Liste des Figures

1.1.1 Un graphe $G = (V, E)$. 4
1.2.1 Graphe simple G, Sous-graphe G_A et Graphe partiel G_B. 5
1.2.2 Graphe G et son complémentaire $\overline{G}$. 6
1.2.3 Graphe complet K_5. 6
1.2.4 Le clique $A = \{a, d, e, h\}$. 7
1.2.5 Graphe biparti complet $K_{3,2}$. 8
1.2.6 Le graphe de Petersen G_{10}. 8
1.2.7 étoile $K_{1,5}$. 9
1.2.8 Double étoile $S_{3,3}$. 9
1.2.9 Cycle C_4 et Chaîne P_4. 10
1.3.1 Graphe possède un isthme (gh) et trois sommets d'articulations(d,g,h) . . . 10
1.3.2 Un arbre. 11
1.4.1 Deux graphes isomorphes. 12
1.4.2 $S = \{b, e\}$ est un ensemble stable avec $\alpha(G) = 2$. 12
1.5.1 $M = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ est un couplage parfait et $R = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ est un recouvrement. 13
1.7.1 graphe simple $G = (V, E)$ d'ordre 5. 15
1.8.1 Graphe $G = C_4 \circ P_2$. 16
1.8.2 Graphe $G = P_3 \square C_3$. 16
1.8.3 Graphe $G = P_3$ V P_2. 17

2.1.1 Partition domatique du cycle C_6 19
2.2.1 Partition domatique b-maximal du cycle C_6 21

2.3.1 Partition domatique b-maximal d'un graphe W_6. 24
2.4.1 Partition domatique du joint S_3 V S_2 25
2.5.1 Partition domatique du produit cartésien $G = P_2 \square C_3$ 27

3.1.1 Partition domatique b-maximal du joint P_3 V C_4 31
3.1.2 Partition domatique b-maximal du joint K_2 V C_5 32
3.1.3 Partition domatique b-maximal du joint C_4 V C_4 33
3.2.1 Partition domatique b-maximale du $K_2 \square K_3$ 35
3.2.2 Graphe $G = P_2 \square C_4$ et Partition domatique b-maximale du $P_2 \square C_4$ 35
3.2.3 Partition domatique b-maximale du $K_{2,2} \square K_{2,2}$ 36
3.2.4 Partition domatique b-maximale du $P_3 \square C_3$ 37
3.2.5 Partition domatique b-maximal du $K_2 \square K_{1,3}$ 38
3.3.1 Partition domatique b-maximal de la couronne $C_4 \circ P_2$. 39

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Mathématiques
Option : Recherche Opérationnelle

Par

GUEMANA Hocine

Thème

Nombre b-domatique dans les produits de graphes

Composition du Jury:

M.	N. IKHLEF ESCHOUF	Maître de conférence	UYF Médéa	Président
M.	L. OULDRABAH	Maître Assistant	UYF Médéa	Examinateur
M.	M. BENATALLAH	Maître de conférence	UZA Djèlfa	Promoteur
M.	A. BENDALI-BRAHAM	Maître Assistant	UYF Médéa	Examinatrice

Date de soutenance: *07/07/2019*

Résumé

Le but de ce mémoire est d'étudier *Nombre b-domatique dans les produits de graphes* (la couronne,joint et produit cartésien),où nous cherchons la meilleure borne et le plus petit nombre de classes, où chaque classe domine tous les sommets trouvés dans les autres classes.

Le nombre de b-domatique G, noté par $bd(G)$, est le plus petit des ensembles domatique de G.

Une présentation des résultats antérieurs obtenus dans ce domaine est effectuée en premier. Nous avons aussi entamé l'étude le nombre b-domatique du joint et du produit cartésien de deux graphes au plus sa couronne. Nous sommes parvenus à établir quelques résultats et à montrer des propriétés de nombre b-domatique dans les produits des deux graphes.

Abstract

The purpose of this dissertation is to study *b-domatic number in graph products* (its coronna, joint and cartesian graph), where we look for the best bound and the lowest number of classes, where each class dominated all the vertices found in the other class.

The number of b-domatic G, denoted by $bd(G)$, is the smaller size of the domatic sets of G.

