RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DR. YAHIA FARÈS DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Présenté par

Yahiaoui Bouchra

Sur quelques problèmes elliptiques non-linéaires

Soutenu publiquement le. .juin 2025 devant le jury composé de

Président :	Haoues Bagua	Université de Médéa
Examinateur :	Rezak Souilah	Université de Médéa
Encadreur :	Khaled Bouadjila	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2024-2025

Table des matières

Résumé **6**

Abstract **7**

Introduction **8**

Notations **10**

1 Préliminaires **11**
1.1 Rappel sur les espaces de Lebesgue et espaces de Sobolev 11
1.1.1 Espaces de Lebesgue 11
1.1.2 Espaces de Sobolev 13

2 Problèmes elliptiques linéaires et semi-linéaires **16**
2.1 Théorèmes de Lax-Milgram et Stampacchia 16
2.1.1 Théorème de Lax-Milgram 16
2.1.2 Théorème de Stampacchia 17
2.2 Problème linéaire 18
2.3 Quelques problèmes semi-linéaires 18
2.3.1 Méthode des sous et sur-solutions 20

3 Problème elliptique semi-linéaire avec une non-linéarité singulière **23**
3.1 Position de problème 23
3.2 Approximation de (P_4) 24
3.3 Le cas $\gamma = 1$ 27
3.3.1 Estimations a priori 27
3.3.2 Existence 28
3.3.3 Régularité de la solution 28
3.4 Le cas $\gamma > 1$ 30
3.4.1 Estimations a priori 30
3.4.2 Existence 31
3.4.3 Régularité de la solution 31
3.5 Le cas $\gamma < 1$ 31
3.5.1 Estimations a priori 31

3.5.2 Existence 32
3.5.3 Régularité de la solution 32

Remerciement

Louange à Allah, unique sans associé,
qui ma accordé la force et la patience pour mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui mont accompagné(e) et soutenu(e) durant cette étape importante de ma vie universitaire.

Merci tout dabord à **Monsieur Bouajila Khaled**, mon encadrant, pour sa patience, ses conseils précieux et son soutien constant qui ont été essentiels à la réussite de ce travail.

Je remercie également mes professeurs de lUniversité Yahia Fares de Médéa, notamment ceux de département de *Mathématiques et Informatique*, ainsi que ceux du Master *Analyse Mathématique et Applications Mathématiques*, pour la qualité de leur enseignement et disponibilité.

Un remerciement tout particulier à **mes parents bien-aimés**, pour leur patience inlassable, leur soutien indéfectible à chaque étape de ma vie.
Alhamdoulillah, jai pu leur apporter de la joie grâce à ce travail.

Je remercie aussi **mes frères et surs** pour leur amour et leurs encouragements constants.

Enfin, je remercie **mes amis** et toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire.

Dédicace

Je dédie et avec amour et gratitude mon mémoire de fin d'études, Au premier enseignant « notre prophète Muhamed », nous guidant sur le chemin de savoir.

À celui qui a embelli mon nom des plus beaux titres, au soutien sur lequel je me suis appuyé dans ma fatigue et ma tristesse, à l'épaule sur laquelle j'ai reposé mes fardeaux, à celui qui m'a soutenu sans limite et donné sans attendre en retour, à celui qui m'a appris que la vie est un combat et que son arme est le savoir et la connaissance. « Mon père », le meilleur soutien que j'ai eu dan les éprouves,

À mon cher et bien-aimé, que j'aime autant que ce monde, à celui que Dieu a fait de son cœur tendre une source de paix, qui m'a embrassé avant ses mains et a allégé mes épreuves par ses prières, à la bougie qui a brillé dans les nuits sombres, ma fierté et mon succès, à mon ange pur et ma force après Dieu. « Ma mère », qui possèdes un paradis sous tes pieds.

سنشد عضلك بأخيك

À mes bras droits, mes frères Anwar,Sidali, que Dieu les conserve comme des piliers solides pour moi.

Aux cœurs pleins de sincérité de l'amour, vers les sentiments constantes, à ceux qui m'ont soutenu dans mes faiblesses, ma sœur Hanane.

À l'emblème de la fidélité, à mes sources de bois, à ceux qui m'ont comblé d'amour, mon épous Djihad .

À tous ceux qui m'ont donné un coup de main dans ce voyage, que ce soit de près ou de loin.
Et enfin,

J'ai obtenu mon succée et j'ai embrassé aujourd'hui une grande gloire,

Le rêve n'était pas proche et le chemin n'était pas facile, mais... je suis arrivé.

وَكَانَ فَضْلُ اللَّهِ عَلَيْكَ عَظِيمًا



Résumé

Dans ce mémoire, nous étudierons l'existence des solutions pour certains types de problèmes elliptiques, linéaires et semi linéaires, en mobilisant différentes méthodes selon la nature du problème considéré.

Abstract

In this thesis, we will study the existence and uniqueness of solutions for certain types of linear and semilinear elliptic problems, employing different methods depending on the nature of the problem under consideration.

Introduction

Lobjectif de ce mémoire est létude de quelques problèmes elliptiques linéaires et semi-linéaires, plus précisément, soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N > 3$, f est une fonction non négative appartenant à un espace de Lebesgue, et M est une matrice elliptique bornée ; c'est-à-dire qu'ils existent $0 < \alpha \leq \beta$ tels que

$$M(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2, \quad |M(x)| \leq \beta,$$

pour tout ξ dans $\mathbb{R}^N$, et pour presque tout x dans Ω.
Nous analysons quatre types de problèmes :

Problème linéaire

$$(P_1) \begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Problèmes semi-linéaires

$$(P_2) \begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) + g(u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction croissante et lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe $C > 0$ telle que :

$$|g(s) - g(t)| \leq C|s - t| \quad \forall s, t \in \mathbb{R}.$$

$$(P_3) \begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = g(u) + f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec g croissante, continue et vérifiant $|g(s)| \leq \gamma|s|^a$ pour $\gamma > 0$ et $a \leq \frac{N+2}{N-2}$.

Problème singulier

$$(P_4)\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u) = \dfrac{f(x)}{u^{\gamma}} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\gamma > 0$ est un paramètre réel.
Pour l'étude de ces problèmes on utilise différentes méthodes selon la nature du problème considéré.
Le manuscrit est organisé en trois chapitres :

— **Chapitre 1** : Présente les outils fondamentaux d'analyse fonctionnelle nécessaires à notre étude, notamment les espaces de Lebesgue et de Sobolev.

— **Chapitre 2** : Consacré à l'analyse des problèmes linéaires et semi-linéaires (P_1)-(P_3), avec application des théorèmes de Lax-Milgram et Stampacchia, ainsi que la méthode des sous/sur-solutions.

— **Chapitre 3** : Analyse approfondie du problème singulier (P_4), incluant des résultats d'existence et de régularité en fonction des valeurs du paramètre γ.

