République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : ANALYSE MATHEMATIQUES ET APPLICATION

par

DERRADJI WARDIA

Intitulé : Modèles DCC-GARCH multivariés

Soutenu publiquement le 19 juin 2018 devant le jury composé de

Président du jury :	M. LEGHMIZI	*MCA*	*U.Y.F.M*
Examinateur :	K. TABLENNEHAS	*MAA*	*U.Y.F.M*
Examinatrice :	N.R. AIT AMRANE	*MAA*	*U.Y.F.M*
Directrice du mémoire :	K. SERIER. ABDALLAH	*MAA*	*U.Y.F.M*

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2017-2018

Table des matières

Résumé **5**

Abstract **6**

Notations et abréviations **7**

Introduction **8**

1 Modèles ARCH univariés et leurs généralisation **10**

1.1 Modèle ARCH 10

1.1.1 Stationnarité du modèle ARCH(1) 11

1.2 Présentation infini d'un processus $ARCH(q)$ 11

1.2.1 Conditions d'existence d'un modèle $ARCH(\infty)$ 12

1.3 Modèle ARCH généralisé 13

1.3.1 Écriture vectorielle du modèle GARCH(p,q) 16

1.3.2 Stationnarité stricte de GARCH(p,q) 18

1.3.3 Stationnarité au second ordre 19

2 Estimation d'un modèle GARCH univarié **21**

2.0.1 Introduction 21

2.1 Méthode du Quasi-maximum de vraisemblance conditionnelle 21

2.1.1 Propriétés de l'estimateur du QMV 23

2.1.2 La normalité asymptotique de l'estimateur du QMV 23

3 Estimation d'un modèle GARCH multivarié **26**

3.1 Introduction 26

3.2 La spécification vectorielle 26

3.2.1 La spécification vec(1,1) 27

3.2.2 La spécification DVEC 28

3.3 Modèle BEKK 28

3.4 Modèles à Corrélations Conditionnelles Constantes (CCC) 29

3.4.1 Stationnarité stricte 31
3.5 Modèles à Corrélations Conditionnelles Dynamiques(DCC) 32

4 La théorie asymptotique **33**
4.1 Introduction 33
4.2 L'estimateur du Quasi-Maximum de Vraisemblance 33
4.3 La consistance de l'estimateur 34
4.4 La normalité asymptotique 35
4.5 L'estimation de modèle D.C.C 37

A Quelques éléments de base **40**
A.1 Rappel sur les probabilités et statistiques 40
A.2 Stationnarité 41
A.2.1 La stationnarité stricte 41
A.2.2 Stationnarité au seconde ordre 42
A.3 L'ergodicité 42
A.3.1 La loi fort des grands nombre de Kolmogorov 42
A.3.2 L'ergodicité stricte 42
A.3.3 L'ergodicité au sens large 43
A.4 Solution non anticipative 43
A.5 l'operateur de retard 43
A.6 Les types de convergence 43
A.6.1 Stationnarité du modèle $GARCH$ multivarié 44

Bibliographie **47**

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier ma promotrice **K. Serier. Abdallah**, pour m'avoir proposer ce sujet et avoir dirigé mon travail. Qu'il me soit permis de vous exprimer toute ma reconnaissance et mon profond respect. Mes vifs remerciements vont également aux membres du jury pour intérêt qu'ils ont porté à mon mémoire en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir à travers leurs suggestions et conseil. Je tiens aussi à exprimer mes sincères remerciements à tous les professeurs qui m'ont enseigné et qui par leurs compétences j'ai soutenu dans la poursuite de mes études. Enfin, on remercie tous ceux qui, de prés ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Dédicace

♢

A l'es-

prit de mon

père, à ma mère qui

m'a toujours soutenu, en-

couragé tout au long de mon cur-

sus, pour leurs amour inestimable, leurs

confiances, leurs sacrifices. Qu'ils trouvent dans

la réalisation de ce travail. Je dédie ce travail modeste

à Madame K. Serier. Abdallah qui m'a donné tous le cou-

rage d'achever ce travail, à ma famille et en particulier mes frères

Omar,Miloud, et leurs femmes leurs fils, à Ahmed et Hossine et mes soeurs,

Fatiha, Naima ,Messouda, Dhahbia et Saida pour nous avoir fait par-

tager leurs joies de vivre et nous avoir ainsi soutenu dans nos

efforts, à mon fiancé, à mes plus proches amis, Aicha,

Lalia, Hadda, Khadidja, Nadia, Fatima,... qui par

leurs encouragements nous ont aidé à dé-

passer les obstacles, à tous mes en-

seignants qui restent toujours

nos grands exemples

pour le sa-

crifice.

♢

Résumé

Dans notre travail on s'intéresse à estimer les paramètres d'un modèle GARCH multivarié dont la spécification est les corrélations des constantes dynamiques(DCC), les points essentielles dans ce mémoire est de connaitre le modèle GARCH univarié et la stationnarité de ce modèle pour vérifier la stabilité.

Abstract

In our work on estimate the multivariate GARCH paramaters, when the specification is Dynamic constants correlations (DCC), the importants points in this thesis is to know univariate GARCH model and with doing stationnarity.

Notations et abréviations

ARCH	: Autorégressif conditionnellement hétéroscidastique.
GARCH	: Autorégressif conditionnellement hétéroscidastique généralisé.
i.i.d$(0,1)$	: indépendante et identiquement distribuée, centrée réduite.
$\mathcal{F}_{t-1}$	: la tribu engendrée par les informations passées.
η_t	: bruit blanc fort de variance 1.
$i.e$	: c'est-à-dire.
k_η	: coéfficient de kurtosis de η_t.
QMV	: Quasi-Maximum de Vraisemblence.
Θ	: espace des paramètres .
h_t	: variance conditionnelle ou volatilité.
MCO	: Moindres-Carrés Ordinaire.
MCQG	: Moindres-carrés quasi-généralisés.
$\xrightarrow{p.s}$	: convergence prèsque sûr.
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	: convergence en loi.
$\xrightarrow{P}$	: convergence en probabilité.
$\mathbb{E}(X\|\mathcal{F}_{t-1})$	: L'espérance conditionnelle de X sachant une information passée.
I_d	: La matrice d'identité d'ordre d.
$Var(.)$	: La variance .
$cov(.,.)$	: La covariance.
$E(.)$	: l'ésperance.
BEKK	: l'abréviation de noms de quatres chercheurs : Baba, Engle, Kraft et Knoner.
$\mathbb{Z}, \mathbb{N}$	: l'ensemble des nombres relatifs, naturel respectivement.
CCC	: corrélations conditionnelles constantes.
DCC	: corrélations conditionnelle dynamique.
$A \otimes B$	: Le produit de Kronecor entre deux matrices A et B.
$\rho(A)$	: Le rayon spectral de la matrice A.

Introduction générale

Les modèles Conditionnels hétéroscidastiques Autoregressifs (ARCH) univariés ont été introduit en première fois par Engle [5] pour modéliser les séries financières. Bollerslev [2] a généralisé ces modèles sur le nom de GARCH, mais comme les séries présentées sous forme d'un vecteur est difficile à modéliser, les chercheurs ont introduit des spécifications , Bollerslev et al [3] ont proposé le modèle vectoriel, et aprés ça ils ont introduit le modèle vec(1,1), mais le problème est que le nombre des paramètres à estimer est grand et la matrice de variance-covariance n'est pas positive, Baba, Engle, Kraft et Kroner [1] ont proposé un modèle qui s'appelle BEKK, d'autres modèles ont été donnés comme le modèle des Corrélations Conditionnelles constantes (CCC) et son extension Corrélations conditionnelles dynamiques (DCC). L'estimation des paramètres de modèle (DCC) a été faite par plusieurs méthodes. Ce mémoire est composé de quatre chapitres. Dans le premier chapitre nous présentons les modèles GARCH univariés. Les méthodes d'estimation de ce modèle sont représentées dans le deuxième chapitre.Dans le chapitre trois on présente les modèles GARCH multivariés ou MGARCH, et on fait l'estimation d'un modèle DCC, la théorie asymptotique des processus GARCH multivariés dans le chapitre quatre et à la fin nous donnons quelques outils de base sous forme d'annexe et une bibliographie.

Chapitre 1

Modèles ARCH univariés et leurs généralisation

Ce chapitre est composé de trois sections. Dans la première section on donne la définition du modèle $ARCH$ et sa généralisation, en étudiant le cas particulier dans le cas où l'ordre est fixé et égal à 1 puis on donne la présentation infini du modèle dans la deuxième section. Dans la troisième section on fait la stationnarité du modèle GARCH.

1.1 Modèle ARCH

Le modèle non linéaire Conditionnel Hétéroscidastique Autoregressif d'ordre q noté $ARCH(q)$ a été introduit par Engle [6] pour modéliser les séries financières, dans cette section nous présentons le modèle $ARCH$, sa définition ainsi que quelques propriétés de ce modèle.

Définition 1.1.1 *$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus ARCH d'ordre q, noté ARCH(q), s'il satisfait l'équation suivante :*

$$\begin{cases} X_t = \eta_t\sqrt{h_t}, \\ \\ h_t = \omega + \sum\limits_{i=1}^{q} \alpha_i X_{t-i}^2, \end{cases} \tag{1.1}$$

où η_t est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquements distribuées centrée réduite, i.e, $E(\eta_t) = 0$ et $E(\eta_t^2) = 1$, h_t est la variance conditionnelle du processus X_t, ω est une constante strictement positive et les α_i sont des constantes positives ou nulles, $\forall i = 1, \ldots, q$.

Cas particulier

Dans le cas où l'ordre q égal à 1, le processus $ARCH(1)$ est défini par :

$$\begin{cases} X_t = \eta_t \sqrt{h_t}, \\ \\ h_t = \omega + \alpha_1 X_{t-1}^2, \end{cases} \tag{1.2}$$

où les paramètres de (1.2) vérifiants $\omega > 0, \alpha_1 \geqslant 0$. Le processus ARCH(1) vérifie l'une des quatre propriétés de différence de martingale(voir plus loin 1.1.2)

$$\begin{aligned} E(X_t/\mathcal{F}_{t-1}) &= E(\eta_t \sqrt{h_t}/\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \sqrt{h_t} E(\eta_t/\mathcal{F}_{t-1}) \\ &= \sqrt{h_t} E(\eta_t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

différence de martingale est définie par

Définition 1.1.2 *Soit $(Z_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une suite de (v.a.r). et $(\mathcal{F})_{t\in\mathbb{N}}$ une suite de tribus. La suite $(\eta_t; \mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est une différence de martingale si elle vérifie :*

i) $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$

ii) η_t *est* $\mathcal{F}_t$*-mesurable*

iii) $E(\eta_t) < \infty$

iv) $E(\eta_{t+1}/\mathcal{F}_t) = 0$

1.1.1 Stationnarité du modèle ARCH(1)

On dit que le processus ARCH(1) vu en (1.2) si $var(X_t) = c$ tel que c est une constante positive et donc $Var(X_t) = E(X_t^2)$, on a alors $E(X_t^2) = \omega + \alpha_1 E(X_{t-1}^2)$
$E(X_t^2)(1-\alpha_1) = \omega$ donc $var(X_t) = \frac{\omega}{1-\alpha_1}$, pour que ARCH(1) est stationnaire au second ordre il faut que $0 < \frac{\omega}{1-\alpha_1} < \infty$ et $0 < \alpha_1 < 1$ où ω est une constante strictement positive et α_1 constante positive ou nulle.

1.2 Présentation infini d'un processus $ARCH(q)$

La présentation infini d'un processus $ARCH(q)$ noté $ARCH(\infty)$ est donnée par :

$$\begin{cases} X_t = \sqrt{h_t}\eta_t, \\ \\ h_t = \omega_0 + \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i X_{t-i}^2, \end{cases} \tag{1.3}$$

où (η_t) est une suite des variables indépendantes et identiquement distribuée de moyenne nulle et de variance égale à 1 et $\alpha_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, \infty$ est une suite des constantes positives ou nulles.

1.2.1 Conditions d'existence d'un modèle $ARCH(\infty)$

L'existence du processus $ARCH(\infty)$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.2.1 *([8]) Pour tout $s \in]0,1]$ posons $A_s = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i^s$ et $\mu_{2s} = E \mid \eta_t \mid^{2s}$ alors s'il existe $s \in]0,1]$ tel que $A_s\mu_{2s} < 1$ il existe une solution strictement stationnaire et non anticipative du modèle (1.3) définie par :*

$$\begin{cases} X_t = \sqrt{h_t}\eta_t, \\ \\ h_t = \omega + \omega \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_k \geqslant 0} \alpha_1 \ldots \alpha_{i_k} \eta_{t-i_1}^2 \eta_{t-i_1-i_2}^2 \ldots \eta_{t-i_1-i_2-\ldots-i_k}^2, \end{cases} \tag{1.4}$$

le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est l'unique solution strictement stationnaire et non anticipative du modèle (1.3) telle que $E \mid X_t \mid^2 < \infty$.

