الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE Dr. YAHIA FARES DE MEDEA

Faculté des Sciences



Projet de fin d'étude
présenté en vue de l'obtention
du
Diplôme de Master en Recherche opérationnelle
par

MEKKID Rania & BENKHELFA Sabrina

Sujet

Sur les polynômes liés aux nombres de dérangements

Soutenu le 23 Septembre 2020

Devant le jury composé de :

Mr. **M. RAHMANI**, MCA à USTHB	Président
Mr. **D. LAISSAOUI**, MCA à l'université Dr Yahia Farès de Médéa	Encadreur
Mr. **M. SEBAOUI**, MCB à l'université Dr Yahia Farès de Médéa	Examinateur
Mme. **G.GUETTAI,** MAA à l'université Dr Yahia Farès de Médéa	Examinatrice

2019-2020

Remerciements

Nous remercions en premier lieu ***ALLAH*** *pour la foi, la confiance et la volonté, il nous a dotés pour la réalisation de ce travail.*

Nos remerciements vont à ***Mr.LAISSAOUI Diffalah*** *sans qui, notre thèse n'aurait pu voir lieu.Nous tenons à lui montrer toute notre reconnaissance pour s'être rendu disponible dans une période très difficile .ce dernier a su faire preuve de patience, de professionnalisme et de savoir-faire tout au long de la durée de la recherche.*

Nous exprimons nos remerciements chaleureux à ***Mr.RAHMANI Mourad*** *qui notre a honoré en acceptant d'être président du jury de notre thèse.*

Nos remerciements s'adressent également à ***Mr.SEBAOUI Madjid*** *et* ***Mme.GUETTAI Ghania*** *qui nous a honorés en acceptant de faire partie de notre jury et d'examiner notre travail.*

Enfin, nous remercions tous nos enseignants, et tous ceux qui de près ou de loin, ont contribué à ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail :

A mes chers parents,

Qui m'ont comblé d'amour et d'affection, qui m'ont toujours encouragés pour achever mes études tout en espérant voir le fruit de leurs sacrifices,

Que dieu les garde pour moi,

A mes chers frères : ***MOUHAMED et YOUCEF,***

A mes chères sœurs :

SOUHILA *et son mari,*

NEDJLA *et son mari,*

SIHAM *et son mari,*

A ma belle sœurs ***HANANE*** *et A tous mes neveux et mes nièces,*

A toutes ma familles : ***MEKKID, BOUDHILLIS,***

A ma chère binôme ***SABRINA*** *et sa famille,*

A mes chères amies : ***LAMIS, SABRINA , SARA , HASNA , SOUAD ,NADIA..***

A tous mes collègues de la promotion 2020,

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin.

MEKKID Rania

Dédicace

Je dédié ce projet :

A ma chère mère,

A mon cher père,

Qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

A mes frères ***AYOUB*** *et* ***ZAKARIA,***

A ma chère sœur *et son mari,*

Pour ses soutiens moral et leurs conseils précieux tout au long de mes études.

A mon mari *bien aimé,*

Qui n'ont pas cessé de ma conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études,que dieu le protège et lui offre la chance et le bonheur

A mon cher grand- père,

A ma chère grand-mère,

Qui je leur souhaite une bonne santé.

Mes oncles,

Ma chère tante,

Que m'ont aidé et supporté dans les moments difficiles

A ma chère binôme ***RANIA,***

Pour sa entente, sa sympathie, son soutien moral, sa patience et sa compréhension tout au long de ce projet.

A mes chères amies

Merci pour leurs amours,leurs aides et leurs encouragements.
Sans oubliés tous les professeurs.

BENKHELFA Sabrina

Résumé

Ce mémoire de Master intitulé "**Sur les polynômes liés aux nombres de dérangements**" a pour but d'étudier les propriétés combinatoire et probabiliste des polynômes liés aux nombres de dérangements, plus précisément nous introduisons les nombres de dérangements et les nombres r-dérangements par des arguments combinatoires, puis on va élaborer les propriétés associées. Après, nous établissons les polynômes liés aux nombres de dérangements.

Mots clés : les nombres de Stirling, les nombres de Lah, les fonctions génératrices, dérangement, permutation, partition.

نبذة مختصرة

هذه رسالة ماستر بعنوان" كثيرات الحدود المتعلقة بعدد التبديلات بدون نقطة ثابتة " يهدف إلى دراسة الخصائص التوافقية والاحتمالية لكثيرات الحدود المرتبطة بعدد التبديلات بدون نقطة ثابتة، وبصورة أكثر دقة نقدم عدد التبديلات بدون نقطة ثابتة وأعداد التبديلات لr بدون نقطة ثابتة بواسطة الحجج التوافقية، ثم سنعمل على تحديد الخصائص المرتبطة به. بعد ذلك، نحدد كثيرات الحدود المتعلقة بعدد التبديلات بدون نقطة ثابتة

Abstract

This Master thesis entitled "**On the polynomials linked to the numbers of derangements**" aims to study the combinatorial and probabilistic properties of the polynomials linked to the numbers of derangements, more precisely we introduce the numbers of derangements and the numbers r-derangements via combinatorial arguments, then we investigate some interesting properties. Next, we establish the polynomials related to the number of derangements.

Keywords : Stirling numbers, Lah numbers, generating function, derangements, permutation, partition.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements **i**

Dédicase **ii**

Dédicase **iii**

Résumé **iv**

Abstract **v**

Notations **viii**

Introduction Générale **1**

1 PRÉLIMINAIRES ET RAPPELS **3**
1.1 Dénombrement . . . 3
1.1.1 k-arrangement . . . 3
1.1.2 k-combinaison . . . 4
1.1.3 factorielles montantes . . . 4
1.1.4 factorielles descendantes . . . 4
1.1.5 Coefficients binomiaux . . . 4
1.2 Permutation . . . 5
1.3 Partition . . . 6
1.4 Somme double . . . 6
1.4.1 Permutation des sommes . . . 6
1.5 Principe d'inclusion-exclusion . . . 7
1.6 Fonctions génératrices : . . . 8

2 Les nombres remarquables **11**
2.1 Nombre de Stirling de première espèce . . . 11
2.2 Nombre de Stirling de seconde espèce . . . 13
2.3 Nombre de Bell . . . 14
2.4 Nombre de Lah . . . 15

3 Nombre de dérangements **18**
3.1 Nombre de dérangements . . . 18
3.2 Nombre de dérangements partielles . . . 23
3.3 Nombre de r-dérangements . . . 25
3.3.1 Propriétés fondamentales des nombres de r-dérangements . . . 26
3.3.2 La relation du nombre de r-dérangements avec le nombre de Lah . . . 38

3.3.3 Polynômes liés aux nombres de r-dérangements 39

Conclusion **43**

Bibliographie **44**

Notations

$\mathbb{N}$: *L'ensemble des entiers naturels.*

$\mathbb{R}$: *L'ensemble des nombres réels.*

$\mathbb{N}^*$: *L'ensemble des entiers naturels non nuls.*

$\mathbb{Z}$: *L'ensemble des nombres relatifs.*

$\mathbb{C}$: *L'ensemble des nombres complexes.*

$[n]$: *L'ensemble* $1, 2, 3, \ldots, n$.

$(x)^n$: *Factorielle montante.*

$(x)_n$: *Factorielle descendante.*

$C_k^n = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right)$: *Coefficient binomial, tel que* n *et* k *des entiers ou* $0 \leq k \leq n$.

$\mid A \mid$: *Cardinalitè de l'ensemble* A.

$s(n,k) = \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]$: *Nombre de Stirling de première espèce.*

$S(n,k) = \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$: *Nombre de Stirling de seconde espèce.*

$\left\lfloor \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\rfloor$: *Nombre de Lah.*

d_n : *Nombre de dérangements.*

$d_{n,k}$: *Nombre de dérangements partielles.*

$D_r(n)$: *Nombre de* $r-$*dérangements.*

mod : *Modulo est une opération quiassocie à deux entiers le reste de la devision euclidienne.*

$2 \mid n : n \quad est \quad paire.$

$2 \nmid n : n \quad est \quad impaire.$

$E(X) : espérence \quad de \quad X \quad (E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx).$

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Le problème des chapeaux, consiste à déterminer la probabilité que, n jetons numérotés de 1 à n ayant été mis au hasard dans des cases elles-mêmes numérotées de 1 à n, aucun jeton ne soit à sa place. La notion de sous factorielle permet de dénombrer les dérangements c'est à-dire une permutations particulières telles qu'aucun des éléments initiaux ne se retrouve à sa place initiale. On dit aussi "permutation sans point fixe".

Ce mémoire de Master intitulé "**Sur les polynômes liés aux nombres de dérangements**" a pour but d'étudier les propriétés combinatoire et probabiliste des polynômes liés aux nombres de dérangements et s'inscrit dans le domaine de combinatoire énumérative, ce domaine est à mis chemin entre les mathématiques et l'informatique théorique.

La combinatoire énumérative est considéré comme l'art de compter des objets tels : les nombres, les partitions, les permutations, etc. Elle donne un sens à des suites d'entiers. Elle relie différents objets par des bijections, etc. Certains experts situent sa naissance en tant que discipline avec le début de la théorie des probabilités au 17ème siècle. De même qu'on situe sa naissance une deuxième fois, vers la fin du 19ème siècle. En Europe, on cite souvent Fibonacci comme l'un des précurseurs du domaine. On retrouve aussi Bernoulli, Pascal et Euler. La combinatoire prend un nouvel essor vers le 20ème siècle avec l'arrivée de l'informatique.

Notre travail consiste essentiellement à introduire les nombres de dérangements et les nombres r-dérangements par un argument combinatoire, puis élaborer des propriétés associées, et établir les polynômes liées aux nombres de dérangements. Ce mémoire est organisée en trois chapitres.

Chapitre 1 : Préliminaires

Nous commençons par un chapitre préliminaire introduisent les notions dont nous avons besoin. Nous rappelons les définitions des objets qu'on va manipuler tout au long de ce mémoire, à savoir : partitions, permutations, coefficient binomiaux, principe d'inclusion-exclusion, fonctions génératrices et dénombrement. Nous donnons un aperçu de leurs propriétés.

Chapitre 2 : Nombres remarquables

L'objet principale de ce chapitre est d'introduire les nombres de Stirling associés avec succession d'ordre 1 et 2 et nous donnons leurs interprétations combinatoires et leurs propriétés combinatoire à savoir les relations de récurrences, leurs formes explicites ainsi leurs fonctions génératrices.

Ensuite, nous introduisons les nombres de Bell et nombres de Lah et nous présentons quelques propriétés fondamentales de ces nombres.

Chapitre 3 : Nombres de dérangements

Nous terminons ce mémoire par une étude des nombres de dérangements et essentiellement les nombres r-dérangements et les propriétés classiques. Nous établissons une relation avec les nombres de Lah et nous définissons à la fin de ce chapitre les polynômes liés aux nombres de r-dérangements.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES ET RAPPELS

Dans ce chapitre, nous donnons des définitions et quelques notions de la combinatoire concernant notre sujet. Elles sont principalement extraites des ouvrages [2],[4].

1.1 Dénombrement

Définition 1.1.1. *Soit E un ensemble fini de cardinal n où n est un entier naturel.*
Le dénombrement s'emploie à étudier et à compter divers types de regroupement d'objets d'un ensemble fini.

1.1.1 k-arrangement

Définition 1.1.2. *Soient E un ensemble fini de cardinal n et k un entier.*
Un k-arrangement de E est un k-uplet ou liste (a_1,a_2,...,a_k) d'éléments de E tel que $a_i \neq a_j$ quelque soit i,j ∈ [k] avec $i \neq j$.