Notations

Ω	Un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	Frontière topologique de Ω
$x = (x_1, \ldots, x_N)$	Point générique de $\mathbb{R}^N$
$dx = dx_1 \ldots dx_N$	Mesure de Lebesgue sur Ω
$\overline{\Omega}$	Adhérence de Ω
$\rightharpoonup$	Convergence faible
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	Convergence faible étoile
p.p.	Presque partout
V	Espace de Banach
H	Espace de Hilbert
V'	Dual topologique de V
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$	Crochet de dualité
$\| \cdot \|$	Norme sur V
$(\cdot, \cdot)$	Produit scalaire sur H
$\lvert \cdot \rvert$	Norme sur H
$\mathbb{R}^{m \times N}$	Espace des matrices réelles
Id	Matrice identité
$f^+ = \max(f, 0)$	Partie positive de f
$f^- = \max(-f, 0)$	Partie négative de f
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue
$\mathcal{D}(\Omega) = \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$	Fonctions C^∞ à support compact dans Ω
$\mathscr{C}^k(\Omega)$	Fonctions k-fois continûment différentiables
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace des distributions
$W^{1,p}(\Omega)$	$\{u \in L^p(\Omega) \mid \nabla u \in L^p(\Omega)\}$
$W_0^{1,p}(\Omega)$	Fermeture de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$
$W^{-1,p'}(\Omega)$	Dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$)
$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$	Espace de Sobolev

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappel sur les espaces de Lebesgue et espaces de Sobolev

N est un entier naturel non nul, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

1.1.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1.

1. *On désigne par $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, l'espace des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que la quantité*
$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}$$
est finie.
2. *Pour $p = \infty$, on désigne par $L^\infty(\Omega)$, l'espace des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que la quantité*
$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$
est finie.

Remarque 1.1. *La quantité $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ définit une norme sur les espaces $L^p(\Omega)$. De plus, $(L^p(\Omega), \|.\|_{L^p(\Omega)})$ sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, séparables pour $1 \leq p < \infty$ et réflexifs pour $1 < p < \infty$.*

Proposition 1.1 (Inégalité de Young[1])**.** *Soient p et p' deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Pour tout réel positif a et b , on a*
$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}.$$

Théorème 1.1 (Inégalité de Hölder [1]). *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et on a l'inégalité suivante :*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats de convergence et de densité.

Théorème 1.2 (Théorème de convergence monotone de Beppo-Levi[9]). *Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions de $L^1(\Omega)$, telle que $\sup_n \int_\Omega f_n \mathrm{d}x < \infty$. Alors f_n converge p.p. sur Ω vers une fonction $f \in L^1(\Omega)$ et $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0$.*

Théorème 1.3 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue[9]). *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que $(f_n)_n$ converge p.p. sur Ω vers une fonction f et qu'il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour chaque n : $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. $x \in \Omega$. Alors $f \in L^p(\Omega)$ et $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$.*

Théorème 1.4 (Réciproque du théorème de Lebesgue[9]). *Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ telles que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors il existe une sous-suite $(f_{k_n})_n$ telle que*

1. *$(f_{k_n})_k$ converge p.p. sur Ω vers f.*
2. *Il existe $h \in L^p(\Omega)$ tel que pour tout n : $|f_{k_n}(x)| \leq h(x)$ p.p. $x \in \Omega$.*

Théorème 1.5 (Théorème de densité[2]). *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$. C'est-à-dire pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $f \in L^p(\Omega)$, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que : $\|f - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq \epsilon$.*

Définition 1.2. *Soit E un espace de Banach. On appelle dual de E et note E' l'espace de toutes les formes linéaires continues f sur E, et on écrit $f(x) := \langle f, x\rangle$ $(x \in E)$.*

Théorème 1.6 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet[1]). *Soit H un espace de Hilbert et H' est son dual. Alors pour tout élément $f \in H'$, il existe un unique élément $x \in H$ tels que*

$$\langle f, y\rangle = (x, y) \text{ pour tout } y \in H,$$

et $\|f\| = \|x\|$, où $(\ ,\ )$ désigne le produit scalaire sur H. De plus l'application $f \longmapsto x$ est linéaire et continue.

Théorème 1.7. *[2] Soit $p \in]1, +\infty[$. Pour tout élément $f \in (L^p(\Omega))'$, il existe un unique élément $g \in L^{p'}(\Omega)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ tel que*

$$\langle f, v\rangle_{(L^p(\Omega))' \times L^p(\Omega)} = \int_\Omega gv \mathrm{d}x, \quad \forall v \in L^p(\Omega).$$

De plus, on a

$$\|f\|_{(L^p(\Omega))'} = \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Ce théorème nous permet d'identifier le dual de $L^p(\Omega)$ avec $L^{p'}(\Omega)$.

Définition 1.3 (Convergence faible). *Une suite $(x_n)_n$ est dite converge faiblement vers x dans un espace de Banach E et on note $x_n \rightharpoonup x$, si pour tout élément $f \in E'$, on a*

$$\langle f, x_n\rangle_{E'\times E} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{E'\times E} \text{ quand } n \to +\infty.$$

Proposition 1.2. *[6] Une suite $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ est dite converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ si et seulement si pour tout $g \in L^{p'}(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega f_n g \mathrm{d}x \longrightarrow \int_\Omega f g \mathrm{d}x, \text{ quand } n \to \infty.$$

1.1.2 Espaces de Sobolev

Définition 1.4. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $p \in [1, \infty]$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit l'espace de Sobolev :*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ tel que } |\alpha| \leq k\}.$$

(les dérivées ici sont au sens de distributions). Et on définit sur $W^{k,p}(\Omega)$ la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Définition 1.5. *Avec les mêmes notations on définit les espaces $W_0^{k,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\Omega)$.*

Remarque 1.2. *Pour $p = 2$, on note $H^k(\Omega) := W^{k,p}(\Omega)$ et $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,p}(\Omega)$. Ces deux espaces sont des espaces de Hilbert.*

Définition 1.6. *On dit que la fonction $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ appartient à l'espace $\mathcal{C}^\alpha(\Omega)$, pour $\alpha \in]0, 1]$ si :*

$$\rho_\alpha(u) := \sup_{x,y\in\Omega,\ x\neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

On munit $\mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ par la norme suivante :

$$|u|_\alpha := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \rho_\alpha(u).$$

On définit aussi les espaces de Hölder $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, par

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\Omega) : |u|_{k,\alpha} := \sum_{\beta\in\mathbb{N}^N;|\beta|\leq k} |D^\beta u|_\alpha < \infty,\ \}.$$

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{u \in \mathcal{C}(\Omega)/\ \exists v \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N) : v_{|\overline{\Omega}} = u\}.$$

Les espaces ainsi définis sont des espaces de Banach.

Théorème 1.8. *[11] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1. Alors, les injections canoniques suivantes*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & si\ \ p < N \\ L^q(\Omega),\ \forall q > 1, & si\ \ p = N \\ C^\alpha(\overline{\Omega}) & si\ \ p > N \end{cases}$$

sont continues, où $p^* = \frac{Np}{N-p}$ (i.e. $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$) et $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, pour tout $p \geq 1$. De plus, pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a les inégalités suivantes :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \tag{1.9}$$

$$|u|_\alpha \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

où $C_1,\ C_2 > 0$.

Théorème 1.9 (Rellich-Kondrachov [11])**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 et $1 \leq p < N$. Alors l'injection canonique suivante*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ pour tout } q < p^* \tag{1.11}$$

est compacte, où $p^* = \frac{Np}{N-p}$.

