D) est l'équilibre itéré en stratégies strictement dominées cherché.

7 Equilibre de Nash

Un équilibre (de Nash) est un profil de stratégies $s \in S$ où aucun joueur n'a intérêt à dévier de manière unilatérale. Autrement dit, pour chaque joueur, s'il pense que les autres vont suivre le profil alors il est rationnel pour lui de jouer selon le profil. Un jeu peut avoir plusieurs équilibres non-interchangeables (à la différence fondamentale des jeux à somme nulle). Par ailleurs l'interprétation de la notion d'équilibre de Nash a donné lieu à une littérature imposante.[7] Ce concept a eu un impact considérable en économie mais aussi en biologie, science politique, informatique, recherche opérationnelle,intelligence articielle et bien d'autres domaines d'applications. L'équilibre de Nash est considéré ici comme une condition mathématique de cohérence qu'ils'agit de comprendre et d'étudier.

Définition 7.0.1 *[7]Un ε-équilibre est un profil $s \in S$ telque pour tout i, $s^i \in$*

$BR^i_\epsilon(s^{-i})$, *soit :* $g^i(t^i, s^{-i}) \leq g^i(s) + \varepsilon, \forall t^i \in S^i, \forall t^{i\in} s^i, \forall i$. *On note* $BR : S \rightrightarrows S$, *la correspandance de meilleure réponce globale qui à* $s \in S$ *associe* $\Pi_{i\in N} BR^I(s^{-i})$. *S est un équilibre (de Nash) si* $s \in BR(s)$. *Un équilibre est strict si* $\{s\} - BR(s)$. *Quand BR(·) est réduite à un singleton, c'est une fonction. Dans ce cas, tous les équilibres de Nash sont stricts et trouver unéquilibre revient à trouver un point x d'une fonction.*

8 La optimums

8.1 optimum de pareto

Définition des états optimaux

État, état possible, choix parmi ces états.

État :

m vecteurs de consommation x_i ; n vecteurs de production nette y_j ;

État possible, réalisable

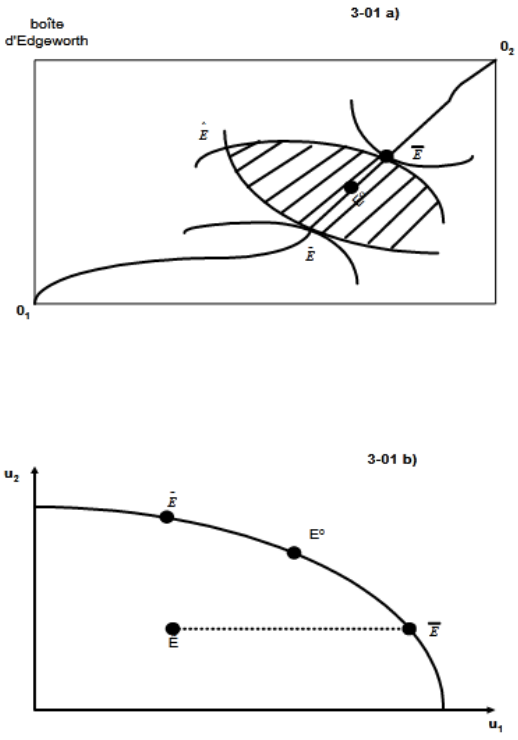
1) $x_i \in X_i \quad i = 1, 2, ..., m$

2) $y_j \in P_j \quad j = 1, 2, ..., n$

3) $\sum_{i=1}^{m} X_{ih} = \sum_{j=1}^{n} Y_{jh} + W_h \quad h = 1, 2, ..., l$

Définition 8.1.1 *[4]Une suite de stratégies* $a* = (a^1*, ..a^i*, ..a^n*)$ *est un optimum de Pareto lorsqu' aucun des joueurs ne peut obtenir un paiement plus élevé sans que le paiement d'un des autres diminue :*$[u^i(a^i, a^{-i}) \geq u^i(a^i*, a^{-i}*), \forall i] \Longrightarrow [u^i(a^i, a^{-i}) - u^i(a^i*, a^{-i}*), \forall i]$. *L'optimum de Pareto exprime bien l'idée que collectivement on ne peut pas améliorer la situation. Souvent il fournit une solution plus efficace que quand chaque joueur raisonne individuellement.*

Représentation graphique :



Remarque 8.1.1 *il existe une infinité d'états qui sont des optimums de Pareto.*

8.2 optimum de Nash

8.2.1 existence

L'existence d'un équilibre n'implique pas que celui-ci soit nécessairement optimal. Il peut en effet exister d'autres choix des joueurs qui conduisent, pour chacun, à un gain supérieur.

Ces choix peuvent, ou non, correspondre à un autre équilibre (le théorème de Nash dit qu'il existe au moins un équilibre, mais pas qu'il est unique).

Considérons, par exemple, un jeu où deux joueurs choisissent simultanément un nombre de 2 à 12. Le joueur qui a annoncé le plus petit nombre le remporte, l'autre joueur gagne la même chose moins deux. En cas d'égalité, les deux joueurs remportent leur nombre et subissent une pénalité de deux.