- Le nombre d'arrangements sans répétition de k objets parmi n (avec $0 \leqslant k \leqslant n$) est donné par :
$$A_n^k = n \times (n-1) \times ... \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{1.1.1}$$
- Le nombre d'arrangements avec répétition de k objets parmi n est n^k.
- Si $p = n$, on parle alors une permutations donc $A_n^n = n\,!$
- Le nombre d'arrangements satisfait aux relations de récurrences suivantes :

a.
$$A_n^k = A_{n-1}^k + k \times A_{n-1}^{k-1} \tag{1.1.2}$$

b.
$$A_n^k = n \times A_{n-1}^{k-1} = (n-k+1)A_n^{k-1} \tag{1.1.3}$$

Exemple. Soit $E = \{2, 4, 1\}$
Pour $\begin{cases} n = 3 \\ k = 2 \end{cases}$ on a $A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6$ alors les arrangements possible de 2 objets parmi 3 sont :
$(1,2), (1,4), (2,1), (2,4), (4,1), (4,2)$ l'ordre a toujours sont importance.

1.1.2 k-combinaison

Définition 1.1.3. *Une combinaison de k objets pris dans E est un sous-ensemble de k de ces n objets. L'ordre n'intervient pas.*

- Le nombre de combinaisons sans répétition est donné par :

$$C_n^k = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{1.1.4}$$

- Le nombre de combinaisons avec répétition de k objets parmi n est :

$$C_{n+k-1}^k = \left(\begin{array}{c} n+k-1 \\ k \end{array} \right) = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \tag{1.1.5}$$

- Formule de récurrence :

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k \tag{1.1.6}$$

Exemple. Soit $E = \{1, 3, 5\}$ pour $\left\{ \begin{array}{l} n = 3 \\ k = 2 \end{array} \right.$ donc on a $\left(\begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right) = \frac{3!}{2!1!} = 3$, alors les combinaisons possible sont : (1,3),(1,5),(3,5).

1.1.3 factorielles montantes

Définition 1.1.4. *Soit x un nombre réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}$, la fonction factorielle montante d'ordre n, notée $(x)^n$, est définie par :*

$$(x)^n = x(x+1)(x+2)...(x+n-1) \quad si \quad n \geqslant 1 \quad et \quad x^0 = 1 \tag{1.1.7}$$

Exemple.

$$(12)^3 = 12 \times 13 \times 14 = 2184$$

1.1.4 factorielles descendantes

Définition 1.1.5. *Soit x un nombre réel ou complexe et $n \in \mathbb{N}$, la fonction factorielle descendante d'ordre n, notée $(x)_n$, est définie par :*

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)...(x-n+1) \quad si \quad n \geqslant 1 \quad et \quad x_0 = 1 \tag{1.1.8}$$

Nous avons :

$$(-x)_n = (-1)^n (x)_n \quad et \quad (-x)_n = (-1)^n (x)^n \tag{1.1.9}$$

Exemple.

$$(12)_3 = 12 \times 11 \times 10 = 1320$$

1.1.5 Coefficients binomiaux

Définition 1.1.6. *Pour tout réel ou complexe x et pour tout entier k, le coefficient binomial d'ordre k noté $\left(\begin{array}{c} x \\ k \end{array} \right)$ est définie par :*

$$\left(\begin{array}{c} x \\ k \end{array} \right) = \frac{(x)_k}{k!} \tag{1.1.10}$$

avec $\left(\begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right) = 1$ et pour $k \geqslant 1$ on peut définir $\left(\begin{array}{c} x-1 \\ k \end{array} \right)$ par $\left(\begin{array}{c} x-1 \\ k \end{array} \right) = \prod_{j=1}^{k} \frac{x-j}{j}$

Les coefficients binomiaux vérifient les propriétés suivantes :

1. Si $x = n$ et n est un entier tel que $n \geq k$ alors le coefficient binomial $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est égal à

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

.

2. Si $x = n$ et n est un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, alors on a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$.
3. Si $x = n$ et n est un entier tel que $k > n$, alors on a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 0$.
4. Si $x = n$ et n est un entier tel que alors on a $\begin{pmatrix} n \\ -k \end{pmatrix} = 0$, k entier.
5. Si k est un entier naturel alors on a $\begin{pmatrix} -1 \\ k \end{pmatrix} = k!(-1)^k$.
6. Si k est un entier naturel alors on a $\begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix} = (-1)^k \begin{pmatrix} -x+k-1 \\ k \end{pmatrix}$.
7. Si k est un entier naturel alors on a $\begin{pmatrix} \frac{-1}{2} \\ k \end{pmatrix} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}} \begin{pmatrix} 2k \\ k \end{pmatrix}$.
8. Si k est un entier naturel alors on a $\begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix} = \frac{x}{k} \begin{pmatrix} x-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$.
9. Si x est un réel et k est un entier alors, $\begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$.
10. Ces coefficients apparaissent dans le développement de $(a+b)^n$ appelée relation du binôme de Newton, où a et b sont des nombres réels ou complexe et n entier naturel on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} a^{n-k} b^k$$

.

11. Si z est un nombre complexe et $|z| < 1$ alors $(1+z)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} z^k$.
12. Si x, y sont des nombres réels et k est un entier alors,

$$\sum_{k+l=n, k,l \geq 0} \begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ n \end{pmatrix}$$

.

1.2 Permutation

Définition 1.2.1. *Le nombre de permutations d'un ensemble $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ de n objets distincts est simplement le nombre de façons de ranger ces n objets, c'est-à-dire de les ordonner.*
Le nombre de permutations de n donner par :

$$P^n = n! \tag{1.2.1}$$

Exemple : soit A= $\{1, 2, 3\}$
Alors les permutations de l'ensemble A est :
$\{(1, 2, 3)\}$
$\{(1, 3, 2)\}$
$\{(2, 1, 3)\}$
$\{(2, 3, 1)\}$
$\{(3, 1, 2)\}$
$\{(3, 2, 1)\}$
Donc $P^3 = 3! = 6$

1.3 Partition

Définition 1.3.1. *Soit un ensemble E quelconque. Un ensemble* $P = \{P_1, P_2, ..., P_i\}$ *de sous-ensembles de E est une partition de E si :*

- *Aucun élément de P n'est vide.*
- *L'union des éléments de P est égale à E.*
- *Les éléments de P sont deux à deux disjoints.*
- *Les éléments de P sont appelés les parties de la partition.*

En notation mathématique en posant P = $P_1, P_2, ..., P_i$ avec $P_i \in E$ les conditions ci-dessus peuvent s'écrire :

- $P_i \neq \varnothing$
- $\bigcup P_i = E$
- $P_i \bigcap P_j = \varnothing$ si $i \neq j$

Exemple. Soit $A = \{1, 2, 3\}$ les partitions de A sont :
·$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
·$\{\{1, 2\}, \{3\}\}$
·$\{\{1, 3\}, \{2\}\}$
·$\{\{1\}, \{2, 3\}\}$
· et$\{\{1, 2, 3\}\}$)
Remarquons que :
·$\{\emptyset, \{1, 3\}, \{2\}\}$ n'est pas une partition parce qu'elle contient l'ensemble vide $\emptyset$
·$\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ n'est pas une partition parce que l'élément 2 appartient à plus d'une partie
·$\{\{1\}, \{2\}\}$ n'est pas une partition de {1,2,3} car l'union de tous les éléments est {1,2}; c'est une partition de {1,2}

1.4 Somme double

1.4.1 Permutation des sommes

Théorème 1.4.1. *Soit une famille d'éléments* $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ *alors :*

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{j} a_{ij}) \tag{1.4.1}$$

Preuve 1.4.1. *Soit*

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} = \overbrace{(a_{1,1} + a_{1,2} + \cdots + a_{1,n})}^{i=1 \quad puis \quad 1 \leqslant j \leqslant n} + \overbrace{(a_{2,2} + a_{2,3} + \cdots + a_{2,n})}^{i=2 \quad puis \quad 2 \leqslant j \leqslant n} + \cdots + \overbrace{(a_{n,n})}^{i=n \quad puis \quad n \leqslant j \leqslant n}$$

Alors cela revient à calculer la somme des éléments du tableau suivant (i représente la i éme ligne et

j la j éme colonne.)

	j	*1*	*2*	*3*	...	*n*
i						
1		a_{11}	a_{12}	a_{13}	...	a_{1n}
2			a_{22}	a_{23}	...	a_{2n}
3				a_{33}	...	a_{3n}
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$
n						a_{nn}

Pour $j \in [1,n]$, c'est-à-dire j fixé, la somme des termes de la j ème colonne de ce tableau est : $\sum_{i=1}^{j} a_{ij}$. *De là, la somme de tous les termes du tableau est la somme de toutes les colonnes (de $j = 1$ à n) d'où* $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{j} a_{ij})$, *on obtiendra le même résultat en raisonnant d'abord sur $i \in [1,n]$ et en sommant le nombre de lignes.*

1.5 Principe d'inclusion-exclusion

Le principe d'inclusion-exclusion permet d'exprimer le nombre d'éléments (ou cardinal) d'une réunion finie d'ensembles finis en fonction du nombre d'éléments de ces ensembles et de leurs intersections. Il se traduit directement en termes de probabilités.
Il est attribué au mathématicien Abraham de Moivre, et connu également (lui ou sa version probabiliste) sous le nom de formule du crible de Poincaré, formule de Poincaré, ou formule du crible.

Exemple.

Dans le cas de n= 2 , nous avons la formule très connue :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{1.5.1}$$

Pour n=3 , nous avons :

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| \tag{1.5.2}$$

Plus généralement pour une valeur n quelconque, nous avons le théorème suivant :

Théorème 1.5.1.

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \left| \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right| \right] \tag{1.5.3}$$

Dans cette formule les A_i représentent des ensembles. Mais on peut aussi supposer en probabilité la formule crible de point carée que les A_i représentent des évènements et dans ce cas, les cardinaux seront remplacés par des probabilités. On obtiendra alors :

$$p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} p(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}) \right] \tag{1.5.4}$$

Preuve. Nous allons démontrer la formule de crible par récurrence :

Pour $n = 1$, on obtient : $|A_1| = |A_1|$, ce qui ne fait aucun doute.

Pour $n = 2$, on obtient : $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ très classique.

Supposons la formule de crible vraie à l'ordre n , et montrons que cela entraîne quelle est vraie à l'ordre $n+1$.

En effet

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \bigcap A_{n+1}\right|$$
$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \bigcap A_{n+1})\right|$$

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence sur le premier et le troisième terme.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| + |A_{n+1}| - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} \left|\bigcap_{j=1}^{n} (A_{i_j} \bigcap A_{n+1})\right|$$

Faisons un glissement d'indice dans le dernier terme.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| + |A_{n+1}| - \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} \left|\bigcap_{j=1}^{n} (A_{i_j} \bigcap A_{n+1})\right|$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} [(-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|] + |A_{n+1}| - \sum_{k=2}^{n+1} [(-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n+1} \left|\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right|]$$

On remarque que si l'on fait $k=1$ dans ma dernière somme, on obtient $\mid A_{n+1} \mid$ qui est justement le deuxième terme de la somme .On peut donc écrire :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} [(-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|] + \sum_{k=1}^{n+1} [(-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n+1} \left|\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right|]$$

Nous remarquons que le premier terme de la somme contient toutes les intersections des A_i ou ne figure pas A_{n+1} et le deuxième terme de la somme contient toutes les intersections des A_i ou figure A_{n+1}. Nous pouvons donc réunir ces deux sommes en une seule de la manière suivante :

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n+1} [(-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n+1} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|]$$

Ce qui nous montre que la formule du crible est vraie à l'ordre n+1

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} [(-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|]$$

1.6 Fonctions génératrices :

Définition 1.6.1. *Soit A un anneau commutatif intègre. On appelle* ***série formelle*** *sur A toute expression symbolique $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$ où les a_i, $i \in N$, sont dans A et le symbole x est appelée l'indéterminée. On note une série formelle en l'indéterminée x,*

$$S(x) = (a_n)_{n\in N} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... = \sum_{i\in N} a_i x^i \tag{1.6.1}$$

Exemple : S = 1 + 2.x + 3 x_2 + ... est une série formelle sur (Z,+,.)
S' = 1 + (1/2).x + (1/4) x_2 + ... est une série formelle sur (Q,+,.)

