République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique
Université Yahia Fares de Médéa
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse et Modélisation Mathématique

par

BENNISSANE Rabia

POLYNÔMES ORTHOGONAUX ET OPÉRATERUR DE TOEPLITZ

Soutenu publiquement le 18/ 06/2018 devant le jury composé de

Président :	Hocine. AYADI	*M.A.A*	U.Y.F.M
Examinateur 1 :	Nouredine.MEKDACHE	*M.A.A*	U.Y.F.M
Examinateur 2 :	Mohamed.KRIMI	*M.A.A*	U.Y.F.M
Encadreur :	Kamel. TOUMACHE	*M.A.A*	U.Y.F.M

Année Universitaire : 2017-2018

Remerciements

Au terme de ce mémoire je tiens à remercier tout naturellement en premier lieu Dieu le tout puissant qui nous a donné la force, le courage et la patience de bien terminer ce travail. Ce travail a été réalise sous la direction de monsieur TOUMACHE Kamel qu'il trouve ainsi l'expression de ma profonde reconnaissance pour sa patience, et surtout pour sa confiance, ses remarques et ses conseils, sa disponibilité et sa bienveillance. Qu'il trouve ici le témoignage de ma profonde gratitude. Je voudrais également remercier les membres du jury pour avoir accepter d'évaluer ce travail et pour toutes leurs remarques et critiques, ainsi que l'ensemble des enseignants de l'université Dr. YAHIA FARES de Médéa, en particulier les enseignants du département de Mathématiques et Informatique. et également à toutes les personnes qui nous ont aidés de prés ou de loin.

Dédicace

Je dédie ce travail à mes très chers parents, dont le sacrifice, la tendresse, l'amour, la patience, le soutien, l'aide et les encouragementssont le secret de ma réussite Sans eux, je ne serais pas ce que je suis aujourd'hui.

Je dédie ce travail également à tout mes enseignants, du primaire au niveau supérieur, à tout mes amis

Resumé

Le but de ce mémoire est l'étude du lien entre l'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman et les Polynômes orthogonaux de Legendre, on espérons que ce lien nous ramène à l'etude de compacité de cette opérateur.

Table des matières

Introduction **3**

1 Définitions et préliminaires **5**

1.1 Opérateurs bornés et compacts sur un espace de Banach 5

1.1.1 Espace de Banach 5

1.1.2 Opérateur borné 7

1.1.3 Opérateur compact 8

1.2 Fonctions analytiques 10

1.2.1 Fonctions analytiques 10

1.2.2 Fonctions harmoniques 11

1.3 Espace de Bergman 13

1.3.1 Définitions et propriétés 14

1.3.2 Noyau de Bergman 15

1.3.3 Projection de Bergman 18

2 Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman **21**

2.1 Opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman 21

2.2 Transformée de Berezin 25

2.3 Opérateur de Toeplitz à symboles quasihomogènes ou radials 28

3 Polynômes ortogonaux **35**

3.1 Présentations des polynômes orthogonaux 35

3.1.1 Définitions 35

3.1.2 Séries génératrices 36

3.1.3 Calcul des séries génératrices 36
3.2 Propriétés des polynômes orthogonaux 37
3.2.1 Formule de Rodrigues 37
3.2.2 Formule de récurrence 38
3.2.3 Formule de Christoffel 39
3.2.4 Formule de christoffel-Darboux 40
3.2.5 Formule de quadrature 41
3.2.6 Exemples des polynômes orthogonaux classiques démonstrations des propriétés 42

4 Lien entre les polynômes orthogonaux et l'opérateur de Toeplitz à symbol radial 53

Introduction

L'étude des opèrateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman a commencé dans les annèes 1911 par le mathématicien allmand Otto Toeplitz (1881-1940), un créateur de la théorie spectrale des opérateurs linéaires. En ce jour des résultats sur le produit des opérateurs, la caractérisation des opérateurs bornés, les opérateurs compacts ainsi que la classe de Schatten (classe des opérateurs p-compact) ont étés obtenus, et des problèmes rest aussi ouverts.
Le sujet de ce mémoire est l'étude du lien entre l'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman et les Polynômes orthogonaux de Legendre.
Ce mémoire expose l'Article [6], [7], et [14], et concerne deux théorèmes Tauberiannes et leurs utilisations pour obtenir la caractérisation de compacité de l'opérateur de Toeplitz à symboles radials sur l'espace de Bergman en suit on présente le lien entre l'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman et les Polynômes orthogonaux de Legendre en vue d'étudie la compacité de l'opérateur de Toeplitz à symboles radials de signe quelconque.
On pose D le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$, soit φ une fonction bornée dans D, on appelle opérateur de Toeplitz de symbole φ sur l'espace de Bergman L^2_a des fonctions analytiques de carré intégrable par rapport à la mesure de probabilité

$$dA = \frac{1}{\pi}\, dxdy = \frac{1}{\pi}\, rdrd\theta$$

qui est un sous espace fermé de l'espace L^2 sur D, et on note T_φ l'opérateur définit par :

$$\begin{aligned} T_\varphi : L^2_a(D) &\to L^2_a(D) \\ f &\mapsto P(\varphi f). \end{aligned}$$

où P est la projection orthogonale de $L^2_a(D, dA)$ sur $L^2_a(D)$ et $f \in L^\infty(D)$.
Plusieurs questions naturelles se posent. Parmi elles, nous discuterons dans le cadre du mémoire la question suivante :

Sous quelles conditions l'opérateur de Toeplitz est compact ? (le chapitre 2 traite cette question).

Dans la définition de l'opérateur de Toeplitz il est claire que T_φ est borné sur $L^2_a(D)$ pour $\varphi \in L^\infty$, mais T_φ peut être borné sur $L^2_a(D)$ sans que son symbole ne soit borné, et il y a aucun relation entre la compacité de l'opérateurs de Toeplitz T_φ et la bornitude de son symbole φ.

Le mémoire est organisé de la manière suivante :

Dans le premièr chapitre nous rapplons les notions de bases, en donnant les définitions et les propriétés élémentaires des opérateurs bornés et compacts sur l'espace de Banach, et on définit les fonctions analytiques et harmoniques, et on définie par la suite la définition de l'espace de Bergman ainsi que ses propriétés élémentaires qu'ils sont utiles dans l'étude des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman, puis nous donnons une propriété importante de l'espace de Bergman qui est contenue dans le théorème 1.3.10 qui établit l'existence de le noyau reproduisant de l'espace de Bergman $L^2_a(D, dA)$ et défini par $K(z, w) = \dfrac{1}{(1 - \overline{w}z)^2}$. Comme l'espace de Bergman $L^2_a(D)$ est un sous-espace fermé de $L^2(D, dA)$ et donc la projection orthogonale dite aussi projection de Bergman de $L^2(D, dA)$ dans $L^2_a(D)$ est bien définie, et nous donnons son expression par $Pf(z) = \int_D K(z, w) f(w)\, dA(w)$.

Le chapitre 2 est consacré à la présentation de l'opérateur de Toeplitz et la transformation de Berezin, la notion de fonction Möbius sur le disque D qui nous permis de définir cette transformation, et aussi l'opérateur de Toeplitz à symboles quasihomogènes ou radials sont introduit, soit $f \in L^\infty(D)$ tel que pour tout $0 \leq r < 1$ et $0 \leq \theta < 2\pi$,

$$f(re^{i\theta}) = e^{im\theta} f(r)$$

Si $m = 0$ alors f est dite radiale ; pour $m \in \mathbb{Z}^*$, f est dite quasihomogène. En suite nous donnons les conditions que lopérateur de Toeplitz doit vérifier pour que se dernier soit compact dans le cas des opérateurs à symbole positif, deux théorèmes importants sont exposé.

Dans le chapitre 3 nous présentons les définitions et quelques propriétés des polynômes orthogonaux (en particulier le polynôme de Legendre).

En fin nous présentons le lien entre les polynômes orthogonaux de Legendre et l'opérateur de Toeplitz à symbole radial de signe quelconque en vue d'étudier la compacité de ce dernier.

Chapitre 1

Définitions et préliminaires

1.1 Opérateurs bornés et compacts sur un espace de Banach

1.1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1 *Un espace de Banach est un espace vectoriel (réel ou complexe) normé complet.*

Définition 1.1.2 *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou$\mathbb{C}$). On appelle produit scalaire sur H toute application notée $\langle ., . \rangle$, de $H \times H$ à valeur dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $x, y, z \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :*

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ *et si* $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ *est le conjugué dans* $\mathbb{C}$ *de* $\langle x, y \rangle$,
3. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, *et* $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$.

Dans la suite de cette section, on considérera le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 1.1.3 *On appelle espace hermitien H un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.*

Théoréme 1.1.1 *(Inégalité de cauchy-schwarz) Pour tout $x, y \in H$, on a*

$$| \langle x, y \rangle | \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Définition 1.1.4 *(L'espace de Hilbert) Un espace de Hilbert H est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui complet pour la norme*

$$\|x\|_H = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Example 1.1.1 *1. L'espace euclidien*

$$\mathbb{C}^k = \{x = (x_1, x_2..., x_k)\,; x_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, ..., k\}\,,$$

muni du produit scalaire

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{k} x_i \overline{y_i},$$

est un espace de Hilbert.

2. L'espace $L^2 = L^2(X, \mu)$ muni du produit scalaire usuel donné par

$$< f, g >= \int_X f\overline{g}\, d\mu,\ \ f, g \in L^2,$$

et la norme associée $\|.\|_2$ définie par

$$\|f\|_2 = \left(\int_X |f(z)|^2\, d\mu\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.1.5 *(L'espace dual $H^{'}$) L'ensemble des formes linéaires sur H est appelé dual topologique de H et noté $H^{'}$.*

$$H^{'} = \{f : H \to \mathbb{C} \text{ lineaires continue}\}$$

Si $l \in H^{'}$, on note pour $x \in H$, $l(x) = \langle l, x\rangle$.
L'espace $H^{'}$ muni de la norme

$$\|l\|_{H'} = \sup_{x\neq 0} \frac{|l(x)|}{\|x\|_H}.$$

Théoréme 1.1.2 *[3](Théorème de représentation de Riesz-Frèchet) Etant donnée $l \in H^{'}$ il existe $x_0 \in H$ unique tel que :*

$$l(y) = \langle x_0, y\rangle\,, \forall y \in H.$$

De plus $\|x_0\|_H = \|l\|_{H'}$.

Définition 1.1.6 *(Base Hilbertienne) On appelle base Hilbertienne une suite* (e_n) *d'éléments de* H *tels que*

1. $\|e_n\| = 1\ \forall n,\ \langle e_n, e_m\rangle = 0\ \forall m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n.$
2. *L'espace vectoriel engendré par les* (e_n) *est dense dans* H.

1.1.2 Opérateur borné

On désigne par $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ des espaces de Hilbert sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou*$\mathbb{C}$.

Définition 1.1.7 *(Opérateur linéaire) Un opérateur* T *de* E *vers* F *est dit linéaire si on a :*

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y), \forall x, y \in E\ eta, a, b \in \mathbb{K}.$$

Définition 1.1.8 *Un opérateur* T *de* E *vers* F *est dit borné s'il existe un réel positif* M *tel que*

$$\|T(x)\|_F \leq M \|x\|_E, \forall x \in E.$$

Dans ce cas, la norme de l'opérateur T est le plus petit M qui assure l'inégalité précédent, et on écrit aussi

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{||x||_E = 1} ||T(x)||_F.$$

Proposition 1.1.1 *Un opérateur linéaire* $T : E \to F$ *vérifie les propriétés équivalentes suivantes :*

1. T *est continu sur* E,
2. T *est continu en* 0_E,
3. T *est borné.*

Preuve. Il suffit de montrer que (2) entrène (3) et (3) entrène (1),
Supposons T continu en 0_E. On pose $D = \{z \in \mathbb{K} \mid |z| < 1\}$. Comme T est continu en 0_E et $T(0_E) = 0$, $T^{-1}(D)$ est un voisinage de 0_E dans $E \times F$. Donc, il existe $r > 0$ tel que

$$\{(x, y) \in E \times F \mid \|x\| \leq r, \|y\| \leq r\} \subset T^{-1}(D)$$

Alors, pour tous $x, y \in E \setminus \{0\}$, on a

$$T\left(\frac{rx}{\|x\|}, \frac{ry}{\|y\|}\right) \in D,$$

autrement dit

$$\left|\left(\frac{rx}{\|x\|}, \frac{ry}{\|y\|}\right)\right| \leq 1,$$

d'où

$$|T(x,y)| \leq \frac{1}{r^2}\|x\|\|y\|,$$

qui est encore vrai si x ou y est nul.
Supposons maintenant qu'il existe $k \geq 0$ telle que, pour tous $x, y \in E$, on a

$$|T(x,y)| \leq k\|x\|\|y\|.$$

Soit $(a,b) \in E \times F$. Alors, pour tout $(x,y) \in E \times F$, on obtient

$$\begin{aligned} |T(x,y) - T(a,b)| &= |T(x-a,y) + T(a,b-y)| \\ &\leq k\|x-a\|\|y\| + k\|a\|\|b-y\| \xrightarrow[(x,y)\longrightarrow(a,b)]{} 0, \end{aligned}$$

ce qui montre la continuité de T en (a,b).

