Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Recherche Opérationnelle

Par

Deboub Abdelali & Rabehi Allal

Thème

Etude sur la domination romaine double dans les graphes

Composition du Jury:

Mr.	N. IKHLEF ESCHOUF	M.C.A	U.Y.F Médéa	Président
Mr.	A. BOUCHOU	M.C.B	U.Y.F Médéa	Encadreur
Mr.	M. ZEMIR	M.A.A	U.Y.F Médéa	Examinateur
Mr.	A. SAHRAOUI	M.A.A	U.Y.F Médéa	Examinateur

Date de soutenance: 08/07/2019

Résumé

Pour un graphe $G = (V, E)$, une fonction domination romaine double est une fonction $f : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ ayant la propriété que si $f(v) = 0$, alors le sommet v doit avoir au moins deux voisins assignés 2 ou un voisin w avec $f(w) = 3$, et si $f(v) = 1$, alors le sommet v doit avoir au moins un voisin w avec $f(w) \geq 2$. Le poids d'une fonction domination romaine double f est la somme $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$, et le poids minimum d'un fonction domination romaine double sur G est le nombre de domination romaine double de G, noté par $\gamma_{dR}(G)$.

Dans ce mémoire, nous présentons en premier lieu une borne inférieure sur $\gamma_{dR}(G)$. Ensuite nous donnons quelque caractérisation de bornes existantes pour certaines classes de graphes. Enfin nous donnons une amélioration d'un résultat de type Nordhaus-Gaddum sur $\gamma_{dR}(G)$ avec caractérisation.

Abstract

For a graph $G = (V, E)$, a double Roman dominating function is a function

$f : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ having the property that if $f(v) = 0$, then vertex v must have at least two neighbors assigned 2 or one neighbor w with $f(w) = 3$, and if $f(v) = 1$, then vertex v must have at least one neighbor w with $f(w) \geq 2$. The weight of a double Roman dominating function f is the sum $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$, and the minimum weight of a double Roman dominating function on G is the number of double Roman domination of G, denoted by $\gamma_{dR}(G)$.

In this memory, we first present a lower bound on $\gamma_{dR}(G)$. Then we give some characterization of existing bounds for some classes of graphs. Finally we give an improvement of a Nordhaus-Gaddum result on $\gamma_{dR}(G)$ with characterization.

Remerciement

La réalisation de ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'aide et la participation de plusieurs personnes avec lesquelles nous avons étroitement travaillé et qui nous ont fait part de leurs connaissances et leur savoir faire.

Avant tout nous remercions de nous avoir encadrés, orientés, aidés et conseillés à notre promoteur de ce mémoire **Dr .A. BOUCHOU**.

Nous remercions les enseignants qui ont accepté de jugé ce mémoire, de l'honneur qu'il nous a fait en acceptant de présider le jury et de l'intérêt qu'il a porté à ce travail **Dr. N. IKHLEF ESCHOUF**.

Nous remercions tous les membres du jury qui supervisent pour juger notre travail **Dr. M. ZEMIR et Dr. A. SAHRAOUI.**

A tous les enseignants du département de Mathématiques et Informatique sans exception pour leurs efforts fournis durant ces cinq années.

A l'ensemble des étudiants de notre promotion 2018 /2019.

Dedicace

★★★

Nous recommandons ce travail aux deux familles nobles *Deboub*, *Rabehi* et à tous nos distingués professeurs qui ont étudié à tous les niveaux, ainsi qu'à tous nos amis et chers collègues qui nous ont accompagnés et nous ont guidés tout au long de nos études.

Vous êtes très respecté et apprécié.

★★

Table des matières

Résumé **ii**

Abstract **iii**

Remerciement **iv**

Dedicace **v**

Introduction **1**

1 Notions fondamentales de la théorie des graphes **3**

1.1 les graphe: 3

1.1.1 Définitions: 3

1.1.2 Les graphes particuliers: 6

2 Des résultats existants sur la domination, la domination romaine et la domination romaine double. **11**

2.1 La domination. 11

2.1.1 Problèmes étudiés en domination 12

2.1.2 Quelques résultats sur la domination: 13

2.2 La domination romaine. 16

2.2.1 Quelques résultats sur la domination romaine: 16

2.3 La domination romaine double. 18

2.3.1 Bornes sur $\gamma_{dR}(G)$. 19

3 Quelques résultats sur la domination romaine double **22**

3.1 Une borne inférieure sur $\gamma_{dR}(G)$ 22

3.2 Graphes G vérifiant $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ 23

3.3 Graphes G vérifiant $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$ 29

3.4 Inégalités de type Nordhaus-Gaddum 32

Conclusion **36**

Liste des Figures

1.1.1 Un graphe simple G, un sous-graphe G_A et un sous-graphe induit G_B. 4
1.1.2 H est un graphe partiel de G. 5
1.1.3 G est connexe, H est non connexe avec deux composantes connexe. 5
1.1.4 (a) un graphe G et (b) son complémentaire $\overline{G}$. 6
1.1.5 (1) un graphe complet (K_4) et (2) un graphe discret ($\overline{K_4}$). 7
1.1.6 Un graphe 3-régulier d'ordre 6. 7
1.1.7 (2) Une chaine P_5 et (1) un cycle C_8. 8
1.1.8 Un arbre $T = (V, E)$. 8
1.1.9 Le graphe biparti complet $K_{3,4}$. 8
1.1.10 (1) une étoile $K_{1,q}$ et (2) une étoile subdivisée $K^*_{1,q}$. 9
1.1.11 Double étoile $S_{r,s}$. 9
1.1.12 Le joint de C_3 et P_2. 10
1.1.13 Un exemple d'un graphe scindé. 10

2.1.1 Le graphe $K_4 - e$. 12
2.1.2 Le graphe $K_{1,3}$. 13
2.1.3 Le graphe G. 14
2.1.4 T est un araignée blessée d'order n. 14
2.1.5 la chenille $C(1, 1, 1)$. 15
2.2.1 Le graphe C_4. 16
2.2.2 Le graphe K_4 tq $\gamma_R(K_4) = \frac{2n}{\Delta(K_4)+1}$. 17
2.3.1 Un graphe $\overline{3K_2}$ 19
2.3.2 Le graphe G. 19

2.3.3 Le nombre de domination romaine double de P_4 est $\gamma_{dR}(P_4) = 5$. 20
2.3.4 Un graphe $G \in \mathcal{H}$ avec $\gamma_{dR}(G) = 15 = \frac{5n}{4}$. 21

3.1.1 Un graphe G avec $\gamma_{dR} = \frac{3n}{\Delta(G)+1}$. 23
3.2.1 Le graphe G tel que $\gamma_{dR}(G) = 10 < 11 = 2(n - \Delta(G)) + 1$. 24
3.2.2 Un graphe scindé tel que $Q = K_2$ et $I = \overline{K_3}$. 27
3.2.3 Un graphe G tel que $\gamma_{dR}(G) = 7 = 2(n - \Delta(G)) + 1$. 28
3.2.4 Un arbre T tel que $\gamma_{dR}(T) = 9 = 2(n - \Delta(T)) + 1$. 29
3.3.1 Un graphe G tel que $\gamma_{dR}(G) = 6 \neq 8 = 2(n - \Delta(G))$. 30

Introduction

La théorie des graphes est un outil important et essentiel de la recherche opérationnelle.

Elle vise à modéliser et résoudre des problèmes concrets issus du monde réel, notamment les problèmes dont l'objectif est de sélectionner la meilleur solution parmi un ensemble fini d'alternatives, par exemple, le réseau électrique, réseaux de transport (ferries, routiers, aériens), réseaux d'ordinateurs et ordonnancement d'un ensemble de tâches.

Généralement, les problèmes pratiques modélisables par les graphes sont de nature combinatoire où il est souvent question de recherche de structures optimales particulières, telles que clique maximum, stable maximum, coloration minimum ou dominant minimum.

Plus d'un siècle plus tard, en 1962, Ore [6] a été le premier à publier sur la domination dans les graphes et donna l'appellation actuelle du nombre de domination. La domination a connue sa véritable expansion après les travaux de Cockayne et Hedetniemi en 1977 [10]. Les deux livres de Haynes, et Hedetniemi Slater [1] [2] témoignent de la pertinence et de l'intérêt accru de ce sujet dans les dernières années.

Le coté pratique et appliqué de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres et nouveaux paramètres de domination. En effet beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose à la domination une condition supplémentaire dans le graphe considérée.

Parmi les types de domination qui existent, nous nous intéressons dans ce mémoire à la domination romaine double. L'étude de la domination romaine double a été introduite par Beeler, Haynes et Hedetniemi [15](2016).

Ce mémoire est composé de trois chapitres:

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques concepts de base de la théorie des graphes, ainsi que les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous rappelons les définition de la domination, la domination romaine et la domination romaine double et nous rappalons certains résultats existants (quelques propriétés, quelques bornes sur $\gamma_{dR}(G)$ pour certaines classes de graphe).

Dans le troisième chapitre, nous présentons une borne inférieure sur $\gamma_{dR}(G)$, nous donnons la caractérisation de certaines classes de graphes G avec $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ et $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$. Enfin nous donnons la caractérisation des graphes attiegnant la borne de type Nordhaus-Gaddum pour $\gamma_{dR}(G)$.

Et en fin, nous donnons une conclusion sur le travail accompli.

Chapitre 1

Notions fondamentales de la théorie des graphes

Ce premier chapitre est consacré aux définitions des principales notions utilisées dans ce mémoire. Pour chacune d'entre elles, nous essayerons de donner une définition et ainsi une notation.