A presentation of the previous results obtained in this field is carried out first. We also began the study b-domatic number of the joint and the Cartesian product of two graphs at most its crown. We managed to establish some results and to show Properties of number b-domatic in the products of the two graphs.

Remerciements

Louange a Allah le Seigneur des mondes.

Je rends Allah le tout puissant de m'avoir donne le courage et la volonte ainsi que la patience pour bien menerce travail.

Je tiens à remercier chaleureusement mon promoteur Monsieur **Mohammed BENATALLAH** , Maître de conferences à l'universite ZIANE ACHOUR de Djelfa, pour avoir accepte d'encadrer mon mémoire. Ainsi de m'avoir oriente, aide et conseille.

Je remercie egalement Monsieur **Noureddine IKHLEF ESCHOUF**, Maître de Conferences à l'universite Dr. YAHIA FARES de Médèa, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de presider le jury de ce memoire.

Mes vifs remerciments vont egalement au **Lyes OULDRABAH** , Maître de Conferences à l'universite YAHIA FARES de Médèa , pour avoir accepte l'invitation.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à l'ensemble des enseignants du département M.I de l'université Dr. Yahia Fares.de Médèa.

Enfin, il est important pour moi de remercier mes parents, d'avoir fait de leur mieux pour que je puisse accomplir ce mémoire dans les meilleures conditions possibles et qui n'ont jamais cessé de m'encourager.

Je remercie mes frères, sans oublier mes chèrs amis qui etaient toujours présents.

Table des matières

Introduction **1**

1 Généralités sur les graphes **3**

1.1 Concepts et notations de graphes non orientés 3

1.1.1 Voisinages et degrés 4

1.2 Graphes particuliers 5

1.3 10

1.4 Invariants de graphes 11

1.5 La coloration 12

1.6 Ensemble minimal, enemble maximal 13

1.7 La domination dans les graphes 14

1.8 Le produit des graphes 16

1.8.1 Couronne d'un graphe 16

1.8.2 Produit cartésien 16

1.8.3 Joint et union 17

2 Nombre domatique et b-domatique d'un graphe. **18**

2.1 Nombre domatique 18

2.2 Nombre b-domatique 20

2.2.1 Définitions et notations 20

2.3 Résultats fondamentaux 21

2.4 Nombre domatique du joint 25

2.5 Nombre domatique du produit cartécien $G_1 \square G_2$ 26

3 Nombre b-domatique dans les produits de graphes **28**

3.1 Le nombre b-domatique du joint de deux graphes 28

3.2 Le nombre b-domatique du produit cartésien de deux graphes 33

3.3 Le nombre b-domatique de la couronne $G \circ H$ 38

Introduction

La **théorie des graphes** est un très vaste domaine, en évolution constante tant du point de vue des applications que de celui des recherches fondamentales et constitue aujourd'hui un corpus de connaissances très important. La théorie des graphes est née au dix-huitième siècle en essayant de trouver des solutions à des problèmes considérés comme étant des curiosités mathématiques. Elle est devenue une branche des mathématique discrètes au début du vingtième siècle grace aux travaux de **König**, de **Menger**, de **Cayley**, puis de **Berge** [2] et de **Erdös**.

Les graphes constituent à la fois une théorie et un outils qui permettent de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de graphes. En 1822, le mot ″**graphe**″ est introduit par l'Anglais **J.J.Sylvester**. Un graphe est un dessin géométrique défini par deux ensembles: son ensemble **de sommets** et son ensemble **d'arêtes** (arcs, si le graphe est orienté), une arête étant une paire de sommets reliés. Il ne faut pas confondre un graphe et son dessiné un même graphe peut être dessiné de plusieur façon. La théorie des graphes introduit de nombreuses classes de graphes, des familles de graphes qui vérifient certaines propriétés. Les domaines d'applications des graphes sont diverses, justifiant une recherche importante, on peut citere les réseaux de communication, la gestion de la production et les problèmes d'ordonnancement des tâches, les flots dans les raiseaux, la chimie, la physique et l'économie, etc...

Ces nombreuses applications font de la théorie des graphes un sujet de recherche toujours prolifique.