Les seuls équilibres de Nash de ce jeu sont quand les deux annoncent 2, ou quand l'un annonce 2 et l'autre 3. Dans le choix $(2, 2)$ si quelqu'un change il n'aura pas

mieux que 0 de toute façon. Dans $(2, 3)$ si celui qui a choisi 3 change il n'aura pas mieux que 0, si celui qui a choisi 2 change il aura 1 au lieu de 2, donc ce sont des équilibres de Nash. Dans toutes les autres paires de stratégies si le plus petit est 3 ou plus, le joueur qui annonce plus ou autant peut améliorer son résultat en déclarant le plus petit moins un. Si le plus petit est 2 et l'autre est 4 ou plus, le joueur qui a choisi le plus petit peut améliorer son score en choisissant le plus grand moins un. Cependant, il est clair que le choix (12,12), rapportant 10 à chaque joueur, est bien meilleur pour les deux que les équilibres précédents.

D'autres exemples célèbres sont ceux du problème des marchands de glaces ou du dilemme du prisonnier.

Les exemples d'équilibre non-optimaux sont parfois évoqués pour montrer que si chaque acteur économique raisonne individuellement selon son intérêt, alors il peut en résulter une situation pire que si les acteurs se concertaient

8.2.2 Unicité

Tout jeu peut avoir de nombreux équilibres de Nash ou aucun (c'est le cas du jeu consistant à écrire simultanément un entier, le gagnant étant celui dont l'entier est le plus grand). Un autre jeu populaire est : Deviner 2/3 de la moyenne qui possède exactement un équilibre. Néanmoins, Nash est parvenu à démontrer que tout jeu avec un nombre fini de joueurs ayant un nombre fini de stratégies admet au moins un équilibre de Nash en stratégie mixte (c'est-à-dire si l'on considère comme une stratégie possible de tirer aléatoirement entre plusieurs stratégies, avec des probabilités fixées).

Un jeu sans équilibre de Nash en stratégies pures consiste à faire écrire à chaque joueur un entier, le vainqueur étant le joueur écrivant le nombre le plus grand. L'ensemble des entiers étant non borné (il n'existe pas de nombre entier plus grand que tous les autres), il n'existe pas d'équilibre pour ce jeu. Inversement, l'équilibre de Nash en stratégies pures du jeu Deviner 2/3 de la moyenne est unique, et à cet

équilibre, tous les joueurs répondent zéro.

Dans le cas d'un jeu à somme nulle à deux joueurs, c'est-à-dire où ce que gagne un joueur est nécessairement perdu par l'autre, ce résultat (c'est-à-dire l'utilité induite par tout équilibre) est nécessairement unique. Il a conduit à définir la valeur d'un jeu.

Chapitre

3

Jeux à deux joueurs et à somme nulle

Dans ce chapitre nous présentons les travaux publiés à notre connaissance, sur le problème d'un jeu à somme nulle où la somme des gains et des pertes de tous les joueurs est égale à 0. Cela signifie donc que le gain de l'un constitue obligatoirement une perte pour l'autre.on va voir Les jeux qui se prêtent le plus naturellement à une étude théoriques ont les«duels de réflexion pure à information complète», qui opposent deux joueurs comme les jeux de nim.

Par exemple si l'on définit le gain d'une partie d'échecs comme1 si on gagne, 0 si la partie est nulle et -1 si on perd, le jeu d'échecs est un jeu à somme nulle.

En économie, cette notion simplificatrice est importante : les jeux à somme nulle correspondent à l'absence de production ou de destruction de produits.

En 1944, John von Neumann et Oskar Morgenstern ont démontré que tout jeu à somme nulle pour n personnes n'est en fait qu'une forme généralisée de jeux à somme nulle pour deux personnes, et que tout jeu à somme non nulle pour n personnes peut se ramener à un jeu à somme nulle.

1 Jeux à deux joueurs et à somme nulle

Une sous classe particulièrement intéressante est celle des jeux dans lesquels il n'y a que deux

joueurs, qui ont des intérêts opposés. Ces jeux, appelés jeux à deux joueurs et à somme nulle (ou

juste jeux à somme nulle) seront étudiés dans ce premier chapitre.

1.1 EXEMPLES

Ci-dessous quelques exemples de situations rencontrées dans la vie de tous les jours

qui correspondent à la définition d'un "jeu" :

1. Des entreprises produisent des biens identiques et cherchent à les vendre (jeux de compéti-tion),

2. Des particuliers cherchent à acquérir un bien au cours d'une enchère,

3. Des conducteurs cherchent à atteindre la même destination (jeux de congestion), Jeux à deux joueurs et à somme nulle

4. Des électeurs cherchent à faire élire la personne qui leur convient le mieux (jeux de vote),

5. Des animaux évoluant dans le même milieu cherchent à survivre (jeux évolutionnaires)...,

6. Quand un piéton pressé traverse une rue, son utilité dépend de sa stratégie mais également de ce que font les automobilistes,

7. Lors d'un départ en vacances, le temps de trajet dépend de votre stratégie (choix de la route, heure de départ) mais surtout de ce que font les autres !

1.2 Jeux à somme nulle en stratégies pures

1. Les joueurs cherchent à maximiser leur propre paiement, mais cela ne signifie pas forcémentqu'ils sont "égoïstes" !

2. Cependant il peut y avoir un conflit entre intérêt particulier et intérêt global.

3. Proposer des modèles pour décrire des interactions stratégiques.

4. Définir des concepts de rationalité.

5. Comprendre et "prédire" le comportement des joueurs.

6. Proposer des mécanismes pour améliorer l'intérêt global (mechanism design).

7. Formellement : jeu sous forme normalement à deux joueurs ou $g_2 = -g_1$.

8. Jeux à somme nulle : Jeux à deux joueurs, aux intérêt diamétralement opposés

.