1.1 les graphe:

1.1.1 Définitions:

On étudie des graphes $G = (V, E)$, où V est un ensemble des sommets, et E est un ensemble de paires des sommets appelées arêtes. L'ordre de G est le nombre de ses sommets noté $n = |V|$. La taille de G le nombre de ses arêtes noté $m =\mid E \mid$. Un graphe simple est un graphe sans boucles et sans arêtes multiples. Un graphe est dit trivial s'il ne possède qu'un seul sommet. On note $uv \in E$ l'arête joignant les sommets u et $v \in V$. u et v sont appelés les extrémités de l'arête. On dit que deux sommets u et v sont adjacents, s'il existe une arête les reliant, c'est à dire si $uv \in E$.

Voisinage:

On appelle voisinage ouvert d'un sommet u, noté $N_G(u)$ l'ensemble des sommets adjacent à u dans G. Le plus souvent, quand le contexte étant explicite, on notera simplement $N(u)$.

Le voisinage fermé d'un sommet u désigne l'ensemble $N[u] = N(u) \cup \{u\}$. On parle aussi un voisinage ouvert d'un sous-ensemble $S \subseteq V$, noté $N(S)$, pour désigner l'union des voisinages ouverts des sommets de S. De même, le voisinage fermé $N[S]$ de S est l'union des voisinages fermés des sommets de S, autrement dit $N[S] = N(S) \cup S$.

Degré d'un sommet:

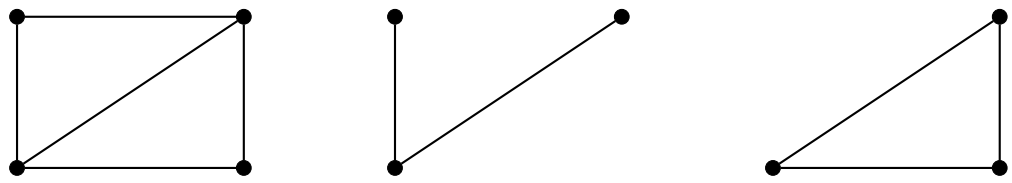
On appelle degré d'un sommet v dans G, noté $d_G(v)$, le nombre d'arêtes de G incidents à v. Le degré minimum d'un graphe G, noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés de ses sommets ($\delta(G) = \min_{v \in V} d_G(v)$). De même, le degré maximum de G, noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés de ses sommets ($\Delta(G) = \max_{v \in V} d_G(v)$).

Sommets particuliers:

On appelle sommet isolé un sommet de degré 0. Un sommet de degré 1 est appelé sommet pendant. L'unique sommet qui est adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support.

Sous-graphe et sous-graphes induit:

Le graphe H est dit sous-graphe d'un graphe G lorsque $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Un sous-graphe H de G est dit induit si $E(H)$ contient toutes les arêtes de G dont les deux extrémités sont dans $V(H)$. Pour définir un sous-graphe induit de G il suffit de considérer un sous-ensemble A de G. En outre, ce sous-graphe induit sera désigné par $G[A]$. On dira aussi que $A \subseteq V(G)$ induit le sous-graphe correspondant. (voir Figure 1.1.1). Soit v un sommet de V. On notera $G - v$ le sous-graphe $G[V - \{v\}]$.



$G = (V, E)$ $G_A = (V_A, E_A)$ $G_B = (V_B, E_B)$

Figure 1.1.1 : Un graphe simple G, un sous-graphe G_A et un sous-graphe induit G_B.

Graphe partiel:

On appelle graphe partiel de $G = (V, E)$ tout graphe $H = (V, E')$ tel que $E' \subseteq E$. Un sous-graphe d'un graphe partiel de G est appelé sous-graphe partiel de G (voir Figure 1.1.2).

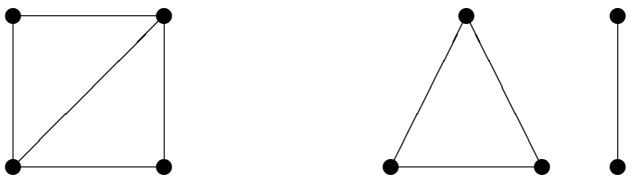


$G = (V, E)$ $H = (V, E')$

Figure 1.1.2 : H est un graphe partiel de G.

Connexité:

Un graphe $G = (V, E)$ est connexe s'il y a une chaîne entre n'importe quelle paire des sommets de V distincts du graphe G. Dans la Figure 1.1.3 , le graphe G est connexe puisque il contient une seule composante connexe et le graphe H est non connexe car il contient deux composantes connexes.



G H

Figure 1.1.3 : G est connexe, H est non connexe avec deux composantes connexe.

La complémentarité:

Soit G un graphe quelconque. Le graphe complémentaire d'un graphe G, noté $\overline{G}$, est le graphe avec le même ensemble des sommets $|V(G)| = \left|V(\overline{G})\right|$ et

$E(\overline{G}) = \{uv : u \in V(G), v \in V(G)\ et\ uv \notin E(G)\}$.

Autrement dit, le complémentaire du graphe $G = (V, E)$, est un graphe avec le même ensemble de sommets V tel que deux sommets sont adjacents dans $\overline{G}$ si seulement s'ils ne sont pas adjacents dans G. (voir la Figure 1.1.4).



(a) (b)

Figure 1.1.4 : (a) un graphe G et (b) son complémentaire $\overline{G}$.

Couplage:

On appelle couplage S de G un sous-ensemble d'arêtes de E deux à deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale et noté $\beta(G)$. Un sommet x de G est dit saturé par le couplage S s'il existe une arête de S incidente à x. si non, x est dit insaturé par S. Un couplage qui sature tous les sommets de G est appellé couplage parfait dans G.

Stabilité:

Un ensemble des sommets de G est stable (ou indépendant), si l'ensemble de ses sommets sont deux à deux non adjacents. Un stable maximum est un stable de cardinalite maximale, le nombre de stabilité noté $\alpha(G)$.

1.1.2 Les graphes particuliers:

Graphe complet:

Un graphe complet est un graphe où chaque sommet est adjacent à tous les autres sommets. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe chaque sommet est de degré $n-1$ (voir Figure 1.1.5).

Graphe discret:

On dit qu'un graphe $G = (V, E)$ est discret ou nul s'il ne contient aucune arête, c'est à dire que $E = \phi$ et noté $\overline{K_n}$ (voir Figure 1.1.5).



(1) (2)

Figure 1.1.5 : (1) un graphe complet (K_4) et (2) un graphe discret ($\overline{K_4}$).

Graphes k-régulier:

Un graphe $G = (V, E)$ est dit k–régulier si tous ses sommets sont de degré k, c'est-à-dire, $d_G(x) = k$ pour tout $x \in V$ (voir Figure 1.1.6).

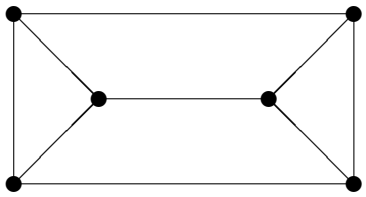


Figure 1.1.6 : Un graphe 3-régulier d'ordre 6.

Chaîne:

Chaîne d'un graphe $G = (V, E)$ est une suite alternée des sommets et d'arêtes de la forme $(v_1, e_2, v_2, ..., e_k, v_k)$ où k est un entier positif, les v_i sont des sommets de G et les e_i sont les arêtes de G. L'entier $k - 1$ est la longueur de la chaîne (voir Figure 1.1.7).

Cycle:

Cycle de longueur n, noté C_n, est le seul graphe $2-$régulier connexe à n sommets. On peut désigner le cycle par la suite de ses sommets $(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$, ses arêtes étant $v_i v_{i+1} \in E(C_n)$ pour tout $1 \leq i < n$ et l'arête $v_n v_1 \in E(C_n)$ (voir Figure 1.1.7).

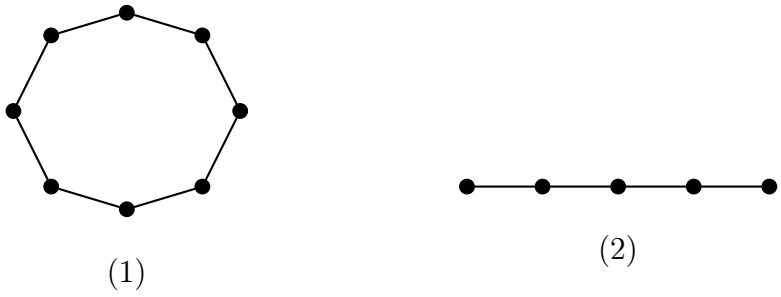


Figure 1.1.7 : (2) Une chaine P_5 et (1) un cycle C_8.

Arbre:

Un arbre est un graphe connexe sans cycle, il contient exactement $(n-1)$ arête et noté T. Un graphe sans cycle mais non connexe est appelé forêt. (voir Figure 1.1.8)

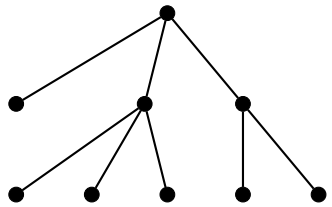


Figure 1.1.8 : Un arbre $T = (V, E)$.

Graphe biparti:

Un graphe biparti est un graphe $G = (V, E)$ d'order $n \geq 2$, dont l'ensemble des sommets est partitionné en deux stables X et Y. Un graphe biparti complet est un graphe biparti maximal en terme de nombre d'arêtes, alors $\mid E \mid = \mid X \mid \cdot \mid Y \mid$, noté $K_{p,q}$ avec $p = \mid X \mid$ et $q = \mid Y \mid$ (voir Figure 1.1.9).