Preuve 1.2.1 *[8] Soit S_t une variable qui prend ses valeurs dans $[0,+\infty]$ définie par :*

$$S_t = \omega + \omega \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_k \geqslant 0} \alpha_1 \ldots \alpha_{i_k} \eta_{t-i_1}^2 \eta_{t-i_1-i_2}^2 \ldots \eta_{t-i_1-i_2-\ldots-i_k}^2, \tag{1.5}$$

S_t^s vérifie l'inégalité suivante
$S_t^s \leq \omega^s + \omega^s \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_k \geqslant 0} \alpha_{i_1}^s \ldots \alpha_{i_k}^s \eta_{t-i_1}^{2s} \eta_{t-i_1-i_2}^{2s} \ldots \eta_{t-i_1-i_2-\ldots-i_k}^{2s}$, grâce à la relation $(a+b)^s \leq a^s + b^s$ (dans ce cas $s \in [0,1[$ est strictement positif et a, b sont des termes positifs) pour tout a,b positifs et pour tout $s \in]0,1]$ et comme les η_t sont indépendantes on a

$$\begin{aligned} E(S_t^s) &\leq \omega^s + \omega^s \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_k \geqslant 0} \alpha_{i1}^s \ldots \alpha_{i_k}^s E(\eta_{t-i_1}^{2s} \eta_{t-i_1-i_2}^{2s} \ldots \eta_{t-i_1-i_2-\ldots-i_k}^{2s}) \\ &= \omega^s (1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} (A_s\mu_s)^k}_{(1)}) = \tfrac{\omega^s}{1-A_s\mu_{2s}}. \end{aligned}$$

Car la somme (1)est une somme d'une suite géométrique de raison $A_s\mu_s$ donc S_t est fini, si on calcule $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i S_{t-i}\eta_{t-i}^2$ on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i S_{t-i}\eta_{t-i}^2 &= \omega \sum_{s_0=1}^{\infty} \alpha_s \eta_{t-s}^2 + \omega \sum_{s_0=1}^{\infty} \alpha_{s0}\eta_{t-s_0}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_k \geqslant 0} \alpha_{s_0} \ldots \alpha_{ik}^s E(\eta_{t-i_1}^{2s} \eta_{t-i_1-i_2}^{2s} \ldots \eta_{t-i_1-i_2-\ldots-i_k}^{2s}) \\ &= \omega \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1,\ldots,i_k \geqslant 1} \alpha_1 \ldots \alpha_{i_k} \eta_{t-i_1}^2 \eta_{t-i_1-i_2}^2 \ldots \eta_{t-i_1-i_2-\ldots-i_k}^2, \end{aligned}$$

par comparaison de S_t avec $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i S_{t-i}\eta_{t-i}^2$ on déduit que

$$S_t = \omega + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i S_{t-i}\eta_{t-i}^2. \tag{1.6}$$

Si on identifie (1.6) avec (1.3) on trouve que $X_{t-i}^2 = S_{t-i}\eta_{t-i}^2$ donc il existe une solution strictement stationnaire et non anticipative de (1.3) posé :

$$X_t = \sqrt{S_t}\eta_t. \tag{1.7}$$

Pour montrer l'unicité de cette solution on suppose que X_t est quelconque et montre que h_t et S_t sont les mêmes, d'abord, les termes de h_t représentent la somme de deux sommes $S_{t,q}$ et $R_{t,q}$ respectivement et on a l'écriture suivante :

$$h_t = \omega + \omega \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_k \geqslant 0} \alpha_1 \dots \alpha_{i_k} \eta^2_{t-i_1} \eta^2_{t-i_1-i_2} \cdots \eta^2_{t-i_1-i_2-\dots-k}$$

$$+ \sum_{i_1,\dots,i_{q+1} \geqslant 1} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_{q+1}} \eta^2_{t-i_1} \eta^2_{t-i_1-i_q} \cdots \eta^2_{t-i_1-i_2-\dots-i_{q+1}} = S_{t,q} + R_{t,q},$$

on remarque que $S_{t,q}$ converge presque sûrement vers S_t on a

$$E(R^s_{t,q}) \leq \sum_{i_1,\dots,i_{q+1} \geqslant 1} \alpha^s_{i1} \dots \alpha^s_{i_{q+1}} E(\mid \eta^{2s}_{t-i_1} \dots, \mid \eta^{2s}_{t-i_1-i_2-\dots-i_q} \mid\mid X^{2s}_{t-i_1-i_2-\dots-i_q} \mid)$$

$$= (A_s \mu_{2s})^q A_s E(\mid X_t \mid^{2s}).$$

Comme $A_s \mu_{2s} \leq 1$ donc $E(R^s_{t,q})$ est fini alors $R_{t,q} \longrightarrow 0$ presque sûrement, d'où $h_t = S_t$ alors la solution non anticipative est unique.

1.3 Modèle ARCH généralisé

Définition 1.3.1 *$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $ARCH(p,q)$ généralisé d'ordre (p,q) noté GARCH(p,q) si ses deux premiers moments conditionnels existent et vérifiant :*

(i) $E(X_t/\mathcal{F}_{t-1}) = 0, \quad t \in \mathbb{Z},$

(ii) Il éxiste des constantes $\omega, \alpha_i, i = 1, \dots, p$ telles que :

$$h_t = Var(X_t/\mathcal{F}_{t-1}) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i X^2_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{1.8}$$

Une forme équivalente à (1.8) est donnée par :

$$h_t = \omega + \alpha(B) X^2_t + \beta(B) h_t \quad t \in \mathbb{Z}. \tag{1.9}$$

Telle que B est l'opérateur de retard (Voir l'annexe), $\alpha(.)$ et $\beta(.)$ deux polynômes de degrés q et p respectivement donnés par :

$$\begin{cases} \alpha(B) := \sum_{i=1}^{q} \alpha_i B^i, \\ \beta(B) := \sum_{j=1}^{p} \beta_j B^j, \end{cases} \tag{1.10}$$

où $\forall i = 1, \dots, q, j = 1, \dots, p$, α_i et β_j sont les paramètres de (1.8).

Proposition 1.3.1 *[5] La condition nécessaire de l'existence de la variance d'un processus $GARCH(p,q)$ est $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1$.*

Preuve 1.3.1 *on a* $E(X^2_t) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i E(X^2_t) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j E(h_t)$

donc $E(h_t) - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i E(X^2_t) - \sum_{j=1}^{p} \beta_j E(h_t) = \omega$

$E(h_t)(1-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i-\sum_{j=1}^{p}\beta_j)=\omega$
finallement, $E(h_t)=\frac{\omega}{1-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i-\sum_{j=1}^{p}\beta_j}$
mais $1-\sum_{i=1}^{q}\alpha_i-\sum_{j=1}^{p}\beta_j\neq 0$ *donc* $\sum_{i=1}^{q}\alpha_i+\sum_{j=1}^{p}\beta_j<1$.

Dans la suite nous rappelons la définition d'un processus GARCH fort

Définition 1.3.2 *Soit* (η_t) *une suite de variables (i.i.d) de loi* η, $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un processus* $GARCH(p,q)$ *au sens fort s'il est solution de l'équation :*

$$\begin{cases} X_t=\sqrt{h_t}\eta_t, \\ \\ h_t=\omega+\sum_{i=1}^{q}\alpha_i X_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{p}\beta_j h_{t-j}, \end{cases}$$

tel que ω *est une constante strictement positive et les* α_i *et* β_j *sont des constantes positives.*

On va définir un processus GARCH au sens de Drost et Nidjman [4] :

Définition 1.3.3 *Drost et Nidjman [4] ont proposé le modèle GARCH faible tout bruit blanc faible* $X_t=\sqrt{h_t}\eta_t$, *tel que* $E[X_t/\mathcal{F}_{t-1}]=0\ \ \forall t\in\mathbb{Z}$ *Il existe des constantes* $\omega,\alpha_i\ \ i=1,\dots,q$ *et* $\beta_j\ \ j=1,\dots,p$ *telles que.* $h_t=Var(X_t/\mathcal{F}_{t-1})=\omega+\sum_{i=1}^{q}\alpha_i X_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{p}\beta_j h_{t-j}$.

Stationnarité de processus GARCH

Dans cette section on va donner les conditions d'existance de la stationnarité du processus X_t (au sens stricte et au second ordre). D'abord on traite le cas du modèle $GARCH(1,1)$.
Un processus $GARCH(1,1)$ est donné par :

$$\begin{cases} X_t=\sqrt{h_t}\eta_t, \quad \eta_t\ (i.i.d)\ (0,1), \\ \\ h_t=\omega+\alpha X_{t-1}^2+\beta h_{t-1}^2, \end{cases} \tag{1.11}$$

si la condition $\alpha+\beta<1$ est vérifiée alors la variance inconditionnelle est donnée par :
$Var(X_t)=E(X_t^2)=\omega+\alpha E(X_{t-1}^2)+\beta E(h_{t-1})$
donc $Var(X_t)=\frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$ où ω est une constante strictement positive, α et β sont des constantes positives
Stationnarité stricte du $GARCH(1,1)$ **fort**

Théorème 1.3.1 *[8] Si* $-\infty<\gamma=E\log\left\{\alpha\eta_t^2+\beta\right\}<0$
la série

$$h_t=\left\{1+\sum_{i=1}^{\infty}a(\eta_{t-1})\dots a(\eta_{t-i})\right\}\omega \tag{1.12}$$

converge presque surement (p.s) et le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *défini par* $X_t=\sqrt{h_t}\eta_t$ *est l'unique solution strictement stationnaire du modèle (1.11). Cette solution est non anticipative et ergodique (Voir l'Annexe).*

Preuve 1.3.2 *[8] par l'itération de la deuxième équation de (1.11) on obtient :*

$$\begin{aligned}
h_t &= \omega + a(\eta_{t-1})h_{t-1} \\
&= \omega + a(\eta_{t-1})[\omega + a(\eta_{t-2})h_{t-2}] \\
&= \omega + a(\eta_{t-1})[\omega + a(\eta_{t-2})[\omega + a(\eta_{t-3})h_{t-3}] \\
&= \vdots \\
&= \omega + a(\eta_{t-1})\omega + a(\eta_{t-1})a(\eta_{t-2})\omega + a(\eta_{t-1})a(\eta_{t-2})a(\eta_{t-3})h_{t-3} \\
&= \omega(1 + a(\eta_{t-1}) + a(\eta_{t-1})a(\eta_{t-2}) + a(\eta_{t-1})a(\eta_{t-2}h_{t-2}), \ldots) \\
&= \omega[1 + \sum_{n=1}^{N} a(\eta_{t-1}) \ldots a(\eta_{t-n})] + a(\eta_{t-1}) \ldots + a(\eta_{t-N-1})] \\
&= h_t(N) + a(\eta_{t-1}) \ldots a(\eta_{t-N-1})h_{t-N-1},
\end{aligned}$$

pour tout $N \geq 1$ on a $\lim_{N \longrightarrow +\infty} h_t(N) = h_t$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'abord, montrer que h_t est presque sûrement finie si et seulement si $\gamma < 0$, c'est-à-dire : on suppose que $\gamma < 0$ et on montre que h_t est presque sûrement finie, pour ça on utilise la règle de Cauchy $[a(\eta_{t-1}) \ldots a(\eta_{t-n})]^{\frac{1}{2}} = \exp[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log a(\eta_{t-i})] \longrightarrow \exp(y)$ presque sûrement, si on applique la loi forte des grands nombres[1] *à $\log a(\eta_t)$ alors la série (1.12) converge presque sûrement dans $\mathbb{R}$ par l'application de la règle de Cauchy, le processus*

$$X_t = \left\{ \sqrt{h_t}\eta_t = \omega + \sum_{i=1}^{\infty} a(\eta_{t-1}) \ldots a(\eta_{t-1})\omega \right\}^{\frac{1}{2}} \eta_t \tag{1.13}$$

est strictement stationnaire et ergodique. Pour démontrer l'unicité on suppose $\tilde{X}_t = \sqrt{h_t}\eta_t$ une solution strictement stationnaire et par itération on a $h_t = h_t(N) + a(\eta_{t-1}) \ldots a(\eta_{t-N-1})h_{t-N-1})$ calculons $\sigma_t^2 - h_t = \underbrace{h_t - h_t(N)}_{(1)} + a(\eta_{t-1}) \ldots a(\eta_{t-N-1})h_{t-N-1})$ quand $N \longrightarrow 0$ (1) converge vers zero presque sûrement, et comme h_t converge presque sûrement alors $a(\eta_{t-1}) \ldots a(\eta_{t-N-1})$ converge vers 0, donc on a montré $\sigma_t^2 - h_t \longrightarrow 0$ alors $h_t = \sigma_t^2$ donc l'unique solution strictement stationnaire du modèle (1.11).