1.1.3 Opérateur compact

On désigne par $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ des espaces de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou*$\mathbb{C}$. De plus, pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(X, \|.\|_X)$, on désigne par B_X la boule unité fermée de X, i. e.

$$B_X = \{x \in X \mid \|x\|_X \leq 1\}.$$

Notation 1.1.1 *On note par $L(E,F)$ l'espace de Banach sur $\mathbb{K}$ des opérateurs de E dans F, tandis que $\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'espace de Banach sur $\mathbb{K}$ des opérateurs bornés de E dans F.*

Définition 1.1.9 *On dit que T est un opérateur compact de E dans F si $T \in L(E,F)$ et $T(B_E)$ est relativement compact dans F. L'ensemble des opérateurs compacts de E dans F est noté $\mathcal{K}(E,F)$. Lorsque $E = F$, on note simplement $\mathcal{K}(E,F) = \mathcal{K}(E)$.*

On rappelle que si (X, d) est un espace métrique et Y un sous-ensemble de X est dit relativement compact si son adhérence dans X est compacte.

Proposition 1.1.2 *[9] (Caractérisation des opérateurs compacts) Si $T \in L(E, F)$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$T \in \mathcal{K}(E, F)$,*
2. *Pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge dans F.*

Lemme 1.1.1 *(Théorème de Riesz) Soit X un espace vectoriel normé. Alors, la boule unité fermée de X est compacte si et seulement si X est de dimension finie.*

Proposition 1.1.3 *Soient $T \in \mathcal{L}(E, F)$ et $S \in \mathcal{L}(F, G)$. Si S ou T est compact alors ST est compact.*

Preuve. Si $T \in \mathcal{K}(E, F)$. Alors, pour toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(Tx_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $y \in F$. Puisque S est continu, $(S(Tx_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $Sy \in G$. Donc $ST \in \mathcal{K}(E, G)$.
Si $S \in \mathcal{K}(F, G)$, Alors, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E bornée par une constante M, la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée dans F. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|Tx_n\|_F \leq \|T\|\|x_n\|_E \leq M\|T\|.$$

Comme $S \in \mathcal{K}(F, G)$, la suite $(S(Tx_n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite $(S(Tx_{\varphi(n)}))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $z \in G$. Donc $ST \in \mathcal{K}(E, G)$.

Définition 1.1.10 *Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que T est un opérateur de rang fini si $Im(T)$ est de dimension finie.*

Proposition 1.1.4 *Tout opérateur borné de rang fini est compact.*

Preuve. Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un opérateur de rang fini. L'opérateur T est continu donc, pour tout $x \in B_E$,

$$\|T_x\| \leq \|T\|.$$

Alors $T(B_E)$ est borné dans F et, par conséquent, $\overline{T(B_E)}$ aussi. De plus, $Im(T)$ est fermé car c'est un espace vectoriel de dimension finie, d'où

$$\overline{T(B_E)} \subset \overline{Im(T)} = Im(T).$$

Finalement, $\overline{T(B_E)}$ est un fermé borné de l'espace vectoriel de dimension finie $Im(T)$, c'est donc un compact de $Im(T)$, d'où $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

L'espace $\mathcal{K}(E,F)$ est fermé et tout opérateur borné de rang fini est compact. On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 1.1.1 *Toute limite dans $\mathcal{L}(E,F)$ d'opérateurs de rang fini est un opérateur compact.*

La réciproque est fausse en général mais si F est un espace de Hilbert, on a le résultat suivant :

Théoréme 1.1.3 *[9] Soient $(H,(.,.))$ un espace de Hilbert sur $\mathbb{K}$ et $T \in \mathcal{K}(E,H)$. Alors, il existe une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{L}(E,H)$, d'opérateurs de rang fini, qui converge vers T dans $\mathcal{L}(E,H)$.*

1.2 Fonctions analytiques

1.2.1 Fonctions analytiques

Soient $\mathbb{C}$ le plan complexe et $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ le disque unité ouvert dans $\mathbb{C}$.

Définition 1.2.11 (fonction analytique) *Soient z_0 dans $\mathbb{C}$, U un voisinage de z_0 et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$. On dit que f est analytique en z_0 si f est développable en série entière au voisiange de z_0, i. e. s'il existe $r > 0$ et une série entière $(a_n z^n)_n \geq 0$ telle que :*

$$\forall z \in \overline{B}(z_0, r), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Définition 1.2.12 *f est analytique sur U si et seulement si f est analytique en tout point de U.*

Notation 1.2.2 *On note $\mathcal{A}(D)$ l'espace vectoriel des fonctions analytiques sur le disque unité D.*

$\mathcal{A}(D)$ est muni la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Dire que la suite $(f_n)_n$ converge vers f signifie que, pour tout compact K de D, et tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que si $n \geq N$ alors

$$|f_n(z) - f(z)| \leq \varepsilon \ (z \in K).$$

Soit K_n une suite de compacts croissante par l'inclusion de D, c'est-à-dire que $K_n \subset K_{n+1}$ et que tout compact de D est contenu l'un des K_n, pour f et g dans $\mathcal{A}(D)$.

$$M_n(f) = \sup_{z \in K_n} |f(z)| \ , \ \delta(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \inf(M_n(f), 1) \ , \ d(f,g) = \delta(f-g).$$

Alors d est une distance sur $\mathcal{A}(D)$ et la topologie définie par cette distance est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.
Nous rappelons le théorème suivant de Weierstrass.

Théoréme 1.2.4 *[5] Si $(f_k)_k$ est une suite de fonctions analytiques dans D qui converge uniformément sur tout compact, sa limite f est analytique. de plus $\dfrac{\partial f_k}{\partial z}$ converge vers $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ uniformément sur tout compact.*

Corollaire 1.2.2 *[8]*

1. *$\mathcal{A}(D)$ est fermé dans $\mathcal{C}(D)$, oú $\mathcal{C}(D)$ est l'espace des fonctions continues muni de la norme de la convergence uniforme,*
2. *$\mathcal{A}(D)$ est un espace complet.*

Théoréme 1.2.5 *(Principe du Maximum) Soit Ω un ouvert connexe et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction analytique. Si f admet un maximum relatif sur Ω, alors f est constante sur Ω.*

1.2.2 Fonctions harmoniques

Définition 1.2.13 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$. On dit que f est harmonique sur Ω si f est de classe C^2 sur Ω et $\Delta f \equiv 0$ sur Ω, où Δf est le Laplacien de f défini par $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.*

De plus si la fonction f s'écrit sous la forme $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$, où $P(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont deux fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, f est dite harmonique si les conditions suivantes sont satisfaisantes :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$$

et

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Les fonctions analytiques sont intimement liées aux fonctions harmoniques. Ainsi :

Théoréme 1.2.6 *[4] Toute fonction harmonique sur un ouvert Ω est analytique sur Ω (c'est une conséquence des équations de Cauchy-Riemann).*

De plus, Une fonction f harmonique à valeurs réelles est localement la partie réelle d'une fonction analytique : pour tout a de Ω et tout disque $D(a,r)$ contenu dans Ω, il existe g analytique dans $D(a,r)$ telle que $f = Re(g)$ dans ce disque.

Remarque 1.2.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est harmonique si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont harmoniques sur Ω.*

La remarque ci-dessus est une conséquence immédiate du fait que :
$Re(\Delta f) = \Delta(Re(f))$ et $Im(\Delta f) = \Delta(Im(f))$.

Théoréme 1.2.7 *[4] Soit Ω un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Si f est une fonction harmonique sur Ω alors il existe une fonction φ analytique sur Ω telle que $Re(\varphi) = f$.*

Proposition 1.2.5 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est harmonique sur Ω,*
2. *Pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ et φ analytique sur $D(z_0,r)$ tels que $f = Re(\varphi)$ sur $D(z_0,r)$.*

Les fonctions harmoniques sur un disque ouvert $D(a,r)$ ($a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$), continues sur le disque fermé $\overline{D(a,r)}$ et à valeurs complexes.

Corollaire 1.2.3 *Soit f une fonction continue sur $\overline{D(a,r)}$ ($a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$), harmonique sur $D(a,r)$ et à valeurs complexes. Alors on a la formule de la valeur moyenne pour le cercle $\mathcal{C}(a,r)$:*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, dt.$$

et aussi pour le disque $D(a,r)$:

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\overline{D(a,r)}} f(x+iy)\, dxdy.$$

1.3 Espace de Bergman

Soit $dA(z)$ la mesure de Lebesgue normalisée sur D. Dans les coordonnées rectangulaires et polaires, On a

$$dA(z) = \frac{1}{\pi}\, dxdy = \frac{1}{\pi} r\, drd\theta$$

et

$$\int_D dA(z) = 1.$$

Théoréme 1.3.8 *(de Riesz-Fisher) Pour tout $p \in [1, +\infty]$, L^p est un espace de Banach.*

D'aprés le théorème de Riesz-Fisher, l'espace $L^2(D)$ muni de produit scalaire usuel donné par

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(z)\overline{g(z)}\, dA(z), \ \textit{pour tous} f, g \in L^2(D, dA).$$

est donc un espace de Hilbert.

Propriétés 1.3.1 *1. L'inégalité de Minkowski :*

$$\|u + v\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} + \|v\|_{L^2},$$

2. Si $u \in L^2$ et $v \in L^2$ alors $uv \in L^1$ car l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée :

$$\int_D |uv| \leq \left(\int_D |u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_D |v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On le note aussi :

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}.$$

1.3.1 Définitions et propriétés

Définition 1.3.14 *On définit l'espace de Bergman $L^2_a(D)$ comme étant l'ensemble des fonctions analytiques sur D qui sont de carré intégrable par rapport à la mesure $dA(z)$.*

$$L^2_a(D) = \mathcal{A}(D) \cap L^2(D).$$

On écrit $L^2_a(D) = L^2_a$ simplement.

On considère sur L^2_a la norme $\|.\|_2$ associée au produit scalaire

$$< f, g >= \int_D f(z)\overline{g(z)}\, dA(z)\ ,\ \textit{pour tous}\ f, g \in L^2_a.$$

Lemme 1.3.2 *Soit $\mathcal{C}(D)$ l'espace des fonctions continues sur D. Pour tout compact K de D, l'application restriction définie par :*

$$\begin{array}{rcl} (L^2_a(D), \|.\|_2) & \to & (\mathcal{C}(D), \sup\limits_{z\in K} |.|) \\ f & \to & f_{/K} \end{array}$$

est continue.