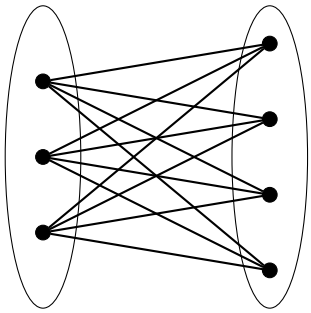
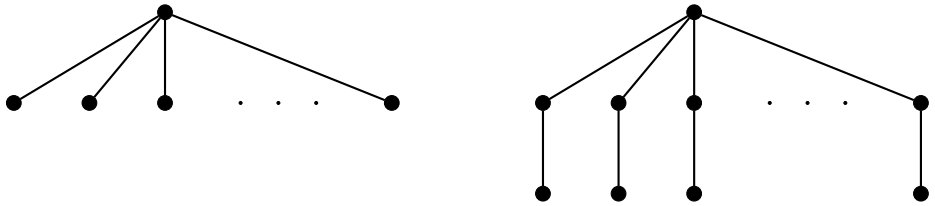


Figure 1.1.9 : Le graphe biparti complet $K_{3,4}$.

Étoile:

Une étoile est un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = q$. Elle est notée par $K_{1,q}$. Le sommet de V_1 est appelé centre ou sommet central de l'étoile. Une étoile subdivisée est une étoile dont chaque arête est subdivisée une fois (voir Figure 1.1.10). Nous noterons $K^*_{1,q}$ l'étoile subdivisée obtenue à partir de l'étoile$K_{1,q}$.



(1) (2)

Figure 1.1.10 : (1) une étoile $K_{1,q}$ et (2) une étoile subdivisée $K^*_{1,q}$.

Double étoile:

Double étoile est le graphe obtenu par deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres, notée $S_{r,s}$. Un exemple de ce graphe est donné dans la Figure 1.1.11 .



Figure 1.1.11 : Double étoile $S_{r,s}$.

Graphe joint:

Le joint de deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ avec $V_1 \cap V_2 = \phi$, est le graphe formé par G_1 et G_2 tel que chaque sommet de V_1 est adjacent à tous les sommets de V_2 (voir Figure 1.1.12).

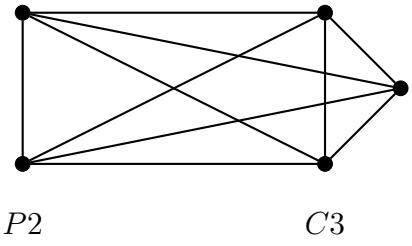


Figure 1.1.12 : Le joint de C_3 et P_2.

Graphe scindé:

Un graphe scindé est un graphe dont l'ensemble des sommets est partitionné en clique Q et un indépendant I (voir Figure 1.1.13).

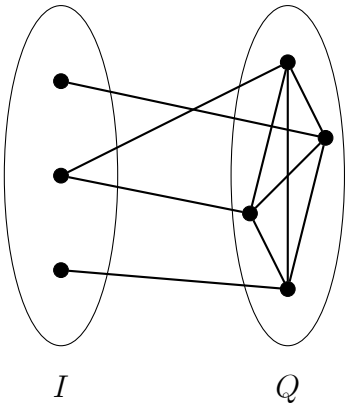


Figure 1.1.13 : Un exemple d'un graphe scindé.

Chapitre 2

Des résultats existants sur la domination, la domination romaine et la domination romaine double.

2.1 La domination.

Dans cette partie, nous présentons les définitions principales liées à la domination. On pourra trouver des informations plus complétes dans les deux livres de Haynes, Hedetniemi et Slater [1] [2].

Définition 2.1.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et soit D un sous-ensemble de V. On dit que D est un ensemble dominant de G, si tout sommet de $V - D$ est adjacent à au moins un sommet de D. Le nombre de domination, noté par $\gamma(G)$, est le cardinal d'un ensemble dominant minimum de G.*

Exemple 2.1.1 *Le nombre de domination du graphe $K_4 - e$ est $\gamma(K_4 - e) = 1$.*

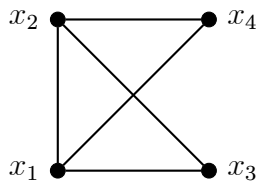


Figure 2.1.1 : Le graphe $K_4 - e$.

Remarque 2.1.1 *Si D est un ensemble dominant d'un graphe simple $G = (V, E)$, alors:*

1. Un sous-ensemble de D n'est pas nécessairement un ensemble dominant de G, tandis que tout ensemble contenant D est un ensemble dominant de G.

2. D contient tous les sommets isolés de G.

3. Puisque l'ensemble des sommets d'un graphe est toujours un ensemble dominant et un dominant contient au moins un sommet, alors le nombre de domination est toujours défini et $1 \leq \gamma(G) \leq n$.

   - $\gamma(G) = 1$ si et seulement si G posséde un sommet v de degré $n - 1$ (sommet universel), dans ce cas $\{v\}$ est un ensemble dominant minimum de G.
   - $\gamma(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K_n}$, dans ce cas $V(G)$ est l'unique ensemble dominant de G.

2.1.1 Problèmes étudiés en domination

Puisque la détermination de la plupart des paramètres de domination est difficile, les chercheurs du domaine se sont penchés vers:

- cherches des bornes pour ces parmétes en fonction de n, δ et Δ.
- Caractériser les graphes pour lesquelles ces bornes sont atteintes.
- pour un paramètre de domination donné $\mu(G)$, trouver des relations entre $\mu(G)$ et $\mu(\overline{G})$ de type Nordhauss-Gaddum, en fonction de n, δ et Δ.

$$\begin{aligned} \mu(G) + \mu(\overline{G}) &\leq f_1(n, \delta, \Delta) \\ &\text{et} \\ \mu(G)\mu(\overline{G}) &\leq f_2(n, \delta, \Delta) \end{aligned}$$

2.1.2 Quelques résultats sur la domination:

On résume ci-dessous quelques bornes concernant le nombre de domination. Walikar Acharya et Sampathkumar [3] ont présenté deux bornes inférieur pour le nombre de domination γ.

Théorème 2.1.1 (Walikar, Acharya et Sampathkumar [3]) *Pour tout graphe simple G avec n sommets et m arêtes et de degré maximum $\Delta(G)$, on a:*

$$\gamma(G) \geq n - m \qquad et \qquad \gamma(G) \geq \frac{n}{\Delta(G) + 1}.$$

Les deux bornes sont atteintes pour le graphe $K_{1,3}$, et $\gamma(K_{1,3}) = n - m = \frac{n}{\Delta(K_{1,3})+1} = 1$.

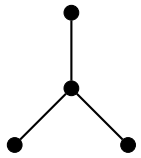


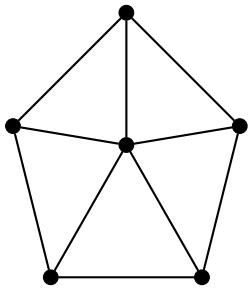
Figure 2.1.2 : Le graphe $K_{1,3}$.

Nous considérons maintenant des bornes supérieures sur $\gamma(G)$.

Théorème 2.1.2 (Berge [4]) *Si G est un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$, alors*

$$\gamma(G) \leq n - \Delta(G).$$

La borne précédente est atteinte pour le graphe G, et $\gamma(G) = n - \Delta(G) = 1$.



G

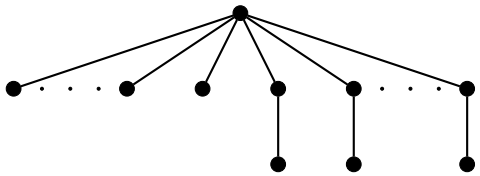
Figure 2.1.3 : Le graphe G.

Définition 2.1.2 *Pour un entier p, un arbre obtenu à partir d'une étoile $K_{1,t}$, $t \geq 1$ en subdivisant p arêtes. Si $p = t$, alors $S_p(K_{1,t})$ est une araignée saine. Si $p < t$, alors $S_p(K_{1,t})$ est une araignée blessée.*

Domke, Dunbar et Markus [5] ont caractérisé la classe des arbres T atteignant la borne du Théorème précédent.

Théorème 2.1.3 (Domke et al. [5]) *Soit T un arbre d'ordre n et de degré maximum $\Delta(T)$, alors $\gamma(T) = n - \Delta(T)$ si et seulement si T est une araignée blessée.*

Un exemple d'une araignée blessée.



T

Figure 2.1.4 : T est un araignée blessée d'order n.

Définition 2.1.3 *Une chenille $C(t_1, t_2, ..., t_s)$ est un arbre dont la supression de ses sommets pendants donne une chaîne $u_1, u_2, ..., u_s$, où t_i est le nombre de sommets pendants adjacents à u_i.*

En 1962, Ore [6] a prouvé que le nombre domination d'un graphe sans sommet isolé est au plus la moitie de son ordre.

Théorème 2.1.4 (Ore [6]) *Si G est un graphe d'ordre n sans sommets isolés ,alors on a:*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}.$$

La borne précédente est atteinte pour la chenille $C(1,1,1)$, et $\gamma(C(1,1,1)) = 3$.

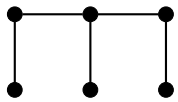


Figure 2.1.5 : la chenille $C(1,1,1)$.

Définition 2.1.4 *La couronne d'un graphe $G = (V, E)$, c'est le graphe $G \circ K_1$ obtenu à partir d'une copie de G en attachant à chaque sommet de G un nouveau sommet. Il est à noter que l'ordre de $G \circ K_1$ est $2\,|V|$.*

Une caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ a été donnée indépendamment par Payan et Xuang [7] et Fink, Jacobson, Kirch et Roberts [8].

Théorème 2.1.5 (Payan, Xuang [7] et Fink et al. [8]) *Soit G un graphe connexe d'ordre n. Alors $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ si et seulement si G est la couronne $J \circ K_1$ où J est un graphe connexe, ou $G = C_4$.*

Jaeger et Payan [9] ont établi des résultats de type Nordhaus-Gaddum suivants sur $\gamma(G)$

Théorème 2.1.6 *Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$, alors*

$$3 \leq \gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n + 1.$$

$$2 \leq \gamma(G)\gamma(\overline{G}) \leq n.$$

Une caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G)+\gamma(\overline{G}) = n+1$, est donnée par Cockayne, Hedetniemi [10].