Définition 1.2.1 *[2](Modéle de jeu) Formellement, un jeu à deux joueurs et à somme nulle est un triplet* $\Gamma = (A; B; g)$ *où*

• A *est un ensemble non vide appelé ensemble dactions (ou de stratégies) du joueur* 1 *(parfois noté* J_1*).*

• B *est un ensemble non vide appelé ensemble dactions (ou de stratégies) du joueur* 2 *(parfois noté* J_2*).*

• $g : A \times B \to \mathbb{R}$ *est une fonction bornée qu'on appelle fonction de paiement du jeu (ou fonction de gain, fonction dutilité). Le joueur* 1 *cherche à la maximiser et le joueur* 2 *à la minimiser.*

1.3 Buts des joueurs dans un jeu à deux joueurs et à somme nulle

1. Ceci modélise l'interaction stratégique suivante : J_1 et J_2 choisissent simultanément (sans savoir ce que fait l'autre) $a \in A$ et $b \in B$ respectivement.

2. Les actions sont ensuite révélées, et le paiement est $g(a; b)$.

3. Ce paiement modélise le contentement du joueur1 et le mécontentement du joueur 2 : J_1veut que$g(a; b)$ soit le plus élevé possible et J_2 veut qu'il soit le plus bas possible.

4. L'interprétation la plus classique est que $g(a; b)$ est la quantité d'argent que J_2 doit à J_1 (oul'inverse si $g(a; b)$ est négatif).

5. D'autres interprétations sont possibles : g peut-être vue comme l'espérance de vie qu'un lapin chassé veut maximiser (alors que le renard veut la minimiser), la

probabilité de marquer un but que le tireur veut maximiser (et que le gardien veut minimiser), etc...

1.4 Cas particuliers

• Dans le cas particulier où B est un singleton on est juste en présence d'un problème de maximisation. Et quand A est un singleton on est juste en présence d'un problème de minimisation.

• Si A et B sont des ensembles finis on parle de jeu fini (ou jeu matriciel), qu'on représente habituellement sous forme de matrice.

• Le joueur 1 choisit une ligne, le joueur 2 une colonne, et le paiement correspondant est dans la case à l'intersection de cette ligne et cette colonne.

1.5 EXEMPLES

1. Jeu du penalty 01 :

Ce jeu est plus connu dans la littérature sous le nom de "matching pennies". Lors dune séance de tir au but, le tireur (J_1) doit décider de tirer à gauche 2 ou àdroite et le gardien (J_2) doit décider de sauter à gauche ou à droite. Les deux joueurs sont supposés excellents :

(a) Le tireur cadre toujours son tir, et le gardien arrête toujours le tir s'il part du bon côté.

(b) Évidemment le tireur cherche à maximiser la probabilité qu'il y ait un but, et le gardien veut la minimiser.

(c) On peut modéliser une telle séance de tir au but par le jeu matriciel suivant :

1. Jeu du penalty 01 :

	s_g	s_d
t_g	0	1
t_d	1	0

2. Jeu du penalty avec tireur moins bon dun côté :

(a) Même exemple précédent, mais le tireur ne tire pas très bien à gauche. Sil tire à gauche,et même si le gardien part du mauvais côté, il y a une chance sur deux que le tir soit raté

et sorte du cadre.

(b) Cela correspond au jeu suivant :

	s_g	s_d
t_g	0	$\frac{1}{2}$
t_d	1	0

3. Jeu du penalty avec gardien manchot :

(a) Pareil que l'exemple (01) le gardien a un bras en moins : il ne peut pas arrêter les tirs à gauche quoi qu'il fasse. Il est toujours très bon par contre pour les tirs à droite.

(b) Cela correspond au jeu suivant :

	s_g	s_d
t_g	1	1
t_d	1	0

4. Jeu du penalty avec tir puissant :

(a) Pareil que l'exemple (01) mais le tireur a une option supplémentaire, il peut faire un tir puissant qui a deux chance sur trois de sortir du cadre, mais n'est jamais arrêté.

(b) Cela correspond au jeu suivant :

	S_G	S_D
T_G	0	1
T_D	1	0
T_D	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

1.6 Questions posées

Des questions naturelles se posent, comme par exemple :

1. Quelles actions doivent jouer les joueurs ?

2. A quel point le jeu est il favorable à chaque joueur ? Dans les exemples ci dessus, peut on dire que certains jeux sont plus favorables pour J_1 que d'autres ?

3. Plus précisément, quelle est la "valeur" du jeu ? Dans les exemples précédents, supposons qle gardien donne 1 euro au tireur si celui ci marque.

4. Dans chaque exemple, y a t-il une quantité v telle qu'il soit équitable que J_2 donne v eurà J_1 plutôt que de jouer ? Autrement dit, quel est le paiement attendu "si les joueurs jouent bien" ?

5. Dans tous les exemples et que ce soit le tireur ou le gardien qui prenne une décision, "gauche"veut toujours dire "à la gauche du but quand on est face au but".