1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi ayant une espérance finie $E(X)$. On a alors $\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n} \xrightarrow{p.s} E(X)$

1.3.1 Écriture vectorielle du modèle GARCH(p,q)

Soit $z_t := \left(X_t^2, \ldots, X_{t-q+1}^2, h_t, h_{t-1} \ldots, h_{t-p+1}\right)' \in \mathbb{R}^{p+q}$,

$$\begin{pmatrix} X_t^2 \\ X_{t-1}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{t-q+1}^2 \\ h_{t-1} \\ h_{t-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{t-p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\eta_t^2 + \alpha_1 X_{t-1}^2\eta_t^2 + \ldots + \alpha_q X_{t-q}^2\eta_t^2 + \beta_1 h_{t-1}\eta_t^2 + \ldots + \beta_p h_{t-p}\eta_t^2 \\ \omega\eta_{t-1}^2 + \alpha_1 X_{t-2}^2\eta_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_q X_{t-q+1}^2\eta_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-2}\eta_{t-1}^2 + \ldots + \beta_p h_{t-p+1}\eta_{t-1}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \omega\eta_t^2 + \alpha_1 X_{t-1}^2\eta_t^2 + \ldots + \alpha_q X_{t-2q+1}^2\eta_t^2 + \beta_1 h_{t-1}\eta_t^2 + \ldots + \beta_p h_{t-2p+1}\eta_t^2 \\ h_{t-1} \\ h_{t-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{t-p+1} \end{pmatrix}$$

alors on peut écrire

$$\begin{pmatrix} X_t^2 \\ \vdots \\ X_{t-1}^2 \\ X_{t-q+1}^2 \\ h_t \\ h_{t-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{t-p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega\eta_t^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \omega \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1\eta_t^2 & & \ldots & & \alpha_q\eta_t^2 & \beta_1\eta_t^2 & & \ldots & & \beta_p\eta_t^2 \\ 1 & 0 & \ldots & & 0 & 0 & & \ldots & & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & & 0 & 0 & & \ldots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ldots & 1 & 0 & 0 & & \ldots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & & \ldots & & \alpha_q & \beta_1 & & \ldots & & \beta_p \\ 0 & & \ldots & & 0 & 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & & \ldots & & 0 & 0 & 1 & \ldots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ldots & 0 & 0 & 0 & & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1}^2 \\ X_{t-2}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{t-q+1}^2 h_{t-1} \\ h_{t-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ h_{t-p+1} \end{pmatrix}.$$

posons $b_t = b(\eta_t) := \left(\omega\eta_t^2, 0, \ldots \omega, 0, \ldots, 0\right)'$ avec $b_t \in \mathbb{R}^{p+q}$, posons

$$\eta_t := \left(\omega\eta_t^2, \ldots, \ldots, \ldots, \omega, 0, \ldots, 0, \ldots\right)' \textit{ avec } \eta_t \in \mathbb{R}^{p+q}, \tag{1.14}$$

et la matrice A_t définie par :

$$A_t = \begin{pmatrix} \alpha_1\eta_t^2 & & \dots & & \alpha_q\eta_t^2 & \beta_1\eta_t^2 & & \dots & & \beta_p\eta_t^2 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 1 & 0 & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_1 & & \dots & & \alpha_q & \beta_1 & & \dots & & \beta_p \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 & 1 & \dots & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 0 & 0 & 0 & & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

donc l'écriture vectorielle de z_t est :

$$z_t = b_t + A_t z_{t-1} \tag{1.16}$$

La matrice $A_t \in \mathbb{R}^{(p+q)}$, de (1.16) on remarque que les éléments de z_t sont donnés en fonction des éléments de z_{t-1} donc notre représentation est markovienne. En itérant (1.16)

$$\begin{aligned} z_t &= b_t + A_t(b_{t-1} + A_{t-1}z_{t-2}) \\ &= b_t + A_t(b_{t-1} + A_{t-1}(b_{t-2} + A_{t-2}z_{t-3})) \\ &\vdots \\ &= b_t + A_tb_{t-1} + A_tA_{t-1}b_{t-2} + A_tA_{t-1}A_{t-2}b_{t-3} + \dots A_tA_{t-1}A_{t-k+1}b_{t-k} \\ &= b_t + \sum_{k=1}^{\infty} A_tA_{t-1}A_{t-k+1}b_{t-k} \end{aligned}$$

on obtient

$$z_t = b_t + \sum_{k=1}^{\infty} A_tA_{t-1}...A_{t-k+1}b_{t-k}. \tag{1.17}$$

On admet que la série existe au sens presque sûr mais la positivité des composantes de vecteur z_t n'est pas assurée, une condition suffisante pour que la série 1.17 est positive presque sur est que $\omega > 0$, $\alpha_i \geqslant 0$ pour tout $i = 1, \dots, q$, $\beta_j \geqslant 0$ pour tout $j = 1, \dots, p$.

Théorème 1.3.2 *[8] Soit $(A_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ une suite de matrices aléatoires, strictement stationnaire et ergodique, telle que $Elog^+\|A_t\|$ est finie. on a*

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} \frac{1}{t} E(\log \parallel A_tA_{t-1}, \dots, A_1 \parallel) = \gamma = \inf_{t\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{t} E(\log \parallel A_tA_{t-1}, \dots, A_1 \parallel). \tag{1.18}$$

Tel que γ (resp. $exp(\gamma)$) le plus grand exposant de Lyapounov (resp. rayon spectral) de la suite de matrices $(A_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

$$\gamma = \lim_{t\longrightarrow\infty} p.s\ log\| A_tA_{t-1} \dots A_1 \|. \tag{1.19}$$

1.3.2 Stationnarité stricte de GARCH(p,q)

la stationnarité stricte d'un modèle GARCH(p,q) est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.3.3 *[2] Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un processus $GARCH(p,q)$ strictement stationnaire, solution du modèle (1.11) est que $\gamma < 0$ tel que γ est le plus grand exposant de Lyapounov de la matrice donnée par (1.15).*

Lorsqu'elle existe, la solution strictement stationnaire est unique, non anticipative et ergodique.

Preuve 1.3.3 *Comme tous les termes de la matrice (A_t) sont intégrables alors on peut écrire :*

$$E(\log \|A_t\|) \leq E(\|A_t\|) < \infty. \tag{1.20}$$

D'abord, on suppose que $\gamma < 0$ donc d'après (1.19) $\tilde{z}_t(N) = b_t + \sum_{n=0}^{N} \|A_t A_{t-1} \dots A_1\|$ converge presque sûrement vers une limite notée $\tilde{z}_t$ lorsque N tend vers l'infini, tel que

$$\|\tilde{z}_t(N)\| \leq \|b_t\| + \sum_{n=0}^{N} \|A_t A_{t-1} \dots A_{t-n}\| \|b_{t-n-1}\|. \tag{1.21}$$

Et on a $\|A_t A_{t-1} \dots A_{t-n}\|^{\frac{1}{n}} \|b_{t-n-1}\|^{\frac{1}{n}} = exp[\frac{1}{n} \log \|A_t A_{t-1} \dots A_{t-n}\| + \frac{1}{n} \log \|b_{t-n-1}\|] \xrightarrow{p.s} \exp(\gamma) < 1$ et $n^{-1} \log \|b_{t-n-1}\| \longrightarrow 0$ p.s. Pour montrer l'unicité de solution on suppose autre solution donnée par $X_t = \sqrt{\tilde{z}_{q+1,t}}\eta_t$, comme X_t s'exprime en fonction de η_t et η_{t-1} alors cette solution est non anticipative, et par l'ergodicité de (η_t) la solution est également strictement stationnaire et ergodique. Pour $p = q = 1$ $z_t = \tilde{z}_t(N) + A_t A_{t-N} z_{t-N-1}$ alors $\|z_t - \tilde{z}_t\| \leq \underbrace{\|\tilde{z}_t(N)\tilde{z}_t\|}_{(1)} + \underbrace{\|A_t \dots A_{t-N}\|}_{(i)} \underbrace{\|z_{t-N-1}\|}_{(ii)}$, quand $n \longrightarrow \infty$ $(1) \longrightarrow 0$ car la série définissant $\tilde{z}_t$ converge p.s. $(i) \longrightarrow 0$ en probabilité 1, avec probabilité 1 quand $n \longrightarrow \infty$ donc le produit de(i) et (ii) converge vers 0 en probabilité donc $z_t - \tilde{z}_t \longrightarrow 0$ en probabilité alors $z_t = \tilde{z}_t$. Pour montrer la deuxième partie de la preuve on a besoin de lemme suivant :

Lemme 1.3.1 *Soit $(A_t)_t \in \mathbb{Z}$ une suite ergodique et strictement stationnaire de matrices aléatoires telle que $E(log^+\|At\|$ est finie et de plus grand exposant de Lyapounov γ. Alors $\lim_{t \longrightarrow \infty} p.s \|A_0 \dots A_{-t}\| = 0 \Rightarrow \gamma < 0$.*

On doit montrer que

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} A_0 \dots A_{-t} e_i = 0 \tag{1.22}$$

pour tout $1 \leq i \leq p+q$ où e_i est le i-ème élément de la base canonique de $\mathbb{R}^{p+q}$ on a pour $t > 0$ et d'après (1.16) on a

$$\begin{aligned} z_0 &= b_0 + A_0 z_{-1} \\ &= b_0 + \sum_{k=0}^{t-1} A_0 A_{-k} b_{-k-1} + A_0 \dots A_{-t} z_{-t-1} \\ &\geq \sum_{k=0}^{t-1} A_0 A_{-k} b_{-k-1} \end{aligned}$$

comme la série $\sum_{k=0}^{t-1} A_0 A_{-k} b_{-k-1}$ *converge alors* $A_0 A_{-k} b_{-k-1}$ *tend presque sûrement vers 0 quand* $k \longrightarrow \infty$ *où*

$b_{-k-1} = \omega\eta_{-k-1}^2 e_1 + \omega e_{q+1}$ *donc* $\lim_{k\longrightarrow\infty} A_0 A_{-k}\omega\eta_{-k-1}^2 e_1 = 0$, $\lim_{k\longrightarrow\infty} A_0 A_{-k}\omega e_{q+1} = 0 p.s$ *mais comme* $\omega \neq 0$ *la relation (1.22) est vraie pour* $i = q+1$ *utilisons*

$$A_{-k} e_{q+1} = \beta_i \eta_{-k}^2 e_1 + \beta_i e_{q+1} + e_{q+p+1}, i = 1, \ldots, p \tag{1.23}$$

si $e_{q+p+1} = 0$ *alors et pour i=1 alors* $A_0 A_{-k} e_{q+1} \geq A_0 A_{-k+1} e_{q+2}$ $0 = \lim_{t\longrightarrow\infty}$ *donc (1.22) est vraie pour* $i = q+2$ *on remarque que* $A_{-k} e_q \alpha_q \eta_{-k}^2 e_1 + \alpha_q e_{q+1}$ *pour i=q on obtient* $A_{-k} e_q \alpha_i \eta_{-k}^2 e_1 + \alpha_i e_{q+1}$ $i = 1, \ldots, q-1$

Corollaire 1.3.1 *soit* γ *le plus grand exposant de Lyapounov de la suite* $(A_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *définie en 1.15 si* $\gamma < 0$ *alors les propriétés suivants sont équivalents :*

(a) $\sum_{i=1}^{p} \beta_j < 1$

(b) $1 - (\beta_1 z - \ldots \beta_p z^p) = 0 \Rightarrow | z > 1 |$

(c) $\rho(B) < 1$, *où* B *est sous matrice de* A_t *définie par :*

$$A_t = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_p \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ldots & 1 \quad 0 \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

telle que la matrice A_t *est de taille* $p \times p$ *et de termes positifs.*

1.3.3 Stationnarité au second ordre

La stationnarité au second ordre est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.3.4 *Etant donné la stationnarité au second-ordre et non anticipative d'un processus GARCH(p,q) est établi, et si* $\omega > 0$ *et*

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1 \tag{1.25}$$

Inversement, si 1.25 est vérifiée, l'unique solution strictement stationnaire du modèle 1.11 est un bruit blanc faible. Il n'existe pas d'autre solution stationnaire au second ordre.

Preuve 1.3.4 *on a*

$$\begin{aligned} E(X_t^2) &= E\left\{E(X_t/\mathcal{F}_{t-1})\right\} = E(h_t) \\ &= E(\omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}) \\ &= E(\omega) + E(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i X_{t-i}^2) + E(\sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}) \\ &= E(\omega) + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i E(X_{t-i}^2) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j E(h_{t-j}) \end{aligned}$$

mais comme $E(X_{t-i}^2) = E(X_t^2) = E(h_{t-j})$
alors $E(X_t^2) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i E(X_t^2) + \sum_{j=1}^{p} \beta_j E(X_t^2)$ *donc* $(1 - \sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j) = \omega$,
on sait que $\omega > 0$ *alors* $1 - \Big(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \Big) > 0 \Leftrightarrow \Big(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \Big) < 1$, *d'où le résultat.*

Chapitre 2

Estimation d'un modèle GARCH univarié

2.0.1 Introduction

Dans ce chapitre on va utiliser une méthode d'estimation d'un modèle GARCH, la méthode du Quasi-Maximum de vraisemblance (QMV).