Théorème 2.1.7 (Cockayne, Hedetniemi [10]) *Soit G un graphe d'ordre n. Alors*

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n + 1,$$

si et seulement si $G = K_n$ ou $\overline{G} = \overline{K_n}$.

Une caractérisation des graphes G tels que $\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) = n$ est donnée par Laskar, Peters [11].

Théorème 2.1.8 (Laskar, Peters [11]) *Soit G un graphe et $\overline{G}$ son complémentaire, si G et $\overline{G}$ sont connexes, alors*

$$\gamma(G) + \gamma(\overline{G}) \leq n,$$

avec égalité si et seulement si $G = P_4$.

2.2 La domination romaine.

Définition 2.2.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Une fonction de domination romaine (FDR) sur G est une fonction $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ tel que chaque sommet u avec $f(u) = 0$ est adjacent à au moins un sommet v avec $f(v) = 2$. Le poids de f est la valeur $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$. Le poids minimum de f est appelé le nombre de domination romaine de G, noté $\gamma_R(G)$.*

Exemple 2.2.1 *Le nombre de domination romaine de C_4 est $\gamma_R(C_4) = 3$.*

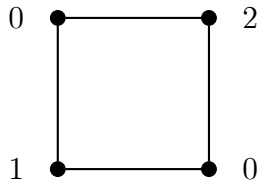


Figure 2.2.1 : Le graphe C_4.

2.2.1 Quelques résultats sur la domination romaine:

Cockayne et al. [12] ont donné la chaîne de l'inégalité suivante.

Proposition 2.2.1 (Cockayne et al. [12]) *Pour tout graphe G,*

$$\gamma(G) \leq \gamma_R(G) \leq 2\gamma(G).$$

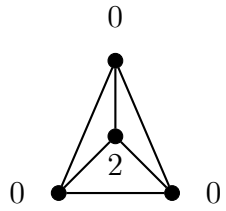
La borne supérieur est atteinte pour la clique K_n.

Une borne inférieure du nombre de domination romaine est donnée par Cockayne et al. [12].

Proposition 2.2.2 (Cockayne et al. [12]) *Pour tout graphe G d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$, on a*

$$\gamma_R(G) \geq \frac{2n}{\Delta(G)+1}.$$

Cette borne est atteinte pour le graphe K_4, et $\gamma_R(K_4) = \frac{2n}{\Delta(K_4)+1} = 2$.



$K4$

Figure 2.2.2 : Le graphe K_4 tq $\gamma_R(K_4) = \frac{2n}{\Delta(K_4)+1}$.

Une borne supèrieur a étè donnée par en fonction de n et Δ.

Proposition 2.2.3 (Chamberss et al. [13]) *Si G est un graphe d'ordre n de degré maximum $\Delta(G)$, alors*

$$\gamma_R(G) + \Delta(G) \leq n + 1.$$

Cette borne est atteinte pour l'étoile $K_{1,n-1}$.

Théorème 2.2.1 (Chamberss et al. [13]) *Si G est un graphe connexe d'ordre n, alors*

$$\gamma_R(G) \leq \frac{4n}{5},$$

avec l'égalité si et seulement si G est un C_5 ou G est obtenu de $\frac{n}{5}P_5$ en identifiant chaque sommet d'un sous graphe connexe au centre d'une seule composante connexe de $\frac{n}{5}P_5$.

Proposition 2.2.4 (Cockayne et al. [12]) *Si G est un graphe d'ordre n avec $\Delta(G) = n - 1$, alors*

$$\gamma_R(G) = 2.$$

Cockayne et al. [12] ont donné une caractérisation des graphes G tels que $\gamma_R(G) = n$.

Proposition 2.2.5 (Cockayne et al. [12]) *Si G est un graphe sans sommets isolés d'ordre n, alors*

$$\gamma_R(G) = n,$$

si et seulement si $G = \frac{n}{2}K_2$.

Proposition 2.2.6 (Cockayne et al. [12]) *Pour les chaînes P_n et les cycles C_n, on a:*

$$\gamma_R(P_n) = \gamma_R(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil.$$

2.3 La domination romaine double.

Nous nous sommes intéressés ici à un autre type de domination est la domination romaine double dans les graphes, et nous donnons quelques bornes sur $\gamma_{dR}(G)$.

Définition 2.3.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Une fonction de domination romaine double (ou juste FDRD) est une fonction $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ ayant la propriété que si $f(v) = 0$ pour un sommet v, alors v à au moins deux voisins a et b tels que $f(a) = f(b) = 2$ ou un voisin c tel que $f(c) = 3$, et si $f(v) = 1$, alors le sommet v doit avoir au moins un voisin w avec $f(w) \geq 2$. Le poids d'une FDRD f est la somme $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$, et le poids minimum d'une FDRD sur G est le nombre de domination romaine double de G, noté par $\gamma_{dR}(G)$.*

Exemple 2.3.1 *Le nombre de domination romaine double de* $\overline{3K_2}$ *est* $\gamma_{dR}(\overline{3K_2}) = 4$.

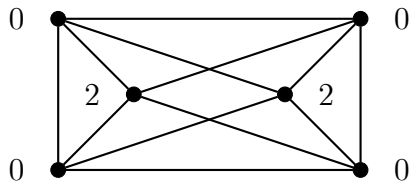


Figure 2.3.1 : Un graphe $\overline{3K_2}$

2.3.1 Bornes sur $\gamma_{dR}(G)$.

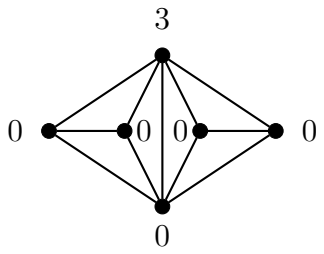
La domination romaine double et la domination.

Nous donnons d'abord les bornes inférieures et supérieures sur le nombre de domination romaine double en fonction de nombre de domination.

Proposition 2.3.1 (Beeler et al.[15]) *Pour tout graphe* G,

$$2\gamma(G) \leq \gamma_{dR}(G) \leq 3\gamma(G).$$

Exemple 2.3.2 *Le nombre de domination romaine double de* G *est* $\gamma_{dR}(G) = 3$ *et* $\gamma(G) = 1$.



G

Figure 2.3.2 : Le graphe G.

Définition 2.3.2 *Un sous ensemble* S *de* V *est dit* 2*-dominant de* G *si tout sommet de* $V - S$ *est adjacent à au moins deux sommets de* S. *Le nombre de* 2*-domination noté par* $\gamma_2(G)$ *est le cardinal minimum d'un ensemble* 2*-dominant de* G.

Proposition 2.3.2 (Beeler et al.[15]) *Pour tout graphe G, $2\gamma(G) = \gamma_{dR}(G)$ si et seulement si $\gamma(G) = \gamma_2(G)$*

La domination romaine double et la domination romaine.

Nous commençons par montrer que pour tout graphe G, il existe une fonction γ_{dR} de G où aucun sommet n'est assigné un 1, c'est-à-dire que $V_1 = \emptyset$ pour certains γ_{dR}-fonction de G.

Proposition 2.3.3 (Beeler et al.[15]) *Dans la fonction de domination romaine double de poids $\gamma_{dR}(G)$, aucun sommet n'a besoin de recevoir la valeur* 1.

Exemple 2.3.3 *Le graphe P_4 possède deux fonction de domination romaine double différentes.*



Figure 2.3.3 : Le nombre de domination romaine double de P_4 est $\gamma_{dR}(P_4) = 5$.

Corollaire 2.3.1 (Beeler et al.[15]) *Pour tout graphe G,*

$$\gamma_{dR}(G) \leq 2\gamma_R(G)$$

avec égalité si et seulement si $G = \overline{K_n}$.

Proposition 2.3.4 (Beeler et al.[15]) *Pour tout graphe G,*

$$\gamma_R(G) < \gamma_{dR}(G).$$

Corollaire 2.3.2 (Beeler et al.[15]) *Pour tout graphe connexe non trivial G, on a*

$$\gamma_R(G) < \gamma_{dR}(G) < 2\gamma_R(G).$$

Proposition 2.3.5 (Ahangar et al. [14]) *Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors*

1. $\gamma_{dR}(G) = 3$ *si et seulement si* $\Delta(G) = n - 1$.
2. $\gamma_{dR}(G) = 4$ *si et seulement si* $G = \overline{K_2} \vee H$, *où* H *est un graphe avec* $\Delta(H) \leq |V(H)| - 2$.
3. $\gamma_{dR}(G) = 5$ *si et seulement si* $\Delta(G) = n - 2$ *et* $G \neq \overline{K_2} \vee H$ *pour tout graphe* H *d'ordre* $n - 2$.

Soit $\mathcal{H}$ la famille des graphes connexes G d'ordre n qui peuvent être construits de $\frac{n}{4}$ copies de P_4 en identifait sous graphe connexe formé de l'ensemble des centres de $\frac{n}{4}P_4$.

Théorème 2.3.1 (Beeler et al.[15]) *Si G est un graphe connexe d'ordre n, alors*

$$\gamma_{dR}(G) \leq \frac{5n}{4},$$

avec l'égalité si et seulement si $G \in \mathcal{H}$.

Un exemple d'un graphe de la famille $\mathcal{H}$.

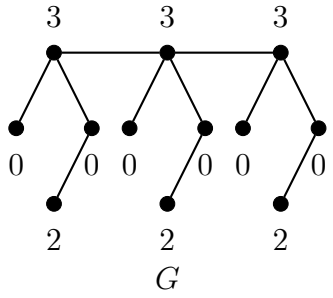


Figure 2.3.4 : Un graphe $G \in \mathcal{H}$ avec $\gamma_{dR}(G) = 15 = \frac{5n}{4}$.