Définition 1.6.2. *Les fonction génératrices sont un outil algébrique qui permet de reformuler des problèmes de combinatoire a fin de les transformer en des problèmes de manipulation d'expressions algébriques.*

En particulier, en combinatoire, il s'agit souvent de déterminer le nombre d'objets d'un certain type qui sont de taille n, ce qui donne lieu à une suite $(a_n)_n$ dont on cherche à déterminer le n-ième terme.

La fonction génératrice associée à la suite (a_n) est la série formelle ("somme infinie")

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... = \sum_{k \geqslant 0} a_k x^k \tag{1.6.2}$$

En particulier, la série génératrice d'une suite finie est un polynôme.
Il y a deux points de vue pour voir une série : d'une part le point de vue algébrique et formel que nous utilisons ici, où x n'est qu'une variable sans aucun sens particulier, de sorte que finalement, une série génératrice, c'est juste une autre manière de noter une suite, de sorte à ce que les opérations que nous allons définir plus bas apparaissent naturellement. D'autre part, on peut voir une série du point de vue analytique, et regarder pour quelles valeurs réelles de x la série "converge", c'est-à-dire que la suite de ses sommes partielles

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \tag{1.6.3}$$

converge, ce qui est équivalent à dire que la suite des "restes"

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k, \tag{1.6.4}$$

tend vers 0.

Un exemple fondamental de série génératrice est la série génératrice de la suite constante égale à 1.
D'une part, elle est clairement égale à

$$A(x) = \sum_{n \geqslant 0} x^n \tag{1.6.5}$$

On l'appelle la série géométrique (car c'est la somme des termes d'une suite géométrique). On remarque alors que $A(x) - 1 = xA(x)$, donc $(1 - x)A(x) = 1$. Cela signifie que la série formelle $A(x)$ a un inverse c'est la série formelle $1 - x$. On notera cela d'une manière un peu plus suggestive :

$$\sum_{n \geqslant 0} x^n = \frac{1}{1 - x} \tag{1.6.6}$$

Où $\dfrac{1}{1-x}$ est ce qu'on appelle une fraction rationnelle. La formule de la somme des termes d'une suite géométrique nous dit que pour tout $N \geqslant 0$,

$$1 + x + x^2 + ... + x^N = \frac{1 - x^N}{1 - x} \tag{1.6.7}$$

Lorsque $x > 1$ ou $x \leqslant -1$, cette somme diverge quand N tend vers l'infini, donc nous ne pouvons pas en faire grand chose. Mais que se passe-t-il si $x \in]-1, 1[$. Alors x^{N+1} tend vers 0, donc le côté droit de la formule ci-dessus tend vers $\dfrac{1}{1-x}$. Nous venons de voir que la série $\sum_{n \geqslant 0} x^n$ converge sur l'intervalle $]-1, 1[$ et que sur cet intervalle la fonction $x \longmapsto \sum_{n \geqslant 0} x^n$ coïncide avec la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$. On cherchera souvent à trouver ce genre de "formes closes" pour les séries génératrices.

On définit la somme et le produit de deux séries formelles respectivement par :

$$\left(\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n\right) = \sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n)x^n \tag{1.6.8}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n \tag{1.6.9}$$

CHAPITRE 2

LES NOMBRES REMARQUABLES

Dans ce chapitre, nous présenterons certains nombres remarquables en listant certaines de leurs propriétés combinatoires. Pour des notions plus précises et détaillées, le lecteur pourra consulter [8],[5].

2.1 Nombre de Stirling de première espèce

Définition 2.1.1. *Les nombres de Stirling de première espèce signés $s(n,k)$ sont les coefficients des polynômes factoriels descendants vis-à-vis de la base canonique x^n, c'est-à-dire :*

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k \tag{2.1.1}$$

Remarque 1. *Le nombre s(n,k) a même signe que $(-1)^{n-k}$.*

Définition 2.1.2. *Les nombres de Stirling de première espèce non signés notée par $\mid s(n,k) \mid$ sont les coefficients du développement de la factorielle croissante $(x)^n$, c'est à dire que :*

$$(x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mid s(n,k) \mid x^k \tag{2.1.2}$$

On a :

$$\mid s(n,k) \mid = (-1)^{n-k}s(n,k) \tag{2.1.3}$$

Exemple.
Écrire $(x)_3$ comme un polynôme :

$$\begin{aligned}(x)_3 &= x(x-1)(x-2)\\ &= x^3 - 3x^2 + 2x\end{aligned}$$

Nous pouvons dire à partir de cet exemple que :
$s(3,0) = 0$
$s(3,1) = 2$
$s(3,2) = -3$
et $s(3,3) = 1$

Formule explicite

Les nombres de Stirling de première espèce $s(n,k)$, $k = 0,1,...,n$; $n = 0,1,...$, ont la formule explicite suivante :

$$s(n,k) = \sum_{m=0}^{n-k} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+m-1 \\ k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n-k \\ n-k-m \end{pmatrix} \frac{j^{n-k+m}}{m!} \tag{2.1.4}$$

Fonction génératrice double

les nombres de Stirling de première espèce $s(n,k)$ admettent la fonction génératrice exponentielle double :

$$\sum_{n,k\geq 0} s(n,k) \frac{x^n}{n!} t^k = (1+x)^t = e^{t\log(1+x)} \tag{2.1.5}$$

Interprétation combinatoire

La valeur absolue du nombre de Stirling de première espèce $\mid s(n,k) \mid$ compte le nombre de permutations de n objets composés exactement k cycles disjoints .

Relation de récurrence

Théorème 2.1.1. *Les nombres de Stirling de première espèce $s(n,k)$, $k = 0,1,...,n$ et $n = 0,1,...$, satisfont la relation récurrence triangulaire :*

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) - ns(n,k) \tag{2.1.6}$$

Avec les conditions initiales :

$$s(0,0) = 1, s(n,0) = 0, n > 0; s(n,k) = 0, k > n.$$

Théorème 2.1.2. *les nombres de Stirling de premières espèce $s(n,k)$, $k = 0,1,...,n$; $n = 0,1,...$, avec $s(0,0) = 1$, satisfont la relation récurrence horizontale :*

$$s(n+1,k+1) = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} s(n,j) \tag{2.1.7}$$

En utilisant la relation récurrence triangulaire et les conditions initiales, on peut calculer les premiers nombres de Stirling de première espèce $s(n,k)$:

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	-1	1					
3	0	2	-3	1				
4	0	-6	11	-6	1			
5	0	24	-50	35	-10	1		
6	0	-120	274	-225	85	-15	1	
7	0	720	-1764	1624	-735	170	-21	1

TABLE 2.1 – Nombre de Stirling de première espèce

2.2 Nombre de Stirling de seconde espèce

Définition 2.2.1. *Les Nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ noté aussi par $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$, comptent le nombre de relations d'équivalence ayant k classes d'équivalence définies sur un ensemble de n éléments, comptent aussi le nombre de partitions en k sous-ensembles d'un ensemble de n objets.*
Nous pouvons caractériser les nombres de Stirling de seconde espèce par :

$$\sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} (x)_k = x^n, \tag{2.2.1}$$

avec $n \geqslant 0$.

Formule explicite

Les nombres de Stirling de seconde espèce sont donnés par la formule explicite suivante :

$$S(n,k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (k-i)^n \tag{2.2.2}$$

Fonction génératrice

Les nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ admettent la fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n \geqslant k} S(n,k) \frac{x^n}{n!} = \frac{(e^x - 1)^k}{k!} \tag{2.2.3}$$

Interprétation combinatoire

Le nombre de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$ est le nombre de partition d'un ensemble à n éléments en k blocs.
Exemple. Soit A=$\{a,b,c\}$
Les partitions de A sont :
$\{\{a,b,c\}\}$
$\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$
$\{\{a,b\},\{c\}\}$
$\{\{a,c\},\{b\}\}$
$\{\{a\},\{b,c\}\}$

Alors :
$S(3,0) = 0$
$S(3,1) = 1$
$S(3,2) = 3$
$S(3,3) = 1$

Relation de récurrence

Les nombres de Stirling de second espèce ont une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux.

$$\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\} + k \left\{ \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\} \tag{2.2.4}$$

avec $\left\{ \begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\} = 1$ et $\left\{ \begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ n \end{array} \right\} = 0$, si $n > 0$.

Pour calculer les premiers nombres de Stirling de seconde espèce $S(n,k)$, en utilisant la relation de récurrence triangulaire et les conditions initiales, on trouve

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	6	1			
5	0	1	15	25	10	1		
6	0	1	31	90	65	15	1	
7	0	1	63	301	350	140	21	1

TABLE 2.2 – Nombre de Stirling de seconde espèce

2.3 Nombre de Bell

Définition 2.3.1. *Le nombre de Bell B_n est le nombre de toutes les partitions d'un ensemble à n éléments.*

Exemple. *Soit $A = \{a, b, c\}$.*
L'ensemble A peut-être partitionné de 5 manières distinctes :
$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$
$\{\{a\}, \{b, c\}\}$
$\{\{b\}, \{a, c\}\}$
$\{\{c\}, \{a, b\}\}$
$\{\{a, b, c\}\}$
Donc $B_3 = 5$

Formule explicite

Les nombres de Bell B_n admettent les deux formules explicites suivantes :

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}; \quad n \geqslant 0 \tag{2.3.1}$$

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^n}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} \tag{2.3.2}$$

Fonction génératrice

Les nombres de Bell admettent une fonction génératrice :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!} = \exp(e^t - 1) \tag{2.3.3}$$

Interprétation combinatoire

Le nombre de Bell est la somme des nombres de Stirling de second espèce. Les B_n vérifient :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) \tag{2.3.4}$$

Relation de récurrence

Les nombres de Bell admettent la relation récurrence suivante :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) B_k; \quad B_0 = 1, n \geqslant 0 \tag{2.3.5}$$

D'après la relation récurrence on peut calculer les premiers nombre de Bell :

B_0	1
B_1	1
B_2	2
B_3	5
B_4	15
B_5	52
B_6	203
B_7	877

TABLE 2.3 – Nombre de Bell

2.4 Nombre de Lah

Définition 2.4.1. *Les nombres de Lah comptent le nombre de façons dont un ensemble de n éléments peut être partitionné en k sous-ensembles ordonnés linéairement non vides, et notés souvent par $L(n,k)$. Nous adopterons la notation $\lfloor {n \atop k} \rfloor$.*

Les nombres de Lah $\lfloor {n \atop k} \rfloor$ permettent d'exprimer la factorielle montante en termes de factorielle descendante c'est-à-dire :

$$(x)^n = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\rfloor (x)_k \tag{2.4.1}$$

Nous pouvons déduire une relation entre les nombres de Lah et les nombres de Stirling depuis les relations (2.2.1) ,(2.1.1) et (2.4.1)

$$\left\lfloor \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\rfloor = \sum_{i=k}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} i \\ k \end{array} \right\}, \tag{2.4.2}$$

où $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right]$ et $\left\{ \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$ représentent, respectivement, les nombres de Stirling de première et de seconde espèce.