Un résultat important qui découle de ce théorème est l'inégalité de Poincaré :

Théorème 1.10 (Inégalité de Poincaré [11])**.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 et $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.12}$$

Définition 1.7. *On définit l'espace $W^{-1,p'}(\Omega)$ comme l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Autrement dit un élément f de $W^{-1,p'}(\Omega)$ est une forme linéaire continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, et on note par $\langle\ ,\ \rangle$ le crochet de dualité entre $W^{-1,p'}(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$. Et rappelons que

$$\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\langle f, v\rangle}{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \langle f, v\rangle,$$

et

$$\langle f, v\rangle \leq \|f\|_{W^{-1,p'}} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Théorème 1.11 (Caractérisation de $W^{-1,p'}(\Omega)$ [1])**.** *Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Alors il existe*

$$f^0, f^1, \ldots, f^N \quad \text{dans } L^p(\Omega),$$

tels que pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega \left(f^0 v + \sum_{i=1}^N f^i v_{x_i} \right) \mathrm{d}x, \tag{1.13}$$

et

$$\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{i=0}^{N} |f^i|^p \right)^{1/p}. \tag{1.14}$$

En particulier si $f \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ *alors*

$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega f v \mathrm{d}x \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Théorème 1.12 ([5]). *[Formule de Green] Soit* Ω *un ouvert borné de classe* $\mathcal{C}^1$ *et* Γ *son bord.* $\forall u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$*, on a :*

$$\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v \, d\Gamma - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$ *(la dérivée normale de* u*).*

Théorème 1.13 ([10]). *Soient* p *et* q *deux réels vérifiant* $1 < p < \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*,* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$*, de bord* Γ*, variété lipschitzienne de dimension* $n-1$*,* $\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_n)$ *la normale extérieure à* Ω *en un point de* Γ*, alors on a la formule suivante dite formule de Green :*

$$\forall (u, v) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) : \quad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = \int_\Gamma u v n_i \, ds + \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx,$$

où la normale est notée $\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_n)$*.*

Théorème 1.14 (Théorème de composition de Nemitski). *[4] Soient* $p, q \geq 1$*. Soit* $f(x,t) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de Carathéodory. On suppose qu'il existe une fonction positive* $a \in L^q(\Omega)$ *et une constante* $b > 0$ *telles que*

$$|f(x,t)| \leq a(x) + b|t|^{\frac{p}{q}}.$$

Alors l'opérateur

$$\begin{aligned} \Phi : L^p(\Omega) &\to L^q(\Omega) \\ u(x) &\mapsto f(x, u(x)) \end{aligned}$$

est continu.

Théorème 1.15 (Théorème du point fixe de Schauder). *[12]. Soit* X *un espace de Banach,* K *un convexe fermé de* X *et* S *une application continue de* K *dans* K *telle que* $S(K)$ *est relativement compact, alors* S *admet un point fixe.*

Chapitre 2

Problèmes elliptiques linéaires et semi-linéaires

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions pour des problèmes elliptiques linéaires et semi-linéaires.
Soit Ω un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N > 3$. Nous supposons que $M(x)$ est une matrice symétrique $N \times N$ avec les propriétés suivantes :

1. M est elliptique, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $M(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$;
2. M est bornée, c'est-à-dire qu'il existe $\beta > 0$ tel que $|M(x)| \leq \beta$ pour tout $x \in \Omega$.

La première classe de problèmes que nous considérerons est linéaire :

$$(P_1) \begin{cases} -\text{div}(M(x)\nabla u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Ensuite, nous ajouterons une non-linéarité en u de la forme :

$$(P_2) \begin{cases} -\text{div}(M(x)\nabla u) + g(u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Les résultats d'existence que nous présenterons sont basés sur des résultats d'Analyse fonctionnelle de Lax, Milgram et Stampacchia (voir [4]).

2.1 Théorèmes de Lax-Milgram et Stampacchia

2.1.1 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram est un outil simple et efficace pour la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques. Dans toute la suite, H désigne un espace de Hilbert [2].

Définition 2.1 (Forme bilinéaire). *Soit H un espace de Hilbert. On appelle forme bilinéaire sur H toute application*

$$a : H \times H \to \mathbb{R}$$
$$(u, v) \mapsto a(u, v)$$

telle que pour tous u_1, u_2 et v appartenant à H, pour tout réel λ nous ayons

$$a(\lambda u_1 + u_2, v) = \lambda a(u_1, v) + a(u_2, v)$$

et pour tous u, v_1 et v_2 appartenant à H, pour tout réel λ nous ayons

$$a(u, \lambda v_1 + v_2) = \lambda a(u, v_1) + a(u, v_2).$$

Définition 2.2 (Forme bilinéaire continue et coercive). *On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \to \mathbb{R}$ est 1. Continue : s'il existe une constante C, telle que :*

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|\|v\|, \quad \forall u, v \in H.$$

2. Coercive : s'il existe une constante $\alpha > 0$, telle que :

$$a(v, v) \geq \alpha\|v\|^2, \quad \forall v \in H.$$

Corollaire 2.1 (Théorème de Lax-Milgram). *Soit $a(u, v)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\phi \in H'$, il existe $u \in H$ unique tel que :*

$$a(u, v) = \langle \phi, v \rangle, \quad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété suivante :

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \phi, u \rangle = \min_{v \in H} \left(\frac{1}{2}a(v, v) - \langle \phi, v \rangle \right).$$

2.1.2 Théorème de Stampacchia

Proposition 2.1. *[4] Soit H un espace de Hilbert et $K \subseteq H$ un ensemble convexe fermé. Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire, continue, coercive, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que*

$$a(u, v) \leq \beta\|u\|\|v\|$$

et

$$a(u, u) \geq \alpha\|u\|^2$$

pour tout $u, v \in H$. Alors, pour tout $g \in H'$ fixé, il existe un unique $u \in K$ tel que

$$a(u, v - u) \geq \langle g, v - u \rangle, \quad \forall v \in K.$$

Théorème 2.1 (Stampacchia). *[4] Soit H un espace de Hilbert. Soit $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme continue et linéaire en deuxième variable telle que*

1. $|a(\psi_1, w) - a(\psi_2, w)| \leq \beta\|\psi_1 - \psi_2\|\|w\|, \forall \psi_1, \psi_1, w \in H$;
2. $|a(\psi_1, \psi_1 - \psi_2) - a(\psi_2, \psi_1 - \psi_2)| \geq \beta\|\psi_1 - \psi_2\|^2, \forall \psi_1, \psi_1 \in H.$

Alors, pour tout $\phi \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que $a(u, w) = \phi(w)$ pour tout $w \in H$.