Proposition 2.3.6 (Jafari et Rahbani [16]) *Pour tout graphe G d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$, on a*

$$\gamma_{dR}(G) \leq 2(n - \Delta(G)) + 1.$$

Preuve. Soit G un graphe d'ordre n et soit v un sommet de degré maximum. Alors la fonction $h = (N(v), V - N[v], \{v\})$ est une FDRD de G de poids $2n - 2\Delta(G) + 1$, et donc $\gamma_{dR}(G) \leq 2(n - \Delta(G)) + 1$. ■

Chapitre 3

Quelques résultats sur la domination romaine double

Dans ce chapitre nous donnons une borne inférieure et nous caractérisations des graphes atteignant quelques bornes superieures existants sur $\gamma_{dR}(G)$.

3.1 Une borne inférieure sur $\gamma_{dR}(G)$

Nous donnons ici une borne inférieure sur $\gamma_{dR}(G)$ en fonction de n et $\Delta(G)$.

Proposition 3.1.1 *Pour tout graphe G connexe d'ordre $n \geq 3$, et de degré maximum $\Delta(G)$, on a*

$$\gamma_{dR}(G) \geq \frac{3n}{\Delta(G)+1}.$$

Preuve. Soit $f = (V_0, V_2, V_3)$ une $\gamma_{dR}(G)$-fonction. Soit $S = V_0 \cap N(V_3)$ et $T = V_0 - S$. Puisque chaque sommet de V_3 domine au plus $\Delta(G)$ sommets dans S, on a

$|S| \leq m(V_3, S) \leq \Delta(G)|V_3|$, et donc $|S| \leq \Delta(G)|V_3|$. D'autre part, puisque chaque sommet de V_2 domine au plus $\Delta(G)$ sommets dans T, et puisque chaque sommet de T à au moins deux voisins dans V_2, on a $2|T| \leq m(V_2, T) \leq \Delta(G)|V_2|$ et donc $|T| \leq \frac{\Delta(G)}{2}|V_2|$. Par

conséquent $|V_0| = |S| + |T| \leq \Delta(G)|V_3| + \frac{\Delta(G)}{2}|V_2|$. Nous avons maintenant

$$\begin{aligned}
(\Delta(G)+1)\gamma_{dR}(G) &= (\Delta(G)+1)(2|V_2| + 3|V_3|) \\
&= 3\left(\frac{\Delta(G)}{2}|V_2| + \Delta(G)|V_3|\right) + \frac{\Delta(G)}{2}|V_2| + 2|V_2| + 3|V_3| \\
&\geq 3|V_0| + \left(\frac{\Delta(G)}{2} + 2\right)|V_2| + 3|V_3| \quad \text{(Puisque } |V_0| \leq \frac{\Delta(G)}{2}|V_2| + \Delta(G)|V_3|) \\
&\geq 3|V_0| + 3|V_2| + 3|V_3| \quad \text{(car } \Delta(G) \geq 2) \\
&= 3n
\end{aligned}$$

et donc $(\Delta(G)+1)\gamma_{dR}(G) \geq 3n$. D'où $\gamma_{dR}(G) \geq \frac{3n}{\Delta(G)+1}$. ■

La borne de la proposition précédent est atteinte pour le graphe G de la figure 3.1.1

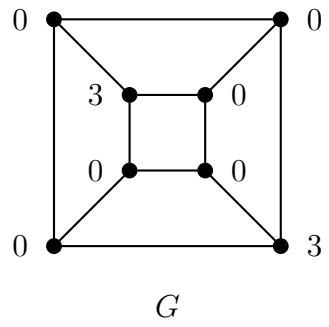


Figure 3.1.1 : Un graphe G avec $\gamma_{dR} = \frac{3n}{\Delta(G)+1}$.

3.2 Graphes G vérifiant $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$

Dans cette section, nous étudions les graphes G avec $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$. Nous commençons par une condition nécessaire des graphes G vérifiant l'égalité

$\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$.

Pour tout sommet $v \in V$, nous écrivons $\overline{N}(v) = V(G) - N[v]$. Nous notons aussi par $m(N(v), \overline{N}(v))$ le nombre d'arêtes ayant une extrémité dans $N(v)$ et l'autre extrémité dans $\overline{N}(v)$.

Proposition 3.2.1 *Soit G un graphe d'ordre n de degré maximum $\Delta(G)$. Si*

$\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$, *alors pour tout sommet v de degré maximum on a:*

(1) Chaque sommet de $N(v)$ est adjacent à au plus un sommet de $\overline{N}(v)$.

(2) $\overline{N}(v)$ est indépendant.

(3) $N(v)$ a au moins un sommet sans voisin dans $\overline{N}(v)$.

Preuve. Soit G un graphe avec $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ et soit v un sommet de degré maximum. Considérons une FDRD f qui attribue la valeur 3 à v, 0 aux voisins de v et 2 aux sommets restants. Clairement, f est une $\gamma_{dR}(G)$-fonction.

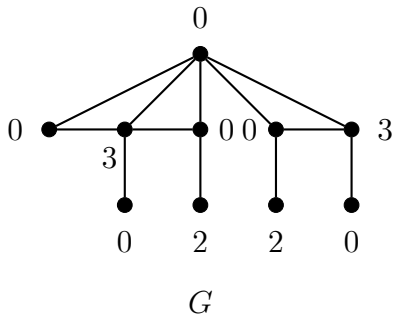
(1) Supposons au contraire que v a un voisin x ayant au moins deux voisins dans $\overline{N}(v)$. Réaffectons x à 3 au lieu de 0 et chaque sommet de $N(x) \cap \overline{N}(v)$ à 0 au lieu de 2, et ça donne une FDRD g de poids $w(g) \leq 2(n - \Delta(G))$, ce qui contredit l'hypothèse

$\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$.

(2) Supposons au contraire qu'il y a une arête xy dans $G\left[\overline{N}(v)\right]$, Réaffectons x à 3 au lieu de 2, et réaffectons y à 0 au lieu de 2, et ça donne une FDRD g de poids $w(g) \leq 2(n - \Delta(G))$, ce qui contredit l'hypothèse $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$.

(3) Enfin, si chaque sommet de $N(v)$ a un voisin dans $\overline{N}(v)$. Réaffectons v à 2 au lieu de 3, et ça donne une FDRD g de poids $w(g) \leq 2(n - \Delta(G))$, ce qui contredit l'hypothèse $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$. ■

L'exemple suivant montre que les conditions de la proposition précédente ne sont pas suffisantes.



G

Figure 3.2.1 : Le graphe G tel que $\gamma_{dR}(G) = 10 < 11 = 2(n - \Delta(G)) + 1$.

Corollaire 3.2.1 *Soit G un graphe d'ordre n de degré maximum $\Delta(G)$ et de degré minimum $\delta(G) \geq 1$. Si $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$, alors G est connexe.*

Preuve. Soit G un graphe avec $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ et soit v un sommet de degré maximum. Supposons que G contient deux composantes connexes G_1et G_2, et soit v un sommet de degré maximum de G_1. D'après la proposition 3.2.1-2, $V(G_2) \subset \overline{N}(v)$ qui est stable, donc G_2 contient un sommet isolé, qui contredit le fait que $\delta(G) \geq 1$. ■

Observation 3.2.1 *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$ et de degré maximum $\Delta(G)$.*

1. Si $\Delta(G) \leq 2$, alors $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ si et seulement si $G = pK_1 \cup H$, où $H \in \{P_2, P_3, P_4, C_3\}$ et $p + |V(H)| = n$.

2. Si $\Delta(G) = n - 1$, alors $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$.

3. Si $\Delta(G) = n - 2$, alors $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ si et seulement si $G \neq \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe H d'order $n - 2$.

Preuve. Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$ et de degré maximum $\Delta(G)$ et $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$.

1. Il est clair que $G = (n-2)K_1 \cup P_2$ pour $\Delta(G) = 1$, et $G = pK_1 \cup H$, avec $H \in \{P_3, P_4, C_3\}$ et $p + |V(H)| = n$, pour $\Delta(G) = 2$.

L'inverse est facile à vérifier.

2. Si $\Delta(G) = n - 1$, alors G a sommet universel v, et donc la fonction f telle que $f(v) = 3$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in V - \{v\}$ est une FDRD de poids $w(f) = 3 \geq \gamma_{dR}(G)$, et puisque $\gamma_{dR}(G) \geq 3$, on a $\gamma_{dR}(G) = 3$.

3. Si $\Delta(G) = n - 2$, alors par proposition 2.3.5-(3), on a $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ si et seulement si $G \neq \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe H d'order $n - 2$. ■

Dans la suite, nous fournissons une caractérisation de certaines classes de graphes G avec $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$, à savoir les graphes réguliers, les graphes semi-réguliers, les graphes bipartis et les graphes scindés.

Théorème 3.2.1 *Soit $\Delta(G) \geq 1$ et G un graphe Δ-régulier d'ordre n. Alors $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ si et seulement si $G = K_n$.*

Preuve. Soit G un graphe régulier avec $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$. Si $\Delta(G) = 1$, alors $G = K_2$. Supposons maintenant que $\Delta(G) \geq 2$, et soit v un sommet de G. Si $\overline{N}(v) \neq \emptyset$, alors par proposition 3.2.1-(2), chaque sommet x de $\overline{N}(v)$ est adjacent à tout sommet de $N(v)$, ceci contredit la condition (3) de la proposition 3.2.1. Donc $\overline{N}(v) = \emptyset$, et $d(v) = n-1$, et puisque G est régulier, $G = K_n$.