Lemme 1.3.3 *Soit $f \in L^2_a$ alors pour tout $z \in D$. On a*

$$f(z) \leq \frac{1}{(1-|z|)^2}\|f\|_2.$$

Preuve. Pour $z \in D$. On pose $r_z = 1 - |z|$, en utilisant la propriété de la moyenne. On a

$$f(z) = \frac{1}{{r_z}^2} \int_{|z-w|\leq r_z} f(w)\, dA(w)$$

D'où

$$|f(z)| \leq \frac{1}{{r_z}^2} \int_{|z-w|\leq r_z} f(w)\, dA(w) \leq \frac{\|f\|_2}{{r_z}^2} = \frac{\|f\|_2}{(1-|z|)^2}$$

Proposition 1.3.6 *L^2_a est un sous espace fermé de $L^2(D, dA)$.*

Preuve. Soit $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|_2$ dans $L^2_a(D)$. Donc, la suite $(f_n)_n$ est aussi de Cauchy pour la topologie de $\mathcal{A}(D)$. Soit K un compact de D, alors par le lemme précédente, on a

$$\sup_{z\in K} |f_n(z) - f_m(z)| \leq \sup_{z\in K} \frac{\|f_n(z) - f_m\|_2}{(1-|z|)^2}$$

Comme $\mathcal{A}(D)$ est complet pour la convergence uniforme, Il existe donc f analytique sur D, telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| = 0, \forall K \text{ compact de } D.$$

De même $L^2(D, dA)$ est complet comme espace d'Hilbert, Donc il existe une fonction $g \in L^2(D, dA)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - g\|_2 = 0.$$

ainsi il existe une sous-suite de $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge presque par tout vers g. Finalemet par la première inégalité $f = g$ presque partout et donc $f \in L^2_a(D)$. On conclut que l'espace L^2_a est un espace de Hilbert.

1.3.2 Noyau de Bergman

Théoréme 1.3.9 *[2] Soit H un espace de Hilbert de fonctions définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire usuel et de la norme associée. On dit qu'une application K de $D \times D$ est un noyau reproduisant pour H si*

1. *Pour tous $z, w \in D$, $K_z(w) = K(z, w)$ est une fonction de w qui appartient à H.*
2. *Pour tout $z \in D$ et tout $f \in H$*

$$f(z) = \langle f, K_z \rangle$$

En particulier pour tous $z, w \in D$,

$$K_z(w) = \langle K_z, K_w \rangle \ et \|K_z\| = \langle K_z, K_z \rangle^{\frac{1}{2}} = K(z, z)^{\frac{1}{2}}.$$

Théoréme 1.3.10 *[2] Soit H un espace de Hilbert de fonctions sur D. Alors H admet un noyau reproduisant si et seulement si l'évaluation ponctuelle $f \longmapsto f(z)$ est continue sur H pour tout $z \in D$.*

Preuve. Si H admet un noyau reproduisant K alors

$$|f(z)| = |\langle f, K_z \rangle| \leq \|f\| \times \|K_z\|.$$

Réciproquement si $f \longmapsto f(z)$ est linéaire continue sur H pour tout $z \in D$ alors par le théorème de représentation de Riesz, pour chaque $z \in D$, il existe $g_z \in H$ tel que

$$f(z) = \langle f, g_z \rangle$$

et g_z vérifie (1) et (2) du théorème précédent ce qui conclu a preuve.

Proposition 1.3.7 *Soit H un espace de Hilbert de fonctions analytiques sur D admettant un noyau reproduisant K. Alors*

1. *K est unique,*
2. *Pour tout $z, w \in D$, $K(z,w) = \overline{K(w,z)}$*
3. *Soit $z \in D$, $K(z,z) = 0 \Longleftrightarrow f(z) = 0$ pour tout $f \in H$.*
4. *Pour tous $z, w \in D$, $|K(z,w)| \leq K(z,z)^{\frac{1}{2}} \times K(w,w)^{\frac{1}{2}}$. Pour tout $z \in D$, l'application $K_z = K(z,.)$ est borné sur tout compact de D et K est bornée sur tout compact de $D \times D$.*

Preuve.

1. Si K et K' sont deux noyaux reproduisants pour H alors

$$\begin{aligned} \|K_z - K'_z\|^2 &= \langle K_z - K'_z, K_z - K'_z \rangle \\ &= \langle K_z - K'_z, K_z \rangle - \langle K_z - K'_z, K'_z \rangle \\ &= (K_z - K'_z)(z) - (K_z - K'_z)(z) = 0. \end{aligned}$$

   Ainsi $\|K_z - K'_z\| = 0$ et $K_z = K'_z$ pour tout $z \in D$, donc $K = K'$.

2. $K(z,w) = \langle K_z, K_w \rangle = \overline{\langle K_w, K_z \rangle} = \overline{K(w,z)}$,
3. $\Longleftarrow$ est évident car $K_z \in H$.
   $\Longrightarrow$ on remarque que $0 = K(z,z) = \langle K_z, K_z \rangle = \|K_z\|^2$ donc $K_z = 0$.
   ainsi $|f(z)| = |\langle f, K_z \rangle| = 0$ *pour tout* $z \in D$,
4. L'inégalité est immédiate par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Comme $H \subset \mathcal{A}(D)$, K_z est analytique sur D donc borné sur les compacts de D. Il est alors clair que K est borné sur les compacts de $D \times D$.

Proposition 1.3.8 *Soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne de H alors pour tout $(z,w)\in D\times D$*

$$K_z(w)=\sum_{n\geq 0} e_n(w)\overline{e_n(z)}$$

où cette série converge absolument et uniformément sur tout compact de $D\times D$.

Lemme 1.3.4 *Les fonctions $e_n(z)=\sqrt{n+1}z^n$ $(n\in\mathbb{N})$ constituent une base orthonormale de L^2_a.*

Preuve. Pour $n,m\in\mathbb{N}$ et $z\in D$, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle e_n,e_m\rangle &= \int_D \left(\sqrt{n+1}z^n\right)\overline{\left(\sqrt{m+1}z^m\right)}\,dA\\
&= \sqrt{n+1}\sqrt{m+1}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^n e^{in\theta}r^m e^{-im\theta}\frac{1}{\pi}r\,dr d\theta\\
&= \sqrt{\frac{(n+1)(m+1)}{\pi^2}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^{n+m+1}e^{i(n-m)\theta}\,dr d\theta\\
&= \sqrt{\frac{(n+1)(m+1)}{\pi^2}}\frac{1}{n+m+2}\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\,d\theta\\
&= \sqrt{\frac{(m+1)^2}{\pi^2}}\frac{2\pi}{2m+2}\,\delta_{n,m}\\
&= \delta_{n,m}.
\end{aligned}$$

où

$$\delta_{n,m}=\begin{cases}0 & \text{si } n\neq m\\ 1 & \text{si } n=m\end{cases}$$

Définition 1.3.15 *L'application évaluation de L^2_a dans $\mathbb{C}$. qui à toute fonction f lui associe sa valeur au point z, est continue pour tout $z\in D$, d'aprés le théorème 1.3.10, $L^2_a(D)$ admet un noyau reproduisant K également appelé noyau de Bergman. D'aprés le lemme 1.3.4 La famille $e_n(z)$ est une base hilbertienne orthonormée de L^2_a ainsi par la proposition 1.3.8 on a pour tout $z,w\in D$,*

$$\begin{aligned}
K_z(w) &= \sum_{n\geq 0}(n+1)\overline{z}^n w^n\\
&= \frac{1}{(1-\overline{z}w)^2}
\end{aligned}$$

Le noyau normalisé est alors

$$k_z(w) = \frac{K_z(w)}{\|K_z\|} = \frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}, \forall z, w \in D.$$

Ce noyau reproduisant a une propriété qui nous sera utile par la suite.

Lemme 1.3.5 *k_z converge faiblement vers 0 quand z tend vers le bord du disque.*

Preuve. Soit p un polynôme en z sur D, on a

$$\langle k_z, p\rangle = (1-|z|^2)\langle p, K_z\rangle = (1-|z|^2)p(z).$$

Cette expression tend clairement vers 0 quand $|z|$ tend vers 1. Enfin, comme l'ensemble des polynômes est dense dans L^2_a, k_z tend faiblement vers 0 quand z tend vers le bord de D.

Corollaire 1.3.4

$$\int_D \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4}\, dA(w) = 1 \text{ pour chaque } z \in D.$$

Preuve. pour tout $z \in D$ on a

$$\int_D \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-z\overline{w}|^4}\, dA(w) = (1-|z|^2)^2 \langle K_z, K_z\rangle = (1-|z|^2)^2 K(z,z) = 1.$$

1.3.3 Projection de Bergman

Rappelons que l'espace de Bergman $L^2_a(D)$ est un sous-espace fermé de $L^2(D, dA)$ et donc la projection orthogonale, dite aussi projection de Bergman, de $L^2(D, dA)$ dans $L^2_a(D)$ est bien définie. Notons par P cette projection.

Proposition 1.3.9 *Pour toute fonction $f \in L^2(D, dA)$ et tout $z \in D$,*

$$Pf(z) = \int_D K(z,w) f(w)\, dA(w).$$

Preuve. Par la propriété reproduisant de $K(z,w) = \overline{K_z(w)}$, on a

$$\begin{aligned} Pf(z) &= \langle Pf, K_z\rangle = \langle f, PK_z\rangle = \langle f, K_z\rangle \\ &= \int_D f(w)\overline{K_z(w)}\, dA(w) \\ &= \int_D K(z,w) f(w)\, dA(w). \end{aligned}$$

Remarque 1.3.2 *La projection de Bergman satisfait les propriétés suivantes :*

1. *P est une projection bornée de $L^2(D, dA)$ sur $L^2_a(D, dA)$,*
2. *$P^* = P$, et $P^2 = P$,*
3. *$\|P\| = 1$, où $\|.\|$ est la norme de l'opérateur.*

Chapitre 2

Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman

2.1 Opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman

Définition 2.1.1 *Soit φ une fonction bornée sur D, on définit l'opérateur de Toeplitz à symbole φ par*

$$\begin{aligned} T_\varphi : L^2_a(D) &\to L^2_a(D) \\ f &\mapsto P(\varphi f). \end{aligned}$$

En utilisant la représentation intégrale de P, nous pouvons voir T_φ comme un opérateur intégrale donné par :

$$T_\varphi f(z) = P(\varphi f)(z) = \langle \varphi f, K_z \rangle = \int_D \frac{\varphi(w) f(w)}{(1-\overline{z}w)^2}\, dA(w), \forall z \in D.$$

Proposition 2.1.1 *Soit $\varphi \in L^\infty(D)$*

1. $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$,
2. $T_1 = Id$ *tel que* Id *est l'identité de* $L^2_a(D)$,
3. $T_{\overline{\varphi}}$ *est l'adjoint de* T_φ,
4. *Pour tous* $\lambda \in \mathbb{C}$, $f, g \in L^\infty(D)$, $T_{\lambda f+g} = \lambda T_f + T_g$ *(i. e. l'opérateur de Toeplitz sur* L^2_a *est linéairement dépondant de son symbole),*
5. $T_\varphi = 0$ *si et seulement si* $\varphi = 0$.

Preuve. (1) on a pour $f \in L^2_a(D)$

$$\|T_\varphi(f)\| = \|P(\varphi f)\| \leq \|P\| \, \|\varphi f\| \leq \|\varphi\|_\infty \, \|f\|$$

car P est de norme 1. Il s'ensuit que $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$ et (1) est vérifié.

(2), (3) et (4) découlent immédiatement de la définition de l'opérateur de Toeplitz.

(5) si T_φ est nul alors pour tous m et n dans $\mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \langle T_\varphi z^n, z^m \rangle &= \langle P(\varphi z^n), z^m \rangle \\ &= \langle \varphi z^n, z^m \rangle \\ &= \langle \varphi, \overline{z}^n z^m \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

mais la famille $\overline{z}^n z^m$ est dense dans $L^2_a(D, dA)$ donc φ est nulle.

Remarque 2.1.1 *1. On peut aussi définir cet opérateur de Toeplitz sur l'espace de Bergman à partir des symboles non bornés sur D,*

2. L'opérateur de Toeplitz T_ϕ sur $L^2_a(D)$ est borné si le symbole ϕ est borné, mais T_ϕ peut être borné sur $L^2_a(D)$ sans que son symbole ne soit borné.

Dans la suite, nous allons présenter la notion de fonction Möbius sur le disque D.

Définition 2.1.2 *Une fonction Möbius sur le disque D est une fonction de la forme*

$$\varphi_z(w) = \frac{z - w}{1 - \overline{z}w}, \; w \in D$$

qui transforme z à 0 et 0 à z ($z \in D$).

Proposition 2.1.2 *Une fonction Möbius φ_z a les propritéés suivantes :*

1. $\varphi_z^{-1} = \varphi_z$,
2. *Le déterminant réel du Jacobienne de φ_z en w est*

$$|J_{\varphi_z}(w)| = |\grave{\varphi}_z(w)|^2 = \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - \overline{z}w|^4},$$

3. $1-|\varphi_z(w)|^2=\dfrac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2}$.