Leonhard Euler (en 1736) proposa **le problème des sept ponts de Königsberg**, il s'interroge sur l'existance d'une promenade lui permettant de passer par tous les ponts de la ville une et une seule fois, et de revenir à son point de départ. Euler modélise ce problème

par un graphe: un sommet est associé à chaque parcelle de terre délimitée par la rivière et une arête est associé à chaque pont les reliant. Ainsi, une promenade passant par chacun des ponts une et une seule fois est alors un cycle eulérien dans ce graphe.

En effet, beaucoup de problèmes sur les graphes nécessitent d'une partition d'un ensemble d'objets d'après certaine conditions. Telle partition permette d'étudier la structure des graphes appartenant à une même classe. Cette partition peut être partition des ensembles dominants, partition domatique, etc...

Parmi les domaines les plus importants et très étudié en théorie des graphes sont les problèmes de domination dans les graphes, la technique de domination est devenue un outil très puissant dans la résolution des problèmes de la théorie des graphes. Généralement, il s'agit de trouver un ensemble de sommets d'un graphe qui satisfasse certaines conditions d'optimalité. L'histoire de la domination remonte au **dix-neuvième** siècle, grâce aux jeux d'échec. Ce n'est qu'en 1958, qu'elle est formalisée dans un contexte théorique par **Claude Berge**. Cependant, la notion du nombre domatique à été introduite par **Cockayne** et **Hedetniemi** [5] en 1977 **Hedetniemi** et **Laskar** (1984), ont introduit le concept du nombre domatique connexe. Puis en 1995, **Odile Favaron** [7] a introduit le nombre b**-domatique.**

Dans ce mémoire, nous intéréssons principalement à l'étude partition b-domatique dans produit des graphes Après une introduction générale, le mémoire s'atricule autour de **trois chapitre**.

Le premier chapitre, nous rappelons quelques concepts de base de la théorie des graphes, ainsi que les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire.

Le deuxième chapitre est consacré aux travaux de certains chercheurs concernant la partition domatique et ses variantes. Ensuite nous rappelons les principaux résultats existants sur la partition b-domatique.

Le troisième chapitre, nous proposons notre travail sur le nombre b-domatique du **joint** et le nombre b-domatique du **produit cartésien** de deux graphes, et nous déterminons les paramètres $bd_{G_1 \vee G_2}$ et $bd_{G_1 \square G_2}$dans certaines classes de graphes, au plus la couronne $bd_{G \circ H}$.

Enfin, nous donnons une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Généralités sur les graphes

Dans ce chapitre, nous allons introduire les définitions et notations de la théorie des graphes nécessaires à la compréhension.

1.1 Concepts et notations de graphes non orientés

Un graphe non orienté G est un couple (V, E), où V est l'ensemble des **sommets**, et E est un ensemble de paires d'éléments de V applées **arêtes.** Pour un graphe G, on notera $V(G)$ l'ensemble des sommets et $E(G)$ l'ensemble des arêtes. Un graphe est dit **trivial** s'il ne possède qu'un seul sommet et aucune arête.

- On appelle ordre d'un graphe G le nombre de ses sommets. On le note habituellement par n. Le nombre des arêtes de G est appelé taille et noté par m.
- Deux sommets u, v d'un graphe $G = (V, E)$ sont **voisins** ou **adjacents** s'ils ont au moins une arête qui les relie. Si $e = uv$ est une arête de G, alors u et v sont les extrémités de e, et e est dite incidente à u et v.
- Une **boucle** est une arête dont les deux extrémités sont identiques.
- Un graphe est dit simple s'il est **sans boucles** est **sans arêtes multiples**. Dans ce mémoire, tous les graphes considérés sont simples.

Exemple 1.1.1 *La Figure 1.1.1 montre un graphe simple* $G = (V, E)$ *avec* $V(G) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ *et* $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

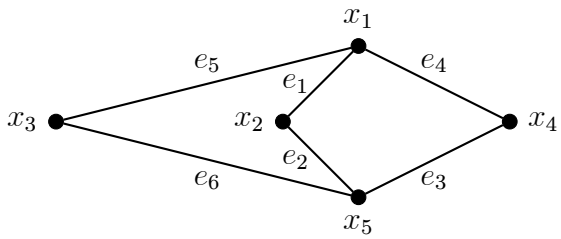


Figure 1.1.1 : Un graphe $G = (V, E)$.