Inversement, soit G le graphe complet K_n. Donc $\gamma_{dR}(K_n) = 3 = 2(n - \Delta(G)) + 1$. ■

Théorème 3.2.2 *Soit G un graphe semi-régulier d'ordre $n \geq 3$ et de degré maximum $\Delta(G)$. Alors $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ si et seulement si $G = (n-2)K_1 \cup K_2$, ou $K_p \vee \overline{\frac{q}{2}K_2}$, avec $p + q = n$, $p \geq 1$ et $q \geq 2$, ou $\Delta(G) = n - 2$ et $G \neq \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe H d'order $n - 2$.*

Preuve. Soit G un graphe semi-régulier d'ordre n tel que

$\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$. Notons que chaque sommet de G est de degré $\Delta(G)$ ou $\Delta(G) - 1$. Si $\Delta(G) = 1$, alors clairement $G = (n-2)K_1 \cup K_2$. Supposons que $\Delta(G) \geq 2$. Soit v un sommet de degré maximum. D'après la proposition 3.2.1, $m(N(v), \overline{N}(v))$ satisfait $(\Delta(G)-1)\left|\overline{N}(v)\right| \leq m(N(v), \overline{N}(v)) \leq |N(v)|-1$. Donc $(\Delta(G)-1)(n-\Delta(G)-1) \leq \Delta(G)-1$, et ainsi $\Delta(G) \geq n - 2$.

Si $\Delta(G) = n - 1$, alors G possède au moins un sommet de degré $n - 1$ et au moins deux sommets de degré $n-2$, et donc G est le joint d'une clique K_p et d'un graphe complet moins couplage parfait $\overline{\frac{q}{2}K_2}$, avec $p + q = n$, $p \geq 1$ et $q \geq 2$.

Si $\Delta(G) = n - 2$, alors d'après l'observation 3.2.1 $G \neq \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe H d'order $n - 2$.

Inversement, soit G un graphe semi-régulier d'ordre $n \geq 3$ et de degré maximum

$\Delta(G) \in \{1, n-1, n-2\}$ et $G \neq \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe H d'order $n - 2$. Si

$G = (n-2)K_1 \cup K_2$. Donc $f(K_2) = 3$ et $f(K_1) = 2$. C'est a dire

$\gamma_{dR}(G) = f(V) = f(K_2) + (n-2)f(K_1) = 3 + 2(n-2) = 2(n - \Delta(G)) + 1$. Si $K_p \vee \overline{\frac{q}{2}K_2}$, alors $\gamma_{dR}(G) = 3 = 2(n - \Delta(G)) + 1$. Si $\Delta(G) = n - 2$ et $G \neq \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe H d'order $n - 2$, alors $\gamma_{dR}(G) = 3 + 2 = 2(n - \Delta(G)) + 1$. ■

Théorème 3.2.3 *Soit G un graphe scindé dont l'ensemble de sommets est partitionné en une clique Q maximal et un ensemble indépendant I et soit v un sommet de degré maximum*

$\Delta(G)$. *Alors* $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ *si et seulement si chaque sommet de* $Q - \{v\}$ *est adjacent à au plus un sommet de* $I - N(v)$.

Preuve. Soit G un graphe scindé tel que $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$, et soit v un sommet de degré maximum $\Delta(G)$. Il est clair que $v \in Q$. Puisque G est un graphe scindé, il existe au moins une arête reliant Q et I, donc v a au moins un voisin dans I, et par suite $\overline{N}(v) \subsetneq I$. Les conditions (2) et (3) de la propisition 3.2.1 sont vérefiées et par la propisition 3.2.1-(1), chaque sommet de $Q - \{v\}$ est adjacent à au plus un sommet de $I - N(v)$.

Inversement, supposons chaque sommet de $Q - \{v\}$ est adjacent à au plus un sommet de $I - N(v)$. Si $\overline{N}(v) = \phi$, alors v est un sommet univérsel, et donc

$\gamma_{dR}(G) = 3 = 2(n - \Delta(G)) + 1$. Supposons que $\overline{N}(v) \neq \phi$. Alors $f(N[v]) \geq 3$ et

$f(I - N(v)) \geq 2|I - N(v)|$ car $I - N(v)$ est stable. Donc

$\gamma_{dR}(G) = f(V) \geq 3 + 2|I - N(v)| = 2(n - \Delta(G)) + 1$, et l'égalité vient du fait que $\gamma_{dR}(G) \leq 2(n - \Delta(G)) + 1$. ■

Exemple d'un graphe scindé vérifiant $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$.

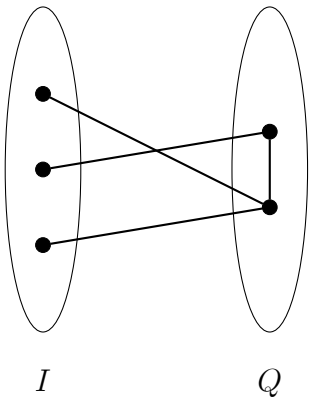


Figure 3.2.2 : Un graphe scindé tel que $Q = K_2$ et $I = \overline{K_3}$.

Théorème 3.2.4 *Soit* G *un graphe biparti connexe avec bipartition* X_1, X_2. *Alors*

$\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ *si et seulement s'il existe un sommet* $v \in X_i$ *tel que*

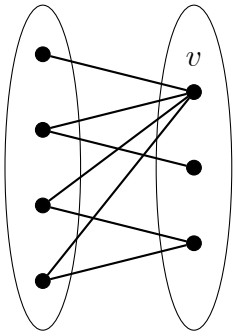
$N(v) = X_j$ *avec* $i \neq j$ *et chaque sommet de* X_j *est de degré au plus deux et* X_j *contient au moin un sommet de degré* 1.

Preuve. Soit G un graphe biparti connexe avec la bipartition X_1, X_2. Si $\Delta(G) \leq 2$, alors d'après l'obsarvation 3.2.1-(1), $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$ si et seulement si

$G \in \{P_2, P_3, P_4\}$. Supposons maintenant que $\Delta(G) \geq 3$ et $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$. Soit v un sommet de degré maximum $\Delta(G)$, et sans perte de généralité, on suppose que $v \in X_1$. Alors $N(v) \subseteq X_2$. Supposons que $X_2 - N(v) \neq \emptyset$. Alors $X_2 - N(v)$ contient un sommet $y \in \overline{N}(v)$, et puisque G est un graphe biparti connexe, y a au moin un voisin dans $X_1 - \{v\}$, ce qui contredit le fait que $\overline{N}(v)$ est indépendant (voir propisition 3.2.1-(3)). D'où $N(v) = X_2$. Par la proposition 3.2.1, et puisque X_2 est indépendant, chaque sommet de X_2 est de degré au plus deux et contain au moin un sommet de degré 1.

Inversement, soit G un graphe biparti avec bipartition X_1, X_2 et $\Delta(G) \geq 3$, et soit f est γ_{dR}-fonction sans perte de généralité, on suppose que X_1 contient un sommet v tel que $N(v) = X_2$ et chaque sommet de X_2 est de degré au plus deux et contient au moin un sommet de degré 1. Il est clair que $d(v) = \Delta(G)$, $f(N[v]) \geq 3$ et $f(X_1 - \{v\}) \geq 2|X_1 - \{v\}|$. Donc $\gamma_{dR}(G) = f(V) \geq 3 + 2|X_1 - \{v\}| = 2(n - \Delta(G)) + 1$, et l'égalité vient du fait que $\gamma_{dR}(G) \leq 2(n - \Delta(G)) + 1$. ■

Exemple d'un graphe biparti vérifiant $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1$.



G

Figure 3.2.3 : Un graphe G tel que $\gamma_{dR}(G) = 7 = 2(n - \Delta(G)) + 1$.

Nous caractérisons ensuite la classe d'arbres T pour lesquelles $\gamma_{dR}(T) = 2(n - \Delta(T)) + 1$. Pour un entier positif t, une araignée blessée est une étoile $K_{1,t}$ avec au plus $t - 1$ de ses arêtes subdivisées. Ainsi, une étoile est une araignée blessée.

Corollaire 3.2.2 *Soit T un arbre. Alors $\gamma_{dR}(T) = 2(n - \Delta(T)) + 1$ si et seulement si T est une araignée blessée.*

Exemple d'un graphe arbre T vérifiant $\gamma_{dR}(T) = 2(n - \Delta(T)) + 1$.

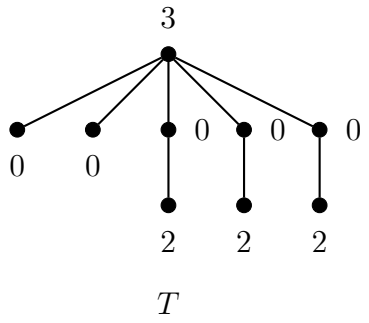


Figure 3.2.4 : Un arbre T tel que $\gamma_{dR}(T) = 9 = 2(n - \Delta(T)) + 1$.

3.3 Graphes G vérifiant $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$

Dans cette section, nous étudions les graphes G avec $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$. Nous commençons par une condition nécessaire des graphes connexes G tels que

$\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$.

Proposition 3.3.1 *Soit G un graphe d'ordre n et de degré maximum $\Delta(G)$. Si $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$, alors pour tout sommet v de degré maximum on a:*

(1) Chaque sommet de $N(v)$ est adjacent à au plus deux sommets dans $\overline{N}(v)$.

(2) $G[\overline{N}(v)]$ contient au plus un arête.

(3) $\overline{N}(v) \neq \phi$.

Preuve. Soit G un graphe avec $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$ et soit v un sommet de degré maximum. Considérons une $\gamma_{dR}(G)$-fonction f avec $w(f) = 2(n - \Delta(G))$.