Preuve. (1) On trouve facilement que

$$\begin{aligned}(\varphi_z\circ\varphi_z)(w) &= \frac{z-\varphi_z(w)}{1-\overline{z}\varphi_z(w)}\\ &= \frac{z-\dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}}{1-\overline{z}\dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}}\\ &= w.\end{aligned}$$

(2) On a

$$\begin{aligned}\grave{\varphi}_z(w) &= \frac{-(1-\overline{z}w)+\overline{z}(z-w)}{(1-\overline{z}w)^2}\\ &= \frac{-1+\overline{z}w+|z|^2-\overline{z}w}{(1-\overline{z}w)^2}\\ &= -\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2},\end{aligned}$$

et donc

$$|\grave{\varphi}_z(w)|^2=\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}.$$

De plus si on pose $\varphi_z(w)=P(x,y)+iQ(x,y)$ on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_z}{\partial y}(w) &= \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)+i\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)=-i\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2},\\ \frac{\partial\varphi_z}{\partial x}(w) &= \frac{\partial P}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=-\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}.\end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial\varphi_z}{\partial x}(w)=i\frac{\partial\varphi_z}{\partial y}(w)$$

les condition de Cauchy-Rieman sont satisfaisantes, et alors la matrice réelle Jacobienne de φ_z donnée par :

$$J_{\varphi_z}(w)=\begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y}\\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial x} & -\frac{\partial Q}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial x}\end{pmatrix},$$

et

$$\begin{aligned}
|J_{\varphi_z}(w)| &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\overline{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x}\right)} \\
&= \left(-\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}\right)\overline{\left(-\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}\right)} \\
&= \left|\frac{1-|z|^2}{(1-\overline{z}w)^2}\right|^2 = \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}.
\end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned}
1 - \frac{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2} &= \frac{|1-\overline{z}w|^2 - (1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2} \\
&= \frac{(1-\overline{z}w)(1-z\overline{w}) - (1-|z|^2)(1-|w|^2)}{|1-\overline{z}w|^2} \\
&= \frac{|w|^2 + |z|^2 - \overline{z}w - z\overline{w}}{|1-\overline{z}w|^2} \\
&= |\varphi_z(w)|^2.
\end{aligned}$$

On rappelle qu'un automorphisme de D est un application bijective bi-analytique de D dans D. Tout automorphisme φ de D peut s'écrire comme $\varphi(w) = \varphi_z(\epsilon w)$, où $z = \varphi(0) \in D$, $|\epsilon| = 1$.

Notation 2.1.1 *L'ensemble des automorphisme du disque D appelé aussi groupe de Möbius, est noté $Aut(D)$.*

Corollaire 2.1.1 *Si $\varphi \in Aut(D)$, alors*

$$K(z,w) = \varphi'(z)K(\varphi(z),\varphi(w))\overline{\varphi'(w)}$$

pour toutes $z, w \in D$, où

$$\frac{1}{(1-z\overline{w})^2} = \frac{\varphi'(z)\overline{\varphi'(w)}}{(1-\varphi(z)\overline{\varphi(w)})^2}$$

pour toutes $z, w \in D$.

Preuve. Soit $\{e_n : n \geq 0\}$ est une base orthonormale de L^2_a. On pose

$$\sigma_n(z) = e_n(\varphi(z))\varphi'(z),\ n \geq 0,$$

Ainsi

$$\begin{aligned} K(z,w) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sigma_n(z)\overline{\sigma_n(w)} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(\varphi(z))\overline{e_n(\varphi(w))}\varphi'(z)\overline{\varphi'(w)} \\ &= \varphi'(z)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e_n(\varphi(z))\overline{e_n(\varphi(w))}\right)\overline{\varphi'(w)} \\ &= \varphi'(z)K(\varphi(z),\varphi(w))\overline{\varphi'(w)}. \end{aligned}$$

La proposition suivante qui donne la formule de l'images de noyau reproduisant k_z ($a \in D$) par un opérateur T_f.

Proposition 2.1.3 *[12] Soit $f \in L^\infty(D, dA)$. Pour tout $z \in D$ alors*

$$T_f(k_z) = (P(f \circ \varphi_z) \circ \varphi_z)k_z$$

Dans la suite, nous allons présenter quelques situations où nous pouvons affirmer que l'opérateur de Toeplitz est borné. Pour cela il nous faut introduire tout d'abord la transformation de Berezin qui joue un réle crucial dans la théorie des opérateurs de Toeplitz.

2.2 Transformée de Berezin

Définition 2.2.3 *Soit $f \in L^1(D)$, la transformée de Berezin $\tilde{f}$ de f est donnée par*

$$\tilde{f}(z) = \langle fk_z, k_z\rangle = \int_D f(w)\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}\, dA(w), \forall z \in D.$$

De plus, Soient $f \in L^2_a(D)$ et $\varphi_z(w) \in Aut(D)$, pour $z, w \in D$. Donc f vérifie la propriété de la moyenne :

$$f(0) = \int_D f(w)\, dA(w)$$

Donc, On a

$$z = \varphi_z(0)$$

On obtient

$$f(z) = f(\varphi_z(0)) = \int_D f(\varphi_z(w))\, dA(w)$$

Le changement de variable $y = \varphi_z(w)$ donne

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_D f(y)|J_{\varphi_z}(y)|\, dA(y) \\ &= \int_D f(y)\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}y|^4}\, dA(y). \end{aligned}$$

En fait, on peut définir plus généralement la transformée de Berezin d'un opérateur T borné sur un espace de Hilbert de fonctions sur D, possèdant un noyau reproduisant normalisé k_z, la transformée de Berezin (symbole de Berezin) de T est la fonction $\tilde{T}$ de D dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\tilde{T}(z) = \langle Tk_z, k_z\rangle\,, \forall\ z \in D.$$

On a alors pour tout $z \in D$,

$$\tilde{T}_f(z) = \langle T_f k_z, k_z\rangle = \langle fk_z, k_z\rangle = \tilde{f}(z),$$

ainsi la transformée de Berezin de f et de T_f coïncident.

Proposition 2.2.4 *Soit $\varphi \in L^\infty(D, dA)$*

$$\limsup_{z\to\partial D} |\widetilde{\varphi}(z)| \leq \limsup_{z\to\partial D} \|T_\varphi k_z\|_2 \leq \|T_\varphi\|_e \leq \|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty .$$

Avec $\|T_\varphi\|_e = \inf_{K\in D} \|T_\varphi - K\|$.

Preuve. $\|T_\varphi\|_e \leq \|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$ est claire, il reste donc à montrer les deux premières inégalités. Soit $z \in D$ alors

$$|\widetilde{\varphi}(z)| = |\,\langle \varphi k_z, k_z\rangle\,| = |\langle T_\varphi k_z, k_z\rangle| \leq \|T_\varphi k_z\|_2 .$$

Soit K un opérateur compact sur $L^2_a(D)$ alors Kk_z converge vers 0 quand $|z|$ tend vers 1 car k_z tend faiblement vers 0. Ainsi pour tout K compact on a

$$\limsup_{z\to\partial D} \|T_\varphi k_z\|_2 = \limsup_{z\to\partial D} \|(T_\varphi - K)k_z\|_2 \leq \|T_\varphi - K\| .$$

Donc

$$\limsup_{z\to\partial D} \|T_\varphi k_z\|_2 \leq \inf_{K\in D} \|T_\varphi - K\| = \|T_\varphi\|_e .$$

Maintenant on va prouver que la transformation de Berezin est Möbius invariante effectivement. On a :

Proposition 2.2.5 *Pour tout $\varphi \in Aut(D)$ et toute fonction $f \in L^1(D, dA)$*

$$\widetilde{f \circ \varphi} = \tilde{f} \circ \varphi.$$

Preuve. Soit $\sigma \in Aut(D)$ et $z \in D$. On pose

$$\varphi_z(w) = \frac{z - w}{1 - \overline{z}w} \ \textit{et} \ \ \textit{donc} \ \ \varphi_{\sigma(z)}(w) = \frac{\sigma(z) - w}{1 - \overline{\sigma(z)}w}.$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z(0) &= \varphi_{\sigma(z)}(\sigma(z)) = 0 \\ \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z &\in \mathcal{A}(D) \\ \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z(D) &= D, \ \textit{et} \ \ \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z \ \textit{est} \ \ \textit{bijection.} \end{aligned}$$

D'où d'aprés le lemme de Schwarz, il existe un constante complexe c de module 1 telle que pour tout $w \in D$

$$\varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z(w) = cw$$

Pour $f \in L^1(D, dA)$, on a

$$\widetilde{f \circ \sigma} = \int_D (f \circ \sigma)(y) \frac{(1 - |z|^2)^2}{|1 - \overline{z}y|^4} \, dA(y).$$

En effectuant le changement de variable $y = \varphi_z(w)$, on obtient

$$\begin{aligned} \widetilde{f \circ \sigma}(z) &= \int_D (f \circ \sigma \circ \varphi_z)(w) \, dA(w) \\ &= \int_D (f \circ \varphi_{\sigma(z)} \circ \varphi_{\sigma(z)} \circ \sigma \circ \varphi_z)(w) \, dA(w) \\ &= \int_D (f \circ \varphi_{\sigma(z)})(cw) \, dA(w) \\ &= \int_D (f \circ \varphi_{\sigma(z)})(u) \, dA(u) \\ &= \tilde{f}(\sigma(z)) \\ &= \tilde{f} \circ \sigma(z). \end{aligned}$$

Nous allons énoncer une propriété fondamentale qui lie les fonctions harmoniques et la transformée de Berezin.

Lemme 2.2.1 *Si $f \in L^1(D, dA)$ est harmonique, alors*

$$\widetilde{f} = f.$$

Preuve. Si $f \in L^1(D, dA)$ est une fonction harmonique sur D alors $f \circ \varphi$ est aussi harmonique pour tout $\varphi \in Aut(D)$. D'aprés la propriété de la valeur moyenne, pour tout $\varphi \in Aut(D)$ tel que $\varphi(0) = z$, on a

$$f(z) = f \circ \varphi_z(0) = \int_D f \circ \varphi_z(w)\, dA(w) = \tilde{f}(z).$$

2.3 Opérateur de Toeplitz à symboles quasihomogènes ou radials

Définition 2.3.4 *$F \in L^1$ est dite radiale si pour tout $z \in D$*

$$F(z) = F(|z|).$$

Définition 2.3.5 *Soit $m \in \mathbb{Z}$. Une fonction $F \in L^\infty(D, dA)$ est dite m-quasihomogène. s'il existe $f \in L^\infty([0,1])$ tel que pour tout $z = re^{i\theta} \in D$, $0 \leq r < 1$ et $\theta \in [0, 2\pi]$, On a*

$$F(re^{i\theta}) = e^{im\theta} f(r).$$

On appelle f la partie radiale de F et m le coefficient de quasihomogèn érité de F. On note $F \sim (f, m)$.
Si $m = 0$ alors F est radiale. On distingue le cas radial du cas quasihomogène est le cas plus simple à écrire.
Si une fonction F est le symbole d'un opérateurs de Toeplitz alors nous dirons que T_F est quasihomogène de degré m.

Lemme 2.3.2 *Soit F un symbole m-quasihomogène (ou radial) borné alors*

$$T_F e_n = \begin{cases} 0 & si\ n + m < 0 \\ c_n(F) e_{n+m} & sinon \end{cases}$$

où

$$c_n(F) = 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1}\int_0^1 f(r)r^{2n+m+1}dr.$$

Preuve. Il suffit de calculer $\langle T_F e_n, e_p\rangle = \langle Fe_n, e_p\rangle$ pour tous $p, n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\langle T_F e_n, e_p\rangle &= \sqrt{n+1}\sqrt{p+1}\int_D F(z)z^n\bar{z}^p\, dA(z) \\
&= \frac{1}{\pi}\sqrt{n+1}\sqrt{p+1}\int_0^{2\pi}\int_0^1 e^{im\theta}f(r)r^n e^{in\theta}r^p e^{-ip\theta}r\, dr d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\sqrt{n+1}\sqrt{p+1}\int_0^{2\pi} e^{i(m+n-p)\theta}d\theta\int_0^1 f(r)r^{n+p+1}\, dr \\
&= 2\sqrt{n+1}\sqrt{n+m+1}\int_0^1 f(r)r^{2n+m+1}\, dr\, \delta_{m+n,p}.
\end{aligned}$$

Car $\int_0^{2\pi} e^{i(m+n-p)\theta}\, d\theta = 2\pi\, \delta_{m+n,p}$.