2.2 Problème linéaire

Dans cette section, nous considérons le problème linéaire

$$(P_1)\begin{cases} -\text{div}(M(x)\nabla u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous remarquons qu'en prenant M comme la matrice identité, on obtient le problème de Dirichlet pour l'opérateur Laplacien :

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Nous avons le résultat d'existence et unicité suivant

Théorème 2.2. *Soit $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ au problème (P_1). Autrement dit,*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Démonstration. Définissons

$$a(u,v) = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla v, \quad L(v) = \int_\Omega fv\,dx.$$

Il est facile de voir que a est continue. En effet, puisque M est bornée par l'hypothèse 2, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|a(u,v)| \leq \int_\Omega |M(x)\nabla u \cdot \nabla v| \leq \beta \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

D'autre part, a est coercive, puisque $M(x)\xi \cdot \xi \geq \alpha|\xi|^2$ et donc

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla u \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Pour L : Par Cauchy-Schwarz et Poincaré,

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq C_P \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1}.$$

Le résultat découle du théorème de Lax-Milgram. □

2.3 Quelques problèmes semi-linéaires

Dans cette section, nous étudions le problème semi-linéaire suivant :

$$(P_2)\begin{cases} -\text{div}(M(x)\nabla u) + g(u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Théorème 2.3. *Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Supposons que g est Lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe une constante positive C telle que*

$$|g(s) - g(t)| \leq C|s - t| \quad \forall s, t \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Soit $f \in L^2(\Omega)$. Alors il existe une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$ au problème (P_2) au sens suivant :

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega g(u)v = \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Démonstration. On définit la forme suivante sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$:

$$a(u, w) = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla w \, dx + \int_\Omega g(u)w \, dx,$$

avec g vérifiant la condition de Lipschitz :

$$|g(s) - g(t)| \leq C|s - t| \quad \forall s, t \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Montrons que pour u fixé dans $H_0^1(\Omega)$, la forme $a(u, \cdot)$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$. On écrit $a(u, w) = A(u, w) + B(u, w)$ avec :

$$A(u, w) = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla w \, dx, \quad B(u, w) = \int_\Omega g(u)w \, dx.$$

Continuité de $A(u, \cdot)$: Par Cauchy-Schwarz et la bornitude de M :

$$|A(u, w)| \leq \|M\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2}.$$

Si $w_n \to w$ dans $H_0^1(\Omega)$, alors :

$$|A(u, w_n) - A(u, w)| \leq \|M\|_{L^\infty} \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla(w_n - w)\|_{L^2} \to 0.$$

Continuité de $B(u, \cdot)$: Comme g est Lipschitzienne et $u \in L^2(\Omega)$, on a $g(u) \in L^2(\Omega)$. Par Cauchy-Schwarz :

$$|B(u, w)| \leq \|g(u)\|_{L^2} \|w\|_{L^2}.$$

Si $w_n \to w$ dans $H_0^1(\Omega)$, alors :

$$|B(u, w_n) - B(u, w)| \leq \|g(u)\|_{L^2} \|w_n - w\|_{L^2} \to 0.$$

De plus, a satisfait l'hypothèse 1 du théorème 2.1 car

$$\begin{aligned} |a(u_1, w) - a(u_2, w)| &= \left| \int_\Omega M(x)\nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla w + \int_\Omega [g(u_1) - g(u_2)]w \right| \\ &\leq \beta \|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} + C\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant de l'hypothèse 2 sur M et de l'hypothèse (2.2) sur g. Enfin, a satisfait l'hypothèse 2 du théorème 2.1 :

$$\begin{aligned} a(u_1, u_1 - u_2) - a(u_2, u_1 - u_2) &= \int_\Omega M(x)\nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla(u_1 - u_2) + \int_\Omega [g(u_1) - g(u_2)](u_1 - u_2) \\ &\geq \alpha \|\nabla(u_1 - u_2)\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

puisque M est elliptique et g est croissante. Le résultat découle du théorème 2.1. □

2.3.1 Méthode des sous et sur-solutions

Dans cette section, nous étudierons le problème semi-linéaire

$$(P_3)\begin{cases} -\text{div}(M(x)\nabla u) = g(u) + f, & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

sous les hypothèses suivantes :

1. $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$;
2. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante et continue ; il existe $\gamma > 0$ tel que $|g(s)| \leq \gamma|s|^a$, avec $a \leq \frac{N+2}{N-2}$.

Définition 2.3. *Une fonction $\underline{u} \in H_0^1(\Omega)$ est une sous-solution au problème (P_3) si pour toute fonction positive $v \in H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_\Omega M(x)\nabla \underline{u} \cdot \nabla v \leq \int_\Omega g(\underline{u})v + \int_\Omega fv.$$

Une fonction $\overline{u} \in H_0^1(\Omega)$ est une sur-solution au problème (P_1) si pour toute fonction positive $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega M(x)\nabla \overline{u} \cdot \nabla v \geq \int_\Omega g(\overline{u})v + \int_\Omega fv.$$

Théorème 2.4. *Sous les hypothèses précédentes, soient $\underline{u}$ et $\overline{u}$ une sous-solution et une sur-solution au problème (P_3) telles que $u \leq \overline{u}$ presque partout dans Ω. Alors il existe une solution $u \in H_0^1(\Omega)$ au problème (P_3) ; de plus, $u \leq u \leq \overline{u}$ presque partout dans Ω.*

Théorème 2.5 (Principe du maximum)**.** *Soit $u \in H_0^1(\Omega)$.*

1. *Supposons que $\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla v \leq 0$ pour toute fonction positive $v \in H_0^1(\Omega)$. Alors $u \leq 0$.*
2. *Supposons que $\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla v \geq 0$ pour toute fonction positive $v \in H_0^1(\Omega)$. Alors $u \geq 0$.*

Démonstration. (1) Choisissons $v = u^+$, c'est-à-dire la partie positive de u, comme fonction test. Alors

$$\int_\Omega M(x)\nabla u^+ \cdot \nabla u^+ = \int_\Omega M(x)\nabla(u^+ - u^-) \cdot \nabla u^+ \leq 0.$$

En utilisant l'ellipticité de M, on obtient $u^+ = 0$.

(2) Choisissons $v = u^-$, c'est-à-dire la partie négative de u, comme fonction test. Alors

$$0 \leq \int_\Omega M(x)\nabla(u^+ - u^-) \cdot \nabla u^- = -\int_\Omega M(x)\nabla u^- \cdot \nabla u^-.$$

L'ellipticité de M donne $u^- = 0$. □

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème (2.4).

Démonstration. La preuve est divisée en deux étapes : dans la première, nous construisons une suite u_n dans $H_0^1(\Omega)$ par récurrence et montrons que $u \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq \overline{u}$; dans la seconde, nous prouvons que cette suite converge vers une solution u du problème (P_3).
Étape I : Posons $u_1 = \underline{u}$; soit $u_n \in H_0^1(\Omega)$ la solution de

$$\begin{cases} -\text{div}(M(x)\nabla u_n) = g(u_{n-1}) + f, & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0, & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Une telle solution existe d'après le Théorème (2.3), puisque $g(u_{n-1}) + f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$. Montrons par récurrence que la suite u_n est croissante. Pour toute fonction $\varphi \geq 0$, par les hypothèses et la définition de u_2, on a

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_1 \cdot \nabla\varphi \leq \int_\Omega [g(u_1) + f]\varphi$$

et

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_2 \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega [g(u_1) + f]\varphi.$$

Par conséquent,

$$\int_\Omega M(x)\nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla\varphi \leq 0.$$

Le Théorème (2.5) implique que $u_1 - u_2 \leq 0$.