(1) Supposons au contraire que v a un voisin x ayant au moins trois voisins dans $\overline{N}(v)$. Alors assignons v et x à 3, chaque sommet de $(N(x) \cup N(v)) - \{x, v\}$ à 0 et les autres

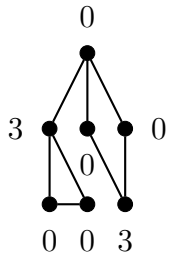
sommets à 2 produisent une FDRD h de poids $w(h) \leq 2(n - \Delta(G)) - 2$, ce qui contredit l'hypothèse $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$.

(2) Supposons que $G[\overline{N}(v)]$ contient deux arêtes xy et zt. Alors assignons v, x et z à 3, chaque sommet de $N(v) \cup \{y, t\}$ à 0 et les autres sommets à 2 produit une FDRD, de poids $w(h) \leq 2(n - \Delta(G)) - 1$, ce qui contredit l'hypothèse. Finalement, supposons que $\overline{N}(v)$ contient une chaine $P_3 = x - y - z$, assignons v et y à 3, chaque sommet de $N(v) \cup \{x, z\}$ à 0 et les autres sommets à 2 produisent une FDRD h de poids $w(h) \leq 2(n - \Delta(G)) - 2$, ce qui contredit l'hypothèse.

(3) Supposons que $\overline{N}(v) = \phi$ et v un sommet de degré maximum. Alors

$d_G(v) = \Delta(G) = n - 1$. Alors assignons v à 3, chaque sommet de $N(v)$ à 0 produisent une FDRD de poids $w(h) = 3 \neq 2 = 2(n - \Delta(G)) = w(f)$, ce qui contredit l'hypothèse. ■

L'exemple suivant montre que les conditions de la proposition précédente ne sont pas suffisantes.



G

Figure 3.3.1 : Un graphe G tel que $\gamma_{dR}(G) = 6 \neq 8 = 2(n - \Delta(G))$.

Observation 3.3.1 *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$ et de degré maximum $\Delta(G)$.*

1. Si $\Delta(G) \leq 2$, $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$ si et seulement si $G = nK_1$ ou $G = pK_1 \cup H$, avec $H \in \{2P_2, P_3 \cup P_2, P_4 \cup P_2, C_3 \cup P_2, C_4, C_5, P_5\}$ et $p + |V(H)| = n$.

2. Si $\Delta(G) = n - 1$, alors $\gamma_{dR}(G) \neq 2(n - \Delta(G))$.

3. Si $\Delta(G) = n - 2$, alors $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$ si et seulement si $G = \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe H d'ordre $n - 2$.

Preuve. Soit G un graphe d'ordre $n \geq 2$ et de degré maximum $\Delta(G)$ et

$\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$.

1. Il est facile de vérifier que $G = nK_1$ pour $\Delta(G) = 0$, et $G = (n-4)K_1 \cup 2P_2$ pour $\Delta(G) = 1$, et $G = pK_1 \cup H$, avec

$H \in \{P_3 \cup P_2, P_4 \cup P_2, C_3 \cup P_2, C_4, C_5, P_5\}$ et $p + |V(H)| = n$ pour $\Delta(G) = 2$.

2. Si $\Delta(G) = n-1$, alors G a sommet universel v, et donc la fonction f telle que $f(v) = 3$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in V - \{v\}$ est une FDRD de poids $w(f) = 3 \geq \gamma_{dR}(G)$, et puisque $\gamma_{dR}(G) \geq 3$, on a $\gamma_{dR}(G) = 3$, et donc $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G)) + 1 \neq 2(n - \Delta(G))$.

3. Si $\Delta(G) = n - 2$, alors $\gamma_{dR}(G) = 2(n - n + 2)$, et donc $\gamma_{dR}(G) = 4$, alors G possède deux sommets u et v de degré $\Delta(G)$ non adjacent telque les deux sommets u et v possèdent les mêmes voisins, et donc $G = \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe H d'ordre $n - 2$.

L'inverse est facile à vérifier. ■

D'aprés le théorème 3.2.1, si $G \neq K_n$, alors $\gamma_{dR}(G) \leq 2(n - \Delta(G))$.

Maintenant, nous donnons une caractérisation des graphes réguliers G telsque

$\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$.

Théorème 3.3.1 *Soit G un graphe Δ-régulier d'ordre n avec $G \neq K_n$. Alors*

$\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$ *si et seulement si* $G \in \{2P_2, C_4, C_5, \overline{K_n}, \overline{\frac{n}{2}K_2}\}$ *ou* $\Delta(G) = n - 3$.

Preuve. Soit G un graphe régulier avec $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$. Si $\Delta(G) \leq 2$, par l'observation 3.3.1-(1), $\gamma_{dR}(G) = 2(n - \Delta(G))$ si et seulement si $G = \{2P_2, C_4, C_5, \overline{K_n}\}$. Supposons maintenant que $\Delta(G) \geq 3$. Soit v un sommet de G. Supposons $|\overline{N}(v)| \geq 3$. Alors $N(v)$ contient au moin un sommet avec trois voisins dans $\overline{N}(v)$, ce qui contredit la condition 1 de la proposition 3.3.1. Donc $1 \leq |\overline{N}(v)| \leq 2$.

Si $|\overline{N}(v)| = 1$, alors $G = \overline{\frac{n}{2}K_2}$. Si $|\overline{N}(v)| = 2$, alors G est $(n-3)$-régulier.

L'inverse est facile à vérifier. ■

3.4 Inégalités de type Nordhaus-Gaddum

Des relations de type Nordhaus-Gaddum sur le nombre de domination romaine double d'un graphe G en fonction de n, ainsi leurs caractérisation sont données par Jafari et Rahbani [16], Nous donnons ici une autre démonstration.

Théorème 3.4.1 (Jafari et Rahbani [16]) *Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 2$, on a*

$$\gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) \leq 2n + 3.$$

avec égalité si et seulement si $G = K_n$ ou $\overline{K_n}$.

Preuve. Par la proposition 2.3.6, on a

$$\begin{aligned} \gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) &\leq 2\left(n - \Delta(G)\right) + 1 + 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right) + 1 \\ &= 2n + 2\left(-\Delta(G) + \delta(G)\right) + 4 \\ &\leq 2n + 4. \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

Si $\gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) = 2n + 4$, alors les inégalités précédentes doivent être des égalités, ce qui implique que $\gamma_{dR}(G) = 2\left(n - \Delta(G)\right) + 1$ et $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right) + 1$ et G est régulier, et ainsi d'après le théorème 3.2.1, $G = K_n$ et $\overline{G} = K_n$, implique $n = 1$, ce qui contredit lypoyhèse $n \geq 2$. D'où $\gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) \leq 2n + 3$. Supposons maintenant que $\gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) = 2n + 3$. D'après l'inégalité (3.4.1), on a:

$$2n + 3 = \gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) \leq 2n + 2\left(-\Delta(G) + \delta(G)\right) + 4,$$

et donc $(\Delta(G) - \delta(G)) \leq 1/2$. Alors $\Delta(G) - \delta(G) = 0$, c-à-d que G et $\overline{G}$ sont réguliers. Clairement, $\gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) = 2n + 3$, implique $\gamma_{dR}(G) = 2\left(n - \Delta(G)\right) + 1$ et

$\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right)$, ou $\gamma_{dR}(G) = 2\left(n - \Delta(G)\right)$ et $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right) + 1$. Par les théorèmes 3.2.1 et 3.3.1, $\gamma_{dR}(G) = 2\left(n - \Delta(G)\right) + 1$ et $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right)$ si et seulement si $G = K_n$. De même pour $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right) + 1$ et $\gamma_{dR}(G) = 2\left(n - \Delta(G)\right)$ si et seulement si $\overline{G} = K_n$. ■

D'apès le théorème 3.4.1, si G est un graphe différent de K_n et $\overline{K_n}$, alors $\gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) \leq 2n + 2$.

Théorème 3.4.2 (Jafari et Rahbani [16]) *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$ tel que $G \notin \left\{K_n, \overline{K_n}\right\}$. Alors*

$$\gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) \leq 2n + 2,$$

avec égalité si et seulement si $G \in \{2P_2, C_5, C_4, P_4, K_n - e, (n-2)\,K_1 \cup K_2\}$.

Preuve. Clairement, la borne supérieure découle du théorème 3.4.1. Supposons maintenant que $\gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) = 2n + 2$. D'après l'inégalité (3.4.1), on a:

$$2n + 2 = \gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) \leq 2n + 2\left(-\Delta(G) + \delta(G)\right) + 4.$$

D'où $\Delta(G) - \delta(G) \leq 1$. Par conséquent, G est régulier ou semi-régulier. Considérons les deux cas:

Cas 1. G est un graphe régulier. Donc $\overline{G}$ est aussi régulier. Clairement sans perte généralité, $\gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) = 2n + 2$, implique que soit $\gamma_{dR}(G) = 2\left(n - \Delta\left(G\right)\right) + 1$ et $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right) - 1$ ou $\gamma_{dR}(G) = 2\left(n - \Delta(G)\right)$ et $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right)$. Si $\gamma_{dR}(G) = 2\left(n - \Delta(G)\right) + 1$ et $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right) - 1$, alors par le théorème 3.2.1, on obtient que $G = K_n$, et $\gamma_{dR}(\overline{K_n}) = 2n \neq 2n - 1 = 2\left(n - \Delta(\overline{K_n})\right) - 1$, qui donne une contradiction. Si $\gamma_{dR}(G) = 2\left(n - \Delta(G)\right)$ et $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right)$, alors par le théorème 3.3.1, on a $G \in \{2P_2, C_4, C_5\}$.

Cas 2. G est un graphe semi-régulier. Notons que $\overline{G}$ est aussi semi-régulier. Dans ce cas on a $\gamma_{dR}(G) = 2\left(n - \Delta(G)\right) + 1$ et $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right) + 1$. Par le théorème 3.2.2, on a trois possibilités:

Sous cas 2.1. $G = (n-2)\,K_1 \cup K_2$. Alors $\overline{G} = K_n - e$.