La transformée de Mellin est trés utilisée dans l'étude d'opérateur de Toeplitz à symbole quasihomogène.

Définition 2.3.6 *On définir la transformée de Mellin de $f \in L^\infty(0,1)$ par*

$$\hat{f} : z \mapsto \int_0^1 f(r)r^{z-1}dr.$$

On appelle l'intégrale $\int_0^1 f(r)r^{n-1}dr$ le coefficient de Mellin d'ordre n de f.

Définition 2.3.7 *Soit f une fonction intégrable sur D. On définit la radialisation de f, et on note $rad(f)$, par*

$$rad(f(z)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}z)d\theta.$$

L'intégrale est existe et finie presque partout car $f \in L^1(D, dA)$. Il découle directement de cette définition qu'une fonction f est radiale si et seulement si $f = rad(f)$.

Définition 2.3.8 *Pour $f \in L^\infty(0,1)$, la transformeé de Berezin de f est celle de $F \sim (0,1)$. Selon la définition 2.2.3, On a $\forall z \in D$*

$$\tilde{f}(z) = \tilde{F}(z) = \int_D f(|w|)\frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\overline{z}w|^4}\, dA(w).$$

Lemme 2.3.3 *[10] (page 32) Suppose que $\lambda \geq 0$ et*

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n = 0$$

si $a_n \geq -C(n+1)^{\lambda-1}$ pour $C > 0$ et pour tout $n \geq 0$, alors

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n}a_k}{(n+1)^{\lambda}} = 0.$$

Théoréme 2.3.1 *[7] Suppose que $f \in L^{\infty}[0,1)$ et*

$$a_n(f) = (n+1)\int_0^1 f(r)r^n\,dr,\ n \geq 0$$

Alors $a_n(f) \to 0$ quand $n \to \infty$ si et seulement si

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n(f)t^n = 0.$$

Preuve. Comme

$$(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n = 1$$

pour tout $t \in [0,1)$, et $a_n(f) \to 0$ $(n \to \infty)$ alors

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n(f)t^n = 0.$$

pour montre l'autre implication, nous utilisions le lemme précédent, alors on suppose

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n(f)t^n = 0.$$

avec un changement de variable, on trouve

$$\lim_{t\to 1^-}\left[a_0(f) + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_n(f) - na_{n-1}(f)]t^n\right] = 0.$$

par la définition de $a_n(f)$, on obtient

$$\begin{aligned}(n+1)a_n(f) - na_{n-1}(f) &= (n+1)^2\int_0^1 f(r)r^n\,dr - n^2\int_0^1 f(r)r^{n-1}\,dr \\ &= (2n+1)\int_0^1 f(r)r^n\,dr + n^2\int_0^1 f(r)(r-1)r^{n-1}\,dr\end{aligned}$$

par un calcul élémentaire on trouve que, la formule au-dessus est bornée en n, si f est bornée. pour termine le preuve on utilise le lemme suivante .

Lemme 2.3.4 *(avec $\lambda = 1$) Si*

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n(f)t^n = 0$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0(f)+\sum_{k=0}^{n}[(k+1)a_k(f)-ka_{k-1}(f)]}{n+1} = 0,$$

où

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(f) = 0.$$

Lemme 2.3.5 *[13] Soient $K_1, K_2 \in L^1[0,+\infty)$. Si*

$$\int_0^{+\infty} K_j(t)t^{ix}\,dt \neq 0$$

pour $j = 0, 1$ et pour tout x, alors les deux conditions suivantes

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty} K_1(t)g(\varepsilon t)\,dt = 0,\ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty} K_2(t)g(\varepsilon t)\,dt = 0$$

sont équivalent pour $g \in L^\infty[0,+\infty)$.

Théoréme 2.3.2 *[7] Supppose que $f \in L^\infty[0,1)$, alors*

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt = 0$$

si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 f(t)t^n\,dt = 0.$$

Preuve. Soit

$$h(x) = \frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt,\ x \in [0,1).$$

On applique la théorème de Fubini, on obtient

$$(n+1)(n+1)\int_0^1 h(x)x^n(1-x)\,dx = (n+2)\int_0^1 f(t)t^{n+1}\,dt$$

pour tout $n \geq 0$.

Pour montre l'équivalence, on utilisie le lemme 2.3.5.

Comme f est bornée, alors

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 f(t)t^n\,dt = 0$$

est équivalent à(compare t^s et t^n pour $n < s \leq n+1$)

$$\lim_{n\to+\infty} s\int_0^1 f(t)t^s\,dt = 0$$

On fait changement de variable, on trouve

$$\begin{aligned} s\int_0^1 f(t)t^s\,dt &= s\int_0^1 f(1-t)(1-t)^s\,dt \\ &= s\int_0^1 f(1-\frac{t}{s})(1-\frac{t}{s})^s\,dt = \int_0^{+\infty} K_\epsilon(t)g(\epsilon t)\,dt, \end{aligned}$$

où $\epsilon = \frac{1}{s}$

$$g(t) = \begin{cases} f(1-t), & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \qquad\quad , & \text{si } t > \frac{1}{\epsilon}. \end{cases}$$

et

$$K_\epsilon(t) = \begin{cases} (1-\epsilon t)^{\frac{1}{\epsilon}}, & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{\epsilon} \\ 0 \qquad\quad , & \text{si } t > \frac{1}{\epsilon}. \end{cases}$$

Comme $0 \leq K_\epsilon(t) \leq e^{-t}$ alors $K_\epsilon(t) \to e^{-t}$ sur $L^1[0,+\infty)$ quand $\epsilon \to 0^+$.

Donc (et d'aprés le lemme 2.3.5)

$$\lim_{s\to+\infty} s\int_0^1 f(t)t^s\,dt = 0$$

est équivalent à

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{+\infty} e^{-t}g(\epsilon t)\,dt = 0.$$

de même

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt = 0$$

est équivalent à

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^{+\infty} \mathcal{X}_{[0,1]}g(\epsilon t)\,dt = 0.$$

Théoréme 2.3.3 *[7] Soit f une fonction radial bornée sur D, Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $T_f : L^2_a(D) \to L^2_a(D)$ *est compact,*
2. $\tilde{f}(z) \to 0$ *quand* $|z| \to 1^-$,
3. $\frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt \to 0$ *quand* $z \to 1^-$.

Preuve. On montre que (1) $\Leftrightarrow$ (2), On sait que si f est radial alors le transformée de Berezin $\tilde{f}$ de f est

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(z) &= (1-|z|^2)^2 \int_D \frac{f(w)\,dA(w)}{|1-z\overline{w}|^4} \\
&= (1-|z|^2)^2 \int_D f(w) \left| \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \overline{w}^n \right|^2 dA(w) \\
&= 2(1-|z|^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 |z|^{2n} \int_0^1 f(r) r^{2n+1}\,dr \\
&= (1-|z|^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 |z|^{2n} \int_0^1 f(\sqrt{r}) r^n\,dr.
\end{aligned}$$

soit $f^*(r) = f(\sqrt{r}), 0 \le r < 1$, d'aprés le théorème 2.3.1. alors $\tilde{f}(z) \to 0$ quand $|z| \to 1^-$ si et seulement si $a_n(f^*) \to 0$ quand $n \to +\infty$, tel que

$$a_n(f^*) = (n+1)\int_0^1 f^*(r) r^n\,dr,\ n \ge 0.$$

D'autre part, Les fonctions suivantes constituent une base Hilbertienn de $L^2_a(D)$.

$$e_n(z) = \sqrt{n+1} z^n,\ n = 0, 1, 2, ...$$

lorsque f est fonction radial , et T_f dans la base $\{e_n\}$ alors

$$\langle T_f e_n, e_n \rangle = (n+1)\int_0^1 f(\sqrt{r}) r^n\,dr = a_n(f^*).$$

Donc, pour une fonction radial f l'opérateur T_f est compact sur $L^2_a(D)$ si et seulement si $a_n(f^*) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Finalement, On montre que (1) $\Leftrightarrow$ (3),

D'aprés le théorème 2.3.2 on déduire que T_f est compact si et seulement si

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} \int_x^1 f^*(t)\,dt = 0. \tag{2.1}$$

Comme f est bornée et

$$\frac{1}{1-x}\int_x^1 f^*(t)\,dt = \frac{2}{1+\sqrt{x}}\left[\frac{1}{1-\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^1 f(t)(t-1)\,dt + \frac{1}{1-\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^1 f(t)\,dt\right].$$

on trouve que 2.1 est équivalent à

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1-x}\int_x^1 f(t)\,dt = 0.$$

Et le théorème est entièrement prouvé.

Chapitre 3

Polynômes ortogonaux

3.1 Présentations des polynômes orthogonaux

3.1.1 Définitions

On rappele l'espace

$$L^2(\mu) := \{f : X \to \mathbb{R} : fmesurable, \|f\| < \infty\}$$

de norme induite par le produit scalaire

$$\langle f|g\rangle := \int_X fgd\mu,$$

où μ est une mesure de Lebesgues-Stieltjes et X un espace mesurable.

Définition 3.1.1 *Une suite de polynômes $(p_n)_n \geq 0$, où p_n est de degré n, est dit orthogonale dans $L^2(\mu)$, si $\langle p_n|p_m\rangle = 0$ lorsque $n \neq m$. Une telle suite forme évident une base orthogonale de l'espace des polynômes et il est bien connu qu'etant donné un produit scalaire fixé, nous pouvons en construire une base et en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base canonique des polynômes, $\{1, x, x^2, x^3...\}$*

Définition 3.1.2 *On considère un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, et une fonction poids $w : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ tel que $\frac{1}{\mu}\int_I w(x)dx = 1$. On désigne par $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(\mathrm{I}, w(x)dx)$, (pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$) muni du produit scalaire $< f, g >= \int_{\mp} fgwdx$ et de la norme $|.|$ associée. On suppose le poids w tel que, pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathrm{I}} |x|^n w(x)dx < \infty$.*

3.1.2 Séries génératrices

Le domaine des séries génératrices en général est vaste et complexe. Pour les suites de polynômes orthogonaux $p_n(x)$, on rencontre surtont des séries génératrices par exemple, pour les polynômes de Tcheby-chev(1^{er} espace)

1. Ordinaire
$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = \frac{1-tx}{1-2tx+t^2}$$
2. Exeponentielle
$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{2}e^x \cosh(t\sqrt{x^2-1})\,;$$
3. De Dirichlet
$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)\frac{t^n}{n} = \frac{-1}{2}\ln(1-2tx+t^2).$$

3.1.3 Calcul des séries génératrices

Considérons la relation de récurrence de polynôme, à savoir

$$T_0 = 1, T_1 = x, T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

Multiplions $T_n(x)$ par t^n, sommons sur les n et brassons un peu.Nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} T_n(x)t^n &= 2x\sum_{n=2}^{\infty} T_{n-1}(x)t^n - \sum_{n=2}^{\infty} T_{n-2}(x)t^n \\ &= 2xt\sum_{n=2}^{\infty} T_{n-1}(x)t^{n-1} - t^2\sum_{n=2}^{\infty} T_{n-2}(x)t^{n-2}\end{aligned}$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n - xt - 1 = 2xt\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n - t^2\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n,$$

Donc

$$1 + xt - 2xt = (1-2xt+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = \frac{1-tx}{1-2tx+t^2}$$

La série génératrice ordinaire donnée précédemment a donc été facilement retrouvée.

3.2 Propriétés des polynômes orthogonaux

Dans ce paragraphe on va étudier les propriétès des polynômes orthogonaux, lesquelles sont vérifiées pour des distributions du type Stieltjes $w(x)dx$.