1.1.1 Voisinages et degrés

- **Voisinage ouvert** d'un sommet v d'un graphe G, noté $N_G(v)$ est l'ensemble de tous les sommets adjacents à v. C'est à dire $N_G(v) = \{u \in V(G) : uv \in E(G)\}$.

- **Voisinage fermé** d'un sommet v d'un graphe G, noté $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.

- **Voisinage privé** d'un sommet v par rapport à un ensemble S est l'ensemble des sommets du voisinage fermé de v qui n'ont pas d'autres voisins dans S. Cet ensemble est noté $pn[v, S]$ et défini par $pn[v, S] = \{u\colon\ N_G[v] \cap S = \{u\}\}$.

- Soit S un sous-ensemble de V, le voisinage ouvert de S est $N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G\ (v)$ et le voisinage fermé est $N_G[S] = N(S) \cup S$.

- **Degré** d'un sommet v de G est le nombre d'arêtes incidentes à v. Il est noté $d(v)$ ou bien $d_G(v)$.

- Lorsque $d(v) = 0$, on dit que le sommet v est **isolé**, et lorsque $d(v) = 1$, on dit que le sommet v est **pendant**. L'ensemble des sommets pendants de G est noté par $L(G)$.

- Un sommet adjacent à au moins un sommet pendant est appelé sommet **support**. L'ensemble des sommets supports de G est noté par $S(G)$.

- Si un support v adjacent à un seule sommet pendant, alors v est un support faible, si non (adjacent à au moins deux sommets pendants) alors v est un support fort.

- Lorsque $d(v) = n - 1$, on dit que le sommet v est **universel.**

- **Degré maximum** d'un graphe G, noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés de ses sommets. En d'autres termes, $\Delta(G) = max_{v \in V} \{d(v)\}$.
- **Degré minimum** d'un graphe G, noté $\delta(G)$, est le minimum des degrés de ses sommets. En d'autres termes, $\delta(G) = min_{v \in V} \{d(v)\}$.

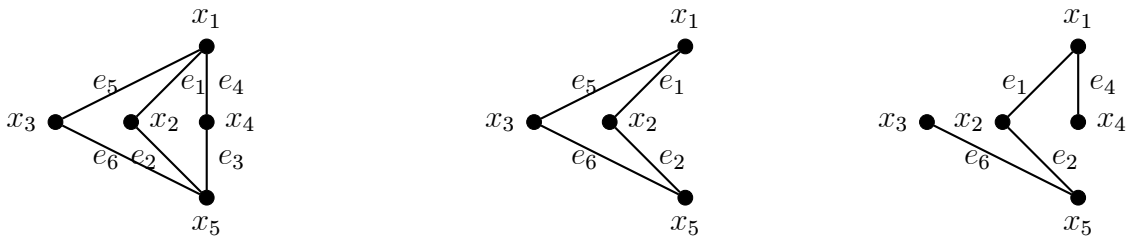
1.2 Graphes particuliers

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. On appelle **sous-graphe** de G, un graphe $H = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$. Pour un sous-ensemble $A \subseteq V$, le **sous graphe induit** par A, noté $G[A]$ où simplement $\langle A \rangle$, est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arête sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A.

Étant donné un graphe H, on dit que G est sans H si H n'est pas un des sous-graphes induits de G.

Un **graphe partiel** de G est un graphe obtenu en enlevant une ou plusieurs arêtes de G. Autrement dit, un graphe partiel de G est un graphe $G_B = (V, B)$ ayant le même ensemble de sommets, et ayant comme ensemble d'arêtes, un sous-ensemble de $E(G) : E(G_B) \subseteq E(G)$.

Un exemple de graphe partiel et un sous-graphe sont donnés dans la Figure 1.2.1 .



$G = (V, E)$ $\quad$ $G_A = (A, E_A)$ $\quad$ $G_B = (V, B)$

Figure 1.2.1 : Graphe simple G, Sous-graphe G_A et Graphe partiel G_B.