Jeux à deux joueurs et à somme nulle

1.7 Valeur en stratégies pures

Définition 1.7.1 *Supinf et Infsup d'un jeu :*

1. Le supinf en stratégies pures du jeu Γ*, noté* $\underline{V}(\Gamma)$*(ou simplement* $\underline{v}$ *quand il n'y a pas d'ambiguité sur le jeu joué) est la quantité :*

$$\underline{v} = \sup_{a\in A}(\inf_{b\in B}(g(a,b))$$

2. Le infsup en stratégies pures du jeu Γ*, noté* $\overline{v}(\Gamma)$ *(ou simplement* $\overline{v}$ *) est la quantité :*

$$\overline{v} = \inf_{b\in B}(\sup_{a\in A}(g(a,b))$$

3. Lorsque le sup et l'inf sont atteint dans la définition (par exemple si le jeu est fini), $\underline{v}$ *et* $\overline{V}$ *sont également appelés max min et min max du jeu respectivement.*

Définition 1.7.2 *1. <2-> Le supinf* $\underline{v}$ *représente le paiement maximal que* J_1 *peut s'assurer quelque soit l'action (la stratégie) de* J_2*.*

2. <3-> L'infsup $\overline{V}$ *représente le paiement minimal que* J_2 *peut s'assurer quelque soit l'action de* J_1*.*

1.8 Caractérisation de $\underline{v}$ et $\overline{v}$

Proposition 1.8.1 *[14]La caractérisation suivante de $\underline{v}$ se vérifie facilement en utilisant la définition du sup et de l'inf :*

1. $\underline{v}$ *est caractérisé par :*
$$\begin{cases} \text{"}j_1 \text{ garantit } \underline{v} \text{ à"}\varepsilon \text{ preés"} \\ \forall \epsilon > 0 \exists a \in A \forall b \in B;\ g(a,b) \geq \underline{v} - \varepsilon \\ \text{"}j_2 \text{ defond } \underline{v} \text{ à" } \varepsilon \text{prés"} \\ \forall \varepsilon > 0 \forall a \in A \exists b \in B; g(a,b) \leq \underline{v} + \varepsilon \end{cases}$$

Jeux à deux joueurs et à somme nulle

Proposition 1.8.2 *[14]La caractérisation suivante de $\overline{v}$ se vérifie facilement en utilisant la définition du sup et de l'inf :*

2. $\overline{V}$ *est caractérisé par :*
$$\begin{cases} \text{"}j_2 \text{ garantit } \overline{v} \text{ à"}\varepsilon \text{ preés"} \\ \forall \epsilon > 0 \forall a \in A \exists b \in B;\ g(a,b) \leq \overline{v} - \varepsilon \\ \text{"}j_1 \text{ defond } \overline{v} \text{ à"}\varepsilon \text{ prés"} \\ \forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \forall b \in B; g(a,b) \geq \overline{v} + \varepsilon \end{cases}$$

Remarque 1.8.1 *Quand il y a un maxmin (par exemple si le jeu est fini), ces inégalités sont vraies pour $\varepsilon = 0$.*

1.9 Garantir un paiement

soit $w \in \overline{R}$

Définition 1.9.1 *1. J_1 peut garantir w si : $\exists a \in A; \forall b \in B; g(a;b) \geq w$;*

2. J_2 peut garantir w si : $\exists b \in A; \forall a \in B; g(a;b) \leq w$;

Résultats :

1. Rappel : $a \in A$ garantit $inf_{b \in B} g(a;b)$; $b \in B$ garantit $sup_{a \in A} g(a;b)$;

2. On pose : $maxmin(\tau) = \underline{v} = supa \in A$ $\inf_{b \in B}$ g(a ; b), $maxmin$: $supremum$ des quantités garanties par J_1 ;

3. Paiement attendu si J_1 joue avant J_2

4. On pose :$minmax(\tau) = \overline{v} = inf_{b\in B} sup_{a\in A} g(a;b)$, min max : supremum des quantités garanties par J_2 ;

5. Paiement attendu si J_2 joue avant J_1.

1.10 Interprétation de $\underline{v}$ et $\overline{v}$

Définition 1.10.1 *1. $\underline{v}$ est la "valeur" du jeu dans lequel le joueur 1 choisit dabord son action a,qui est annoncée à J_2, celui-ci choisissant alors son action b en fonction de a.*

2. De même, $\overline{v}$ est la "valeur" du jeu dans lequel le joueur 2 choisit d'abord son action b, quiest annoncée à J_1, celui-ci choisissant alors son action a en fonction de b.

Proposition 1.10.1 *[14]Pour tout jeu, $\underline{v} \leq \overline{v}$*

En effet, pour tout $a \in A$ et $b \in B$,on a

$g(a;b) < \underset{t\in A}{sup} g(t;b)$

En fixant a et en prenant l'infimum sur b de cette inégalité, on trouve

$\underset{b\in B}{inf}\ g(a;b) < \underset{b\in B}{inf}\left[\underset{t\in A}{\sup} g(t;b)\right] - \overline{v}$

d'où, $\overline{v}$ est un majorant de l'ensemble

$\{\inf_{b\in B}\ g(a;b); a \in A\}$

Donc

$\underline{v} - \underset{a\in A}{\sup}(\underset{b\in B}{inf} g(a;b)) < \overline{v}$

1.11 Jeu de valeur

Définition 1.11.1 *Si $\underline{v} = \overline{\overline{v}}$, on dit que le jeu a une valeurven stratégies pures, avec $v = \underline{v} = \overline{\overline{v}}$. Autrement dit, le jeu a une valeurvsi chaque joueur peut garantirv(à ε" près") quelque soit ce que fait lautre. Si les joueurs "jouent bien", le résultat devrait être v.*

1.12 Stratégie Optimales

Stratégie Optimales : On va définir rigoureusement la notion de "bien jouer" dont on a parlé defaçon informelle précédemment.