Notation 3.2.1 *Nous dirons que $p(x)$ est un π_n si c'est un polynôme de degré $\leq n$.Et nous noterons $h_n = (p_n, p_n)$*

3.2.1 Formule de Rodrigues

Théoréme 3.2.1 *[16]*
On considérons le probléme suivantes :

$$p(x)y'' + q(x)y' + \lambda = 0$$

Où il est supposé que degré$(p(x)) \leq 2$, degré$(q(x)) \leq 1$, et que λ est une constante et que l'opérateur

$$L := p\frac{d^2}{dx^2} + q\frac{d}{dx} + \lambda \quad \textit{est auto-adjoint}$$

Applons

$$w(x) = \frac{1}{p(x)} \exp(\int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{p(t)} dt)$$

Alors la suite des polynômes orthogonaux qui solutionnent ce problème est donnée par la formule de Rodrigues

$$p_n(x) = \frac{1}{p(x)} \frac{d^n}{dx^n}(w(x)[p(x)]^n,$$

à un facteur de normalisation prés.

Example 3.2.1 ***l'equation de Legendre***

$$(1 - x^2)u'' - 2xu' + n(n + 1)u = 0$$

La formule générale de Rodrigues nous donne que les polynômes de Legendre peuvent être mis sous la forme

$$p_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}[(1 - x^2)^n].$$

Cependant, pour avoir la normalisation $p_n(1) = 1$, écrivons plutôt

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

Introduisons maintenant l'équation de Gegenbauer, une généralisation de celle de Legendre.

$$(1-x^2)y'' - (2\alpha+1)xy' + n(n+2\alpha)y = 0,$$

Nous pouvons calculer que dans ce cas-ci,

$$w(x) = (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}},$$

et alors nous obtenons la formule de Rodrigues des polynômes de Gegenbauer(non normalisée)

$$C_n^{(\alpha)} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}-\alpha}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x^2)^{n+\alpha-\frac{1}{2}}].$$

3.2.2 Formule de récurrence

Théoréme 3.2.2 *[16]*

Soit $p_n(x)_{n\geq 0}$ un systéme des polynômes orthogonaux alors on a la formule de récurrence :

$$p_{n+1}(x) = (Anx + B_n)p_n(x) - C_n p_{n-1}(x) \text{ pour } n \geq 1$$

où A_n, B_n, et C_n sont les constantes suivantes :

$$A_n = \frac{p_{n+1}}{p_n} > 0,\ B_n = -A_n\frac{(xp_n, p_n)}{(p_n, p_n)},\ C_n = A_n\frac{(xp_n, p_{n-1})}{(p_{n-1}, p_{n-1})} > 0,$$

Preuve. Il suffit de remarque que $p_{n+1}(x) - A_n.x.p_n(x)$ est un π_n donc de la forme :

$$a_0p_n(x) + ... + a_np_0(x),$$

et de la propriété d'orthogonalité des $p_n(x)$ on déduit les valeurs des constantes $a_0, ..., a_n$
Ona l'égalité :

$$p_{n+1}(x) - A_n.x.p_n(x) = a_0p_n(x) + ... + a_np_0(x)$$

On prend $(., p_k)$ pour $k = 0, 1, ..., n-2$, on trouve $a_k = 0$ pour $k = 2, ..., n$
On prend $(., p_{n-1})$: $\quad -A_n(p_n,\ xp_{n-1}) = a_1h_{n-1}$
Ona donc bien

$$B_n = \frac{-A_n(p_n, xp_n)}{h_n} \text{ et } C_n = \frac{A_n(p_n, xp_{n-1})}{h_{n-1}}, \text{ puisque } a_0 = B_n$$
$$\text{et } a_1 = -C_n.$$

3.2.3 Formule de Christoffel

Théoréme 3.2.3 *Soit $\{p_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée des polynômes associée à la distribution $w(x)dx$ sur $[a,b]$, soit :*

$$p(x) = c(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_l)$$

un $\pi_l \geq 0$ sur $[a,b]$ avec $c \neq 0$ et les x_j dintincts.Alors les polynômes orthogonaux $\{q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ associés à la distribution $p(x)w(x)dx$ peuvent se représenter comme suit :

$$p(x)q_n(x) = \begin{vmatrix} p_n(x) & p_{n+1}(x) & ... & p_{n+l}(x) \\ p_n(x_1) & p_{n+1}(x_1) & ... & p_{n+l}(x_1) \\ . & . & & \\ . & . & & \\ p_n(x_l) & p_{n+1}(x_l) & ... & p_{n+l}(x_l) \\ & & & \end{vmatrix}$$

Remarque 3.2.1
1. *Dans le cas où $p(x)$ à un Zéro, d'ordre $m > 1$, on remplace les lignes correspondantes par les dérivées d'ordre $0, ..., m-1$ des polynômes $p_n(x), ..., p_{n+l}(x)$ en x_k.*
2. *$q_n(x)$ n'est pas, en général, normalisé.*

Preuve. (du théorème) Le membre de droite est un π_{n+1} divisible par $p(x)$ (puisque pour $x = x_k$ le déterminant est nul, $k = 1, ..., l$).
Donc $p(x)q_n(x)$ de la forme π_n.De plus $p(x)q_n(x)$ est une combinaison linéaire des $p_n(x), ..., p_{n+1}(x)$, donc si $q(x)$ est un π_{n-1} arbitraire alors :

$$\int_a^b p(x)q_n(x)q(x)d\alpha(x) = \int_a^b q_n(x)q(x)(p(x)d\alpha(x)) = 0.$$

Pour finir nous devons montrer que ce membre de droite n'est pas identiquement nul.Pour cela il suffit de voir que le coefficient de $p_{n+l}(x)$, le determinant

$$|(p_{n+i}(x_j+1))_{i,j=0,...,i-1}|, \text{ n'est pas nul .}$$

Supposons qu'il soit nul.Alors il existe des réels, $a_0, ..., a_{l-1}$, non tous nuls,tels que

$$a_0 p_n(x) + ... + a_{l-1} p_{n+l-1}(x)$$

s'annule en les points $x_1, ..., x_l$ Donc

$$a_0 p_n(x) + ... + a_{l-1} p_{n+l-1}(x) = p(x)G(x) \quad \text{où } G(x) \text{ est un } \pi_{n-1}$$

Puisque cette expression est orthogonale à tous les π_{n-1} ona,

$$\int_a^b (p(x)G(x))G(x)d\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b p(x)G^2(x)d\alpha(x) = 0 \Rightarrow G(x) = 0$$

Puisque l'ona, par hypothése, $p(x) \geq 0$.

3.2.4 Formule de christoffel-Darboux

Théoréme 3.2.4 *Pour un systéme orthogonal $p_n(x)_{n\geq 0}$ des polynômes, ona les formules pour $x \neq y$ dans $[a, b]$:*

1. $\sum_{v=0}^{n} \frac{p_v(x)p_v(y)}{h_v} = \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y}$
2. $\sum_{v=0}^{n} \frac{p_v(x)^2}{h_v} = \frac{k_n}{k_{n+1}h_n}(p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x))$

Preuve. L'identité (1) découle facilement de la formule de récurrence.

$$\begin{aligned} p_{v+1}(x)p_v(x) - p_v(x)p_{v+1}(y) &= (A_v.x + B_v)p_v(x) - c_v p_{v-1}(x)p_v(y) \\ &- (A_v.y + B_v)p_v(y) - c_v p_{v-1}(y)p_v(x) \\ &= A_v(x-y)p_v(x)p_v(y) + c_v p_v(x)p_{v-1}(x)p_v(y) \end{aligned}$$

Ainsi ona :

$$\frac{1}{A_v} \frac{p_{v+1}(x)p_v(y) - p_v(x)p_{v+1}(y)}{x-y} = p_v(x)p_v(y) - \frac{C_v}{A_v} \frac{p_v(x)p_{v-1}(y) - p_{v-1}(x)p_v(y)}{x-y}$$

Comme :

$$\frac{C_v}{A_v} = \frac{k_{v-1}h_v}{k_v h_{v-1}}$$

et en divisant par h_v on a :

$$u_{v+1} - u_v = \frac{1}{h_v} p_v(y)$$

Où

$$u_v = \frac{k_{v-1}}{k_v h_{v-1}} \frac{p_v(x)p_{v-1}(y) - p_{v-1}(x)p_v(y)}{x-y}.$$

On fait la somme pour $v = 1$ jusqu'à n :

$$\sum_{v=1}^{n} \frac{p_v(x)p_v(y)}{h_v} = \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y} - \frac{p_0(x)p_0(y)}{h_0}.$$

Pour l'identité (2) il suffit de passer à la limite quand y tend vers x.

Remarque 3.2.2 *Ona précédement posé :*

$$k_n(t,x) = \overline{p_0(t)}p_0(t) + ... + \overline{p_n(t)}p_n(t) = p_0(\overline{t})p_0(t) + ... + p_n(\overline{t})p_n(t)$$

Si on prend une famille $p_n(x)$ orthogonale ($h_v = 1, \forall v \in \mathbb{N}$) alors le membre de gauche de la formule de Christoffel-Darboux n'est rien d'autre que : $k_n(\overline{x}, y) = k_n(\overline{y}, x)$, on peut donc écrire :

$$C - D : k_n(x,t) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(t) - p_n(x)p_{n+1}(t)}{x-t}$$

3.2.5 Formule de quadrature

A/ Problème et but

Soit $\mathcal{F} \in C([a,b])$ et w une fonction poids :

$$I(\mathcal{F}) = \int_a^b \mathcal{F}(x)dx \text{ ou } I(\mathcal{F}) = \int_a^b \mathcal{F}(x)w(x)dx$$

On veut approximer $I(\mathcal{F})$.L'idée sera :

1. D'approcher $I(\mathcal{F})$ par $I(p)$ avec p un polynôme d'interpolation de $\mathcal{F}$
2. Decouper $[a,b]$ en sous intervalles et on repète le processus

B/ Formule de quadrature de type d'interpolation

Soient $X_0, X_1, ..., X_n \in [a, b]$.Alors $I(F) \simeq I_1(\mathcal{F}) = I(p_n)$ où p_n est un polynôme d'interpolation de $\mathcal{F}$ en $X_0, X_1, ..., X_n$

Proposition 3.2.1 *Soient $L_0, L_1, ..., L_n$ les polynômes de Lagrange associées aux noeuds $X_0, X_1, ..., X_n$ alors*

$$I_n(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n} w_i \mathcal{F}(X_i) \text{ avec } w_i = \int_a^b \mathcal{F}(X)dX$$

Preuve. p_n le polynôme d'interpolation de Lagrange de $\mathcal{F}$ aux points $X_0, X_1, ..., X_n$ alors

$$p_n(X) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{F}(X_i)L_i(X)$$
$$I_n\mathcal{F} = I(p_n) = \int_a^b (\sum_{i=0}^{n} \mathcal{F}(X_i)L_i(X))dX$$
$$I_n(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{F}(X_i) \int_a^b L_i(X)dX \text{ on pose : } w_i = \int_a^b L_i(X)dX$$

Donc

$$I_n(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n} \mathcal{F}(X_i)w_i$$

Remarque 3.2.3 *Si on prend des points équidistincts $X_j = X_0 + jh$ avec $h = \frac{b-a}{n}$ cella s'appelle la formule de Newton-cotes*

3.2.6 Exemples des polynômes orthogonaux classiques démonstrations des propriétés

1/ Les polynômes de Legendre :

Définition 3.2.3 *P_n est un polynôme de Legendre de degré n si*

$$\int_{-1}^{1} P_i(x)P_j(x)dx = 0 \text{ si } i \neq j$$

et si $P_n(1) = 1$

Propriétés 3.2.1 *1.* $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n[(x^2-1)^n]$

Où $D : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R};\ f(x) \longrightarrow f'(x)$ *pour* $f \in C^1([-1,1])$ *;*

2. $P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{n} (C_n^j)^2 (x-1)^{n-j}(x+1)^j$ *;*

3. $P_n(x) = (\frac{1+x}{1-x}) = \frac{1}{(1-x)^n} \sum_{j=0}^{n} (C_n^j)^2 x^{n-j}$ *;*

4. P_n *a même parité que* n *;*

5. $P_n'(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1-(-1)^{n+j}}{\int_{-1}^{1} P_j^2(x)dx} P_j(x)$

6. Les polynômes P_n *satisfont la relation de récurrence à trois termes*

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$$

Pour $n \geq 1$ *avec* $P_0(x) = 1$ *et* $P_1(x) = x$ *;*

7. $\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}$

8. $\sum_{n\geq 0} P_n(x)z^n = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$.

Preuve.