2.1 Méthode du Quasi-maximum de vraisemblance conditionnelle

Dans la suite on utilise la méthode du Quasi-maximum de vraisemblance noté (QMV) pour estimer les paramètres d'un processus GARCH univariée strictement stationnaire donné dans (1.8) tel que ce processus est une solution strictement stationnaire non anticipative du modèle :

$$\begin{cases} X_t = \sqrt{h_t}\eta_t, \\ \\ h_t = \omega_0 + \sum\limits_{i=1}^{q} \alpha_{0i} X_{t-i}^2 + \sum\limits_{i=1}^{p} \beta_{0j} h_{t-j}, \quad \forall t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \tag{2.1}$$

η_t : est une suite de variables (i.i.d) centrée réduite, $\omega_0 > 0$, $\alpha_{0i} \geq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, q$ et $\beta_{0j} \geq 0$ pour tout $j = 1, \ldots, p$, soit θ le vecteur des paramètres qui s'écrit sous la forme suivante :
$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_{p+q+1})' := (\omega, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q)' \in \Theta$ tel que $\Theta \subset]0, +\infty[\times[0, +\infty[^{p+q}$ cas où p et q nuls, soit θ_0 la vraie valeur du paramètre θ où : $\theta_0 = (\alpha_{01}, \ldots, \alpha_{0q}, \beta_{01}, \ldots, \beta_{0p})'$, supposons que η_t suit une loi normale centrée réduite.
supposons :

$$\tilde{h_t} = \tilde{h_t}(\theta) = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \tilde{h}_{t-j}. \tag{2.2}$$

Dans Franck voir [8](page 185) le choix des valeurs initiales est :

$$X_0, \dots X_{1-q}, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \dots, \tilde{h}_{1-p} = \omega. \tag{2.3}$$

$$X_0, \dots X_{1-q}, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \dots, \tilde{h}_{1-p} = X_1^2. \tag{2.4}$$

Remarque 2.1.1 *En théorie le choix des valeurs initiales n'a aucun effet sur les propriétés des estimateurs du QMV, par contre en pratique il faut bien choisir ces valeurs.*

La vraisemblance conditionnelle gaussienne est donnée par :

$$L_n(\theta) = L_n(\theta, X_1, \dots, X_n) = \prod_{t=1}^{n} (\frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp(-\frac{X_t^2}{2h_t}). \tag{2.5}$$

Un estimateur du QMV de θ est défini comme toute solution mesurable

$$\widehat{\theta}_n = \arg\max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta) \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} L_n(\theta) = L_n(\theta, X_1, \dots, X_n) &= \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp(-\frac{X_t^2}{2h_t}) \\ \log L_n(\theta) &= \log \prod_{t=1}^{n} (2\pi\tilde{h}_t)^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{X_t^2}{2\tilde{h}_t}) \\ &= -[\frac{1}{2n} \log(2\pi\tilde{h}_t) + \sum_{t=1}^{n} \frac{X_t^2}{2\tilde{h}_t}] \end{aligned}$$

.

avec $\tilde{h}_t$ est donné par (2.2). Le problème de maximisation devient de minimisation de $\widehat{I}_n(\theta)$ par rapport à θ tel que

$$\widehat{\theta_n} = \arg\min_{\theta \in \Theta} \widehat{I}_n(\theta) \tag{2.7}$$

où I_n est l'information de Fisher donné par $I_n(\theta) = E(\frac{d}{d\theta} \log \mathcal{L}(x_n, \theta)) = nI_1(\theta)$

si on dérive $I_n(\theta)$ par rapport à θ tel que

$I_n(\theta) = \frac{1}{n}(\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t^2}{h_t} + \log h_t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_n(\theta)}{\partial\theta} &= \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial\theta} (\sum_{t=1}^{n} \frac{X_t^2}{h_t} + \log h_t) \\ &= \frac{1}{n} (\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{\tilde{h}_t} \frac{\partial\tilde{h}_t}{\partial\theta} - \frac{X_t^2}{\tilde{h}_t^2} \frac{\partial\tilde{h}_t}{\partial\theta}) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (X_t^2 - \tilde{h}_t) \frac{1}{\tilde{h}_t^2} \frac{\partial\tilde{h}_t}{\partial\theta} \end{aligned}$$

mais si on annule sa dérivée on obtient l'équation du vraisemblance c'est-à-dire

$$\frac{\partial I_n(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (X_t^2 - \tilde{h}_t) \frac{1}{\tilde{h}_t^2} \frac{\partial\tilde{h}_t}{\partial\theta} = 0. \tag{2.8}$$

D'aprés Franck [8] si on prend $v_t = X_t^2 - h_t$ et le remplace dans (2.8) et on met l'espérance on a : $E_{\theta_0}(v_t \frac{1}{h_t^2(\theta_0)} \frac{\partial h_t(\theta_0)}{\partial\theta}) = 0$

2.1.1 Propriétés de l'estimateur du QMV

Pour étudier la convergence forte de l'estimateur du QMV on a besoin de connaitre la matrice A_{0t} suivante : $A_{0t} = A_0 =$

$$\begin{pmatrix}
\alpha_{01}\eta_t^2 & & \dots & & \alpha_{0q}\eta_t^2 & \beta_{01}\eta_t^2 & & \dots & & \beta_{0p}\eta_t^2 \\
1 & 0 & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\
0 & 1 & \dots & & 0 & 0 & & \dots & & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
0 & & \dots & 1 & 0 & 0 & & \dots & 0 & 0 \\
\alpha_{01} & & \dots & & \alpha_{0q} & \beta_{01} & & \dots & & \beta_{0p} \\
0 & & \dots & & 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\
0 & & \dots & & 0 & 0 & 1 & \dots & & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
0 & & \dots & 0 & 0 & 0 & & \dots & 1 & 0
\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

on dit que le système (2.1) une solution strictement stationnaire si et seulement si le coefficient de Lyapounov de la matrice suite de matrices A_{0t} est strictement négatif, $\gamma(A_{0t}) < 0$ tel que on a

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} \frac{1}{t} E(\log \parallel A_{0t}A_{0t-1}, \dots, A_{01} \parallel) = \gamma = \inf_{t\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{t} E(\log \parallel A_{0t}A_{0t-1}, \dots, A_{01} \parallel) \tag{2.10}$$

dans la suite on aurait besoin des propriétés suivantes :

1) $\theta_0 \in \Theta$ et Θ est compact,
2) $\gamma(A_0) < 0$ et $\forall\theta \in \Theta$, $\sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1$
3) $E(\eta^2) = 1$
4) supposons que n'existent pas des racines communes entre $A_{\theta_0}(z)$ et $B_{\theta_0}(z)$ tels que $A_{\theta_0}(z)$ et $B_{\theta_0}(z)$ sont définies par : $A_{\theta_0}(z) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i z^i$, $B_{\theta_0}(z) = 1 - \sum_{j=1}^{q} \beta_j z^j$.

Théorème 2.1.1 *[8] si les hypothèses 1-4 sont vérifiés avec les conditions initiales (2.3) et (2.4) alors* $\widehat{\theta}_n \longrightarrow \theta_0$ *prèsque surement quand* $n \longrightarrow +\infty$ *où* $(\widehat{\theta_n})$ *est une suite d'estimateurs du QMV qui satisfait (2.7).*

2.1.2 La normalité asymptotique de l'estimateur du QMV

Pour établir la normalité asymptotique suivant (Franck et Zakoin) [8] page(189) on ajoute les deux conditions :

5) θ_0 appartient à l'interieur de Θ.
6) $k_n = E\eta_t^4 < \infty$.

Théorème 2.1.2 *[8] Sous les conditions C1-C6 on a* $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \widehat{\theta}_0)$ *converge en loi en vers* $N(0, (k_n - 1)J^{-1})$ *telle que* $E_{\theta_0}(\frac{(\partial^2 l_t(\theta_0)}{\partial\theta\partial\theta'})$
$= E_{\theta_0}(\frac{1}{h_t^2(\theta_0)} \frac{\partial h_t(\theta_0)}{\partial\theta} \frac{\partial h_t(\theta_0)}{\partial\theta'})$ *est une matrice définie positive.*

Preuve 2.1.1 *Le principe est donner une représentation vectorielle au- torégressive d'ordre un du vecteur* $h_t := (h_t, h_{t-1}, \ldots, h_{t-p+1})'$ *et montrer que les valeurs initiales n'ont aucune importance asymptotique, de vérifier que l'espérance de* $l_t(\theta_0)$ *est bien définie dans* $\mathbb{R}$ *et que* $E_{\theta_0}(l_t(\theta)) - E_{\theta_0}(l_t(\theta_0)) \geq 0$

On a

$$h_t = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i X_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-1} \tag{2.11}$$

Soient

$$\underline{h}_t := (h_t, h_{t-1}, ..., h_{t-p+1})^t \quad \underline{c}_t := \left(\omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i X_{t-1}^2, 0, ..., 0\right)^t \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & . & . & . & \beta_p \\ 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ 0 & . & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors on peut écrire

$$\underline{h}_t = \underline{c}_t + B\underline{c}_{t-1} \tag{2.12}$$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\theta\in\Theta} |I_n(\theta) - \widetilde{I}_n(\theta)| = 0 \quad p.s$

b) $(\exists t \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\sigma_t^2(\theta) = \sigma_t^2(\theta_0) P_{\theta_0} \quad p.s) \Longrightarrow \theta = \theta_0$

c) $E_{\theta_0}|l_t(\theta_0)| < \infty$, *et si* $\theta \neq \theta_0$,

$$E_{\theta_0} l_t(\theta) \geq E_{\theta_0} l_t(\theta_0)$$

d) pour tout $\theta \neq \theta_0$ *il existe un vosinage* $V(\theta)$ *tel que*

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{\theta^* \in V(\theta)} \widetilde{I}_n(\theta^*) > E_{\theta_0} l_1(\theta_0)$$

on en déduit que $E_{\theta_0} l_t(\theta)$ *est bien défini dans* $\mathbb{R}$. *Puisque pour tout* $x > 0, \log x \leq x - 1$, *avec égalité si et seulement si* $x = 1$, *on a*

$$\begin{aligned} E_{\theta_0} l_t(\theta) - E_{\theta_0} l_t(\theta_0) &= E_{\theta_0} \log \frac{\sigma_t^2(\theta)}{\sigma_t^2(\theta_0)} + E_{\theta_0} \frac{\sigma_t^2(\theta_0)\eta_t^2}{\sigma_t^2(\theta)} - E_{\theta_0}\eta_t^2 \\ &= E_{\theta_0} \log \frac{\sigma_t^2(\theta)}{\sigma_t^2(\theta_0)} + E_{\theta_0} \frac{\sigma_t^2(\theta_0)}{\sigma_t^2(\theta)} - 1 \\ &\geq E_{\theta_0} \left\{ \log \frac{\sigma_t^2(\theta)}{\sigma_t^2(\theta_0)} + \log \frac{\sigma_t^2(\theta_0)}{\sigma_t^2(\theta)} \right\} = 0 \end{aligned}$$

d'après le corollaire 1.3.1 et comme Θ *est compact alors*

$$\sup_{\theta\in\Theta} \rho(B) < 1 \tag{2.13}$$

en itérant 2.12

$$\begin{aligned} h_t &= c_t + Bh_{t-1} \\ &= c_t + B(c_{t-1} + Bh_{t-2}) \\ &= c_t + Bc_{t-1} + B^2 c_{t-1} + \ldots + B^k c_{t-k} \end{aligned}$$

donc $h_t = \sum_{i=1}^{k} B^k c_{t-k}$, *si on remplace* h_{t-i} *par* $\tilde{h}_{t-i}$ *dans* $\underline{h_t}$ *et* X_0^2 *et* X_{1-q}^2 *on obtient*

$$\tilde{h_t} = \underline{c_t} + Bc_{t-1} + \ldots, B^{t-q-1}\underline{c}_{q+1} + B^{t-q}\tilde{\underline{c}}_q + \ldots + \tag{2.14}$$

de 2.13 la quantité

$$\sup \|\underline{h_t} - \tilde{h_t}\| = \sup \| \left\{ \sum_{k=1}^{q} B^{t-k}(\underline{c_t} - \tilde{\underline{c}}_t) + B^t(\underline{h}_0 - \tilde{\underline{h}}_0) \right\} \| \leq K\rho^t \tag{2.15}$$

$\forall t$. *En utilisant 2.15 on obtient*

$$\begin{array}{rcl} \sup_{\theta\in\Theta} |I_n(\theta) - \widetilde{I}_n(\theta)| & \leq & n^{-1} \sum_{t=1}^{n} \sup_{\theta\in\Theta} \left\{ |\frac{\widetilde{\sigma}_t^2 - \sigma_t^2}{\widetilde{\sigma}_t^2 \sigma_t^2}| \epsilon_t^2 + |\log \frac{\sigma_t^2}{\widetilde{\sigma}_t^2}| \right\} \\ & \leq & \left\{ \sup_{\theta\in\Theta} \frac{1}{\omega^2} \right\} Kn^{-1} \sum_{t=1}^{n} \rho^t \epsilon_t^2 + \left\{ \sup_{\theta\in\Theta} \frac{1}{\omega} \right\} Kn^{-1} \sum_{t=1}^{n} \rho^t \end{array} \tag{2.16}$$

Maintenant on montre que $\widehat{\theta}_n \in V(\theta_0)$ *tel que* $V(\theta_0)$ *est un voisinage de* θ_0 *donc*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \sup_{\theta^* \in V(\theta_0)} \inf \tilde{I}_n(\theta) \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \tilde{I}_n(\theta_0) = E_{\theta_0} l_1(\theta_0) \tag{2.17}$$

donc $\widehat{\theta}_n \in V(\theta_0)$ *presque sûrement. D'où le résultat.*

Chapitre 3

Estimation d'un modèle GARCH multivarié

3.1 Introduction

Les scientifiques toujours recherchent des méthodes optimales pour modéliser la relation entre plusieurs séries financières et la matrice de variance-covariance, après grands efforts, ils ont proposé le modèle GARCH multivarié ou MGARCH, il est pour un processus de plusieurs variables difficile à voir directement ses propriétés comme la variance, la covariance...etc, et comme la racine d'une matrice est inconnue ou bien non-incarné, les chercheurs ont proposé plusieurs spécifications, dans ce chapitre on va voir ces spécifications vec(1,1),modèle vec diagonal, modèle BEEK, modèle à corrélations conditionnelles constantes (CCC) et modèle à corrélations conditionnelles dynamiques (DCC). Le but commun de ces modèles est rendre le nombre des paramètres à estimer très petit, et au même temps donne la variance la covariance et la relation entres les variable de ce modèle.

Définition 3.1.1 *Un processus GARCH $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ de valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que $X_t = (X_t^1, X_t^2, \ldots, X_t^d)'$ est dit GARCH multivarié s'il vérifie :*

i) $E(X_t/X_u, u \leq t) = 0$.

ii) $Var(X_t/X_u, u < t) = E(X_t X_t'/X_u, u < t) = H_t$.