Définition 1.12.1 *Pour $''\varepsilon \geq 0$, on dit que $a \in A$ est $''\varepsilon$ -optimale pour J_1 si a lui garantit $\underline{v} - \varepsilon$, cest à dire si $\forall b \in B$; $g(a;b)\underline{v} - \varepsilon$. Symétriquement, on dit que $b \in B$ est $''\varepsilon$ -optimale pour J_2 si a lui garantit $\overline{\overline{v}} + \varepsilon$ cest à dire si :$\forall a \in A; g(a;b) \leq \overline{\overline{v}} + \varepsilon$.*

Définition 1.12.2 *Un couple de stratégies $(a*;b*) \in A \times B$ est un point selle si$\forall a \in A; \forall b \in B; g(a;b*) \leq g(a*;b*) \leq g(a*;b)$.*

$sup_{a\in A} g(a;b*) \leq g(a*;b*) \leq inf_{b\in B} g(a*;b)$

Interprétation : aucun des deux joueurs n'a de déviation profitable.

Proposition [14] : S'il existe un point selle $(a*;b*)$alors le jeu a une valeur, $a*$ et $b*$ sont des stratégies optimales, et la valeur de jeu est $v = g(a*;b*)$.

1.13 Théorème du minmax

Le théorème du minimax de John von Neumann (parfois appelé théorème fondamental de la théorie des jeux à deux joueurs), démontré en 1928, est un résultat important en théorie des jeux. Il assure que, pour un jeu non-coopératif synchrone à information complète opposant deux joueurs, à nombre fini de stratégies pures et à somme nulle, il existe au moins une situation d'interaction stable, à savoir une situation dans laquelle aucun des deux joueurs n'a intérêt à changer sa stratégie mixte si l'autre ne la change pas. Ce théorème est un cas particulier du théorème fondamental de la théorie des jeux à n joueurs de John Forbes Nash, démontré en 1950.

Théorème 1.13.1 ***Théorème de von Neumann (1926)****[8] : Pour m entier strictement positif, notons Δm l'ensemble des vecteurs colonnes comportant m coefficients réels positifs ou nuls dont la somme vaut 1. Soit A une matrice réelle (n,k).*

On a l'identité : $\max_{X\in\Delta_K}\min_{Y\in\Delta_n} Y^T AX = \min_{Y\in\Delta_n}\max_{X\in\Delta_K} Y^T AX.$

(La notation Y^T désignant le vecteur ligne transposé

1.14 Les équilibres

Dans certains jeux, il existe des stratégies qui, une fois qu'elles sont choisies, ne peuvent plus être quittées sans y perdre, sauf si l'autre change de stratégie (mais il est limité par la même contrainte).

Dans les jeux à somme nulle, c'est le "Minimax" ("point-selle") qui correspond quand on présente les gains sous forme de tableau à la case qui est à la fois le minimum d'une colonne et le maximum d'une ligne (sur l'exemple ci-après : la case contenant "1") :

	Xavier joue sa stratégie 1	Xavier joue sa stratégie 2	Xavier joue sa stratégie 3
Yvette joue sa stratégie 1	-1000	2	2000
Yvette joue sa stratégie 2	1010	2	-3000
Yvette joue sa stratégie 3	0	1	0

http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_du_minimax_de_von_Neumann

De manière plus générale, en incluant **les jeux à somme non nulle**, on parle **d'Equilibre de Nash"** et en évolutionnisme, on parle de "Stratégie Evolutionnairement Stable" quand des variations pas trop importantes ne réduisent pas la stabilité de ces stratégies (conséquence : ces stratégies ne peuvent être envahies).

Remarque 1.14.1 *Ces équilibres ne sont pas nécessairement optimaux, ils ne correspondent pas toujours aux meilleurs résultats pouvant être obtenus, mais ils sont stables.*

1.15 Exemples de jeux synchrones à somme nulle

La modélisation de phénomènes réels par des jeux à somme nulle n'est que rarement raisonnable, tant elle nécessite de formuler des hypothèses simplificatrices

éloignées de toute vraisemblance. Elle est toutefois utilisée à des fins pédagogiques, avec les avertissements qui s'imposent quant au peu de pertinence du modèle.

La modélisation des exemples ci-dessous à l'aide de matrices des gains est exposée aux articles" Jeu sous forme normale et Théorème du minimax de von Neumann"[8].

Un modèle économique

On considère deux firmes A et B, en concurrence sur le marché d'un produit dont le coût de production unitaire est de 1 euro. Lorsque le produit est proposé sur le marché à 2 euros, il y a 100 clients prêts à l'acheter ; si le prix proposé est de 3 euros, il ne reste plus que 50 acheteurs qui accepteront de payer ce prix

Chaque firme choisit indépendamment et dans l'ignorance du choix de son concurrent de fixer son prix de vente à 2 ou 3 euros. Si les deux firmes choisissent le même prix de vente, elles se partagent le marché par moitié (leurs produits étant supposés indiscernables) ; en revanche si l'une choisit de vendre à 2 euros tandis que sa concurrente tente le prix élevé, elle obtient la totalité du marché

La situation est donc la suivante :

si A et B vendent à 2 euros, chacun fait un bénéfice de 50 euros (1 euro de bénéfice fois 50 acheteurs) ; si A vend à 2 euros et B à 3 euros, c'est A qui emporte le marché et gagne 100 euros, tandis que B ne gagne rien ;

Si A vend à 3 euros et B à 2 euros, la situation est symétrique ;

Si A et B vendent à 3 euros, chacun fait un bénéfice de 50 euros (2 euros de bénéfice fois 25 acheteurs)

En mesurant le gain par l'excès du bénéfice à 50 euros, la matrice de ceux-ci est donc :

	A fixes on prix à 2 euros	A fixes on prix à 3 euros
B fixes on prix à 2 euros	0	-50
B fixes on prix à 3 euros	50	0

La matrice a un point-selle, le coin supérieur gauche. La stratégie rationnelle est donc pour les deux entreprises de proposer le prix le plus faible.