1. On choisit $i < j$ et on obtiendrait par symétrie un résultat analogue lorsque $j < i$.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} D^i[(x^2-1)^i]D^j[(x^2-1)^j] &= -\int_{-1}^{1} D^{i+1}[(x^2-1)^i]D^{j-1}[(x^2-1)^j] \\
&+ \underbrace{[D^i[(x^2-1)^i]D^{j-1}[(x^2-1)^j]]_{-1}^{1}}_{=0\ car D^k[(x^2-1)^j]|_{-1,1}=0}, \forall k \in \{0,1,...,j-1\} \\
&= ... \\
&= (-1)^j \int_{-1}^{1} D^{i+j}[(x^2-1)^i]D^0[(x^2-1)^j] \\
&+ \underbrace{[D^{i+j-1}[(x^2-1)^i]D^0[(x^2-1)^j]]_{-1}^{1}}_{=0\ car D^k[(x^2-1)^j]|_{-1,1}=0}, \forall k \in \{0,1,...,j-1\} \\
&= (-1)^j \int_{-1}^{1} \underbrace{D^{i+j}[(x^2-1)^i]}_{=0\ car\ si\ i<j, D^{i+j}[(x^2-1)^i]dx=0} (x^2-1)^j dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

Un calcul explicite de P_n à l'aide de la formule de Leibniz fournit

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{j=0}^{n} C_n^j \frac{n!}{(n-j)!}(x-1)^{n-j}\frac{n!}{j!}(x+1)^j \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2(x-1)^{n-j}(x+1)^j \end{aligned}$$

Et, il s'ensuit que $P_n(1) = 1$.

2. Voir plus haut.

3. On a $P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum\limits_{j=0}^{n}(C_n^j)^2(x-1)^{n-j}(x+1)^j$, d'où on déduit

$$\begin{aligned} P(\frac{1+x}{1-x}) &= \frac{1}{2^n \sum\limits_{j=0}^{n}}(C_n^j)^2(\frac{2x}{1-x})^{n-j}(\frac{2}{1-x})^j \\ &= \frac{1}{(1-x)^n}\sum_{j=0}^{n}(C_n^j)^2 x^{n-j}. \end{aligned}$$

4. Immédiat car $w_n(x)$ tel que $w_n(x) = (x^2-1)^n$ est un polynôme pair, ce qui induit que P_n qui est le polynôme dérivé n fois de w_n , est un polynôme de même parité que n.

5. $P_n' = \sum\limits_{j=0}^{n-1} b_j P_j$ où $b_j \in \mathbb{R}$, car P_j est de degré j. On déduit donc

$$\int_{-1}^{1} P_n'(x)P_j(x)dx = b_j \int_{-1}^{1} P_j^2(x)dx.$$

Par ailleurs,

$$\int_{-1}^{1} P_n'(x)P_j(x)dx = \underbrace{-\int_{-1}^{1} P_n(x)P_j'(x)dx}_{=0 \text{ car degr } P_j'<n} + \underbrace{[P_n(x)P_j(x)]_{-1}^{1}}_{=1-(-1)^{n+j} \text{ car } P_n \text{ est de la parit de } n \text{ et que } P_n(1)=1}$$

6. $P_0(x) = 1$ car P_0 est de degré 0 et tel que $P_0(1) = 1$.

   $P_1(x) = x$ car P_1 est de degré 1, impair et tel que $P_1(1) = 1$.

   On a encore

$$P_{n+1}(x) = (B_n + xA_n)P_n(x) + C_n P_{n-1}(x).$$

   En effet, on peut écrire

$$P_{n+1}(x) = (B_n + xA_n)P_n(x) + C_n P_{n-1}(x) + \sum_{j=0}^{n-2} a_j P_j(x),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_k(x)dx &= (B_n + xA_n)P_n(x)P_k(x)dx \\ &+ C_n \int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_k(x)dx \\ &+ \sum_{j=0}^{n-2} a_j \int_{-1}^{1} P_j(x)P_k(x)dx,\end{aligned}$$

Et, pour $k \in \{0, 1, ..., n-2\}$, cela fournit

$$a_k \int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = 0$$

puis $a_k = 0$ car

$$\int_{-1}^{1} P_k^2(x)dx \neq 0.$$

Recherche de A_n :

Soit a_n le coefficient du terme de plus haut degré de P_n.

$$\begin{aligned}a_n x^n &= \frac{1}{2^n n!} D^n[x^{2n}] \\ &= \frac{1}{2^n n!} \frac{(2n)!}{n!}\end{aligned}$$

Or, $A_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, donc $A_n = \frac{2n+1}{n+1}$.

Recherche de B_n :

$B_n = 0$ car P_n est de même parité que n.

Recherche de C_n :

On a $P_n(1) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.Donc $1 = A_n + C_n$.Puis, $C_n = \frac{-n}{n+1}$

7. D'aprés la relation de récurrence à trois termes, on obtient

$$
\begin{aligned}
0 &= (n+1)\underbrace{\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx}_{=0} \\
&- (2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n-1}(x)dx + n\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx. \\
0 &= (n+1)\underbrace{\int_{-1}^{1} P_{n+1}(x)P_n(x)dx}_{=0} \\
&- (2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n^2(x)dx + n\underbrace{\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_n(x)dx}_{=0}. \\
0 &= (n+1)\int_{-1}^{1} P_{n+1}^2(x)dx \\
&- (2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)P_{n+1}(x)dx + n\underbrace{\int_{-1}^{1} P_{n-1}(x)P_{n+1}(x)dx}_{=0}
\end{aligned}
$$

De la troisième égalité, on déduit

$$n\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx - (2n-1)\int_{-1}^{1} xP_{n-1}(x)dxP_n(x)dx = 0.$$

De la première égalité,

$$-(2n+1)\int_{-1}^{1} xP_n(x)dxP_{n-1}(x)dx + n\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx = 0.$$

Ainsi,

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \tfrac{2n-1}{2n+1}\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)dx = 0.$$

Par récurrence, il vient

$$\int_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \tfrac{1}{2n+1}\underbrace{\int_{-1}^{1} P_0^2(x)dx}_{=2} = \tfrac{2}{2n+1}.$$

8. Soit

$$G_n(z) = \sum_{n\geq 0} P_n(x) z^n.$$

En dérivant,

$$\begin{aligned} G_n'(z) &= \sum_{n\geq 1} n P_n(x) z^{n-1} \\ &= \sum_{n\geq 0} (n+1) P_{n+1}(x) z^n \\ &= \sum_{n\geq 0} ((2n+1) x P_n(x) - n P_{n-1}(x) z^n \\ &= x \sum_{n\geq 0} (2n+1) P_n(x) z^n - \sum_{n\geq 1} n P_{n-1}(x) z^n. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} -2xzG_n'(z) &= -2x \sum_{n\geq 1} n P_n(x) z^n, \\ z^2 G_n'(z) &= \sum_{n\geq 2} (n-1) P_{n-1}(x) z^n, \\ zG_n(z) &= \sum_{n\geq 1} P_{n-1}(x) z^n, \\ et, \quad -xG_n(z) &= -x \sum_{n\geq 0} P_n(x) z^n. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} (1-2xz+z^2) G_n'(z) &= x \sum_{n\geq 0} (2n+1) P_n(x) z^n - \sum_{n\geq 1} n P_{n-1}(x) z^n \\ &- 2x \sum_{n\geq 1} n P_n(x) z^n + \sum_{n\geq 2} (n-1) P_{n-1}(x) z^n \\ &= x \sum_{n\geq 0} P_n(x) z^n - P_0(x) z - \sum_{n\geq 2} P_{n-1}(x) z^n \\ &= x \sum_{n\geq 0} P_n(x) z^n - \sum_{n\geq 1} P_{n-1}(x) z^n \\ &= (x-z) G_n(x) \end{aligned}$$

La résolution de l'équation différentielle

$$\begin{aligned}\frac{G_n'(z)}{G_n(z)} &= \frac{x-z}{1-2xz+z^2}\\ &= \frac{-u'(z)}{2u(z)},\end{aligned}$$

avec $u(z) = 1 - 2xz + z^2$.

Alors,

$$G_n(z) = \frac{a}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

Or, $P_n(1) = 1$, donc lorsque $x = 1$, $G_n(z) = \frac{1}{1-z}$, ce qui donne $a = 1$.

Pour conclure,

$$G_n(z) = \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}.$$

2/ Les polynômes de Tchébychev de première et seconde espèce :

Définition 3.2.4 *Les fonctions de Tchébychev de première espèce* (T_n) *et seconde espèce* (U_n) *sont définies sur* $I = [-1, 1]$ *par*

$$\begin{cases} T_n(x) = & \cos(n\Theta) \\ U_n(x) = & \frac{\sin((n+1)\Theta)}{\sin\Theta} \quad avec \quad \Theta = \arccos x. \end{cases}$$

Propriétés 3.2.2 *1. Les fonctions* T_n *satisfont la relation de récurrence à trois termes*

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$$

Pour $n \geq 1$ *avec* $T_0(x) = 1$ *et* $T_1(x) = x$ *;*

2. Les fonctions T_n *sont des fonctions polynômes ;*

3. $T_n'(x) = nU_{n-1}(x)$ *;*

4. Les fonctions U_n *sont des fonctions polynômes ;*

5. $\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, *si* $n \neq m$ *;*

6. $\int_{-1}^{1} T_n^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$

7. $T_n(x) = \frac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n]$,
   pour $x \in]-\infty,-1] \cup [1,\infty[$;
8. *Le coefficient du terme de plus haut degré de* T_n *est* 2^{n-1} *si* $n \geq 1$ *et* 1 *pour* $n = 0$;
9. *Les polynômes* T_n *satisfont l'équation différentielle*
$$(1-x^2)y'' - xy'^2y = 0\,;$$
10. T_n *est proportionnel au polynôme* w_n *défini par*
$$w_n(x) = \sqrt{1-x^2}D^n[\tfrac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}]$$
   Où $D : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; f(x) \longrightarrow f'(x)$ *pour* $f \in ([-1,1])$.

Preuve.

1. La formule trigonométrique
$$\cos p + \cos q = 2\cos(\tfrac{p-q}{2})\cos(\tfrac{p+q}{2})$$
   avec $p = (n+1)\Theta$ et $q = (n-1)\Theta$ fournit immédiatement le résultat.
2. Une récurrence simple depuis la formule de récurrence à trois termes induit que les fonctions T_n sont des fonctions polynômes.
3. $\frac{dT_n(x)}{dx} = \frac{dT_n(x)}{d\Theta\frac{dx}{d\Theta}} = n\frac{\sin(n\Theta)}{\sin\Theta}$.
4. Les fonctions U_n sont des fonctions polynômes comme dérivées de fonctions polynômes.
5. $$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\int_{\pi}^{0}\cos(n\Theta)\cos(m\Theta)d\Theta \;\; avec \;\; \Theta = \arccos x \\ &= \int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\cos((n+m)\Theta)+\cos((n-m)\Theta))d\Theta \\ &= 0 \;\; car \;\; n \neq m\end{aligned}$$
6. $$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} T_n^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}(\cos((2n)\Theta)+\cos((0)\Theta))d\Theta(voir\ ci-haut) \\ &= \int_{0}^{\pi}\frac{1}{2}d\Theta \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

7. Soit

$$Z_n(x) = \tfrac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n],$$

pour $x \in]-\infty,-1] \cup [1,\infty[$, ona $Z_0(x) = 1$ et $Z_1(x) = x$.
De plus,

$$\begin{aligned} Z_{n-1}(x) + Z_{n+1}(x) &= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} (x+\sqrt{x^2-1})^n(x+\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}) \\ +(x-\sqrt{x^2-1})^n(x-\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}) \end{array}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\begin{array}{l} (x+\sqrt{x^2-1})^n(x+\sqrt{x^2-1}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{1}) \\ +(x-\sqrt{x^2-1})^n(x-\sqrt{x^2-1}-\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{1}) \end{array}\right] \\ &= 2x\frac{1}{2}[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n] \\ &= 2xZ_n(x) \end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions Z_n vérifient la même relation de récurrence à trois termes que les T_n, ce qui implique

$$Z_n = T_n,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

8. C'est immédiat par une récurrence simple depuis la formule de récurrence à trois termes.

9. On a

$$T_n(x) = \cos(n\arccos x)\,;$$
$$T_n'(x) = \sin(n\arccos x)\tfrac{n}{\sqrt{1-x^2}}\,;$$

et

$$T_n''(x) = \cos(n\arccos x)\tfrac{-n^2}{1-x^2} + \sin(n\arccos x)\tfrac{nx}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}.$$

Et, le résultat découle directement.