3.2 La spécification vectorielle

Le modèle vectoriel a été proposé pour la première fois par Engle, Granger et kraft [9], il est donné par la définition suivante :

Définition 3.2.1 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus de dimension d i.e, $X_t := (X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{dt})'$, X_t est un*

processus GARCH vectoriel s'il satisfait :

$$\begin{cases} X_t = H_t^{\frac{1}{2}} \eta_t, \\ \\ h_t = \omega + \sum_{i=1}^{q} A_i e_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} B_j h_{t-j}, \end{cases} \tag{3.1}$$

tel que ω est un vecteur de dimension $\{d(d+1)/2\}\times 1$ A_i et B_j sont des matrices d'ordre d, $e_t = vec(X_t X_t')$ et $h_t = vec(H_t)$, le nombre des paramètres de vec(1,1) est 21 qui rend l'estimation difficile donc les auteurs suggèrent la formulation Diagonal VEC (DVEC). En supposant que les matrices A et B sont diagonales, le nombre de paramètres est égal à 9 pour un modèle VEC (1,1) bivarié.

3.2.1 La spécification vec(1,1)

Le modèle vec(1,1) a été introduit par Bollerslev, Engle et wooldridge [3], il étude la relation entre les composantes du processus, maintenant on définit le modèle vectoriel comme suit :

Définition 3.2.2 *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ processus $GARCH(p,q)$, alors le modèle $vec(1,1)$ est défini par*

$$vech(H_t) = \omega + Avech(X_{t-1}X_{t-1}') + Bvech(H_{t-1}) \tag{3.2}$$

tel que ω est un vecteur de dimension $\{d(d+1)/2\}\times 1$, H_t est une matrice symétrique définie positive de dimension $d\times d$ et A, B sont des matrices à valeurs réels d'ordre d. [1] [2]

Un modèle GARCH bivarié s'écrit :

$$h_t = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t-1}^2 \\ X_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{1,t-1} \\ h_{2,t-1} \end{pmatrix}$$

Exemple 3.2.1 *si d=2 on a*

$$\begin{aligned} vech(H_t) = \begin{pmatrix} h_{11t} \\ h_{21t} \\ h_{22t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t-1}^2 \\ X_{1,t-1}X_{2,t-1} \\ X_{2,t-1}^2 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{21,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.3}$$

on a

$$X_{t-1}X_{t-1}' = \begin{pmatrix} X_{1,t-1}^2 & X_{1,t-1}X_{2,t-1} \\ X_{2,t-1}X_{1,t-1} & X_{2,t-1}^2 \end{pmatrix}$$

1. vec est un opérateur qui met en une seule colonne les colonnes d'une matrice
2. vech est un opérateur qui met en seule colonne la partie triangulaire supérieure d'une matrice

donc

$vech(X_{t-1}X'_{t-1})=$

$$\begin{pmatrix} X^2_{1,t-1} \\ X_{1,t-1}X_{2,t-1} \\ X^2_{2,t-1} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Le nombre de paramètres est égal à 21 qui red l'estimation difficile, donc les auteurs ont supposé que les matrices A et B sont des matrices diagonales.

3.2.2 La spécification DVEC

Le modèle diagonal est un modèle tel que les matrices A et B sont supposées diagonaux, les éléments de la matrice H_t sont donnés par l'expression suivante :

$$vech(H_t) = \omega + Avech(X_{t-i}X'_{t-i}) + Bvech(H_{t-j}) \tag{3.5}$$

de notre exemple précédant on obtient :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h_{11t} \\ h_{21t} \\ h_{22t} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X^2_{1,t-1} \\ X_{1,t-1}X_{2,t-1} \\ X^2_{2,t-1} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{21,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.6}$$

de (3.6) on a

$$\begin{cases} h_{11t} = \omega_1 + a_{11}X^2_{1,t-1} + b_{11}h_{11,t-1}, \\ \\ h_{21t} = \omega_2 + a_{22}X_{1,t-1}X_{2,t-1} + b_{22}h_{21,t-1}, \\ \\ h_{22t} = \omega_3 + a_{33}X^2_{2,t-1} + b_{33}h_{22,t-1} \end{cases} \tag{3.7}$$

3.3 Modèle BEKK

Les modèles vec(1,1) et DVEC n'assurent pas la définie positivité de la matrice variance-covariance Baba, Engle, Kroner et Kraft [1] ont proposé le modèle BEKK, ce modèle est donné par :

$$\begin{cases} X_t = \quad H_t^{\frac{1}{2}}\eta_t, \\ \\ H_t = \omega + \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{K} A_{ik}X_{t-i}X'_{t-i}A'_{ik} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{K} B_{kj}H_{t-j}B'_{kj}, \end{cases} \tag{3.8}$$

où ω est matrice de taille $d \times d$ symétrique définie positive, notons $\omega = CC'$ tel que C est une matrice triangulaire inférieure A_{ik}, B_{jk} sont des matrices de dimension d, pour faire une relation entre (3.8) et

(3.1) on utilise l'opérateur vech et ses propriétés pour l'écriture vectorielle suivante :

$$\begin{aligned} vech(H_t) &= vech(\omega + \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{K} A_{ik}X_{t-i}X'_{t-i}A'_{ik} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{K} B_{kj}H_{t-j}B'_{kj}) \\ &= vech(\omega) + vech(\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{K} A_{ik}X_{t-i}X'_{t-i}A'_{ik} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{K} B_{kj}H_{t-j}B'_{kj}) \\ &= vech(\omega) + D_d^+ vec(\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{K} A_{ik}X_{t-i}X'_{t-i}A'_{ik} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{K} B_{kj}H_{t-j}B'_{kj}) \\ &= vech(\omega) + \sum_{i=1}^{q} D_d^+ \sum_{k=1}^{K}(A_{ik}\otimes A_{ik})D_d vech(X_{t-i}X'_{t-i}) \\ &+ \sum_{j=1}^{p} D_m^+ \sum_{k=1}^{K}(B_{kj}\otimes B_{kj})D_m vech(H_{t-j}). \end{aligned}$$

Donc notre modèle BEKK est donné sous forme (3.1) tel que $A^{(i)} = D_d^+ \sum_{k=1}^{K}(A_{ik}\otimes A_{ik})D_d$, $B^{(j)} = D_d^+ \sum_{k=1}^{K}(B_{kj}\otimes B_{kj})D_d$ pour tout $i = 1,\dots,q$ et $j = 1\dots,p$.
Le nombre de paramètres de la matrice $A^{(i)}$ est $(d\times(d+1))^2$ dans le modèle 3.1 et $K\times d^2$ dans ce cas.
Pour K=1 et pour GARCH(1,1) le modèle BEKK devient

$$H_t = \omega + A_1X_{t-1}X'_{t-1}A'_1 + B_1H_{t-1}B'_1. \tag{3.9}$$

Pour voir la définie positivité de la matrice H_t on a besoin de la proposition suivante :

Proposition 3.3.1 *(Engle et Kroner [10]) Si $H_0, H_{-1},\dots,H_{-p+1}$ sont tous définies positives, alors H_t est définie positive pour toutes les valeurs possibles de X_t si C est matrice de plein rang ou si B_i est matrice de plein rang pour tout $i = 1,\dots,p$.*

3.4 Modèles à Corrélations Conditionnelles Constantes (CCC)

Le modèle à Corrélation Conditionnelles Constantes (CCC) a été introduit par bollerslev [2], dans ce modèle les corrélations conditionnelles sont constantes et les variances et covariances varient dans le temps, il est donné par :

$$\begin{cases} H_t = D_tRD_t, \\ D_t = diag(\sqrt{h_{11,t}}, \sqrt{h_{22,t}},\dots,\sqrt{h_{dd,t}}), \\ h_t = \omega + \sum_{i=1}^{q} A_iX_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} B_jh_{t-j}, \end{cases} \tag{3.10}$$

où H_t :matrice de dimension $(d+1)\times(d+1)$ des variances conditionnelles de X_t.
D_t :matrice diagonale d'ordre contient les écarts-types de X_t.
R :matrice de dimension $(d+1)\times(d+1)$ des corrélations constantes.
Les matrices A_i et B_j sont des matrices carrées de dimension $(d\times d)$ à coefficients positifs, on peut écrire

X_t comme suit $X_t = D_t\tilde{\eta}_t$ tel que $\tilde{\eta}_t = R^{\frac{1}{2}}\eta_t$ est un vecteur centré de matrice de variance-covariance R. La corrélation conditionnelle entre X_{it} et X_{jt} à l'instant $t-1$ est donnée par :

$$\rho_{ij,t} = \frac{h_{ij,t}}{(h_{iit})^{\frac{1}{2}}(h_{jjt})^{\frac{1}{2}}}, \tag{3.11}$$

tels que $j = 1, \ldots, d$ et $i = j+1, \ldots, d$, donc de (3.11) on obtient $h_{ij,t} = \rho_{ij,t}(h_{iit})^{\frac{1}{2}}(h_{jjt})^{\frac{1}{2}}$.
La matrice R est écrite comme suit :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} & \cdots & \rho_{1d} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \cdots & \rho_{2d} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \rho_{d-1d} \\ \rho_{d1} & \rho_{d2} & \cdots & \rho_{dd-1} & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice H_t est définie positive car D_t est une matrice diagonale contenant les éléments positifs $\sqrt{h_{11,t}}, \sqrt{h_{22,t}}, \ldots, \sqrt{h_{dd,t}}$ et la matrice R est constante par rapport au temps de dimension d et qui a les éléments ρ_{ij} et 1 sur la première diagonale et on a :
{(pour tout x non nul tel que $x \in \mathbb{R}^d, x'H_tx > 0$} est équivalente à l'expression {$(x'D_tRD_t \;\; x > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^d \; x \neq 0)$}

Stationnarité du modèle à corrélations conditionnelles constantes

Etant $\tilde{\eta}_t = R^{\frac{1}{2}}\eta_t$ alors $X_t = \Gamma_t h_t$ avec

$$\Gamma_t = \begin{pmatrix} \tilde{\eta^2}_{1t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \tilde{\eta^2}_{dt} \end{pmatrix}.$$

La multiplication de l'expression de h_t par Γ donne :
$X_t = \Gamma_t\omega + \sum_{i=1}^{q} \Gamma_t A_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} \Gamma_t A_i X_{t-i} B_j h_{t-j}$ et comme
$h_t = \omega + \sum_{i=1}^{q} A_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} B_j h_{t-j}$ si on remplace successivement les i et j tq $i = 1, \ldots, q, j = 1, \ldots, p$ alors
$X_t = \Gamma_t\omega + \Gamma_t A_1 X_{t-1} + B_1 h_{t-1}$
$= \Gamma_t\omega + \Gamma_t A_2 X_{t-2} + B_2 h_{t-2}$
$= \vdots$
$= \Gamma_t\omega + \Gamma_t A_{q+1} X_{t-q+1} + B_{p+1} h_{t-p+1}$ et
$h_t = \omega + A_1 X_{t-1} + B_1 h_{t-1} + A_2 X_{t-2} + B_2 h_{t-2} + \ldots B_p h_{t-p+1}$ remarquons que ce système donne une écriture vectorielle

notons $b_t = b(\eta_t) = (\Gamma_t\omega, 0, \ldots, \omega, 0, \ldots, 0)' \in \mathbb{R}^{d(p+q)}$
$z_t = (X_t, \ldots, X_{t-q+1}, h_t \ldots, h_{t-p+1})' \in \mathbb{R}^{d(p+q)}$.

et

$$A_t = \begin{pmatrix} \Gamma_t A_1 & \dots & \Gamma_t A_1 & \Gamma_t B_1 & \dots & \Gamma_t B_p \\ I_d & 0 \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_d \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \ddots & \vdots \\ 0 & \dots I_d & 0 & 0 & \dots 0 & 0 \\ A_1 & \dots & A_q & B_1 & \dots & B_p \\ 0 & \dots & 0 & I_d & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & I_d \dots & 0 \\ \vdots & \ddots \ddots & \vdots & \vdots & \ddots \ddots & \vdots \\ 0 & \dots 0 & 0 & 0 & \dots I_d & 0 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

A_t est une matrice taille $(p+q)d \times (p+q)d$. Donc l'écriture vectorielle est donnée par :

$$z_t = b_t + A_t z_{t-1}. \tag{3.13}$$

3.4.1 Stationnarité stricte

La stationnarité stricte du processus X_t est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.4.1 *[8] Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un processus strictement stationnaire, solution non anticipative du modèle 3.10 est que $\gamma < 0$, où $\gamma < 0$ est le plus grand exposant de Lyapounov de la suite $(A_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ définie par (3.12), Cette solution stationnaire non anticipative est unique et ergodique.*

Preuve voir [8] p 362

les propriétés de la stationnarité stricte de X_t sont donnés par le corollaire suivant

Corollaire 3.4.1 *Soit γ le plus grand exposant de Lyapounov de la suite $A_{t\,t\in\mathbb{Z}}$ et soit $\mathcal{B}(z) = I_d - zB_1 - \dots - z^p B_p$ un polynôme de coéfficients matriciels, on définit la matrice $\boldsymbol{B}$ par*

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_p \\ I_d & 0 & \dots 0 & \\ 0 & I_d & \dots 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & I_d & 0 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Alors si $\gamma < 0$, on a les propriétés équivalentes suivantes :

1) Les racines de $\det \mathcal{B}(z)$ sont de module plus grand que 1.

2) $\rho(\boldsymbol{B}) < 1$

Le problème posé sur le modèle CCC est que dans la pratique les corrélations conditionnelle varient et nous avons supposé qu'elle sont constante ,donc le s chercheurs ont donné autre modèle pour améliorer la

recherche et garantir des résultats mieux, ça s'appelle le modèle à corrélations conditionnelles dynamiques, on verra prochainement.