Montrons maintenant que $u_n \leq u_{n+1}$, en supposant que $u_n \geq u_{n-1}$. Nous avons

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega [g(u_{n-1}) + f]\varphi$$

et

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_{n+1} \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega [g(u_n) + f]\varphi.$$

Ainsi,

$$\int_\Omega M(x)\nabla(u_n - u_{n+1}) \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega [g(u_{n-1}) - g(u_n)]\varphi.$$

Comme g est croissante, $g(u_{n-1}) \leq g(u_n)$ et donc $u_n \leq u_{n+1}$ d'après le Théorème (2.5). Par conséquent, la suite u_n est croissante. Avec la même technique, on peut prouver que $u_n \leq \overline{u}$.
Étape II : Nous voulons montrer que u_n converge vers une solution du problème (P_3). Montrons d'abord que u_n converge vers une fonction $u \in L^{2^*}(\Omega)$. Comme u_n est croissante et $u_n \leq \overline{u}$, la suite $u_n(x)$ admet une limite presque partout, notée $u(x)$. D'après l'Étape I, on a $|u_n| \leq |\underline{u}| + |\overline{u}|$; en passant à la limite, on obtient $|u| \leq |\underline{u}| + |\overline{u}| \in L^{2^*}(\Omega)$. Par conséquent, pour une constante positive $C(N)$,

$$|u_n - u|^{2^*} \leq C(N)(|u_n|^{2^*} + |u|^{2^*}) \leq C(N)(|\underline{u}| + |\overline{u}|)^{2^*} \in L^1(\Omega).$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue implique que $u_n \to u$ dans $L^{2^*}(\Omega)$. En utilisant le Théorème1.14 et l'hypothèse 2 sur g, on a $g(u_n) \to g(u)$ dans $L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$.

Montrons maintenant que u est une solution du problème (P_3). Par définition de u_n, on a

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n = \int_\Omega (g(u_{n-1}) + f)u_n.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour le terme de droite et l'ellipticité de M pour le terme de gauche, on obtient

$$\alpha \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|g(u_{n-1}) + f\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)} \|u_n\|_{L^{2^*}(\Omega)}.$$

Le terme de droite est uniformément borné ; par conséquent, u_n est bornée dans $H^1_0(\Omega)$ et, quitte à extraire une sous-suite, converge faiblement dans $H^1_0(\Omega)$ vers une limite qui est nécessairement u. On peut maintenant passer à la limite dans

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_{n+1} \cdot \nabla v = \int_\Omega [g(u_n) + f]v, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

pour obtenir

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla v = \int_\Omega [g(u) + f]v, \quad \forall v \in H^1_0(\Omega),$$

ce qui signifie que u est une solution du problème (P_3). □

Chapitre 3

Problème elliptique semi-linéaire avec une non-linéarité singulière

3.1 Position de problème

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence de solutions pour le problème elliptique semi-linéaire suivant avec une non-linéarité singulière :

$$(P_4)\begin{cases} -\text{div}(M(x)\nabla u) = \frac{f(x)}{u^\gamma} & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un sous-ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N > 3$, $\gamma > 0$ est un nombre réel, f est une fonction non négative appartenant à un espace de Lebesgue, et M est une matrice elliptique bornée ; c'est-à-dire qu'il existe $0 < \alpha \leq \beta$ tels que

$$M(x)\xi \cdot \xi > \alpha|\xi|^2, \quad |M(x)| \leq \beta, \tag{3.1}$$

pour tout ξ dans $\mathbb{R}^N$, et pour presque tout x dans Ω.

Définition 3.1. *Une solution de (P_4) est une fonction u dans $W_0^{1,1}(\Omega)$ telle que*

$$\forall \omega \subset\subset \Omega, \exists c_\omega : u \geq c_\omega > 0 \text{ dans } \omega, \tag{3.2}$$

et

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{f\varphi}{u^\gamma}, \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega). \tag{3.3}$$

Remarque 3.1. *Grâce à la condition (3.2), le deuxième membre de (3.3) est bien défini. En effet, comme f appartient à l'espace de Lebesgue $L^1(\Omega)$ et pour tout $\varphi \in C_0^1(\Omega)$, on a u satisfait la condition (3.2). L'inégalité de Hölder donne :*

$$\int_\Omega \left|\frac{f\varphi}{u^\gamma}\right| dx \leq \frac{1}{c_\omega^\gamma}\|f\|_{L^1(\Omega)}\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{3.4}$$

3.2 Approximation de (P_4)

Pour démontrer nos résultats, nous procéderons par approximation, en ń tronquant ż le terme singulier $\frac{1}{u^\gamma}$ de manière à ce qu'il ne soit plus singulier à l'origine, et en étudiant le comportement d'une suite u_n de solutions des problèmes approchés. En raison de la nature de l'approximation, la suite u_n sera croissante en n.
Soient f une fonction mesurable positive (non identiquement nulle), $n \in \mathbb{N}$, et $f_n(x) = \min(f(x), n)$. Considérons le problème suivant :

$$(P_n)\begin{cases} -\text{div}(M(x)\nabla u_n) = \frac{f_n}{(u_n+\frac{1}{n})^\gamma} & \text{dans } \Omega, \\ u_n > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Lemme 1. *Le problème (P_n) admet une solution positive u_n dans $H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.*

Démonstration. Fixons $n \in \mathbb{N}$ assez grand. Soit $v \in V = L^2(\Omega)$. On définit l'application

$$\begin{aligned} S : V &\longrightarrow V \\ v &\longmapsto S(v) = w, \end{aligned} \tag{3.5}$$

tel que $w = S(v)$ est lunique solution du problème [1] :

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla w) = \frac{f_n}{(|v|+\frac{1}{n})^\gamma} & \text{dans } \Omega, \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Prenons w comme fonction test dans (3.6), et utilisons la coercivité de la matrice M nous obtenons

$$\alpha \int_\Omega |\nabla w|^2 \leq \int_\Omega M(x)\nabla w \cdot \nabla w = \int_\Omega \frac{f_n w}{(|v| + \frac{1}{n})^\gamma} \leq n^{\gamma+1} \int_\Omega |w|.$$

En utilisant linégalité de Poincaré dans le membre gauche et linégalité de Hölder dans le membre droit dans linégalité précédente on trouve :

$$\int_\Omega |w|^2 \leq \alpha \int_\Omega |\nabla w|^2 \leq n^{\gamma+1} \int_\Omega |w| \leq C n^{\gamma+1} \left(\int_\Omega |w|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce qui implique que

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} \leq C n^{\gamma+1}.$$

Donc la boule dans $L^2(\Omega)$ de rayon $Cn^{\gamma+1}$ est invariante par S. Montrons maintenant que S est continu et compact.