Le modèle est bien sûr invraisemblablement primaire et sans intérêt autre que

pédagogique.

1.15.1 Un modèle militaire

Tout aussi primaires sont les jeux du Colonel Blotto. Ce sont des jeux où l'espace des stratégies pures est un ensemble d'allocations possibles d'un nombre fini de ressources.

En voici un exemple : deux nations, disons la Bordurie et la Syldavie, sont en guerre. La première dispose de 4 armées, la seconde de 3 armées. Il y a deux fronts, un front nord et un front sud, et il n'est pas admis d'en dégarnir complètement un. Les armées ne peuvent être scindées. La Syldavie dispose donc de deux stratégies pures : envoyer deux armées au nord et une au sud ou le contraire, qu'on notera $(2,1)$ et $(1,2)$; de son côté la Bordurie dispose des stratégies pures $(3,1)$, $(2,2)$ et $(1,3)$. On suppose ensuite qu'en cas d'égalité numérique sur un front, la bataille y est indécise et son gain est nul pour les deux parties ; mais qu'en cas de déséquilibre, il y a victoire de la puissance qui a envoyé les forces les plus importantes. Les deux fronts ne sont pas d'importance égales : une victoire au nord est évaluée à une valeur de « a », une victoire au sud à une valeur de « b ».

La matrice des gains est alors la suivante, les lignes représentant les stratégies syldaves et les colonnes les stratégies bordures :

	$(3,1)$	$(2,2)$	$(1,3)$
$(2,1)$	a	b	$b-a$
$(1,2)$	$a-b$	a	b

Résolution d'un jeu à somme nulle

	A	B	C
a	30	-10	20
b	10	20	-20

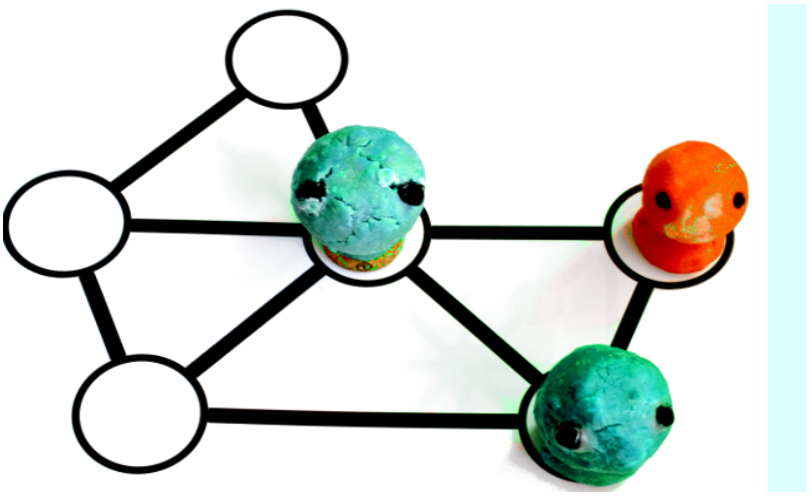
2 Jeux combinatoires impartiaux à information parfaite

2.1 Récapitulations

la notion de jeu combinatoire impartial (à information parfaite) associé à un graphe G muni d'un sommet initial x_0(c'est le jeu où, partant de $x - x_0$, chacun des deux joueurs choisit à son tour un voisin sortant de x : si l'un des joueurs ne peut pas jouer, il a perdu, tandis que si la confrontation se continue indéfiniment, elle est considérée comme nulle) ; ces jeux sont déterminés . On fera dans toute cette partie l'hypothèse supplémentaire que le graphe G est bien-fondé , c'est-à-dire qu'aucune confrontation ne peut être nulle(=durer indéfiniment) : il arrive forcément un point où l'un des joueurs ne peut plus jouer (et a donc perdu), et la détermination signifie qu'un des joueurs a une stratégie gagnante. On peut qualifier un tel jeu de « bien-fondé » ou determinant.

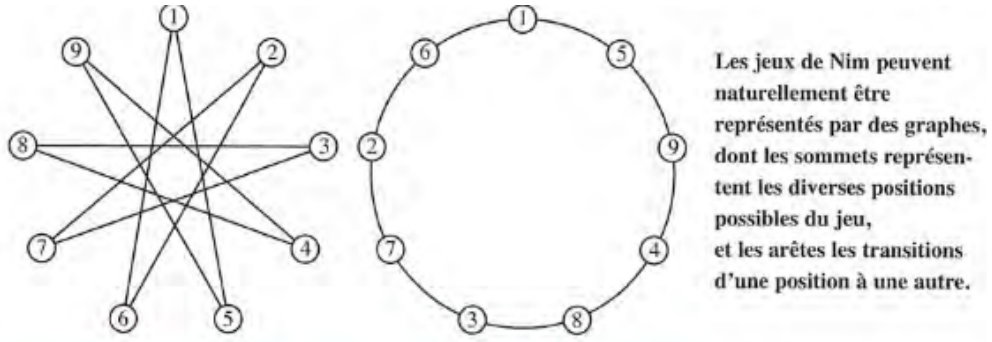
2.2 Des jeux sur les graphes

La théorie des graphes permet de modéliser, mais également de représenter, de façon évocatrice, un grand nombre de jeux. Dans le cas des «duels finis», cette représentation porte en elle les stratégies menant au gain de la partie.