3.5 Modèles à Corrélations Conditionnelles Dynamiques(DCC)

La généralisation du modèle CCC est dite modèle à corrélations conditionnelles dynamiques noté (DCC), a été introduit par Engle [3] et donné par :

$$\begin{cases} X_t = H_t^{\frac{1}{2}} \eta_t, \\ \\ H_t = D_t R_t D_t, \end{cases} \tag{3.15}$$

Où η_t est un vecteur colonne des erreurs (iid) tel que $E(\eta_t) = 0$ et $E(\eta_t \eta_t') = I$,

H_t :matrice de taille d des variances conditionnelles de X_t.

D_t :matrice diagonale de taille d contient les écarts-types de X_t.

R_t :matrice de taille $d \times d$ des corrélations conditionnelles, ses éléments sont $r_{ij,t}$ définies par :

$$r_{ij,t} = \begin{cases} \rho_{ij,t} \ si \ i \neq j \\ \\ 1 \ si \ i = j \end{cases}$$

La matrice R_t peut se composer à

$$R_t = Q^{*-1} Q_t Q^{*-1}, \tag{3.16}$$

tel que

$$Q_t = (1 - a - b)\bar{Q} + a X_{t-1} X_{t-1}' + b Q_{t-1}, \tag{3.17}$$

Tse et Tsui [11] donne la formule suivante :

$$R_t = \theta_1 R + \theta_2 \psi_{t-1} + \theta_3 R_{t-1}. \tag{3.18}$$

Où R est une matrice de corrélation constante, θ_i des scalaires de somme égale à 1, ψ_{t-1} est la matrice de corrélation empirique et R_t est la matrice de corrélation.

(3.18) est identique à un GARCH(1,1) tel que $\theta_1 R = \omega$, $\theta_2 = \alpha$ et $\theta_3 = \beta$ et pour préciser la dynamique de R_t on pose $R_t = (diagQ_t)^{-\frac{1}{2}} Q_t (diagQ_t)^{-\frac{1}{2}}$ où $diagQ_t$ est une matrice diagonale a les mêmes éléments diagonaux que Q_t, Q_t est la matrice de variance. Engle [3] propose :

$$Q_t = \theta_1 Q + \theta_2 X_{t-1} X_{t-1}' + \theta_3 Q_{t-1} \tag{3.19}$$

où Q est la matrice de variance, les deux equations (3.18) et (3.19) ont le même but de tester l'hypothèse de covariance conditionnelle constante qu'il est vérifié si $\theta_2 = \theta_3 = 0$ et obtenant $Q_t = Q$ et $R_t = R$ ceci le but.

Chapitre 4

La théorie asymptotique

4.1 Introduction

Pour estimer les paramètres d'un modèle MGARCH on a besoin de deux choses essentielles, la forte consistance et la normalité asymptotique.

4.2 L'estimateur du Quasi-Maximum de Vraisemblance

On va établir les conditions de normalité et de forte consistance, pour une réalisation de longueur n $(X_1, \ldots, X_n)$,tel que

$$\begin{cases} H_t = D_t R_t D_t, \\ D_t = diag(\sqrt{h_{11t}}, \sqrt{h_{22t}}, \ldots,), \\ h_t = \omega + \sum_{i=1}^{q} A_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} B_j h_{t-i}, \end{cases} \tag{4.1}$$

La quasi-vraisemblance gaussienne est donnée par

$L_n(\theta) = L_n(\theta, X_1, \ldots, n) = \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(H_t)^{\frac{1}{2}}} \exp(-\frac{1}{2} X_t' H_t^{-1} X_t)$

$$\begin{aligned} \log L(\theta) &= log(\prod_{t=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(H_t)^{\frac{1}{2}}} \exp(-\tfrac{1}{2} X_t' H_t^{-1} X_t)) \\ &= -\tfrac{1}{2}\log(2\pi) - \tfrac{1}{2}\log(\det(H_t)) - \tfrac{1}{2} X_t' H_t^{-1} X_t \\ &= -\tfrac{1}{2}(n\log(\det(H_t)) + X_t' H_t^{-1} X_t) \\ &= \log\det(H_t) + X_t' H_t^{-1} X_t \end{aligned}$$

Soit k le nombre de paramètres à estimer donné par

$k = d + d^2(p+q) + \frac{d(d-1)}{2}$ et soit θ le vecteur des paramètres tel que

$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)' = (\omega', \alpha_1', \ldots, \alpha_q', \beta_1', \ldots, \beta_p', \rho')' := (\omega', \alpha', \beta', \rho')'$, où

$\rho' = (\rho_{21}, \ldots, \rho_{d1}, \rho_{d1}, \ldots, \rho_{d2}, \ldots, \rho_{dd-1})$

soit θ_0 la vraie valeur du paramètres tel que $\theta_0 = (\omega_0', \alpha_{01}', \ldots, \alpha_{0q}', \beta_{01}', \ldots, \beta_{0p}', \rho')' := (\omega_0', \alpha_0', \beta_0', \rho_0')'$. Sous les conditions d'identifiabilité, un estimateur du Quasi-Maximum de vraisemblance est définie comme toute solution mesurable de $\widehat{\theta}_n$ tel que

$$\arg\max_{\theta\in\Theta} L_n(\theta) = \arg\min_{\theta\in\Theta} I_n(\theta) \tag{4.2}$$

où $I_n(\theta) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n} l_t$ et $l_t = l_t(\theta) = X_t' H_t^{-1} X_t + \log \mid H_t \mid$. Le choix des valeurs initiale d'aprés [8] est choisi par exemple

$X_0, \ldots X_{1-q}, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \ldots, \tilde{h}_{1-p} = 0$

$X_0, \ldots X_{1-q}, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \ldots, \tilde{h}_{1-p} = \omega.$

Dans la suite on montre la convergence forte et la normalité asymptotique de l'estimateur du Quasi-Maximum de Vraisemblance on a besoin de deux définitions principales :

Définition 4.2.1 *Un estimateur $\widehat{\theta}_n$ est dit consistant si $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{p.s} \theta_0$ où θ_0 est la vraie valeurs de paramètre et $\widehat{\theta}_n$ est le paramètre estimé.*

Définition 4.2.2 *La normalité asymptotique signifie que la différence entre le paramètre estimé et la vraie valeur est une loi normale i.e, $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, C)$ tel que C est une matrice définie positive.*

4.3 La consistance de l'estimateur

on a

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^{q} \mathbf{A}_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} \mathbf{B}_j h_{t-j}, \tag{4.3}$$

autre écriture de (4.3) est donnée par :

$$Y_t = c_t + BY_{t-1}. \tag{4.4}$$

Tels que $Y_t := \left(h_t, h_{t-1}, \ldots, h_{t-p+1}\right)'$,$c_t := (\omega + \sum_{i=1}^{q} \mathbf{A}_i X_{t-i}, 0, \ldots, 0)'$ et la matrice $\mathbf{B}$ donnée par

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \ldots & B_p \\ I_d & 0 & \ldots 0 & \\ 0 & I_d & \ldots 0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & I_d & 0 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

la consistance est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.3.1 *supposons que :*

C1 : Θ est compact

C2 : Le modèle satisfait les hypothèses de la stationnarité et l'ergodicité et les hypothèses de l'identifiabilité.

C3 : $E(\|\eta_t\|)^s < \infty$ *pour tout* $s > 0$

C4 : $\rho(\boldsymbol{B}) < 1$.

Sous les conditions C1-C4 alors $\widehat{\theta}_n \xrightarrow{p.s} \theta_0$ *;*

Preuve 4.3.1 *Pour tout* $\theta \in \Theta$ *et pour tout k entier, soit* $V_k(\theta)$ *une boule ouvert de centre* θ *et de rayon* $r = \frac{1}{k}$*, soit* $V_k(\theta_0) \cup \left\{\cup_{\theta\in\Theta\setminus V_k(\theta_0)}(V_k(\theta))\right\}$ *un recovrement ouvert de* Θ *alors par la compacité de* Θ *il existe* $\theta_1, \ldots, \theta_j \in \Theta \setminus V_k(\theta_0)$ *tel que* $\Theta \subset V_k(\theta_0) \cup \left\{\cup_{i=1}^{j}(V_k(\theta_i))\right\}$ *où j est dépend de k, on démontre par l'absurde :*

supposons que $\widehat{\theta}_n \notin V_k(\theta_0) \cap \Theta$ *donc* $\widehat{\theta}_n \in V_k(\theta_0) \cup \left\{\cup_{i=1}^{j}(V_k(\theta_i))\right\} \cap \Theta$

maintenant, on suppose que $\widehat{\theta}_n \in \{V_k(\theta_i) \cap \Theta\} \setminus V_k(\theta_0)$

$$
\begin{aligned}
E(l_1(\theta_0)) &= \lim \inf_{n\longrightarrow\infty} \tfrac{1}{n} \sum_{t=1}^{N} l_t(\theta_0) \\
&\geq \lim \inf_{n\longrightarrow\infty} \tfrac{1}{n} \sum_{t=1}^{N} \tilde{l}_t(\theta_0) - \lim \sup_{n\longrightarrow\infty} \sup_{\theta\in\Theta} \mid \tfrac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} l_t(\theta) - \tfrac{1}{n} \sum_{t=1}^{N} \tilde{l}_t(\theta) \mid \\
&= \lim \inf_{n\longrightarrow\infty} \inf_{\theta\in\Theta} \tfrac{1}{n} \sum_{t=1}^{N} \tilde{l}_t(\theta_n) \\
&\geq \lim \inf \tfrac{1}{n} \sum_{t=1}^{N} \tilde{l}_t(\widehat{\theta}) \\
&= \lim \inf_{\theta\in V_k(\theta_1)\cap\Theta/V_k(\theta_0)} \tfrac{1}{n} \sum_{t=1}^{N} \tilde{l}_t(\theta) \\
&\geq \lim \inf_{\theta\in V_k(\theta_1)\cap\Theta/V_k(\theta_0)} \tfrac{1}{n} \sum_{t=1}^{N} \tilde{l}_t(\theta) - \lim \sup_{n\longrightarrow\infty} \sup \mid \tfrac{1}{n} \sum_{t=1}^{N} l_t(\theta) - \tfrac{1}{n} \sum_{t=1}^{N} \tilde{l}_t(\theta) \mid \\
&\geq \lim \inf_{\theta\in V_k(\theta_1)\cap\Theta\setminus V_k(\theta_0)} \tfrac{1}{n} \sum_{t=1}^{N} l_t(\theta_0) \\
&= E \inf_{\theta\in V_k(\theta_1)\cap\Theta\setminus V_k(\theta_0)} l_1(\theta) \longrightarrow E(l_1(\theta_1))
\end{aligned}
$$

ces résultats sont faites à l'aide des lemmes (Voir l'annexe). $\widehat{\theta}_n \in V_k(\theta_i) \cap \Theta$ *donc contradiction. On a donc démontré le théorème de consistance.*

4.4 La normalité asymptotique

Pour établir la normalité asymptotique de l'estimateur de QMV on ajoute les deux conditions suivantes :

C5 : θ_0 est point intérieur de Θ

C6 : $E(\|\eta_t\|)^6 < \infty$

et on donne le théorème suivant

Théorème 4.4.1 *Sous conditions C1-C4 et C5-C6 alors* $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, J^{-1}IJ^{-1})$ *tels que* $J = E\Big(\frac{\partial^2 l_t(\theta_0)}{\partial\theta\partial\theta'}\Big)$, $I = E(\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial\theta} \frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial\theta'})$

Preuve 4.4.1 *D'abord, on les matrices I et J sont biens définies d'après le lemme suivant*

Lemme 4.4.1 *1)* $E\|\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial\theta}\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial\theta'}\|<\infty$

2) $E\|\frac{\partial^2 l_t(\theta_0)}{\partial\theta\partial\theta'}\|<\infty$.

3) Il existe un voisinage $V(\theta_0)$ *tels que pour tout i,j et k* $E\sup_{\theta\in V(\theta_0)}|\frac{\partial^3 l_t(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j\partial\theta_k}|<\infty$.