Sous cas 2.2. $G = K_p \vee \overline{\frac{q}{2}K_2}$, avec $p + q = n$, $p \geq 1$ et $q \geq 2$. Alors $\overline{G} = pK_1 \cup \frac{q}{2}K_2$, avec $p + q = n$, $p \geq 1$ et $q \geq 2$. Par le théorème 3.2.2, $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right) + 1$ seulement pour $p = n - 2$ et $q = 2$ (c-à-d $\overline{G} = (n-2)\,K_1 \cup K_2$).

Sous cas 2.3. $\Delta(G) = n - 2$ et $G \neq \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe H d'order $n - 2$. Alors $\overline{G}$ est un graphe semi-régulier de degré maximum $\Delta(\overline{G}) = 2$. Par le théorème 3.2.2,

$\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right) + 1$ seulement pour $\overline{G} = P_3$ ou P_4, et par conséquent

$G \in \{(n-2)\,K_1 \cup K_2, K_n - e, P_4\}$.

L'inverse est facile à vérifier. ■

Soit $\mathcal{D}$ la famille de graphes G tels que $G \in \left\{K_n, \overline{K_n}, 2P_2, C_5, C_4, P_4, K_n - e, (n-2)\,K_1 \cup K_2\right\}$.

D'apès le théorème 3.4.1, si G est un graphe différent de la famille $\mathcal{D}$, alors

$\gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) \leq 2n + 1$. Dans la suite, nous fournissons une caractérisation des graphes G d'ordre n pour lesquels $\gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) = 2n + 1$.

Théorème 3.4.3 *Soit G un graphe d'ordre $n \geq 3$ tel que $G \notin \mathcal{D}$. Alors*

$$\gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) \leq 2n + 1,$$

avec égalité si et seulement si $G \in \{P_5, C_5 + e, 2K_2 \cup (n-4)K_1, C_4 \vee K_{n-4}\}$.

Preuve. Clairement, la borne supérieure découle du théorème 3.4.1. Supposons maintenant que $\gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) = 2n + 1$. D'après l'inégalité (3.4.1), on a:

$$2n + 1 = \gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) \leq 2n + 2\left(-\Delta(G) + \delta(G)\right) + 4.$$

D'où $\Delta(G) - \delta(G) \leq \frac{3}{2}$, et donc $\Delta(G) - \delta(G) \leq 1$. Par conséquent, G est régulier ou semi-régulier. Considérons les deux cas:

Cas 1. G est un graphe régulier. Donc $\overline{G}$ est aussi régulier. Clairement sans perte généralité, $\gamma_{dR}(G) + \gamma_{dR}(\overline{G}) = 2n + 1$, implique que soit $\gamma_{dR}(G) = 2\left(n - \Delta\left(G\right)\right) + 1$ et $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right) - 2$ ou $\gamma_{dR}(G) = 2\left(n - \Delta(G)\right)$ et $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right) - 1$. Si $\gamma_{dR}(G) = 2\left(n - \Delta(G)\right) + 1$ et $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right) - 2$, alors par le théorème 3.2.1, on obtient que $G = K_n$, et $\gamma_{dR}(\overline{K_n}) = 2n \neq 2n - 2 = 2\left(n - \Delta(\overline{K_n})\right) - 2$, qui donne une contradiction. Si $\gamma_{dR}(G) = 2\left(n - \Delta(G)\right)$ et $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right) - 1$, alors par le théorème 3.3.1 $G = \overline{\frac{n}{2}K_2}$ ou $\Delta(G) = n-3$. Si $G = \overline{\frac{n}{2}K_2}$, alors $\overline{G} = \frac{n}{2}K_2$. Donc $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n-1\right)-1$, et donc $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2n - 3$, et on a $\gamma_{dR}(\frac{n}{2}K_2) = 3\frac{n}{2}$, alors $n = 6$, il est clair que $\overline{G} = 3K_2$, et donc $G = \overline{3K_2}$. Si $\Delta(G) = n - 3$, il est clair que $\Delta(\overline{G}) = 2$, donc $\overline{G}$ est un cycle ou l'union des cycles et $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2n - 5$, par le théorème 2.1.4 et par la proposition 2.3.1, on a $\gamma_{dR}(\overline{G}) \leq 3\frac{n}{2}$. Donc $2n - 5 \leq 3\frac{n}{2}$ d'où $3 \leq n \leq 10$, c-à-d $\overline{G} \in \{C_i : i = 3, ..., 10\} \cup \{2C_3, C_3 \cup C_4, C_4 \cup C_4, C_4 \cup C_6, C_3 \cup C_5, C_5 \cup C_5, C_3 \cup C_7, C_3 \cup C_6, C_4 \cup C_5, 3C_3, 2C_3 \cup C_4\}$. Après vérification on trouve $\gamma_{dR}(\overline{G}) \neq 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right) - 1$.

Cas 2. G est un graphe semi-régulier. Notons que $\overline{G}$ est aussi semi-régulier. Dans ce cas on a $\gamma_{dR}(G) = 2\left(n - \Delta(G)\right) + 1$ et $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right)$. Par le théorème 3.2.2. On a les possibilités suivantes:

Sous cas 2.1. $G = (n-2)\,K_1 \cup K_2$. Alors $\overline{G} = K_n - e$, et donc

$\gamma_{dR}(\overline{G}) = 3 \neq 2 = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right)$, qui donne une contradiction.

Sous cas 2.2. $G = K_p \vee \overline{\frac{q}{2}K_2}$, avec $p+q=n$, $p \geq 1$ et $q \geq 2$. Alors $\overline{G} = pK_1 \cup \frac{q}{2}K_2$, et donc $\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2p + 3\frac{q}{2}$, c-à-d $2(n-1) = 2p + 3\frac{q}{2}$,et donc $4n - 4p - 3q = 4$, on a $p+q=n$, alors $q=4$ et $p = n-4$. Alors $\overline{G} = 2K_2 \cup (n-4)K_1$.

Par conséquent $G \in \{2K_2 \cup (n-4)K_1, \overline{2P_2} \vee K_{n-4}\}$.

Sous cas 2.3. $\Delta(G) = n-2$ et $G \neq \overline{K_2} \vee H$ pour tout graphe H d'order $n-2$. Alors $\overline{G}$ est un graphe semi-régulier de degré maximum $\Delta(\overline{G}) = 2$. Par l'observation 3.3.1,

$\gamma_{dR}(\overline{G}) = 2\left(n - \Delta(\overline{G})\right)$ seulement pour $\overline{G} \in \{P_3 \cup P_2, P_4 \cup P_2, C_3 \cup P_2, P_5\}$, et par conséquent $G \in \{P_5, C_5 + e\}$.

L'inverse est facile à vérifier. ■

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce mémoire à la notion de la domination romaine double dans les graphes simples. Généralement, la détermination de $\gamma_{dR}(G)$ est un problème difficile pour un graphe quelconque. De ce fait, nous nous sommes focalisés sur trois points importants.

* La détermination une borne inférieure sur $\gamma_{dR}(G)$ en fonction de n et $\Delta(G)$.

* La caractérisation de bornes existantes pour certaines classes de graphes à savoir les graphes réguliers, les graphes semi-réguliers, les graphes bipartis et les graphes scindés.

* Amélioration de quelques résultats de type Nordhaus-Gaddum sur $\gamma_{dR}(G)$ et leurs caractérisation.

Bibliographie

[1] T.W.Haynes, S.T. Hedetniemi, et P.J. Slater (eds), Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, Inc. New York (1998).

[2] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, et P.J. Slater (eds), Domination in Graphs : Advanced Topics, Marcel Dekker, New York (1998).

[3] H.B. Walikar and B.D. Acharya and E. Sampathkumar. Recent develepments in the theory of domination in graphs. In MRI Lecture Notes in Math., Mahta Reseearch Instit., Allahabad volume 1,1979.

[4] C. Berge, Theory of Graphs and its Applications, Methuen, London, 1962.

[5] G. S. Domkee J. E. Dumbar, L. R. Markus, Gallai-type theorems and domination parameters, Discrete, Matimatics 167/168 (1997) 237-248.

[6] O. Ore, theory of graphs, Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38 (1962).

[7] C. Payan and N.H. Xuong, Domination-balanced graphs, J. Graph Theory, 6:23–32, 1982.

[8] J.F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch, and J. Roberts. The bondage number of a graph. Discrete Math., 86:47–57, 1990.

[9] F. Jaeger and C. Payan. Relations du type Nordhaus-Gaddum pour le nombred'absorption d'un graphe simple. C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A 274 (1972) 728-730.

[10] Cockayne and S.T. Hedetniemi, Towards a theory of domination in graphs, Networks 7 (1977), 247–261.

[11] R Laskar and K Peters. Vertexand edge domination parameters in graphs. Congr. Numer., 48:291–305, 1985.

[12] E. J. Cockayne, P. A. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi, and S. T. Hedetniemi, Roman domination in graphs, Discrete Mathematic 278 (2004) 11-22.

[13] E. W. Chamberss, B. Kinnersley, N. Prince and D. B. West, Extremal problems for Roman domination, SIAM J. Discreter. Math. 23 (2009) 1575-1586.

[14] Hossein Abdollahzadeh Ahangar, Mustapha Chellali and Seyed Mahmoud Sheikholeslami, On the Double Roman Domination in Graphs, Discrete Applied Mathematics 232, 1-7, 2017.

[15] Robert A. Beeler, Teresa W. Haynes and Stephen T. Hedetniemi, Double Roman domination, Discrete Applied Mathematics 211, 23-29, 2016.

[16] Nader Jafari Rad, Hadi Rahbani, Some progress on the double Roman domination in graphs, Discussiones Mathematicae Graph Theory 39 (2019) 41–53 doi:10.7151/dmgt.2069.