On a : $\left\lfloor \begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right\rfloor = n!$ et $\left\lfloor \begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right\rfloor = 1$

Exemple

Soit $A = \{1, 2, 3\}$
Nous voulons calculer $L(3, 1)$ c'est à dire :
nous cherchons le nombre de façons dont l'ensemble A peut-être partitionné en 1 sous-ensemble ordonnés $\{(1, 2, 3)\}; \{(1, 3, 2)\}; \{(2, 1, 3)\}; \{(2, 3, 1)\}; \{(3, 1, 2)\}; \{(3, 2, 1)\}$.

donc :

$$L(3, 1) = 6 = 3!$$

D'où :

$$L(n, 1) = n!$$

Maintenant $L(3, 2)$ c'est à dire :
nous cherchons le nombre de façons dont l'ensemble A peut-être partitionné en deux sous-ensembles ordonnés
$\{(1), (2, 3)\}; \{(1), (3, 2)\}; \{(2), (1, 3)\}; \{(2), (3, 1)\}; \{(3), (1, 2)\}; \{(3), (2, 1)\}$.

Donc :

$$L(3, 2) = 6$$

Pour $L(3, 3)$ c'est à dire :
nous cherchons le nombre de façons dont l'ensemble A peut être partitionné en trois sous-ensembles ordonnés. $\{(1), (2), (3)\}$

Donc :

$$L(3, 3) = 1$$

D'où :

$$L(n, n) = 1$$

Fonction génératrice

La fonction génératrice exponentielle associées aux nombres de Lah est donnée par :

$$\sum_{n \geq k} \left\lfloor \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\rfloor \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{x}{1 - x} \right)^k \tag{2.4.3}$$

Formule explicite

La forme explicite des nombres de Lah est donnée par :

$$\left\lfloor \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\rfloor = \frac{n!}{k!} \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right) \tag{2.4.4}$$

Relation récurrence

Les nombres de Lah ont une relation de récurrence triangulaire d'ordre deux

$$\left\lfloor \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\rfloor = \left\lfloor \begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right\rfloor + (n+k-1) \left\lfloor \begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right\rfloor \tag{2.4.5}$$

pour $k = 1, 2, ...n; n = 1, 2, ...$

Voici les premiers nombres de Lah :

$n\backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	2	1				
3	6	6	1			
4	24	36	12	1		
5	120	240	120	20	1	
6	720	1800	1200	300	30	1

TABLE 2.4 – Nombre de Lah

CHAPITRE 3

NOMBRE DE DÉRANGEMENTS

Dans ce chapitre nous définirons le nombre de dérangements et nous présenterons quelques-unes de ses propriétés. Nous terminons ce chapitre par le polynôme lies aux nombre de $r_$dérangements, se trouve dans [9] ,[13] [14] ,[15],[17],[12].

3.1 Nombre de dérangements

Définition 3.1.1. *Le nombre de dérangements d'un ensemble de taille n est le nombre de permutation sans point fixe de n éléments, on notera d_n.*
Il est connu aussi comme le sous-facteur de n, $!n$.

Exemple 2.1.1 :
Soit $E = \{1, 2, 3\}$ un ensemble de cardinalité 3, il y a $3! = 6$ permutation de cet ensemble.
Les permutations sans point fixe de cet ensemble sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc le nombre de dérangements égal à 2 c'est à dire : $d_3 = 2$

Théorème 3.1.1. *Pour tous entiers naturels n et k, on obtient très facilement par un argument d'inclusion-exclusion, la formule explicite suivante :*

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \tag{3.1.1}$$

avec les conditions initiales : $d_0 = 1$, $d_1 = 0$

Preuve. Soit E un ensemble de n èlèments
Le nombre de dérangements est $n! - N$ tq :
$n!$ est le nombre de tous permutation de n .
Et N est le nombre de façons d'organiser les n objets de telle manière qu'au moins un objet se trouve à sa bonne position.

Pour trouver N on utilise principe inclusion exclusion (PIE) (1.5).
Soit A_r l'ensemble des permutations dans lesquelles le $r^{éme}$ objets se met dans position original.

Le but est de trouver $N = \left| \bigcup_{r=1}^{n} A_r \right|$.
Remarquer que $|A_i| = (n-1)!\,;\ |A_i \bigcap A_j| = (n-2)!\,;\cdots$ ect
puis $\sum_i |A_i| = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} (n-1)!; \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| = \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} (n-2)!; \cdots; ect$
Maintenant, on utilise PIE :

$$\begin{aligned}
N &= \left| \bigcup_{r=1}^{n} A_r \right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \left| \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right| \right) \\
&= \sum_i |A_i| - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| + \cdots - .. + (-1)^{k+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\
&= \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} (n-1)! - \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} (n-2)! + \cdots - .. + (-1)^{n+1} \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} (n-n)! \\
&= \frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)! - \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{n!}{n!} \\
&= n! - \frac{n!}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1} \\
&= n!(1 - \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}) \\
&= n!(1 - \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)(-1)^{n}}{n!}) \\
&= n!(1 - \frac{1}{2!} + \cdots - \frac{(-1)^{n}}{n!})
\end{aligned}$$

Donc, le nombre de dérangements est :

$$\begin{aligned}
d^n &= n! - N \\
&= n! - n!(1 - \frac{1}{2!} + \cdots - \frac{(-1)^n}{n!}) \\
&= n!(1 - 1 + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}))
\end{aligned}$$

D'où :

$$d^n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Théorème 3.1.2. *A partir de la formule explicite on obtient le résultat asymptotique bien connu :*

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{d_n}{n!} = \frac{1}{e} \tag{3.1.2}$$

Dont une interprétation est que la probabilité qu'une permutation choisie uniformément parmi toutes les permutations soit un dérangement est asymptotiquement égale à 1/e .

Preuve 3.1.1. *Voir [13]*

Théorème 3.1.3. *Soit X une variable aléatoire continue qui suit la loi exponentielle de paramètre 1, alors :*

$$\mathbb{E}((X-1)^n) = d_n \tag{3.1.3}$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre 1,

on a la densité qui est définer par :
$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
Alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X-1)^n) &= \int_0^{+\infty} (x-1)^n f_X(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} (x-1)^n e^{-x} dx. \end{aligned}$$

Pour calculer cette intégrale, on utilise l'intégration par parties :

Soit :

$$\begin{cases} u = (x-1)^n \Rightarrow u' = n(x-1)^{n-1} \\ v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X-1)^n) &= \left[-(x-1)^n e^{-x}\right]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} (x-1)^{n-1} e^{-x} dx \\ &= (-1)^n + n \int_0^{+\infty} (x-1)^{n-1} e^{-x} dx \end{aligned}$$

Une deuxième intégration par parties on trouve :

$$\begin{cases} u = (x-1)^{n-1} \Rightarrow u' = (n-1)(x-1)^{n-2} \\ v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X-1)^n) &= (-1)^n + n \left[-(x-1)^{n-1} e^{-x}\right]_0^{+\infty} + (n-1) \int_0^{+\infty} (x-1)^{n-2} e^{-x} dx \\ &= (-1)^n + n(-1)^{n-1} + (n-1) \int_0^{+\infty} (x-1)^{n-2} e^{-x} dx \end{aligned}$$

Ainsi de suite on fait des intégrations par parties sur le dernier intégral, on obtient :

$$\mathbb{E}((X-1)^n) = (-1)^n + n(-1)^{n-1} + (n-1)(-1)^{n-2} + (n-2)(-1)^{n-3} + ... + 1,$$

d'où :

$$\mathbb{E}((X-1)^n) = d_n$$

Théorème 3.1.4. *Les nombres de dérangements satisfont la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} d_0 = 1 \\ d_n = n d_{n-1} + (-1)^n \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Déduire :

$$d_n = (n-1)\left(d_{n-2} + d_{n-1}\right), n \geq 2 \tag{3.1.5}$$

d_0	1
d_1	0
d_2	1
d_3	2
d_4	9
d_5	44
d_6	265

TABLE 3.1 – Nombre de dérangements

En utilisant la relation de récurrence et les conditions initiales, on peut calculer les premiers nombres de dérangements :

Preuve. Pour tous entiers naturels on a :

$$\begin{aligned} d_n &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \\ &= n(n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} + (-1)^n \\ &= n d_{n-1} + (-1)^n \\ \Rightarrow (-1)^n &= d_n - n d_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_n &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = n! \left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^k}{k!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right) \\ &= n(n-1) d_{n-2} + n(-1)^{n-1} + (-1)^n \\ &= n(n-1) d_{n-2} + (-1)^{n-1}(n-1) \\ &= n(n-1) d_{n-2} + (-1)^n (1-n), \end{aligned}$$

comme :

$$(-1)^n = d_n - n d_{n-1},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} d_n &= n(n-1) d_{n-2} + (1-n)\left(d_n - n d_{n-1}\right) \\ &= n^2 d_{n-2} - n d_{n-2} + d_n - n d_n - n d_{n-1} + n^2 d_{n-1} \\ n d_n &= n^2 d_{n-2} - n d_{n-2} - n d_{n-1} + n^2 d_{n-1} \\ d_n &= n d_{n-2} - d_{n-2} - d_{n-1} + n d_{n-1} \\ &= d_{n-2}(n-1) + d_{n-1}(n-1), \end{aligned}$$

donc on obtient :

$$d_n = (n-1)\left(d_{n-2} + d_{n-1}\right)$$

.

Théorème 3.1.5. *D'après la formule explicite on peut déduire la fonction génératrice exponentielle suivante :*

$$D(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \frac{x^n}{n!} = \frac{e^{-x}}{1-x} \tag{3.1.6}$$

Preuve. On a d'après la relation de récurrence (3.3.10) :

$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$ est valable pour $n \geqslant 1$ avec $d_0 = 1$

On multiplier cette récurrence par $\frac{x^n}{n!}$

On obtient :

$$\begin{aligned} d_n \frac{x^n}{n!} &= nd_{n-1}\frac{x^n}{n!} + (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= d_{n-1}\frac{x^n}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

On fait la somme sur les deux côtes :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geqslant 1} d_n \frac{x^n}{n!} &= \sum_{n\geqslant 1} (d_{n-1}\frac{x^n}{(n-1)!} + (-1)^n \frac{x^n}{n!}) \\ &= \sum_{n\geqslant 1} d_{n-1}\frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= x\sum_{n\geqslant 1} d_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ \sum_{n\geqslant 1} d_n \frac{x^n}{n!} - 1 &= (x\sum_{n\geqslant 1} d_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \frac{x^n}{n!}) - 1 \\ \sum_{n\geqslant 0} d_n \frac{x^n}{n!} &= x\sum_{n\geqslant 0} d_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ &\Rightarrow D(x) = xD(x) + \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

On a d'après développement limite :

$$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-x)^n}{n!} = e^{-x}$$

Alors on obtient :

$$D(x) = xD(x) + e^{-x}$$

$$(1-x)D(x) = e^{-x}$$

Donc :

$$D(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

3.2 Nombre de dérangements partielles

Définition 3.2.1. *Un dérangement partiel (également appelé nombre de rencontres) est un entier naturel défini comme le nombre de permutations d'un ensemble fini laissant invariant un certain nombre d'éléments de cet ensemble.*

Plus précisément, le dérangement partiel $d_{n,k}$ est le nombre de permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ ayant exactement k points fixes.