Si on prend $\theta_n<\theta^*<\theta_0$ *alors le développement de Taylor de la fonction score en* θ_0 *donne*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial\tilde{l}_t(\widehat{\theta}_n)}{\partial\theta}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial\tilde{l}_t(\widehat{\theta}_n)}{\theta_n}+\Big(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial^2\tilde{l}_t(\widehat{\theta^*}_n)}{\partial\theta\partial\theta'})\sqrt{n}((\widehat{\theta}_n-\theta_0)\Big) \tag{4.6}$$

tel que

$$\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial\theta_i})=Tr(I_d-H_t^{\frac{1}{2}}(\theta_0)\eta_t\eta_t')H_t^{-\frac{1}{2}}(\theta_0))H_{t,i}(\theta_0)H_t^{-\frac{1}{2}}(\theta_0)) \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}E(\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial\theta_i}/\mathcal{F}_{t-1}) &= Tr(I_d-H_t^{\frac{1}{2}}(\theta_0)\eta_t\eta_t')H_t^{-\frac{1}{2}}(\theta_0))H_{t,i}(\theta_0)H_t^{-\frac{1}{2}}(\theta_0))\\ &= Tr(I_d-I_d)H_{t,i}(\theta_0)H_t^{-\frac{1}{2}}(\theta_0)) \qquad (4.8)\\ &= 0.\end{aligned}$$

$\frac{\partial l_t}{(\theta_0)}$ *est stationnaire ergodique et par le théorème centrale limite de Martingale alors*

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\theta_n}\xrightarrow{\mathcal{L}}(\mathcal{N}(0,I)) \tag{4.9}$$

on utilise le lemme suivant :

Lemme 4.4.2 *on a les résultats*

- $\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial\theta}-\frac{\partial\tilde{l}_t(\theta_0)}{\theta}\|\xrightarrow{P}0$ *quand* $n\longrightarrow\infty$
- $\sup_{\theta\in V(\theta_0)}\|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}-\frac{\partial^2\tilde{l}_t(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\|\xrightarrow{P}0$ *quand* $n\longrightarrow\infty$

alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial\tilde{l}_t(\theta_0)}{\partial\theta}=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial\theta}+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial\tilde{l}_t(\theta_0)}{\partial\theta}-\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial\theta}}_{(1)}\xrightarrow{P}(\mathcal{N}(0,I)) \tag{4.10}$$

(1) $\xrightarrow{P}0$. *Si on fait le développement de Taylor de* $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial^2 l_t(\theta^*)}{\partial\theta\partial\theta'}$ *en* θ_0 *en* i^{me} *et* j^{me} *on obtient :*

$$\Big(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial^2 l_t(\theta^*}{\partial\theta\partial\theta'}\Big)_{i,j}=\Big(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial^2 l_t(\theta_0}{\partial\theta\partial\theta'}\Big)_{i,j}+\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\theta'}}_{(2)}(\frac{\partial^2 l_t(\tilde{\theta})}{\partial\theta\partial\theta'})_{i,j}(\theta^*-\theta_0) \tag{4.11}$$

où $\tilde{\theta}$ *est entre* θ^* *et* θ_0 *en appliquant le lemme 4.4.2 et le théorème ergodique*

$$\begin{aligned}\lim\sup_{n\longrightarrow\infty}\|\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\partial^2 l_t(\tilde{\theta})}{\partial\theta\partial\theta'})_{i,j}\| &\leq \lim\sup_{n\longrightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sup_{\theta\in V(\theta_0)}\|\frac{\partial}{\partial\theta}(\frac{\partial^2 l_t(\tilde{\theta})}{\partial\theta\partial\theta'})_{i,j}\|\\ &= E\sup\|\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\frac{\partial^2 l_t(\theta)}{\partial\theta\partial\theta'}\Big)_{i,j}\|<\infty.\end{aligned}$$

on a $\|\theta^*-\theta_0\|\longrightarrow 0$, *si on applique le théorème ergodique sur la quantité (2) de 4.11 on obtient :* $\Big(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial^2 l_t(\theta^*)}{\partial\theta\partial\theta'}\Big)\xrightarrow{P}(0,J)$ *et par le lemme 4.4.1 on obtient* $\Big(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial^2\tilde{l}_t(\theta^*)}{\partial\theta\partial\theta'}\Big)=\Big(\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial^2 l_t(\theta^*)}{\partial\theta\partial\theta'}\Big)$

4.5 L'estimation de modèle D.C.C

Le modèle DCC a été proposé par par Engle [6], dans cette section on va estimer les paramètres du modèle DCC en utilisant la méthode QMV et suivant le type des erreurs, l'analyse du modèle DCC a donné une matrice de variance-covariance te grande taille, traitée par Engle et Sheppard [7]
Tse et Tsui [11] proposent :

$$R_t = \theta_1 R + \theta_2 \Psi_{t-1} + \theta_3 R_{t-1}, \tag{4.12}$$

tels que $\sum_{i=1}^{3} \theta_i = 1$, R la matrice de corrélations constantes et Ψ_{t-1} est la matrice de corrélation empirique de $X_{t-1}, \ldots, X_{t-M}$,

on a $X_t = H_t^{\frac{1}{2}} \eta_t$

la vraisemblance est donnée par : $L(\theta) = \prod_{t=1}^{N} \frac{1}{(2\pi)^n \det(H_t) \exp(-\frac{1}{2} X_t' H_t X_t)}$, soit θ l'ensemble des paramètres de H_t, divisé en deux groupes : $\phi = (\omega, \alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{iq}, \beta_{i1}, \ldots, \beta_{ip})$
$\psi = (a, b)$
si on met le logarithme de la vraisemblance on obtient

$$\begin{aligned}
\log L(\theta) &= -\tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} (n \log(2\pi) + \log(H_t) + X_t' H_t^{-1} X_t) \\
&= -\tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} (n \log(2\pi) + \log(D_t R_t D_t) + X_t' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} X_t) \\
&= -\tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} (n \log(2\pi) + 2 \log(\mid D_t \mid) + \log \mid R_t \mid + X_t' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} X_t)
\end{aligned}$$

D'aprés Engle [3], $L(\theta, \phi) = L_v(\theta) + L_c(\theta, \phi)$ tq
$L_v(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} (n \log(2\pi) + 2 \log(\mid D_t \mid) + X_t' D_t^{-1} D_t^{-1} X_t$
et $L_c(\theta, \phi) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} \log(\mid R_t \mid) + \eta_t' R_t' \eta_t - \eta_t' \eta_t$. Donc l'estimation des paramètre passe par deux étapes : la première étape est maximise $\theta^* = arg \max_{\theta} L_v(\theta)$ et la deuxième étape est maximiser $\phi^* = arg \max_{\phi} L_c(\theta, \phi)$, dans la première étape on remplace la matrice R_t par la matrice identité on obtient :
$-\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \log(2\pi) + \log(h_{it} + \frac{X_{it}^2}{h_{it}})$ et la deuxième étape et après les simplification on obtient $L_c(\theta, \phi) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{n} (\log(\mid R_t \mid) + \eta_t' R_t^{-1} \eta_t)$ alors l'estimateur est $\phi^* = arg \max_{\phi} L(\theta, \phi)$ Dans ce chapitre on va estimer les paramètres de modèle DCC-GARCH selon la distribution des erreurs, Gaussien et Student.

Les erreurs suivant la loi de Gauss

Si η_t sont les erreurs gaussien multivariés distribués alors la densité jointe de $\eta_1 \eta_2, \ldots, \eta_n$ est donnée par

$$f(\eta_t) = \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \exp -\frac{1}{2} \eta_t' \eta_t \tag{4.13}$$

tel que $E(\eta_t) = 0$ $E(\eta_t \eta_t') = I$ $t = 1, \ldots, n$. La vraisemblance est donnée par

$$L(\theta_t) = \prod_{t=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(H_t)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ \frac{1}{2} a_t' H_t^{-1} a_t \right\} \tag{4.14}$$

tel que θ_t représente l'ensemble des paramètres et regroupé à deux : $(\varphi, \Psi) = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \Psi)$ où $\varphi = (\alpha_{0i}, \ldots, \alpha_{qi}, \beta_{0i}, \ldots, \beta_{pi})$ $i = 1, \ldots, n$ tel que p et q l'ordre d'un modèle GARCH univarié et $\Psi = (a, b)$, $a_t = H_t^{\frac{1}{2}} \eta_t$ tels que a,b des constantes de (3.17). On calcule le logarithme de vraisemblance de (4.14)

$$\begin{aligned} \log(L(\theta_t)) &= -\tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} (n \log(2\pi)) + \log(\det(H_t)) + a' H_t^{-1} a_t) \\ &= -\tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} (n \log(2\pi)) + \log(\det(D_t R_t D_t) + a_t' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} a_t) \\ &= -\tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} (n \log(2\pi)) + 2\log(\det(D_t)) + \log\det(R_t)) + a_t' D_t^{-1} R_t^{-1} D_t^{-1} a_t \end{aligned} \tag{4.15}$$

mais comme θ est regroupé on calcule encore la vraisemblance de ces deux groupes donné par $\log(L_1(\varphi))$ et $\log(L_2(\Psi))$, remplaçons R_t par I_t dans (4.15) on obtient

$$\begin{aligned} \log(L_1(\varphi)) &= -\tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} (n \log(2\pi)) + 2\log(\det(D_t)) + \log\det(I_n)) + a_t' D_t^{-1} I_n D_t^{-1} a_t \\ &= -\tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} (n \log(2\pi)) + 2\log(\det(D_t)) + a_t' D_t^{-1} I_n D_t^{-1} a_t \\ &= -\tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} (n \log(2\pi)) + \sum_{t=1}^{n} [\log(h_{it}) + \tfrac{X_{it}^2}{h_{it}}]) \\ &= -\tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} [\log(h_{it}) + \tfrac{X_{it}^2}{h_{it}}] + cst) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Donc il reste à estimer $\Psi = (a, b)$ comme :

$$\begin{aligned} \log(L_2(\Psi)) &= -\tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} (n \log(2\pi)) + 2\log(\det(D_t)) + \log\det(R_t)) + a_t' D_t^{-1} I_n D_t^{-1} a_t \\ &= -\tfrac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} (n \log(2\pi)) + 2\log(\det(D_t)) + \log\det(R_t)) + a_t' R^{-1} a_t) \end{aligned} \tag{4.17}$$

la matrice D_t est indépendante des paramètres on peut exclure les constantes et maximisons :
$\log(L_2^*(\Psi)) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^{N} (\log\det(R_t)) + X_t' R_t^{-1} X_t)$.

Les erreurs suivant la loi de Student

La densité jointe de $\eta_1, \ldots, \eta_N$ est donnée par
$f(\eta_t/v) = \prod_{t=1}^{N} \frac{\gamma(\frac{v+n}{2})}{\gamma(\frac{v}{2})[\pi(v-2)]^{(\frac{n}{2})}} [1 + \frac{\eta_t' \eta_t}{v-2}]$ tel que $\gamma(.)$ est la fonction Gamma, donc la vraisemblance est donnée par

$$\log(L(\theta)) = \prod_{t=1}^{N} \frac{\gamma(\frac{v+n}{2})}{\gamma(\frac{v}{2}[\pi(v-2)]^{\frac{n}{2}} \det(H_t^{\frac{1}{2}})} \Big[1 + \frac{a_t' H_t^{-1} a_t}{v-2}\Big]^{-\frac{n+v}{2}}, \tag{4.18}$$

on obtient en remplaçons H_t par $D_tR_tD_t$ et mettre le logarithme de (4.18)

$$\begin{aligned}\log(L(\theta)) &= \sum_{t=1}^{N}\Big(\log[(\tfrac{\gamma(\frac{v}{2})}{2})] - \log[\gamma(\tfrac{v}{2})] - \tfrac{1}{2}\log[\pi(v-2)] - \tfrac{1}{2}\log[det(D_tR_tD_t)],\\ &\quad -\tfrac{v+n}{2}\log[1+\tfrac{a_t'D_t^{-1}R_t^{-1}D_t^{-1}a_t}{v-2}]\Big),\end{aligned} \tag{4.19}$$

θ est divisé en φ et Ψ tels que $(\varphi,\Psi)=(\varphi_1,\ldots,\varphi_N,\Psi)$ où $\varphi=(\alpha_{0i},\ldots,\alpha_{qi},\beta_{0i},\ldots,\beta_{pi})\ \ i=1,\ldots,N$ et $\Psi=(a,b,v)$, l'estimation passe par deux étapes : dans la première étape on fais les mêmes calculs comme dans (4.16) on obtient :
$\log(L_1(\varphi)) = \sum_{t=1}^{N}(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{N}[\log(h_{it}+\frac{X_{it}^2}{h_{it}})] + cst)$.
Il reste à estimer les paramètres a, b et v, on a :

$$\begin{aligned}\log(L_2(\Psi)) &= \sum_{t=1}^{N}(\log[\gamma(\tfrac{v+n}{2})] - \log\gamma(\tfrac{v}{2})) - \tfrac{n}{2}\log[\pi(v-2)]\\ &\quad -\tfrac{1}{2}\log[\det(D_tR_tD_t)] - \tfrac{v+n}{2}\log[1+\tfrac{a_tD_t^{-1}R_t^{-1}D_t^{-1}a_t'}{v-2}]\\ &= \sum_{t=1}^{N}(\log[\gamma(\tfrac{v+n}{2})] - \log\gamma(\tfrac{v}{2})) - \tfrac{n}{2}\log[\pi(v-2)]\\ &\quad -\tfrac{1}{2}\log[\det(R_t)] - \log[\det(D_t)] - \tfrac{v+n}{2}\log[1+\tfrac{a_t'R_t^{-1}a_t}{v-2}]\end{aligned}$$

on néglige les constantes et D_t ne dépend pas des paramètres alors l'estimation de Ψ est donné par

$$\begin{aligned}\log L_2^*(\Psi) &= \sum_{t=1}^{N}(\log[\gamma(\tfrac{v+n}{2})] - \log\gamma(\tfrac{v}{2})) - \tfrac{n}{2}\log[\pi(v-2)]\\ &\quad -\tfrac{1}{2}\log\det(R_t) - \tfrac{v+n}{2}\log[1+\tfrac{a_t'R_t^{-1}a_t}{v-2}].\end{aligned} \tag{4.20}$$

Annexe A

Quelques éléments de base

A.1 Rappel sur les probabilités et statistiques

Définition A.1.1 *processus aléatoire*
Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t\in T}$ *définies sur espace probabilisé* $(\mathcal{F}, \mathcal{P}, \omega)$ *tel que* T *représente un intervalle de temps.*

Définition A.1.2 *Variable aléatoire centrée et réduite :*
Une variable aléatoire X *est dite centré si* $E(X) = 0$
. Une variable aléatoire X *est dite réduite si* $Var(X) = 1$.

Définition A.1.3 *La loi normale*
on définit la loi normale par :
$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2)$
tel que m *est la moyenne et* σ^2 *est la variance de* x.

Définition A.1.4 *L'univers Soit* $\Omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_n)$ *un espace fini d'états, représentant les différents états possibles de la nature à un instant donnée. On appelle cet espace l'univers des possibles.*

Définition A.1.5 *La tribu Soit* $\mathcal{A}$ *une partie de* $\mathbb{P}(\mathcal{A})$*, on dit que* $\mathcal{A}$ *est une tribu si et seulement si elle vérifie :*

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$

2) pour tout partie B *de* $\mathcal{A}$ $\bar{B} \in \mathcal{A}$

3) Pour toute famille dénombrable $(B_i)_{i\in\mathbb{I}}$ *de* $\mathcal{A}$ *alors* $\bigcup_{i\in\mathbb{I}} B_i$ *est aussi un élément de* $\mathcal{A}$

.