10. Soit $k < n$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} w_n(x)x^k\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^{1} D^n[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}]x^k dx \\
&= -\int_{-1}^{1} D^{n-1}[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}](kx^{k-1})dx \\
&+ \underbrace{[D^{n-1}[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}]x^k]_{-1}^{1}}_{=0 \ car \ D^q[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}]|_{\{-1,1\}}=0 \ \ \forall q\in\{0,1,...,n-1\}} \\
&= \ ... \\
&= (-1)^k\int_{-1}^{1} D^{n-k}[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}](k!)dx \\
&+ (-1)^{k-1}\underbrace{[D^{n-k}[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}](k!x)}_{=0 \ car \ D^q[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}]|_{\{-1,1\}}=0 \ \ \forall q\in\{0,1,...,n-1\}} \\
&= (-1)^k k!\int_{-1}^{1} D^{n-k}[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}]dx \\
&= (-1)^k k!\underbrace{[D^{n-k-1}[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}](k!x)}_{=0 \ car \ D^q[\frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}}]|_{\{-1,1\}}=0 \ \ \forall q\in\{0,1,...,n-1\}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc, pour tout polynôme p de degré strictement inférieur à n,

$$\int_{-1}^{1} w_n(x)p(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

En particulier, pour $p(x) = w_k(x)$ où $k < n$ car il est évident que w_k est un polynôme. Ainsi, les polynômes w_n sont orthogonaux pour le même produit scalaire que les polynômes T_n. Il s'ensuit que ces polynômes sont proportionnels.

Chapitre 4

Lien entre les polynômes orthogonaux et l'opérateur de Toeplitz à symbol radial

Lemme 4.0.1 *On a pour les pôlynomes orthogonaux de Legendre*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2n-2k \\ n \end{pmatrix} x^{n-2k},$$

Où

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k.$$

Preuve. Selon la représentation de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

Et la formule binomiale

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k (x^2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (-1)^k x^{2n-2k},$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[(x^2-1)^n] &= \frac{d}{dx}[\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)(-1)^k x^{2n-2k}] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)(-1)^k(2n-2k)x^{2n-2k-1}\end{aligned}$$

Prenant les temps du dérivé n d'une manière semblable, nous obtenons

$$\frac{d}{dx}[(x^2-1)^n] = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k},$$

Et ainsi

$$\begin{aligned}P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})}(-1)^k\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!}x^{n-2k} \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})}(-1)^k\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 2n-2k \\ n \end{array}\right)x^{n-2k}\end{aligned}$$

Alors

$$(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n,$$

Nous obtenons de nouveau par dérivation binomiale la formule cela

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n] &= \frac{d^n}{dx^n}[(x-1)^n(x+1)^n] \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\frac{d^k}{dx^k}(x-1)^k\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(x+1)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(x+1)^k.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)^2(x-1)^{n-k}(x+1)^k.$$

Inversement on peut présenter x^n on fonction de $P_k(x)$ on a

Lemme 4.0.2 *On a*

$$x^n = \sum_{k=n,n-2,\ldots} \frac{(2k+1)n!}{2^{(\frac{(n-k)}{2})}(\frac{(n-k)}{2})!(k+n+1)!!} P_k(x),\ n \geq 1.$$

Preuve. Nous avons abvious $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x$.Pour discuter par recurrence, on suppose que

$$x^n = \sum_{k=n,n-2,\ldots} \frac{(2k+1)n!}{2^{(\frac{(n-k)}{2})}(\frac{(n-k)}{2})!(k+n+1)!!} P_k(x), n \geq 1.$$

Et montrons que

$$x^{n+1} = \sum_{k=n+1,n-1,\ldots} \frac{(2k+1)(n+1)!}{2^{\frac{(n+1-k)}{2}}(\frac{(n+1-k)}{2})!(k+n+2)!!} P_k(x),$$

Rappelez cela

$$kP_{k-1}(x) + (k+1)P_{k+1}(x) = (2k+1)xP_k(x)$$

Où

$$xP_k(x) = \frac{k}{2k+1}P_{k-1}(x) + \frac{k+1}{2k+1}P_{k+1}(x).$$

par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= \sum_{k=n,n-2,\ldots} \frac{(2k+1)n!}{2^{\frac{(n-k)}{2}}(\frac{(n-k)}{2})!(k+n+1)!!} xP_k(x) \\
&= \sum_{k=n,n-2,\ldots} \frac{(2k+1)n!}{2^{\frac{(n-k)}{2}}(\frac{(n-k)}{2})!(k+n+1)!!} (\frac{k+1}{2k+1}P_{k+1}(x) + \frac{k}{2k+1}P_{k-1}(x)) \\
&= \sum_{k=n,n-2,\ldots} \frac{(k+1)n!}{2^{\frac{(n-k)}{2}}(\frac{(n-k)}{2})!(k+n+1)!!} P_{k+1}(x) \\
&+ \sum_{k=n,n-2,\ldots} \frac{kn!}{2^{\frac{(n-k)}{2}}(\frac{(n-k)}{2})!(k+n+1)!!} P_{k-1}(x) \\
&= \sum_{k=n+1,n-1,\ldots} \frac{kn!}{2^{\frac{(n+1-k)}{2}}(\frac{(n+1-k)}{2})!(k+n)!!} P_k(x) \\
&+ \sum_{k=n-1,n-3,\ldots} \frac{(k+1)n!}{2^{\frac{(n+1-k)}{2}}(\frac{(n+1-k)}{2})!(k+n+2)!!} P_k(x) \\
&= \sum_{k=n+1,n-1,\ldots} \frac{kn!}{(k+n+2)2^{\frac{(n+1-k)}{2}}(\frac{(n+1-k)}{2})!(k+n+2)!!} P_k(x) \\
&+ \sum_{k=n-1,n-3,\ldots} \frac{(k+1)n!(n+1-k)}{2^{\frac{(n+1-k)}{2}}(\frac{(n+1-k)}{2})!(k+n+2)!!} P_k(x) \\
&= \frac{(n+1)n!(2n+3)}{(2n+3)!!} P_{n+1} + \sum_{k=n-1,n-3,\ldots} \frac{(2k+1)(n+1)!}{2^{\frac{(n+1-k)}{2}}(\frac{(n+1-k)}{2})!(k+n+2)!!} P_k(x).
\end{aligned}$$

C'est-à-dire, nous prenons pour $n = 2m$,

$$\begin{aligned} x^{2m} &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(4k+1)(2m)!}{2^{m-k}(m-k)!(k+m+1)!!} P_{2k}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(4k+1)(2m)!}{(2m-2k)!!(k+m+1)!!} P_{2K}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m} b_{2m,2k} P_{2k}(x), \end{aligned}$$

Où

$$b_{2m,2k} = \frac{(4k+1)(2m)!}{(2m-2k)!!(k+m+1)!!}, \quad k = 0, ..., m$$

De même, pour $n = 2m + 1$

$$\begin{aligned} x^{2m+1} &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(4k+3)(2m+1)!}{2^{m-k}(m-k)!(k+m+3)!!} P_{2k+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m} \frac{(4k+3)(2m)!}{(2m-2k)!!(k+m+3)!!} P_{2k+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^{m} b_{2m+1,2k+1} P_{2k+1}(x), \end{aligned}$$

Où

$$b_{2m+1,2k+1} = \frac{(4k+3)(2m)!}{(2m-2k)!!(k+m+3)!!}, \quad k = 0, ..., m$$

On pose maintenant l'opérateur de Toeplitz T_f du symbole f radial de signe quelconque sur l'intrevalle $[-1, 1]$, et comme

$$L^2[-1, 1] = L^2_e[-1, 1] \oplus L^2_\circ[-1, 1],$$

Où $L^2_e[-1, 1]$ est le sous-espace de $L^2[-1, 1]$ des fonctions paires et $L^2_\circ[-1, 1]$ est sous-espace des fonctions impaires. Alors on peut écrire

$$f(x) = f_e(x) + f_\circ(x),$$

Avec

$$f_e(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \quad f_\circ(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Supposez maintenant $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x)$.

Alors

$$\begin{aligned} C_m(f) &= (m+1)\int_0^1 f(x)x^m dx \\ &= \frac{(m+1)}{2}\int_{-1}^1 [f_e(x)+f_\circ(x)]x^m dx. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons pour $m = 2n$

$$\begin{aligned} C_{2n}(f) &= \frac{(2n+1)}{2}\int_{-1}^1 f_e(x)x^{2n}dx \\ &= \frac{(2n+1)}{2}\int_{-1}^1 (\sum_{j=0}^{\infty} a_{2j}P_{2j}(x))(\sum_{k=0}^{n} b_{2n,2k}P_{2k}(x))dx \\ &= \frac{(2n+1)}{2}\int_{-1}^1 \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{2k}b_{2n,2k}P_{2j}(x)P_{2k}(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^{n}(\sum_{k=0}^{n}\frac{2n+1}{4k+1}b_{2n,2k})a_{2k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} b'_{2n,2k}a_{2k}, \end{aligned}$$

Où

$$b'_{2n,2k} = \tfrac{(2n+1)!}{(2n-2k)!!(2n+2k+1)!!}.$$

De la même manière, pour le cas impair $m = 2n+1$

$$\begin{aligned} C_{2n+1}(f) &= \frac{(2n+3)}{2}\int_{-1}^1 f_o(x)x^{2n}dx \\ &= \frac{(2n+3)}{2}\int_{-1}^1 (\sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1}P_{2j+1}(x))(\sum_{k=0}^{n} b_{2n+1,2k+1}P_{2k+1}(x))dx \\ &= \frac{2n+3}{2}\int_{-1}^1 \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}b_{2n+1,2k+1}P_{2j+1}(x)P_{2k+1}(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^{n}(\frac{2n+3}{4k+3}b_{2n+1,2k+3})a_{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} b'_{2n+1,2k+1}a_{2k+1}, \end{aligned}$$

Où

$$b'_{2n+1,2k+1} = \frac{(2n+3)!}{(2n-2k)!!(2n+2k+3)!!}.$$

Bibliographie

[1] S. Axler and D. Zheng. Compact Operators via the Berezin Transform. 25 July 1998.

[2] B. Barusseau. Propriétés spectrales des opérateurs de Toeplitz. Thèse présentée à l'Université Bordeaux 1. Spécialité mathématiques pures. Mai. 2010.

[3] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. Masson, Paris, 1996.

[4] I. Chalendar. Fonctions Harmoniques, classe de Nevanlinna, espaces de Hardy, et une introduction aux opérateurs de Toeplitz et de Hankel. Université Lyon I. 2008.

[5] F. Helein. Fonctions holomorphes

[6] H. Hedenmalm, B. Korenblum et K. Zhu. Theory of Bergman spaces. Springer Verlag, New York, 2000.

[7] B. Korenblum and K. Zhu. An application of Tauberian theorems to Toeplitz operators. J. Operator Theory.

[8] I. Louhichi. Produit d'opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman. Thése présentée à l'Université Bordeaux 1. Spécialité mathématiques pures. Nov. 2005.

[9] S. Maingot et D. Manceau. Théorie spectrale.

[10] A. G. Postnikov. Tauberian theory and its applications.1979.

[11] F. R. Randriamahaleo. Opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergman harmonique et opérateurs de Toeplitz tronqués de rang fini. Mémoire présentée à l'Université D'Antananarivo et de l'Université de Bordeaux. Spécialité mathématiques pures. 20 juillet 2015.

[12] K. Stroethoff and D. Zheng. Toeplitz and Hankel operators on Bergman spaces. transactions of the american mathematical society. 1992.

[13] N. Wiener. Tauberian theorems, 1932.

[14] K. Zhu . Operator Theory in Function Spaces. The American Mathematical, Rhode Island , Second Edition , 2007.

[15] M. Lavoie . Polynômes orthogonaux. Québec, Canada , 2015

[16] V. Ludovic . Généralités sur les polynômes orthogonaux, 14 mai 2007