2.3 Les jeux de Nim



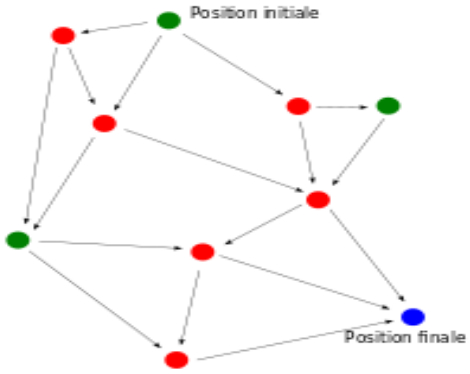


Définition 2.3.1 *[13]Les jeux de Nim sont des jeux de stratégie pure, à deux joueurs à somme nulle. Il existe plusieurs variantes. Ils se jouent avec des graines, des billes, des jetons, des allumettes ou tout autre objet facilement manipulable.*

La première généralisation du jeu de Nim sur les graphes a été proposée en 2003 par Fukuyama . Les valeurs des tas de Nim sont portées parles aretes du graphe. Pour le confort de la lecture, nous appellerons cette varianteEdge Nim G.

Edge NimG

Soit $G(V, E)$ un graphe nonorienté et $w : E \to N$ une fonction de poids. En début de partie, un jeton est placé sur l'un des sommets. à chaque tour, un joueur déplace le jeton le long d'une arete de poids strictement positif, et diminue (au sens strict) le poids de cette arete. On joue en convention normale.



Le but du jeu est de déplacer un jeton d'un sommet à l'autre selon les arêtes indiquées. Le gagnant est celui qui parvient au sommet bleu. Les positions gagnantes à atteindre sont en vert. Depuis un sommet vert, on est obligé d'aller à un sommet rouge perdant ; depuis un sommet rouge, on peut atteindre un sommet vert gagnant. Le joueur qui commence perd.

Stratégie gagnante Les jeux de Nim sont des jeux de duel à somme nulle (deux joueurs, un vainqueur et un perdant, pas de partie nulle possible), équivalents à se déplacer d'un sommet à l'autre d'un graphe orienté sans circuit, les sommets du graphe représentant les diverses positions possibles du jeu, et les arêtes les transitions d'une position à une autre. On montre qu'il existe une stratégie optimale, les diverses positions du jeu se répartissant en deux sous-ensembles, les positions gagnantes et les positions perdantes.

Jeu de Fan Tan

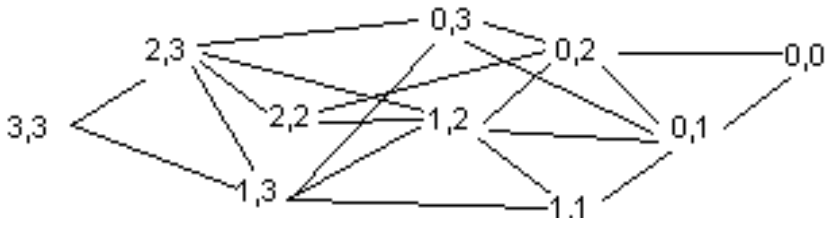
Deux joueurs disposent de 2 ou plusieurs tas d'allumettes. A tour de rôle, chaque joueur peut enlever un certain nombre d'allumettes de l'un des tas (selon la règle choisie). Le joueur qui retire la dernière allumette perd la partie.

¨Modéliser ce jeu à l'aide d'un graphe dans le cas où l'on dispose au départ de deux tas contenant chacun trois allumettes, et où un joueur peut enlever une ou deux allumettes à chaque fois.

¨Que doit jouer le premier joueur pour gagner la partie à coup sûr ?

¨Mêmes questions avec 3 tas de 3 allumettes.

Le jeu avec 2 tas de trois allumettes est décrit par le graphe suivant (tous les arcs sont orientés de gauche à droite) :



Le joueur qui atteint la configuration $0,0$ perd la partie. Pour gagner, on doit donc atteindre la configuration $0,1$ou $0,2$. On peut vérifier qu'en jouant$1,3$ au premier coup, quelle que soit la réponse de l'adversaire, on peut atteindre ensuite $0,1$ ou $0,2$. Le coup gagnant au départ est donc « en lever 2 allumettes dans un tas ».

Pour trois tas de trois allumettes, c'est simplement un peu plus long. De nombreux jeux combinatoires utilisent comme support certaines familles de graphes. Bien entendu, le terme de graphe est rarement mentionné dans les règles car les supports sont souvent des structures trés familières :des lignes, des grilles, des cartes. Cependant, cette représentation du support de jeu par un graphe permet bien souvent d'étendre les règles pour des graphes quelconques, ou du moins, des graphes plus généraux que ceux sur les quels elles ont été ́definies initialement.

3 Présentation du jeu de domination

Définition 3.0.2 ***(domination) :*** *Soit $G = (V; E)$ un graphe simple. Un sous ensemble de sommets $D \subseteq V$ de G est dit ensemble dominant si tout sommet de $V__D$ est adjacent à au moins un sommet de D.*

Marquage des noeuds d'un graphe par deux joueurs :[1]

1 Jeu combinatoire impartial à deux joueurs (mêmes règles pour les 2 joueurs A et B, jeu à tour de rôle, pas de hasard)

2 Un coup consiste à choisir un sommet et le supprimer ainsi que ses voisins ;

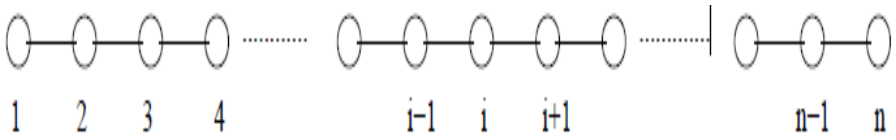
3 Le premier joueur ne pouvant plus jouer est d´eclar´e perdant.