Exemple. Soit $E = \{1, 2, 3\}$ un ensemble de cardinalité 3, les permutations de cet ensemble ayant exactement 1 point fixe sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc le nombre de dérangement partielle égal a 3 $\quad d_{3,1} = 3$

Théorème 3.2.1. *Pour tous entiers naturels n et k, on obtient la formule explicite suivante :*

$$d_{n,k} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} d_{n-k} \tag{3.2.1}$$

Avec $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ est le coefficient de combinaison et d_{n-k} le nombre de dérangements.

Preuve. Pour chaque permutation ayant k points fixes, il y a

- $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ choix possibles de ces k points fixes (choisir k éléments parmi n) ;
- Ce choix effectué, la permutation agit comme une permutation sans point fixe sur les $n - k$ éléments restants. Il y a $d_{n-k,0}$ façon de déranger les points non fixes..

Le nombre de permutations ayant k points fixes vaut donc $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} d_{n-k}$.

Théorème 3.2.2. *Les nombres de dérangements partiels admettent la relation récurrence suivante :*

$$\begin{cases} d_{0,0} = 1 \\ d_{1,0} = 0 \\ d_{n+2,0} = (n+1)\left(d_{n+1,0} + d_{n,0}\right) \end{cases} \tag{3.2.2}$$

En utilisant la relation récurrence et les conditions initiales, on peut calculer les premiers nombres de dérangements :

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	0	1					
2	1	0	1				
3	2	3	0	1			
4	9	8	6	0	1		
5	44	45	20	10	0	1	
6	265	264	135	40	15	0	1

TABLE 3.2 – Nombre de dérangement partielles

Preuve. Pour tous entiers naturels on a :

$$d_{n,k} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} d_{n-k}$$

Alors :

$$\begin{aligned} d_{n+2,0} &= \begin{pmatrix} n-2 \\ 0 \end{pmatrix} d_{n+2} \\ &= d_{n+2} \end{aligned}$$

Donc d'après (3.1.5) on a :

$$d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$$

Alors :

$$d_{n+2,0} = (n+1)(d_{n+1,0} + d_{n,0})$$

Remarque 2. *La somme des cases de chaque ligne de la table de la section "valeurs numériques" est le nombre total de permutations de l'ensemble* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *,et est donc* $n!$*. Si l'on divise toutes les entrées de la* n *ième ligne par* $n!$ *, On obtient la distribution de probabilité du nombre de points fixes d'une permutation aléatoire uniformément distribuée de* $\{1, \ldots, n\}$ *. La probabilité que le nombre de points fixes soit* k *est :*

$$\frac{d_{n,k}}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{1}{i!} \tag{3.2.3}$$

Pour $n \geqslant 1$ *, le nombre attendu de points fixes est 1 (fait qui découle de la linéarité de l'espérance).*

Plus généralement, pour $i \leqslant n$ *, le* i *ème moment de cette distribution de probabilité est le* i *ème moment de la distribution de Poisson avec la valeur attendue 1. Pour* $i > n$ *, le* i *ème moment est plus petit que celui de cette distribution de Poisson . En effet, pour* $i \leqslant n$ *, le* i *ème moment est le* i *ème nombre de cloche , c'est-à-dire le nombre de partitions d'un ensemble de taille* i *.*
La somme qui définit $D_{n,k}$ *devient une série alternée que* n *tend vers l'infini. Elle est donc convergente, et on obtient :*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{n,k}}{n!} = \frac{e^{-1}}{k!} \tag{3.2.4}$$

Il s'agit de la probabilité qu'une variable aléatoire de Poisson de paramètre 1 soit égale à k*. Ainsi le nombre de points fixes converge en loi vers une loi de Poisson de paramètre 1. On constate la vitesse de cette convergence avec la colonne* $k = 0$ *du tableau précédent :* $e^{-1} \approx 0.367879$

Fonction génératrice

Les nombres de dérangements partielles admettent :

1. **Fonction génératrice ordinaire**
   Il y a deux types :
   (a) Fonction génératrice ordinaire pour colonne k est :

$$D_{n,k}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} d_{n,k}x^n = \frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty} n!\frac{x^n}{(1+x)^{n+1}}, \quad k \geq 0 \tag{3.2.5}$$

   (b) Fonction génératrice ordinaire pour rangée n est :

$$D_{n,k}(x) = \sum_{k=0}^{n} d_{n,k}x^k = n!\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(-1)^k(1-x)^k, \quad n \geq 0 \tag{3.2.6}$$

2. **Fonction de génération exponentielle** Fonction génératrice exponentielle pour le nombre de dérangement partielle est :

$$D_{n,k}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{d_{n,k}}{n!k!}x^n y^k = e^{\frac{x(y-1)}{1-x}}. \tag{3.2.7}$$

3.3 Nombre de r-dérangements

Premièrement, nous avons besoin de deux faits fondamentaux sur les permutations :

1) Toute permutation peut être décomposée en cycles disjoints.

2) Les points fixes sont des cycles de longueur 1.

Les faits 1) et 2) donnent lieu à l'observation simple suivante : fait dans la décomposition de cycle d'un dérangement chaque cycle a la longueur au moins deux.

Maintenant nous pouvons définir une généralisation des dérangements en ajoutant une nouvelle restriction à la définition de le nombre de dérangements. Nous pouvons maintenant donner la définition des nombres de r-dérangements :

Définition 3.3.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r \leqslant n$ le nombre de r-dérangements est une permutation sans point fixe de $n+r$ éléments tels que les r premiers éléments sont dans des cycles disjoints. On notera $D_r(n)$.*

Exemple.
Soit $n = 2$ et $r = 2$

Pour calculer le nombre de 2-dérangements tout d'abord, on calcule les permutations sans points fixes de n + r = 4 éléments.
Alors les permutations sans points fixes sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Parmi c'est permutations on a 2 permutations ou les 2 premiers éléments sont dans des cycles disjoints.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc le nombre de 2-dérangements égal à 2 c'est-à-dire $D_2(2) = 2$.

Théorème 3.3.1. *Les nombres de r-dérangements satisfont la relation récurrence suivante : Pour $n > 2$ et $0 < r \leqslant n$ on a :*

$$D_r(n) = rD_{r-1}(n-1) + (n-1)D_r(n-2) + (n+r-1)D_r(n-1) \tag{3.3.1}$$

Avec les conditions initiales sur r :

$$D_0(n) = D_n, \quad D_1(n) = D(n+1), \quad D_r(r) = r! \qquad (r \geq 1) \quad et \quad D_r(r+1) = r(r+1)! \qquad (r \geq 2).$$

Preuve. Si nous voulons construire une permutation sans point fixe sur $n+r$ éléments récursivement , nous pouvons commencer avec une permutation similaire sur $n+r-1$ éléments. En ajoutant le dernier élément $n+r$ à une telle permutation, nous avons deux cas principaux :

1. Le nouvel élément est dans une transposition (c'est-à-dire un cycle de deux longueurs). Dans ce cas, nous avons deux sous-cas.
   (a) Le nouvel élément partage son cycle avec un élément distingué. Cela offre r cas pour ce cycle. De plus, la permutation avec laquelle nous commençons doit déjà être un permutation sans point fixe $(r-1)$-partition sur $n+r-2$ éléments. Il y a $D_{r-1}(n-1)$ de telles permutations. Le premier terme sur la droite vient maintenant.
   (b) Le nouvel élément partage son cycle avec un élément non différencié de celui de $n-1$. Le reste de la permutation est une r-permutation sans poit fixe sur $n+r-2$ éléments. Ceci explique le second terminus (3.3.1)
2. Le nouvel élément est dans un cycle plus long que 2. Puis cet élément est inséré quelque part entre deux éléments dans la permutation ou à la fin. Comme nous avons $n+r-1$ éléments, nous avons $n+r-1$ endroits différents à insérer. Le nombre de permutations initiales est $D_r(n-1)$. Ce cas est compté par le troisième terme.

Une complexité supplémentaire de la récursion, par rapport à la particulièrement simple (3.1.5) , vient du fait qu'elle utilise non seulement les deux éléments précédents de la séquence mais un n élément de la séquence avec index $r-1$.

Les premiers membres de la séquence à partir de $D_2(2)$ sont :

$2, 12, 84, 640, 5430, 50988, 526568, 5940576, 72755370, 961839340, 13656650172, \ldots,$

tandis que les premiers membres de $D_3(n)$ à partir de $n = 3$ sont :

$6, 72, 780, 8520, 97650, 1189104, 15441048, 213816240, 3152287710, 49369524600, \ldots$

3.3.1 Propriétés fondamentales des nombres de r-dérangements

Tout d'abord, nous donnons la fonction génératrice exponentielle des nombres de r-dérangements et déduisons ensuite quelques relations combinatoires.

Théorème 3.3.2. *Pour tout $r \in \mathbb{N}$, la fonction génératrice exponentielle de nombre de r-dérangements est donné par :*

$$F_r(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_r(n)}{n!} x^n = \frac{x^r e^{-x}}{(1-x)^{r+1}} \tag{3.3.2}$$

Preuve. Nous allons prouver ce théorème par récurrence sur r.

(a) Si $r = 0$ donc $D_0(n) = d_n$, pour toute n $\in \mathbb{N}$ Alors :

$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_0(n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n.$$

Donc on parle ici sur la fonction génératrice exponentielle de nombre de dérangements alors :

$$F_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

(b) Si $r = 1$ donc $D_1(n) = D_{n+1} = d_{n+1}$. pour toute $n \in \mathbb{N}$ Alors :

$$F_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_1(n)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{D_1(n)}{n!} x^n \qquad (n \geqslant r),$$

donc :

$$F_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{D_1(n)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{D(n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d_{n+1}}{n!} x^n \quad (*)$$

D'après (3.1.5) on a : $d_{n+1} = n\left(d_{n-1} + d_n\right), \quad n \geqslant 1$ alors on remplace cette dernier on (*) on obtient :

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n d_{n-1} + n d_n) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n d_{n-1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} n d_n \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} d_{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \frac{x^n}{(n-1)!} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} d_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + x \sum_{n=1}^{+\infty} d_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

On a :

$$(**) \begin{cases} F_0(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{d_n}{n!} x^n = \dfrac{e^{-x}}{1-x} \\ F_0'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{d_n}{n!} n x^{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{d_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \left(\dfrac{e^{-x}}{1-x}\right)' = \dfrac{-e^{-x} + x e^{-x} + e^{-x}}{(1-x)^2} = \dfrac{x e^{-x}}{(1-x)^2} \end{cases}$$

On remplace $(**)$ dans $(*)$, on obtient :

$$\begin{aligned} F_1(x) &= x F_0 + x F_0' \\ &= x \left(\frac{e^{-x}}{1-x} + \frac{x e^{-x}}{(1-x)^2} \right) \\ &= x \left(\frac{(1-x)e^{-x} + x e^{-x}}{(1-x)^2} \right) \\ &= x \left(\frac{e^{-x} - x e^{-x} + x e^{-x}}{(1-x)^2} \right) \\ &= \frac{x e^{-x}}{(1-x)^2} = F_0'(x). \end{aligned}$$

Alors :

$$F_1(x) = F_0'(x)$$

(c) Pour $r \geqslant 2$, $F_{r-1}(x) = \dfrac{x^{r-1}e^{-x}}{(1-x)^r}$ et $r \leqslant n$,

on remplace (3.3.1) dans (3.3.2) on obtient :

$$\begin{aligned} F_r(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(rD_{r-1}(n-1) + (n-1)D_r(n-2) + (n+r-1)D_r(n-1))\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geqslant r}(rD_{r-1}(n-1) + (n-1)D_r(n-2) + (n+r-1)D_r(n-1))\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n\geqslant r} rD_{r-1}(n-1)\frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geqslant r}(n-1)D_r(n-2)\frac{x^n}{n!} + \sum_{n\geqslant r}(n-1)D_r(n-2)\frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

On pose :$F_r(x) = I(x) + J(x) + K(x)$.