1. Le problème (3.6) admet une unique solution via le théorème 2.2

• **La continuité de S :** Notons $w_k := S(v_k)$ et $w := S(v)$. Montrons que si

$$\lim_{k\to+\infty} \|v_k - v\|_{L^2(\Omega)} = 0 \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} \|w_k - w\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Soit w_k solution du problème

$$\begin{cases} -\text{div}(M(x)\nabla w_k) = \frac{f_n}{(|v_k|+\frac{1}{n})^\gamma} & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.7}$$

et w solution du problème

$$\begin{cases} -\text{div}(M(x)\nabla w) = \frac{f_n}{(|v|+\frac{1}{n})^\gamma} & \text{dans } \Omega \\ w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.8}$$

En faisant la soustraction entre (3.7) et (3.8), et prenons $w_k - w$ comme fonction test on obtient

$$\int_\Omega M(x)\nabla(w_k - w)\cdot\nabla(w_k - w) = \int_\Omega (w_k - w)\left[\frac{f_n}{(|v_k| + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n}{(|v| + \frac{1}{n})^\gamma}\right].$$

En utilisant la coercivité de la matrice M nous obtenons :

$$\alpha\int_\Omega |\nabla(w_k - w)|^2 \leq \int_\Omega (w_k - w)\left[\frac{f_n}{(|v_k| + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n}{(|v| + \frac{1}{n})^\gamma}\right].$$

En utilisant linégalité de Poincaré dans le membre gauche et linégalité de Hölder dans le membre droit dans linégalité précédente on trouve :

$$\|w_k - w\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C\|w_k - w\|_{L^2(\Omega)}\left(\int_\Omega \left|\frac{f_n}{(|v_k| + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n}{(|v| + \frac{1}{n})^\gamma}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce qui nous donne

$$\|w_k - w\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\int_\Omega \left|\frac{f_n}{(|v_k| + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n}{(|v| + \frac{1}{n})^\gamma}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remarquons que

$$\left|\frac{f_n}{(|v_k| + \frac{1}{n})^\gamma} - \frac{f_n}{(|v| + \frac{1}{n})^\gamma}\right| \leq 2n^{\gamma+1}.$$

Par le théorème de convergence dominée nous concluons que

$$\lim_{k\to+\infty} \|w_k - w\|_{L^2(\Omega)} = 0,$$

et par suite S est continu.

• **La compacité de S :** Soit $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ une suite bornée. Notons $w_k := S(v_k)$. Montrons quon peut extraire une sous-suite de $\{S(v_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge fortement vers $S(w)$ dans $L^2(\Omega)$. Soit $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ tel que $\|v_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C$. On peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement vers v dans $L^2(\Omega)$.

Prenons w_k comme fonction test dans (3.6), nous obtenons

$$\alpha \int_\Omega |\nabla w_k|^2 \leq \int_\Omega \frac{f_n w_k}{(|v_k| + \frac{1}{n})^\gamma} \leq n^{\gamma+1} \int_\Omega |w_k| \leq C n^{\gamma+1} \left(\int_\Omega |w_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui implique que $\|w_k\|_{H_0^1(\Omega)} = \|S(v_k)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C$, alors il existe une sous-suite $\{S(v_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $S(v_k) \to w$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$, et par linjection compacte de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ on a $S(v_k) \to w$ fortement dans $L^\alpha(\Omega)$ pour tout $1 \leq \alpha < 2^* = \frac{2N}{N-2}$. Maintenant, il suffit de montrer que $w = S(v)$. En effet, pour tout $\phi \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega M(x)\nabla w_k \cdot \nabla \phi = \int_\Omega \frac{f_n \phi}{(|v_k| + \frac{1}{n})^\gamma}. \tag{3.9}$$

Nous allons montrer que lorsque k tend vers $+\infty$ (3.9) converge vers

$$\int_\Omega M(x)\nabla w \cdot \nabla \phi = \int_\Omega \frac{f_n \phi}{(|v| + \frac{1}{n})^\gamma}.$$

Par le théorème de convergence dominée on a

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega \frac{f_n \phi}{(|v_k| + \frac{1}{n})^\gamma} = \int_\Omega \frac{f_n \phi}{(|v| + \frac{1}{n})^\gamma}.$$

Nous concluons que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\Omega M(x)\nabla w_k \cdot \nabla \phi = \int_\Omega M(x)\nabla w \cdot \nabla \phi,$$

et en particulier que $w = S(v)$.

Alors, par le théorème du point fixe de Schauder il existe u_n dans $H_0^1(\Omega)$ tel que $u_n = S(u_n)$ i.e u_n résout

$$\begin{cases} -\text{div}\,(M(x)\nabla u_n) = \frac{f_n}{(|u_n| + \frac{1}{n})^\gamma} & \text{dans } \Omega \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Comme $\frac{f_n}{(|u_n| + \frac{1}{n})^\gamma} \geq 0$, le principe du maximum implique que $u_n \geq 0$, donc u_n résout bien (P_n). Puisque le membre de droite de (P_n) appartient à $L^\infty(\Omega)$, le résultat de [13], Théorème 4.2, implique que u_n appartient à $L^\infty(\Omega)$. □

Lemme 2. *La suite u_n est croissante, et pour tout $\omega \subset\subset \Omega$, il existe $c_\omega > 0$ (indépendant de n) tel que*

$$u_n(x) \geq c_\omega > 0 \quad \textit{pour tout } x \textit{ dans } \omega, \textit{ pour tout } n \textit{ dans } \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Démonstration. Puisque $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ et $\gamma > 0$, on a

$$-\text{div}(M(x)\nabla u_n) = \frac{f_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} \leq \frac{f_{n+1}}{(u_n + \frac{1}{n+1})^\gamma},$$

de sorte que

$$-\text{div}(M(x)\nabla(u_n - u_{n+1})) \leq f_{n+1}\left[\frac{1}{(u_n + \frac{1}{n+1})^\gamma} - \frac{1}{(u_{n+1} + \frac{1}{n+1})^\gamma}\right].$$

En choisissant $(u_n - u_{n+1})^+$ comme fonction test, et en observant que

$$\left[(u_{n+1} + \tfrac{1}{n+1})^\gamma - (u_n + \tfrac{1}{n+1})^\gamma\right](u_n - u_{n+1})^+ \leq 0,$$

et en rappelant que $f_{n+1} \geq 0$, nous obtenons donc, par (3.1),

$$0 \leq \alpha \int_\Omega |\nabla(u_n - u_{n+1})^+|^2 \leq 0.$$

Par conséquent, $(u_n - u_{n+1})^+ = 0$ presque partout dans Ω, ce qui implique que $u_n \leq u_{n+1}$.

Puisque u_1 appartient à $L^\infty(\Omega)$ (voir Lemme 1), et qu'il existe une constante (ne dépendant que de Ω et N) telle que

$$\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f_1\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C,$$

on a

$$-\text{div}(M(x)\nabla u_1) = \frac{f_1}{(u_1+1)^\gamma} \geq \frac{f_1}{(\|u_1\|_{L^\infty(\Omega)}+1)^\gamma} \geq \frac{f_1}{(C+1)^\gamma}.$$

Comme $\frac{f_1}{(C+1)^\gamma}$ n'est pas identiquement nul, le principe du maximum fort implique que $u_1 > 0$ dans Ω et que (2.3) est vérifiée pour u_1 (avec c_ω ne dépendant que de ω, N, f_1 et γ). Comme $u_n \geq u_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, (2.3) est également vérifiée pour u_n (avec la même constante c_ω qui est donc indépendante de n). □

Remarque **3.2.** *Si u_n et v_n sont deux solutions de (P_n), en répétant l'argument de la première partie de la preuve du Lemme 1, on montre que $u_n \leq v_n$. Par symétrie, ceci implique que la solution de (P_n) est unique.*

Puisque u_n est croissante en n, on peut définir u comme la limite simple de u_n. Comme $u \geq u_n$, (2.3) est évidemment vérifiée pour u également.

Nous étudions maintenant l'existence et la régularité des solutions du problème (P_4), selon le paramètre γ.