On en déduit que les options de G sont des sous-graphes de G :

$O(G) = \{G[V(G) \backslash N_G^+(x)], x \in V(G)\}$

Nous nous limiterons à l'étude des chemins P_n. On a :

$O(P_n) = \{P_{n-2}, P_{n-3}, P_i \cup P_j, i + j = n - 3\}$



Le chemin P_n

Exemple 3.0.1 *simple :* P_{10}

1 /Alice peut-elle gagner sur P_{10} ?

2 /Quelle strat´egie doit-elle adopter pour y arriver ?

On ecrit l'expression des options du chemin considéré :

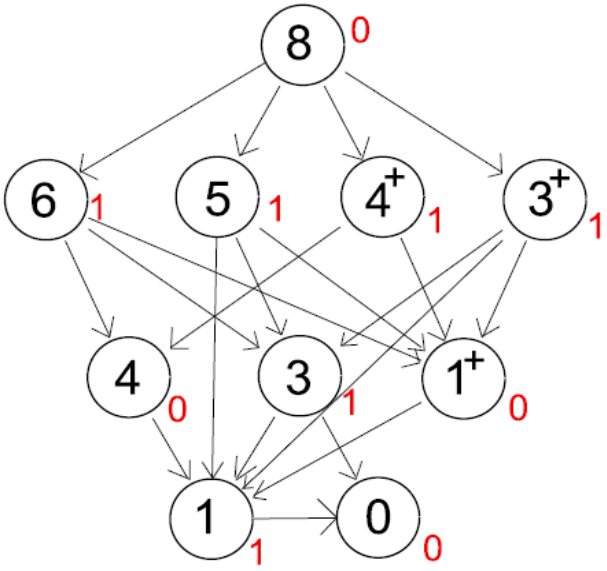
$O(P_{10}) = \{P_8, P_7, P_6 \cup P_1, P_5 \cup P_2, P_4 \cup P_3\}$

et on y recherche un graphe perdant. Regardons par exemple si P_8 est perdant en dessinant son graphe des configurations.

On place un arc de G vers H si H est une option de G. On note n^+ le graphe $P_n \cup P_1$, et on remplace 2 par 1 car se sontdes cliques (équivalence sur le jeu de domination).

On pondère les sommets par un booléen (on place 0 ssi G est perdant), en commençant par mettre 0 sur le graphe vide. On observe que P_8 est une chaine perdante car elle n'a que des

options gagnantes. on en conclut que P_{10} est gagnante pour Alice si elle joue sur une extrémité.


8
0
6
1
5
1
4+
1
3+
1
4
0
3
1
1+
0
1
1
0
0

conclusion

Ce mémoire. Nous concluons que la théorie des jeux (game theory) est un outil, ou plutôt une série d'outils, pour analyser le comportement d'un individu ou d'un groupe d'individus lorsqu'il est placé dans un contexte d'interaction : il s'agit d'analyser le choix optimal que celui-ci doit prendre en anticipant les décisions d'un autre individu ou groupe d'individus. Cette discipline a été mise en place pour la première fois par des économistes (von Neumann et Morgenstern en particulier), puis affinée par des mathématiciens (notamment le célèbre John Nash). Ce qui est intéressant avec la théorie des jeux, c'est qu'elle dépasse très largement le cadre de l'économie, et a des applications pratiques dans énormément d'autres domaines : les jeux de société, le sport, la stratégie militaire, la vie de tous les jours... Même si cette théorie est issue du domaine de la recherche, elle a de nombreuses utilisations pratiques, en guidant les décisions de chefs d'Etat, ou en analysant des situations de relations internationales. Il n'est donc pas très étonnant qu'elle ait été appliquée ces dernières années au jeu vidéo, mais est dans ce domaine principalement restée cantonée à la recherche universitaire.

Références

[1] Adrien Guignard Quelques variations du jeu de domination sur les chemins .

[2] Livre Bases mathématiques de la théorie des jeux Rida Laraki1, Jérôme Renault, Sylvain Sorin 2010

[3] Berge C. (1966) Espaces Topologiques, Fonctions Multivoques, Dunod.

[4] http ://dhenriet.perso.centrale-marseille.fr/micro/Chapitre1/Chapitre1.htm

[5] Livre David A. Madore 5 avril 2021MITRO 206

[6] D. Müller, Introduction à la théorie des graphes 2008.

[7] John Forbes Nash, « Equilibrium points in n-person games », Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. 36,

[8] (de) John von Neumann, « Zur Theorie der Gesellschaftsspiele », Mathematische Annalen, vol. 100, no 1, 1928, p. 295-320

[9] Les jeux coopératifs1Dominique LE PELLEY, Michel PAUL et Hatem SMAOUI CEMOI

[10] Jeux, stratégies et information Marc Plantevit.

[11] N. Ikhlef Eschouf, Les notion des graphes(Cours) 2014.

[12] ANALYSE DES INTERACTIONS MULTI-AGENTS : THÉORIE DES JEUX Master IAC 2014 -2015 Philippe Caillou

[13] Livre La théorie des jeux Stratégies et tactiques

[14] JEUX SOUS FORME NORMALE par Tristan Tomala