Telle que :

$$\begin{cases} I(x) = \sum\limits_{n\geqslant r} rD_{r-1}(n-1)\dfrac{x^n}{n!} \\ J(x) = \sum\limits_{n\geqslant r}(n-1)D_r(n-2)\dfrac{x^n}{n!} \\ K(x) = \sum\limits_{n\geqslant r}(n+r-1)D_r(n-1)\dfrac{x^n}{n!} \end{cases}$$

On dérive les deux côtes par raport x , on obtient :

$$F_r'(x) = I'(x) + J'(x) + K'(x).$$

On a :
(1)

$$\begin{aligned} I(x) &= \sum_{n\geqslant r} rD_{r-1}(n-1)\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n-1\geqslant r-1} rD_{r-1}(n-1)\frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

On pose $n-1 = k \Rightarrow n = k+1$

$$\begin{aligned} I(x) &= \sum_{k\geqslant r-1} rD_{r-1}(k)\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= r\sum_{k\geqslant r-1} D_{r-1}(k)\frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

On dérive les deux côtes par rapport à x, on obtient :

$$\begin{aligned} I'(x) &= r\sum_{k\geqslant r-1} D_{r-1}(k)\frac{(k+1)x^k}{(k+1)k!} \\ &= r\sum_{k\geqslant r-1} D_{r-1}(k)\frac{x^k}{k!} = rF_{r-1}(x), \end{aligned}$$

d'où :

$$I'(x) = rF_{r-1}(x)$$

(2) D'autre part

$$\begin{aligned} J(x) &= \sum_{n\geqslant 2}(n-1)D_r(n-2)\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n-2\geqslant r}(n-1)D_r(n-2)\frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

On pose $n-2 = m \Rightarrow n = m+2$

$$J(x) = \sum_{m\geqslant r}(m+1)D_r(m)\frac{x^{m+2}}{(m+2)!}.$$

On dérive les deux côtes par rapport à x, on obtient :

$$\begin{aligned} J'(x) &= \sum_{m\geqslant r}(m+1)D_r(m)\frac{(m+2)x^{m+1}}{(m+2)(m+1)m!} \\ &= \sum_{m\geqslant r}D_r(m)\frac{x^{m+1}}{m!} \\ &= x\sum_{m\geqslant r}D_r(m)\frac{x^m}{m!} = xF_r(x), \end{aligned}$$

d'où :

$$J'(x) = xF_r(x).$$

(3) Et on a

$$\begin{aligned} K(x) &= \sum_{n-1\geqslant r}(n+r-1)D_r(n-1)\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n-1\geqslant r}nD_r(n-1)\frac{x^n}{n!} + \sum_{n-1\geqslant r}(r-1)D_r(n-1)\frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n-1\geqslant r}D_r(n-1)\frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n-1\geqslant r}(r-1)D_r(n-1)\frac{x^n}{n!} \\ &= x\sum_{n-1\geqslant r}D_r(n-1)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + (r-1)\sum_{n-1\geqslant r}D_r(n-1)\frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Supposons :

$$K_1(x) = x\sum_{n-1\geqslant r}D_r(n-1)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

On pose $n-1=i \Rightarrow n=i+1$

$$K_1(x)=x\sum_{i\geqslant r} D_r(i)\frac{x^i}{i!}=xF_r(x),$$

d'où :

$$K_1(x)=xF_r(x).$$

$$K_2(x)=(r-1)\sum_{n-1\geqslant r} D_r(n-1)\frac{x^n}{n!}.$$

On pose $n-1=j \Rightarrow n=j+1$

$$K_2(x)=(r-1)\sum_{j\geqslant r} D_r(j)\frac{x^{j+1}}{(j+1)!}.$$

On dérive les deux côtes par rapport à x, on obtient :

$$K_2'(x)=(r-1)\sum_{j\geqslant r} D_r(j)\frac{(j+1)x^j}{(j+1)j!}$$
$$K_2'(x)=(r-1)\sum_{j\geqslant r} D_r(j)\frac{x^j}{j!}=(r-1)F_r(x),$$

d'où :

$$K_2'(x)=(r-1)F_r(x).$$

Donc : $K(x)=K_1(x)+K_2(x)$, puis

On dérive les deux côtes par rapport x , on obtient :

$$\begin{aligned}K'(x)&=K_1'(x)+K_2'(x)\\&=(xF_r(x))'+(r-1)F_r(x).\end{aligned}$$

De (1),(2) et (3) on obtient :

$$\begin{aligned}F_r'(x)&=I'(x)+J'(x)+K'(x)\\&=rF_{r-1}(x)+xF_r(x)+(xF_r(x))'+(r-1)F_r(x)\\&=rF_{r-1}(x)+xF_r(x)+F_r(x)+xF_r'(x)+rF_r(x)-F_r(x)\\&=rF_{r-1}(x)+(x+r)F_r(x)+xF_r'(x)\\F_r'(x)-xF_r'(x)&=rF_{r-1}(x)+(x+r)F_r(x)\\(1-x)F_r'(x)&=rF_{r-1}(x)+(x+r)F_r(x)\\(1-x)F_r'(x)-(x+r)F_r(x)&=rF_{r-1}(x)\\(1-x)F_r'(x)-(x+r)F_r(x)&=\frac{rx^{r-1}e^{-x}}{(1-x)^r}\end{aligned}$$

C'est une équation différentielle linéaire non homogène d'orde 1 de la forme : $ay' - by = f(x)$.

On pose : $y = F_r(x)$, $f(x) = rF_{r-1}(x) = \dfrac{rx^{r-1}e^{-x}}{(1-x)^r}, a = (1-x)$ et $b = (x+r)$ avec la condition initial $y(0) = F_r(0) = D_r(0) = 0$.
Alors :

$$(S)\begin{cases} (1-x)y - (x+r)y = \dfrac{rx^{r-1}e^{-x}}{(1-x)^r} \\ y(0) = 0 \end{cases} \iff (S)\begin{cases} y - \dfrac{x+r}{1-x}y = \dfrac{rx^{r-1}e^{-x}}{(1-x)^{r+1}} \cdots\cdots (E) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

L'équation homogène associée à (E) est :

$$\begin{aligned} y' - \frac{x+r}{1-x}y &= 0 \cdot\cdot(H) \\ \frac{y'}{y} &= \frac{x+r}{1-x} \end{aligned}$$

On aura :

$$\begin{aligned} \log y &= \int \frac{x+r}{1-x}dx \\ &= \int \frac{x}{1-x}dx - r\int \frac{-1}{1-x}dx \\ &= -\int \frac{-(x+1-1)}{1-x}dx - r\int \frac{-1}{1-x}dx \\ &= -\left(\int \frac{1-x}{1-x}dx + \int \frac{-1}{1-x}dx\right) - r\log(1-x) + c' \\ &= -\left(x + c_2 + \log(1-x) + c_3\right) - r\log(1-x) + c_1 \\ &= -x - \log(1-x) + c_4 - r\log(1-x) + c_1; \qquad \mid c_4 = c_2 + c_3 \\ &= -x - \log(1-x) - \log(1-x)^r + c; \qquad \mid c = c_1 + c_4 \\ &= -x - \log(1-x)^{r+1} + c \\ y &= e^{-x}e^{-\log(1-x)^{r+1}}e^c; \quad \lambda = \pm e^c. \end{aligned}$$

La solution homogène de (H) est :

$$y_H = \frac{e^c}{e^x(1-x)^{r+1}} = \frac{\lambda}{e^x(1-x)^{r+1}}$$

On cherche une solution générale de (E) de la forme :

$$\begin{aligned} y_E &= \frac{\lambda(x)}{e^x(1-x)^{r+1}} \\ y'_E - \frac{x+r}{1-x}y_E &= \frac{rx^{r-1}e^{-x}}{(1-x)^{r+1}}. \end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
y'_{E} &= \frac{\lambda' e^x (1-x)^{r+1} - \left[e^x (1-x)^{r+1} - (r+1)(1-x)^r e^x\right]\lambda}{\left(e^x (1-x)^{r+1}\right)^2} \\
&= \frac{\lambda' e^x (1-x)^{r+1} - \lambda e^x (1-x)^{r+1} + \lambda(r+1)(1-x)^r e^x}{\left((1-x)^{r+1} e^x\right)^2} \\
&= \frac{e^x (1-x)^{r+1}\left(\lambda' - \lambda + \lambda(1-x)^{-1}(r+1)\right)}{\left((1-x)^{r+1} e^x\right)^2} \\
&= \frac{\lambda' - \lambda + \lambda(1-x)^{-1}(r+1)}{(1-x)^{r+1} e^x} \\
&= \frac{\lambda'(1-x) - \lambda(1-x) + \lambda(r+1)}{(1-x)^{r+2} e^x} \\
&= \frac{\lambda'(1-x) - \lambda + \lambda x + \lambda r + \lambda}{(1-x)^{r+2} e^x},
\end{aligned}$$

d'où :

$$y'_{E} = \frac{\lambda'(1-x) + \lambda(x+r)}{(1-x)^{r+2} e^x}.$$

Alors :

$$y'_{E} - \frac{x+r}{1-x} y_{E} = \frac{r x^{r-1} e^{-x}}{(1-x)^{r+1}}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \frac{\lambda'(1-x) + \lambda(x+r)}{(1-x)^{r+2} e^x} - \frac{(x+r)\lambda)}{(1-x) e^x (1-x)^{r+1}} = \frac{r x^{r-1} e^{-x}}{(1-x)^{r+1}} \\
& \frac{\lambda'(1-x) + \lambda(x+r)}{(1-x)^{r+2} e^x} - \frac{(x+r)\lambda}{e^x (1-x)^{r+2}} = \frac{r x^{r-1} e^{-x}}{(1-x)^{r+1}} \\
& \frac{\lambda'(1-x) + \lambda(x+r) - (x+r)\lambda}{(1-x)^{r+2} e^x} = \frac{r x^{r-1} e^{-x}}{(1-x)^{r+1}} \\
& \frac{\lambda'(1-x)}{(1-x)^{r+2} e^x} = \frac{r x^{r-1} e^{-x}}{(1-x)^{r+1}} \\
& \frac{\lambda'}{(1-x)^{r+1} e^x} = \frac{r x^{r-1} e^{-x}}{(1-x)^{r+1}} \\
& \lambda' = \frac{(1-x)^{r+1} e^x r x^{r-1} e^{-x}}{(1-x)^{r+1}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda' = r x^{r-1}.$$

On choisit $\lambda = x^r$.

Une solution particulière de (E) est :

$$y_{E} = \frac{x^r}{e^x (1-x)^{r+1}}$$

La solution générale de (E) est :

$$\begin{aligned} y &= y_H + y_E \\ &= \frac{\lambda}{(1-x)^{r+1}e^x} + \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}e^x} \\ &= \frac{\lambda + x^r}{(1-x)^{r+1}e^x} \end{aligned}$$

Avec $y(0) = 0$, on a $y(0) = \lambda = 0 \Rightarrow \quad \lambda = 0$

La solution de (S) est :

$$y(x) = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}e^x} = \frac{x^r e^{-x}}{(1-x)^{r+1}}$$

On a : $y = F_r(x) \Rightarrow \quad F_r(x) = \frac{x^r e^{-x}}{(1-x)^{r+1}}$.