3.3 Le cas $\gamma = 1$

3.3.1 Estimations a priori

Lemme 3. *Soit u_n la solution de (P_n) avec $\gamma = 1$, et supposons que $f \in L^1(\Omega)$. Alors u_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$.*

Démonstration. En choisissant u_n comme fonction test dans (P_n), et en observant que $\frac{u_n}{u_n+\frac{1}{n}} \leq 1$, nous obtenons, en utilisant (3.1) et puisque $0 \leq f_n \leq f$:

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n = \int_\Omega \frac{f_n u_n}{u_n + \frac{1}{n}} \leq \int_\Omega f_n \leq \int_\Omega f,$$

ce qui démontre le résultat souhaité.

3.3.2 Existence

□

Théorème 3.1. *Soit $\gamma = 1$ et soit f une fonction non négative dans $L^1(\Omega)$ (non identiquement nulle). Alors il existe une solution u dans $H_0^1(\Omega)$ de (P_4), au sens où*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega \frac{f\varphi}{u} \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega). \tag{3.10}$$

Démonstration. D'après le Lemme 3, la suite u_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, donc converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega)$, ce qui donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \varphi, \tag{3.11}$$

pour tout $\varphi \in C_0^1(\Omega)$.

De plus, comme u_n satisfait (2.3), on a pour $\varphi \in C_0^1(\Omega)$:

$$0 \leq \left| \frac{f_n \varphi}{u_n + \frac{1}{n}} \right| \leq \frac{\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}}{c_\omega} f,$$

où $\omega = \{\varphi \neq 0\}$. Par le théorème de Lebesgue, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \frac{f_n \varphi}{u_n + \frac{1}{n}} = \int_\Omega \frac{f\varphi}{u}.$$

Ce résultat, combiné avec (3.11), prouve que (3.10) est vérifiée. □

3.3.3 Régularité de la solution

Lemme 4. *Soit $\gamma = 1$ et $f \in L^m(\Omega)$, $m \geq 1$. La solution u de (P_4) donnée par le Théorème 3.1 vérifie :*

1. *Si $m > \frac{N}{2}$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$.*
2. *Si $1 \leq m < \frac{N}{2}$, alors $u \in L^s(\Omega)$ avec $s = \frac{2Nm}{N-2m}$.*

Démonstration. Soit $k > 1$ et définissons $G_k(s) = (s-k)^+$. En prenant $G_k(u_n)$ comme fonction test dans (P_n) et en utilisant (3.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \alpha \int_\Omega |\nabla G_k(u_n)|^2 &\leq \int_\Omega M(x)\nabla G_k(u_n) \cdot \nabla G_k(u_n) \\ &= \int_\Omega \frac{f_n G_k(u_n)}{u_n + \frac{1}{n}} \\ &\leq \int_\Omega f G_k(u_n), \end{aligned} \tag{3.12}$$

où dans la dernière inégalité nous avons utilisé que $u_n + \frac{1}{n} \geq k \geq 1$ sur l'ensemble $\{u_n \geq k\}$ où $G_k(u_n) \neq 0$.

En partant de l'inégalité (3.12) et en suivant la méthode de [13, Théorème 4.2], nous obtenons l'existence d'une constante $C > 0$ (indépendante de n) telle que :

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^m(\Omega)}.$$

Cette estimation uniforme prouve que $u \in L^\infty(\Omega)$.
(ii) Pour $m = 1$, nous avons $s = \frac{2N}{N-2} = p^*$, donc le résultat découle directement de l'injection de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$.
Pour $1 < m < \frac{N}{2}$, prenons $\delta > 1$ et $u_n^{2\delta-1}$ comme fonction test dans (P_n), Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\alpha(2\delta-1)\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{2\delta-2} &\leq \int_\Omega f u_n^{2\delta-2} \\ &\leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-2)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Sobolev, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{2\delta-2} &= \int_\Omega |\nabla u_n \cdot u_n^{\delta-1}|^2 \\ &= \frac{1}{\delta^2}\int_\Omega |\nabla u_n^\delta|^2 \\ &\geq \frac{S}{\delta^2}\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}},\end{aligned}$$

où S désigne la constante de l'injection de Sobolev. Par conséquent, nous déduisons l'inégalité :

$$\left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta}\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{\alpha S(2\delta-1)}\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-2)m'}\right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{3.13}$$

Choisissons maintenant δ tel que $2^*\delta = (2\delta-2)m'$, c'est-à-dire :

$$\delta = \frac{m(N-2)}{N-2m}. \tag{3.14}$$

On vérifie aisément que $\delta > 1$ si et seulement si $m > 1$ (ce qui correspond bien à notre cas). Avec ce choix de δ, nous avons $2^*\delta = \frac{2Nm}{N-2m} = s$, ce qui permet de réécrire (3.18) sous la forme :

$$\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C(N,m)\|f\|_{L^m(\Omega)}\left(\int_\Omega u_n^s\right)^{\frac{1}{m'}}.$$

Comme $\frac{2}{2^*} > \frac{1}{m'}$ (puisque $m < \frac{N}{2}$), cette inégalité implique que la suite (u_n) est bornée dans $L^s(\Omega)$. Il en découle que la solution limite u appartient également à $L^s(\Omega)$. En choisissant $\delta = \frac{m(N-2)}{N-2m}$, on obtient après calculs :

$$\|u_n\|_{L^s(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^m(\Omega)}^{1/2},$$

avec $s = \frac{2Nm}{N-2m}$. □

3.4 Le cas $\gamma > 1$

3.4.1 Estimations a priori

Lemme 5. *Soit u_n la solution de (P_n) avec $\gamma > 1$, et supposons que $f \in L^1(\Omega)$. Alors $u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et u_n est bornée dans $H^1_{loc}(\Omega)$ et dans $L^s(\Omega)$, avec $s = \frac{N(\gamma+1)}{N-2}$.*

Démonstration. En prenant u_n comme fonction test dans (P_n), et en utilisant que

$$\frac{u_n^\gamma}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} \leq 1,$$

ainsi que l'hypothèse d'ellipticité (3.1), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \alpha\gamma \int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{\gamma-1} &\leq \int_\Omega \frac{f_n u_n^\gamma}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} \\ &\leq \int_\Omega f_n \leq \int_\Omega f. \end{aligned} \tag{3.15}$$

En observant que :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 u_n^{\gamma-1} = \frac{4}{(\gamma+1)^2} \int_\Omega \left|\nabla u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}\right|^2,$$

nous obtenons la première partie du lemme.

Puisque $s = \frac{2^*(\gamma+1)}{2}$, alors la bornitude de u_n dans $L^s(\Omega)$ découle de l'injection de Sobolev appliqué à $u_n^{\frac{\gamma+1}{2}}$.