Définition A.1.6 *Probabilité* P *est une probabilité définie sur l'espace probabilisable* $(\Omega, \mathcal{A})$ *si et seulement si* P *est une application de* $\mathcal{A}$ *vers* $\mathbb{R}$ *qui vérifie les propriétés suivantes :*

a) $0 \leq P(A) \leq 1 \ \forall A \in \mathcal{A}$

b) $p(\Omega) = 1$

c) Pour toute famille finie $(B_i)_{0\leq i\leq n}$ *d'événements de* $\mathcal{A}$ *deux à deux incompatibles* $P(\bigcup_{i=1}^{n} B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$.

Définition A.1.7 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *est dit espace probabilisé.*

Définition A.1.8 *Soit une variable aléatoire* X *sur un espace probabilisé. Alors sont espérance peut être calculé comme suit :* $E(X) = E_Y(E(X/Y))$

Preuve A.1.1

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx \\ &= \int x \int_{-\infty}^{\infty} f_{X/Y}(x) f_Y(y) dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X/Y}(x) dx dy \\ &= E_Y(E(X/Y) \end{aligned}$$

Définition A.1.9 *Fonction d'autocovariance et d'autocorrélation Si* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est un processus telle que* $Var(X_t) < \infty\ \forall t \in \mathbb{Z}$ *alors la fonction d'autocovariance* $\gamma(.)$ *de* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *est définie par*
$\gamma(h) = Cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)], \forall t, h \in \mathbb{Z}$
Ainsi $\gamma(0) = Cov(X_t, X_t) = Var(X_t) = E((X_t - \mu)^2)$, *où* $E(X_t) = \mu$.

$$d \log \mid A \mid = Tr(A^{-1}) dA \tag{A.1}$$

$$dA^{-1} = -A^{-1}(dA)A^{-1} \tag{A.2}$$

On dit qu'une suite stationnaire est ergodique si elle satisfait la loi forte des grands nombres.

A.2 Stationnarité

La stationnarité c'est une propriété de stabilité, dans la suite nous présentons les différentes définitions stochastiques de la stationnarité

A.2.1 La stationnarité stricte

Définition A.2.1 *soit* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un processus stochastique ,* X_t *est dit strictement stationnaire si ses probabilités ne dépend pas de l'instant t.*

A.2.2 Stationnarité au seconde ordre

soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stochastique , X_t est stationnaire au second ordre s'il vérifie les propriétés suivantes :

a) $E(X_t) = m = cst$

b) $var(X_t) = \sigma^2 = \gamma_x(0) \qquad \forall t \in T$

c) $cov(X_t, X_{t+\theta}) = \gamma_x(0) \qquad \forall t \in T \qquad \forall \theta \in T$

$\gamma_x(\theta)$:fonction d'autocovariance du processus.

Remarque A.2.1 *1- a)b) de la définition précédante signifie que la moyenne et la variance sont constantes au cours du temps, qui traduit la stabilité et vérifie l'homoscédasticité noté $\gamma(0)$.*

2- D'une façon générale un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est dite stationnaire d'ordre k si pour tout $(t_1, \ldots, t_n)$ avec $(t_i) \in T$,pour $i = 1, \ldots, n$ et si pour tout $h \in T$ avec $t_{i+h} \in T$ tous les moments jointes d'ordre k de $X_{t_{1+h}}, X_{t_{n+h}}$ existent et sont identiques aux moments jointes correspondants de $X_{t_1}, \ldots X_{t_n}$: $E\{(X_{t_1})^{k_1}, \ldots (X_{t_n^{k_n}})\} = E\{(X_{t_{1+h}})^{k_1}, \ldots (X_{t_{n+h}})^{k_n}\}$

.

A.3 L'ergodicité

Définition A.3.1 *On dit qu'une suite stationnaire est ergodique si elle satisfait la loi forte des grands nombres.*

autrement dit : Un processus stationnaire (condition nécessaire) est ergodique si la connaissance des moments peut être obtenue à partir de l'observation d'une seule réalisation choisie de façon quelconque (c'est-à-dire sans répéter l'expérience), l'ergodicité est une propriété importante qui lie les moyennes statistiques et les moyennes temporelles.

A.3.1 La loi fort des grands nombre de Kolmogorov

Soi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ est un échantillon aléatoire de n réalisations indépendants tel que $E(X_i) = \mu_i \leq \infty$ et $Var(X_i) = \sigma_i^2 \leq \infty$ et $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{i^2} \leq \infty$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$ alors
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mu_i \overset{p.s}{\longrightarrow} 0$
il existe deux types d'érgodisme :

A.3.2 L'ergodicité stricte

Un processus aléatoire est ergodique au sens strict, si tous les moments statistiques sont égaux aux moments temporels.

A.3.3 L'ergodicité au sens large

Un processus aléatoire est ergodique au sens large (ou du second ordre), si il y a égalité des moyennes statistiques et temporelles ainsi que des fonctions d'auto corrélation.

Théorème A.3.1 *Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une suite strictement stationnaire ergodique et si $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est définie par $Y_t = f(\ldots, Z_{t-1}, Z_t, Z_{t+1}, \ldots)$ où f est une fonction mésurable de $\mathbb{R}^\infty$ dans $\mathbb{R}$, alors $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est également une suite strictement stationnaire ergodique.*

Théorème A.3.2 *(Le théorème ergodique pour suites stationnaires) Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire et ergodique, si f est mesurable et si $E|f(\ldots X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, \ldots)| < \infty$ alors*
$n^{-}1 \sum_{t=1}^{n} f(\ldots, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}) \longrightarrow Ef(\ldots X_{t-1}, X_t, X_{t+1})$ *p.s*

A.4 Solution non anticipative

Définition A.4.1 *On dit qu'une solution X_t est non anticipative s'il est indépendante aux variables futures.*

A.5 l'operateur de retard

$$\begin{cases} B^i X_t^2 = X_{t-i}^2 \\ \\ B^i h_t = h_{t-1}; \end{cases}$$

Propriété A.5.1 *1) $vec(ABC) = (C' \otimes A)vec(B)$*

1) $vec(A) = D_m vech(A)$

1) $vech(A) = D_m^{(+)} vec(A)$

4) $D_m^+ = (D_m' D_m)^{(-1)} D_m'$

A.6 Les types de convergence

Définition A.6.1 *Soit $(Xn)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires et X une v.a. définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ On dit que X_n converge presque sûrement vers X si l'ensemble des ω tels que $X_n(\omega)$ converge vers $X(\omega)$ a pour probabilité 1.*

Définition A.6.2 *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires et soit X une variable aléatoire. On note F_n la fonction de répartition de X_n et F celle de X. On dit que la suite (X_n) converge en loi vers X si, en tout point x où F est continue, on a :*

$$F_n(x) \to F(x).$$

Définition A.6.3 *Soit* $(Xn)_{n\geqslant 1}$ *une suite de variables aléatoires et* X *une v.a. définies sur le même espace probabilisé*$(\Omega, \mathcal{F}, P)$. *On dit que* X_n *converge en probabilité vers* X *si :*
$\forall \epsilon > 0 \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} P(\mid X_n - X \mid \geqslant \epsilon) = 0$
on écrit $X_n \xrightarrow{p} X$, *la convergence presque sur implique la convergence en probabilité.*

Définition A.6.4 *L'ésperance conditionnelle Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, et* $\mathcal{B}$ *une sous-tribu de* $\mathcal{A}$. *Soit également* X *une variable aléatoire réelle définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *et intégrable. Alors il existe une unique variable aléatoire, appelée espérance conditionnelle de* X *sachant* $\mathcal{B}$, *notée* $E(X|\mathcal{B})$, *telle que* $E(X|\mathcal{B})$ *est* $\mathcal{B}$*-mesurable ;*
pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\int_B E(X|\mathcal{B})d\mathbb{P}(\omega) = \int_B X(\omega)d\mathbb{P}(\omega)$.
Si $\mathcal{B}$ *est la tribu engendrée par une variable aléatoire* Y, *on note aussi* $E(X|Y)$.

Propriété A.6.1 *a) L'espérance de* $E(Y/X)$ *est* $E(Y)$ *et on écrit* $E(Y/X) = E(Y)$
b) soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Alors* $E[f(X)Y/X] = f(X)E(Y/X)$
c) $E(aY_1 + bY_2/X) = aE(Y_1/X) + bE(Y_2/X)$

Définition A.6.5 *La variance conditionnelle Si on observe* X *et estime* Y, *l'erreur obtenu de cette estimation dite la variance conditionnelle notée* $Var(Y/X)$ *tel que :* $Var(Y/X) = E[(Y - E(Y/X))^2/X]$

$Var(Y/X) = E(Y^2/X) - (E(Y/X))^2$

Remarque A.6.1 *si* A *est une matrice symétrique* $m \times m$ *quelconque dans ce qui suit on aura besoin des relations suivantes :*
(i) $vec(A) = D_m vech(A)$ *tel que* D_m *ne comporte que les 0 et 1 de dimension* $m^2 \times m\frac{(m+1)}{2}$
(ii) $vech(A) = D_{m+}vec(A)$ *ou* $D_{m+} = (D'_m D_m)^{-1} D'_m$
(iii) $vec(ABC) = (C' \otimes A)vec(B)$

D_{m+} est expliqué dans l'exemple suivant : $D_1 = (1)$, $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $D_{2+} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

A.6.1 Stationnarité du modèle $GARCH$ multivarié

La stationnarité au second ordre $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire au seconde ordre s'il vérifie les trois conditions suivantes :

(i) $EX_{ti}^2 < \infty \ \ \forall t \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, m$

(ii) $EX_t = \mu \ \ \forall t \in \mathbb{Z}$

(iii) $Cov(X_t, X_{t+h}) = E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)'] = \Gamma(h) \ \ \forall h \in \mathbb{Z}, \ \ \Gamma(.)$ est la fonction d'autocovariance de (X_t)

la stationnarité stricte on a vu dans le chapitre 1 la stationnarité stricte, qui reste le même dans le cas d'un processus multivarié. supposons que A est inversible pour les résultats **R2-R7** Si $f(A)$ est une fonction scalaire d'une matrice A dont les éléments aij sont considérés comme une fonction d'une variable x alors

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x} = \sum_{i,j} \frac{\partial f(A)}{\partial a_{ij}} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x} = Tr(\frac{\partial f(A)}{\partial A'} = \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x}) \tag{A.3}$$

$$\frac{\partial c'Ac}{\partial A'} = cc' \tag{A.4}$$

$$\frac{\partial Tr(CA'BA')}{\partial A'} = C'AB' + B'AC' \tag{A.5}$$

$$\frac{\partial \log \mid detA \mid}{\partial A'} = A^{-1} \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial A^{-1}}{x} = -A^{-1} \frac{\partial A}{x} A^{-1} \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial Tr(CA^{-1}B)}{\partial A'} = -A^{-1}BCA^{-1} \tag{A.8}$$

$$\frac{\partial Tr(CAB)}{\partial A'} = BC \tag{A.9}$$

Corollaire A.6.1 *Si $(v_t, \mathcal{F}_t)$ est une suite stationnaire et ergodique d'accroissements de martingale de carré intégrable, telle que $\sigma_v^2 = Var(v_t) \neq 0$, alors*
$n^{-\frac{1}{2}} \sum_{t=1}^{n} v_t \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_v^2)$

Lemme A.6.1 *Il existe un voisinage $v(\theta_0)$ tel que pour tout i,j et k* $E \sup_{\theta \in v(\theta_0)} \mid \frac{\partial^3 l_t(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} \mid$

Conclusion Générale

L'objectif de ce travail est d'estimer les paramètres d'un modèle GARCH multivarié mais à cause de sa difficulté, on a utilisé DCC-GARCH, les modèles GARCH univariés et ses propriétés essentielles comme la stationnarité et l'ergodicité sont introduites, l'estimation des paramètres d'un modèle GARCH a été fait par la méthode de Quasi-Maximum de Vraisemblance.

Bibliographie

[1] Y. Baba, R. Engle, and D. K. et K.Kroner. *Multivarietes simultaneous generalised*. UCSD.D.P, 1987.

[2] T. Bollerslev. Modelling the coherence in short run nominal exchange rates : a multivariate generalized arch model. *Oxford University Press*, 1995.

[3] T. Bollerslev and E. R. F. et J. M. Wooldridge. A capital asset pricing model with time varying covariance. *Journal of Political Economy*, 1988.

[4] F. Drost and T. Nijman. Temporal aggregation of garch processes. *Econometrica*, 1993.

[5] R. Engle. Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of u.k.inflation. *Econometrica 50*, 1982.

[6] R. Engle. Dynamic conditional correlation–a simple class of multivariate garch models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 2002.

[7] R. ENGLE and K. SHEPPARD. Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate garch. *NBER Working Papers*, 2001.

[8] C. Francq and J. M. Zakonian. *GARCH Models : Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. Wiley-Interscience, 2010.

[9] E. R.F. and G. C. et D. Kraft. Combining competing forecasts of inflation based on a bivariate arch model. *Journal of Economic Dynamics and Control 8*, 1984.

[10] E. Rossi. *Multivariate GARCH Models*. Econometria finanziaria, 2010.

[11] T. Y. and A. Tsui. A multivariate garch model with time-varing correlations. *Journal of Business and Economic statistics*, 2002.