D'où :

$$F_r(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{D_n}{n!} x^n = \frac{x^r e^{-x}}{(1-x)^{r+1}}$$

Théorème 3.3.3. *La fonction génératrice exponentielle de nombre de r-dérangements nous permet de déduire quelques identités. Ceux-ci seront prouvés par les arguments combinatoires :*

Soit $r \in \mathbb{N}_+$, et $n \in 1, \cdots, n$, alors pour chacun $n \geqslant r$ on a :

$$D_r(n) = \sum_{j=s}^{n} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ s-1 \end{array} \right) \frac{n!}{(n-j)!} D_{r-s}(n-j) \tag{3.3.3}$$

Particulièrement :

$$D_r(n) = \sum_{j=r}^{n} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ r-1 \end{array} \right) \frac{n!}{(n-j)!} D(n-j), n \geq r \tag{3.3.4}$$

Supplémentairement, nous avons une formule exact pour les nombres de r-dérangements :

$$D_r(n) = \sum_{j=r}^{n} \left(\begin{array}{c} j \\ r \end{array} \right) \frac{n!}{(n-j)!} (-1)^{n-j}, n \geq r \tag{3.3.5}$$

Preuve. Permettez-nous de développer la fonction F_r comme suit

$$\begin{aligned} F_r(x) &= \frac{x^r e^x}{(1-x)^{r+1}} \\ &= \frac{x^{r+s-s} e^x}{(1-x)^{r+1+s-s}} \\ &= \frac{x^{r-s} e^x}{(1-x)^{r+1-s}} * \frac{x^s}{(1-x)^s} \\ &= F_{r-s}(x) * \frac{x^s}{(1-x)^s} \end{aligned}$$

D'abord, je veux montrer cette égalité :

$$\left(\sum_{j=1}^{+\infty} x^j\right)^s = \sum_{j=s}^{+\infty} \begin{pmatrix} j-1 \\ s-1 \end{pmatrix} x^j.$$

- D'une part on a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{+\infty} x^j$$

, la somme d'une sérié géométrique, donc en multiple par x cette égalité on obtient :

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{j=1}^{+\infty} x^j,$$

d'où

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^s = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} x^j\right)^s$$

- D'autre part,par la Formule de Newton pour $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

. En particulier pour $\alpha = -s$ et sachant que $\binom{-s}{k} = (-1)^k \binom{s-1+k}{k}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^s} &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \begin{pmatrix} s-1+k \\ k \end{pmatrix} (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{s-1+k}{k} x^k \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^s = \frac{x^s}{(1-x)^s} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{s-1+k}{k} x^{k+s}$$

Par changement d'indice $k+s=j$ on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{1-x}\right)^s &= \sum_{j=s}^{+\infty} \binom{s-1+j-s}{j-s} x^j \\ &= \sum_{j=s}^{+\infty} \binom{j-1}{j-s} x^j \end{aligned}$$

Puisque

$$\binom{n}{k} = \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix}$$

On obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{1-x}\right)^s &= \sum_{j=s}^{+\infty} \begin{pmatrix} j-1 \\ j-1-j+s \end{pmatrix} x^j \\ &= \sum_{j=s}^{+\infty} \binom{j-1}{s-1} x^j \end{aligned}$$

d'où l'égalité.

Alors :

$$\begin{aligned} F_r(x) &= F_{r-s}(x) * \sum_{j=s}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ j-s \end{array} \right) x^j \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D_{r-s}(k)}{k!} x^k \right) * \left(\sum_{j=s}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ j-s \end{array} \right) x^j \right). \end{aligned}$$

Pour $k = n - j$

$$\begin{aligned} F_r(x) &= \left(\sum_{n=j}^{+\infty} \frac{D_{r-s}(n-j)}{(n-j)!} x^{n-j} \right) * \left(\sum_{j=s}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ j-s \end{array} \right) x^j \right) \\ &= \sum_{n=s}^{+\infty} \sum_{j=s}^{+\infty} \frac{D_{r-s}(n-j)}{(n-j)!} x^n x^{-j} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ j-s \end{array} \right) x^j \\ &= \left(\sum_{n=s}^{+\infty} \sum_{j=s}^{+\infty} \frac{D_{r-s}(n-j)}{(n-j)!} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ j-s \end{array} \right) \right) x^n \\ &= \left(\sum_{n=s}^{+\infty} \sum_{j=s}^{n} \frac{D_{r-s}(n-j)}{(n-j)!} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ j-s \end{array} \right) \right) x^n. \end{aligned}$$

En comparant les coefficients :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_r(n)}{n!} x^n &= \left(\sum_{n=s}^{+\infty} \sum_{j=s}^{n} \frac{D_{r-s}(n-j)}{(n-j)!} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ j-s \end{array} \right) \right) x^n \\ \sum_{n=s}^{+\infty} \frac{D_r(n)}{n!} x^n &= \left(\sum_{n=s}^{+\infty} \sum_{j=s}^{n} \frac{D_{r-s}(n-j)}{(n-j)!} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ j-s \end{array} \right) \right) x^n, \qquad (n \geqslant s) \\ \frac{D_r(n)}{n!} &= \sum_{j=s}^{n} \frac{D_{r-s}(n-j)}{(n-j)!} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ j-s \end{array} \right). \end{aligned}$$

D'où :

$$D_r(n) = \sum_{j=s}^{n} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ s-1 \end{array} \right) \frac{n!}{(n-j)!} D_{r-s}(n-j)$$

Pour $s = r$ et $n \geqslant r$ d'où :

$$D_r(n) = \sum_{j=r}^{n} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ r-1 \end{array} \right) \frac{n!}{(n-j)!} D(n-j)$$

Cela établit les identités (3.3.3) et (3.3.4).

L'identité (3.3.5) on démontre aussi avec le développement de la fonction F_r :

$$\begin{aligned} F_r(x) &= \frac{x^r e^{-x}}{(1-x)^{r+1}} \\ &= \frac{x x^r e^{-x}}{x(1-x)^{r+1}} \\ &= \frac{1}{x} \times \frac{x^{r+1}}{(1-x)^{r+1}} \times e^{-x} \\ &= \frac{1}{x} \times \left(\frac{x}{1-x}\right)^{r+1} \times e^{-x} \end{aligned}$$

On a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{+\infty} x^j$$

, la somme d'une sérié géométrique, donc en multiple par x cette égalité on obtient :

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{j=1}^{+\infty} x^j$$

, d'où

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{r+1} = \left(\sum_{j=1}^{+\infty} x^j\right)^{r+1}$$

D'autre part,par la Formule de Newton pour $\alpha \in \mathbb{C}$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

En particulier pour $\alpha = -(r+1)$ et sachent que $\binom{-(r+1)}{k} = (-1)^k \binom{-(r+1)-1+k}{k}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^{r+1}} &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{(r+1)-1+k}{k} (-x)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k}{k} x^k \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{r+1} = \frac{x^{r+1}}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{r+k}{k} x^{k+r+1}$$

. Par changement d'indice $k+r+1=t$ on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{1-x}\right)^{r+1} &= \sum_{t=r+1}^{+\infty} \binom{r+t-r-1}{t-r-1} x^t \\ &= \sum_{t=r+1}^{+\infty} \binom{t-1}{t-r-1} x^t \end{aligned}$$

puisque

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

on obtient

$$\left(\frac{x}{1-x}\right)^{r+1} = \sum_{t=r+1}^{+\infty} \binom{t-1}{t-1-t+r+1} x^j$$
$$= \sum_{t=r+1}^{+\infty} \binom{t-1}{r} x^t$$

d'où l'égalité.

Et on a d'après le développement limites

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k.$$

D'où :

$$F_r(x) = \frac{1}{x} \sum_{t=r+1}^{+\infty} \binom{t-1}{r} x^t \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$$
$$= \sum_{t=r+1}^{+\infty} \binom{t-1}{r} x^{t-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k.$$

On pose $t-1=j$:

$$F_r(x) = \sum_{j+1=r+1}^{+\infty} \binom{j}{r} x^j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k$$
$$= \sum_{j=r}^{+\infty} \binom{j}{r} x^j \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k.$$

Pour $k=n-j$

$$F_r(x) = \sum_{j=r}^{+\infty} \binom{j}{r} x^j \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!} x^{n-j}$$
$$= \sum_{j=r}^{+\infty} \binom{j}{r} x^j \sum_{n=j}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!} x^n x^{-j}$$
$$= \sum_{j=r}^{+\infty} \binom{j}{r} \sum_{n=r}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!} x^n.$$

D'après (1.4.1) on obtient :

$$F_r(x) = \sum_{n=r}^{+\infty} \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r} \frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!} x^n$$

En comparant les coefficients :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D_r(n)}{n!}x^n = \sum_{n=j}^{+\infty}\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}\frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!}x^n$$
$$\sum_{n=r}^{+\infty} \frac{D_r(n)}{n!}x^n = \sum_{n=r}^{+\infty}\sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}\frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!}x^n$$
$$\frac{D_r(n)}{n!}x^n = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}\frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!}x^n$$
$$\frac{D_r(n)}{n!} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}\frac{(-1)^{n-j}}{(n-j)!},$$

d'où :

$$D_r(n) = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}\frac{n!}{(n-j)!}(-1)^{n-j}$$

3.3.2 La relation du nombre de r-dérangements avec le nombre de Lah

Théorème 3.3.4. *Soit $r \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}_+$ alors :*

$$(r+1)!L(n,r+1) = \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) kD_r(n-k) \tag{3.3.6}$$

Preuve.

Nous fournissons maintenant une preuve du ce théorème qui, utilise un argument combinatoire. Tout d'abord, supposons que $r = 0$. Alors l'égalité du ce théorème prend la forme : $n! = \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) kD(n-k)$, et cela peut être justifié par le fait que le nombre attendu de points fixes d'une permutation aléatoire est égal à 1 (chaque permutation d'un ensemble à n éléments peut être traitée comme un dérangement d'un ensemble avec $n-k$ éléments , où k est le nombre de points fixes de cette permutation).

Considérons maintenant le cas $r > 0$. $L(n, r+1)$ est le nombre de partitions de n éléments en $r+1$ séquences, où l'ordre des séquences n'est pas mentionné . Donc $(r+1)!L(n,r+1)$ est le nombre de partitions de n éléments en $r+1$ séquences, où leur ordre est pris en compte . D'autre part, nous pouvons déterminer chaque partition de la manière suivante. Dans un premier temps, nous fixons un nombre $j \in \{r, ..., n\}$ pour être un nombre d'éléments créant les r premières listes.

Ensuite, nous choisissons ces j éléments et les définissons dans une séquence (ce qui peut être fait de $\frac{n!}{(n-j)!}$ Façons). Puis, nous divisons cette séquence en r listes en choisissant $r-1$ éléments parmi $j-1$ (de $\left(\begin{array}{c} j-1 \\ r-1 \end{array} \right)$ manières) étant les premiers éléments des deuxième, troisième,..., et $r^{éme}$ liste (le premier élément de la séquence de début devient le premier élément de la première liste).