Pour démontrer la bornitude dans $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$, considérons $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ et notons $\omega = \{\varphi \neq 0\}$. En prenant $u_n\varphi^2$ comme fonction test dans (P_n), et en utilisant (2.3) et (3.1), nous avons :

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \varphi^2 + 2\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla\varphi u_n\varphi \leq \frac{1}{c_\omega^{\gamma-1}} \int_\Omega f_n\varphi^2.$$

Par l'inégalité de Young :

$$2\int_\Omega \nabla u_n \cdot \nabla\varphi u_n\varphi \leq \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla u_n|^2\varphi^2 + \frac{2\beta^2}{\alpha}\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 u_n^2.$$

Comme u_n est bornée dans $L^s(\Omega)$ avec $s \geq 2$, nous obtenons finalement :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2\varphi^2 \leq C(f,\varphi),$$

ce qui prouve la bornitude dans $H^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Ces estimations a priori nous permettent d'établir un théorème d'existence analogue au Théorème 3.1. □

3.4.2 Existence

Théorème 3.2. *Soit $\gamma > 1$ et soit f une fonction non négative dans $L^1(\Omega)$ (non identiquement nulle). Alors il existe une solution u dans $H^1_{loc}(\Omega)$ de (P) (au sens de (3.3)). De plus, $u^{\frac{\gamma+1}{2}}$ appartient à $H^1_0(\Omega)$ (ce qui signifie que $u = 0$ sur le bord de Ω).*

3.4.3 Régularité de la solution

Lemme 6. *Soit $\gamma > 1$ et soit $f \in L^m(\Omega)$ avec $m \geq 1$. Alors la solution u de (P_4) donnée par le Théorème 3.2 vérifie :*

1. *Si $m > \frac{N}{2}$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$.*
2. *Si $1 \leq m < \frac{N}{2}$, alors $u \in L^s(\Omega)$ avec $s = \frac{Nm(\gamma+1)}{N-2m}$.*

Démonstration. (i) La preuve est identique à celle du Lemme 4 (cas $\gamma = 1$) et n'est donc pas répétée ici.

(ii) Pour $m = 1$, le résultat découle du fait que $u^{\frac{\gamma+1}{2}} \in H^1_0(\Omega)$ et du plongement de Sobolev.

Pour $1 < m < \frac{N}{2}$, choisissons $\delta > \frac{\gamma+1}{2}$ et utilisons $u_n^{2\delta-1}$ comme fonction test dans (P_n). En suivant la même méthode que dans la preuve du Lemme 4, et en notant que $\delta > 1$ (car $\delta > \frac{\gamma+1}{2} > 1$), nous obtenons :

$$\alpha \left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{S(2\delta-1)} \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-1-\gamma)m'} \right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{3.16}$$

On pose

$$2^*\delta = (2\delta - 1 - \gamma)m'.$$

Ce choix de δ implique que : $\delta > \frac{\gamma+1}{2}$ si et seulement si $m > 1$ et $2^*\delta = s = \frac{Nm(\gamma+1)}{N-2m}$ Comme $\frac{2}{2^*} > \frac{1}{m'}$ (puisque $m < \frac{N}{2}$), nous en déduisons que u_n est bornée dans $L^s(\Omega)$, et donc que $u \in L^s(\Omega)$. □

3.5 Le cas $\gamma < 1$

3.5.1 Estimations a priori

Théorème 3.3. *Soit u_n la solution de (P_n) avec $\gamma < 1$, et supposons que f appartienne à $L^m(\Omega)$, avec $m = \frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)} = \left(\frac{2^*}{1-\gamma}\right)'$. Alors u_n est bornée dans $H^1_0(\Omega)$.*

Démonstration. En choisissant u_n comme fonction test dans (P_n), et en appliquant successivement l'inégalité de Hölder, la condition d'ellipticité (3.1), et l'hypothèse $f_n \leq f$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 &\leq \int_\Omega \frac{f_n u_n}{(u_n + \frac{1}{n})^\gamma} \\ &\leq \int_\Omega f u_n^{1-\gamma} \\ &\leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{(1-\gamma)m'} \right)^{\frac{1}{m'}}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Par notre choix de m, nous avons $(1-\gamma)m' = 2^*$. L'injection de Sobolev nous donne donc :

$$\alpha S \left(\int_\Omega u_n^{2^*} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leq \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{2^*} \right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{3.18}$$

Comme $m < \frac{N}{2}$, nous avons $\frac{2}{2^*} > \frac{1}{m'}$. L'inégalité (3.18) fournit donc une estimation a priori de u_n dans $L^{2^*}(\Omega)$. En réutilisant cette estimation dans (3.17), nous obtenons finalement que u_n est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, ce qui conclut la démonstration. □

3.5.2 Existence

Théorème 3.4. *Soit $\gamma < 1$ et soit f une fonction non négative (non identiquement nulle) dans $L^m(\Omega)$, avec $m = \frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)} = \left(\frac{2^*}{1-\gamma}\right)'$. Alors il existe une solution u dans $H_0^1(\Omega)$ de (P_4).*

3.5.3 Régularité de la solution

Lemme 7. *Soit $\gamma < 1$ et soit $f \in L^m(\Omega)$ avec $m \geq \frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}$. Alors la solution u de (P_4) donnée par le Théorème 3.4 vérifie :*

1. *Si $m > \frac{N}{2}$, alors $u \in L^\infty(\Omega)$.*
2. *Si $\frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)} \leq m < \frac{N}{2}$, alors $u \in L^s(\Omega)$ avec $s = \frac{Nm(\gamma+1)}{N-2m}$.*

Démonstration. La preuve de (i) est identique à celle donnée dans le Lemme 6, donc nous l'omettons, tandis que le cas $m = \frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}$ est vrai par l'injection de Sobolev puisque pour cette valeur de m on a $s = 2^*$.
Si

$$\frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)} < m < \frac{N}{2},$$

nous choisissons $\delta > 1$, et utilisons à nouveau $u_n^{2\delta-1}$ comme fonction test dans (P_n). En utilisant que $\delta > \frac{\gamma+1}{2}$ ainsi que l'inégalité de Hölder, l'injection de Sobolev et (3.1), nous obtenons

$$\alpha \left(\int_\Omega u_n^{2^*\delta} \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \frac{\delta^2}{S(2\delta-1)} \|f\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_\Omega u_n^{(2\delta-1-\gamma)m'} \right)^{\frac{1}{m'}}. \tag{3.19}$$

Le choix de δ tel que $2^*\delta = (2\delta - 1 - \gamma)m'$ implique que $\delta > 1$ si et seulement si $m > \frac{2N}{N+2+\gamma(N-2)}$, et que $2^*\delta = s$. Par conséquent, et puisque $\frac{2}{2^*} > \frac{1}{m'}$ car $m < \frac{N}{2}$, nous

avons que la norme de u_n dans $L^s(\Omega)$ est bornée uniformément en n, et donc la limite u appartient également à $L^s(\Omega)$. □

Bibliographie

[1] H. Brézis, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[2] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Universitext, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[3] Lucio Boccardo, Luigi Orsina, Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities, Calc. Var. Partial Differential Equa- tions 37 (34) (2010) 363380.

[4] Lucio Boccardo,Gisella Croce,Elliptic Partial Differential Equations Existence and Regularity of Distributional Solutions De Gruyter (2013)

[5] L. C. Evans, Partial differential equations, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[6] T. Gallouët, R. Herbin, Mesure, Intégration, Probabilités Polycopié de cours July 13, 2009

[7] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. 1969.

[8] J. Droniou Intégration et espaces de Sobolev à valeurs vectorielles, 2001.

[9] H. Le Dret, H. Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, Springer, Heidelberg, 2013.

[10] DANIEL LI , Cours danalyse fonctionelle, Ellipses marketing, Paris 2013

[11] N.S Papageorgiou, V.D Radulescu and D.D.Repovs, Nonlinear Analysis : Theory and Methods.Springer Monographs in Mathematics.

[12] H. K.Pathak : An introduction to nonlinear analysis and fixed point theory. springer, 2018.

[13] Stampacchia, G. : Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 15, 189258 (1965)