Enfin, nous construisons la $(r+1)^{ère}$ liste à partir des $n-j$ éléments restants (de $(n-j)!$ Manières). On obtient ainsi l'égalité :

$$(r+1)!L(n,r+1) = \sum_{j=r}^{n} \left(\begin{array}{c} j-1 \\ r-1 \end{array} \right) \frac{n!}{(n-j)!}(n-j)!$$

Maintenant, nous utilisons le simple fait que :

$$(n-j)! = \sum_{k=0}^{n-j} \left(\begin{array}{c} n-j \\ k \end{array} \right) D(n-j-k)$$

A partir du théorème (3.3.4) nous obtenons l'égalités suivante :

$$\sum_{j=r}^{n}\left(\begin{array}{c} j-1 \\ r-1 \end{array}\right)\frac{n!}{(n-j)!}(n-j)! = \sum_{j=r}^{n}\left(\begin{array}{c} j-1 \\ r-1 \end{array}\right)\frac{n!}{(n-j)!}\sum_{k=0}^{n-j}\left(\begin{array}{c} n-j \\ k \end{array}\right)kD(n-j-k)$$
$$= \sum_{j=r}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\left(\begin{array}{c} j-1 \\ r-1 \end{array}\right)\frac{n!}{(n-j)!}\frac{(n-j)!}{k!(n-j-k)!}kD(n-j-k)$$

On sait que : $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ ce qui implique : $\dfrac{1}{k!} = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\dfrac{(n-k)!}{n!}$.

Alors :

$$\sum_{j=r}^{n}\left(\begin{array}{c} j-1 \\ r-1 \end{array}\right)\frac{n!}{(n-j)!}(n-j)! = \sum_{j=r}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\left(\begin{array}{c} j-1 \\ r-1 \end{array}\right)\frac{n!}{(n-j)!}\frac{(n-j)!(n-k)!}{n!(n-j-k)!}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)kD(n-j-k)$$
$$= \sum_{j=r}^{n}\sum_{k=0}^{n-j}\left(\begin{array}{c} j-1 \\ r-1 \end{array}\right)\frac{(n-k)!}{(n-j-k)!}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)kD(n-j-k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-j}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)k\sum_{j=r}^{n-k}\left(\begin{array}{c} j-1 \\ r-1 \end{array}\right)\frac{(n-k)!}{(n-j-k)!}D(n-j-k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)kD_r(n-k)$$

3.3.3 Polynômes liés aux nombres de r-dérangements

Fixons $n \in \mathbb{N}$. Nous étudions comment les valeurs de la séquence $(D_r(n+r))_{r\in\mathbb{N}}$ peuvent être exprimées par les valeurs d'un polynôme.

Utilisons la formule exacte (3.3.5) pour $D_r(n+r)$.

$$D_r(n+r) = \sum_{j=r}^{n+r}\left(\begin{array}{c} j \\ r \end{array}\right)\frac{(n+r)!}{(n+r-j)!}(-1)^{n+r-j}$$
$$= \sum_{j=r}^{n+r}\left(\begin{array}{c} j \\ j-r \end{array}\right)\frac{(n+r)!}{(n+r-j)!}(-1)^{n+r-j}.$$

On pose $j-r=j$, alors :

$$D_r(n+r) = \sum_{j=0}^{n}\left(\begin{array}{c} j+r \\ j \end{array}\right)\frac{(n+r)!}{(n-j)!}(-1)^{n-j}$$
$$= \sum_{j=0}^{n}\frac{(j+r)!}{j!r!}\frac{(n+r)!}{(n-j)!}(-1)^{n-j}.$$

D'où :
$(n+r)_r = \dfrac{(n+r)!}{n!} \Rightarrow (n+r)! = n!(n+r)_r.$
$(j+r)_j = \dfrac{(j+r)!}{r!} \Rightarrow (j+r)! = r!(j+r)_j.$

Donc :

$$\begin{aligned} D_r(n+r) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{r!(j+r)_j}{j!r!} \frac{n!(n+r)_r}{(n-j)!}(-1)^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n} (j+r)_j \frac{n!}{j!(n-j)!}(n+r)_r(-1)^{n-j} \\ &= (n+r)_r \sum_{j=0}^{n} (j+r)_j \frac{n!}{j!(n-j)!}(-1)^{n-j}, \end{aligned}$$

alors :

$$D_r(n+r) = (n+r)_r \sum_{j=0}^{n} (j+r)_j \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) (-1)^{n-j}. \tag{3.3.7}$$

Nous définissons le polynôme :

$$P_n(X) = \sum_{j=0}^{n} (j+X)_j \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) (-1)^{n-j} \in \mathbb{Z}[X]. \tag{3.3.8}$$

Alors nous pouvons écrire pour tous $r \in \mathbb{N}$

$$D_r(n+r) = (n+r)_r P_n(r) \tag{3.3.9}$$

Proposition 3.3.1. *Pour $n > 0$ la relation récurrence de P_n est :*

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0 = 1 \\ P_n(X) = (X+1)P_{n-1}(X+1) - P_{n-1}(X) \end{array} \right. \tag{3.3.10}$$

Preuve. On a :

$$P_n(X) = \sum_{j=0}^{n} (j+X)_j \left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) (-1)^{n-j}$$

Comme : $\left(\begin{array}{c} n \\ j \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j-1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array} \right)$,

alors :

$$P_n(X) = \sum_{j=0}^{n} (j+X)_j \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j-1 \end{array} \right) (-1)^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} (j+X)_j \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j \end{array} \right) (-1)^{n-j}.$$

Si on pose :

$P_n(X) = K(x) + L(x)$,

alors :

$$\begin{aligned} k(x) &= \sum_{j=0}^{n} (j+X)_j \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j-1 \end{array} \right) (-1)^{n-j} \\ &= (0+X)_0 \left(\begin{array}{c} n-1 \\ -1 \end{array} \right) (-1)^{n-0} + \sum_{j=1}^{n} (j+X)_j \left(\begin{array}{c} n-1 \\ j-1 \end{array} \right) (-1)^{n-j}. \end{aligned}$$

Comme $\begin{pmatrix} n \\ -m \end{pmatrix} = 0$, m entier on a :

$$\begin{aligned} K(x) &= \sum_{j=1}^{n} (j+X)_j \begin{pmatrix} n-1 \\ j-1 \end{pmatrix} (-1)^{n-j} \\ &= \frac{1+X}{1+X} \sum_{j=1}^{n} (j+X)_j \begin{pmatrix} n-1 \\ j-1 \end{pmatrix} (-1)^{n-j} \\ &= (1+X) \sum_{j=1}^{n} \frac{(j+X)!}{(1+X)X!} \begin{pmatrix} n-1 \\ j-1 \end{pmatrix} (-1)^{n-j} \\ &= (1+X) \sum_{j=1}^{n} \frac{(j+X)!}{(1+X)!} \begin{pmatrix} n-1 \\ j-1 \end{pmatrix} (-1)^{n-j}. \end{aligned}$$

Pour $j-1 = j' \Rightarrow j = j'+1$

$$\begin{aligned} K(x) &= (1+X) \sum_{j'=0}^{n-1} \frac{(j'+1+X)!}{(1+X)!} \begin{pmatrix} n-1 \\ j' \end{pmatrix} (-1)^{n-j'-1} \\ &= (1+X) \sum_{j'=0}^{n-1} (j'+1+X)_{j'} \begin{pmatrix} n-1 \\ j' \end{pmatrix} (-1)^{n-j'-1}. \end{aligned}$$

Alors :

$$K(x) = (1+X) P_{n-1}(X)$$

.

D'autre part :

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{j=0}^{n} (j+X)_j \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} (-1)^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+X)_j \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} (-1)^{n-j} + (n+x)_n \begin{pmatrix} n-1 \\ n \end{pmatrix} (-1)^{n-n}. \end{aligned}$$

Comme $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 0, k > n$,alors :

$$\begin{aligned} L &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+X)_j \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} (-1)^{n-j} \\ &= \frac{(-1)^{(-1)}}{(-1)^{(-1)}} \sum_{j=0}^{n-1} (j+X)_j \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} (-1)^{n-j} \\ &= -\sum_{j=0}^{n-1} (j+X)_j \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} (-1)^{n-j-1}. \end{aligned}$$

Alors :

$$L(x) = -P_{n-1}(x)$$

Donc :

$$P_n(X) = (1+X) P_{n-1}(X+1) - P_{n-1}(X).$$

Corollaire 3.3.1. *Pour tous $r \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}_+$ on a :*

$$D_{r+1}(n) = \frac{n-r}{r+1} D_r(n) + \frac{n}{r+1} D_r(n-1) \tag{3.3.11}$$

Proposition 3.3.2. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$,on a :*

$$P_n(X) \pmod 2 = \begin{cases} \left(X^2+X+1\right)^{\frac{n}{2}}, & Si\ 2 \mid n \\ X\left(X^2+X+1\right)^{\frac{n-1}{2}}, & Si\ 2 \nmid n \end{cases} \tag{3.3.12}$$

Preuve. Voir [**?**],[**?**].

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié la combinatoire des nombres de dérangements et de r-dérangements, ce qui nous a permit de construire les polynômes de r-dérangements.

Dans le premier chapitre, nous avons donneé les éléments de base pour la combinatoire énumérative à savoir : partitions, permutations, coefficient binomiaux, principe d'inclusion-exclusion, fonctions génératrices et dénombrement.

Au deuxième chapitre, nous avons étudieé les suites des nombres remarquables comme les nombres de Stirling, Bell et Lah avec leurs propriétés.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous introduisons les nombres de dérangements et r-dérangements par des arguments combinatoires ce qui nous a permis de construire les polynômes de r-dérangements.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A.Z. Broder, The r -Stirling numbers, Discrete Math. 49(1984)241 − 259.

[2] C.A.Charalambides, Enumerative Combinatorics, Chapman et Hall/CRC, 2002.

[3] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, Concrete Mathematics, Addison Wesley, 1993.

[4] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, Concrete Mathematics, A Foundation for Computer Science, 2nd ed, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, (1994).

[5] M.S. MAAMRA,Combinatoire de certaines classes de polynômes de partition. These de Doctorat d'état en Mathématiques, USTHB, 2016.

[6] P. Miska, Arithmetic properties of the sequence of derangements, J. Number Theory 163(2016)114 − 145

[7] G. Nyul and G. Rácz, The r-Lah numbers, Discrete Math. 338 (10) (2015) 1660-1666.

[8] M. RAHMANI, Etude Combinatoire et Analytique des Suites et des Polynômes, These de Doctorat d'état en Mathématiques, USTHB, 2013.

[9] J. Remmel ,A note on a recursion for the number of derangements, Europ. J. Combinatorics, vol. 4, p. 371-374.

[10] M. Shattuck, Generalizations of Bell number formulas of Spivey and Mezö, Filomat (in press).

[11] N.J.A.Sloane, The on-line encyclopedia of integer sequences,`https://oeis.org/A002426`, `https://oeis.org/A005717andhttps://oeis.org/A001006`.

[12] C.Y. Wang, P. Miska and I. Mezo, The r-derangement numbers, Discrete Math. 340 (2017), 1681–1692.

[13] E.W. Weisstein, Derangement, from MathWorld A Wolfram Web Resource, as of 2010-12-19.

[14] E.W. Weisstein, "Partial Derangements". MathWorl de `https://mathworld.wolfram.com/PartialDerangement.html`

[15] E.W. Weisstein, Subfactorial, from MathWorl A Wolfram Web Resource, as of 2010-12-19

[16] E.Weisstein,Wolfram mathworld,`http://mathworld.wolfram.com/TrinomialCoefficient.html`,`http://mathworld.wolfram.com/MotzkinNumber.htmlandhttp://mathworld.wolfram.com/CentralTrinomialCoefficient.html`.

[17] H. Wilf, Generatingfunctionology, second ed., Academic Press, 1994