Graphe complémentaire

Le graphe complémentaire d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe noté $\overline{G}$, défini par $V(\overline{G}) = V(G)$ *et* $E(\overline{G}) = \{uv : u \in V(G), v \in V(G)$ *et* $uv \notin E(G)\}$.

Autrement dit, le complémentaire du graphe $G = (V, E)$, est un graphe avec le même ensemble de sommets V tel que deux sommets sont adjacents dans $\overline{G}$ si et seulement s'ils ne le sont pas de G.

- La Figure 1.2.2 représente un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

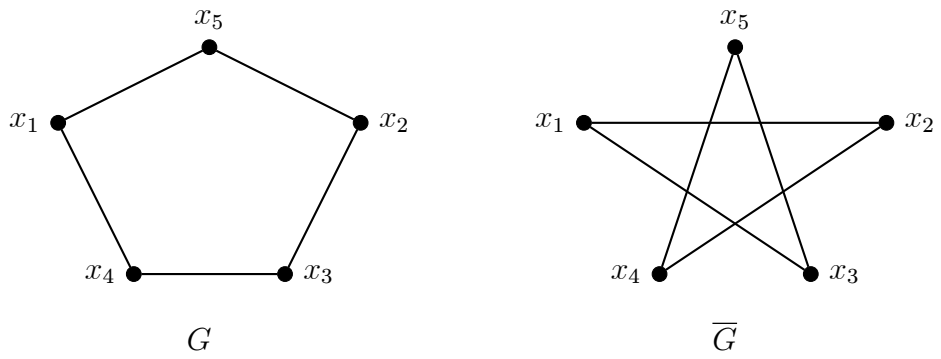


Figure 1.2.2 : Graphe G et son complémentaire $\overline{G}$.

Graphe complet

Un graphe complet est un graphe où chaque sommet est relié à tous les autres. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe chaque sommet est de degré $n - 1$.

La Figure 1.2.3 représente un graphe complet K_5.

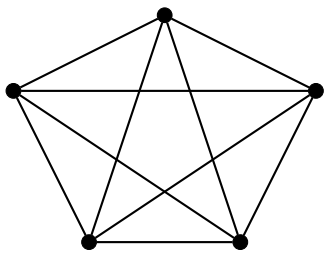


Figure 1.2.3 : Graphe complet K_5.

Clique

Une clique d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble de sommets de G qui engendre un graphe complet.

Une clique maximum de G est une clique de cardinalité maximale. La cardinalité d'une clique maximum est appelée nombre de clique. On la désigne par $\omega(G)$.

Exemple 1.2.1 *Dans le graphe G de la Figure 1.2.4 , l'ensembles $A = \{a, d, e, h\}$ représentent un clique de cardinalité maximal de G, avec $\omega(G) = 4$.*

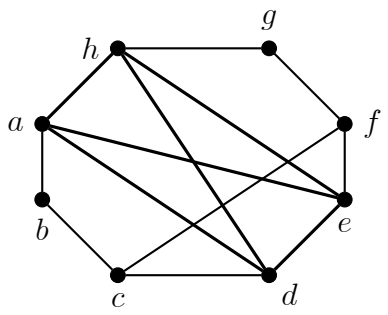


Figure 1.2.4 : Le clique $A = \{a, d, e, h\}$.

Graphe biparti

Un graphe est dit **biparti** si l'on peut partitionner l'ensemble de ses sommets en deux sous-ensembles V_1 et V_2 tels que les sous-graphes $G[V_1]$ et $G[V_2]$ sont vides.

Un graphe **biparti complet** est un graphe biparti tel que tous les sommets de V_1 sont adjacents à tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ le graphe biparti complet est noté par $K_{p,q}$.

La Figure 1.2.5 représente un graphe biparti complet .

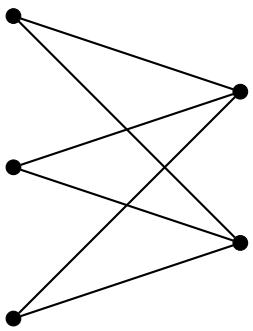


Figure 1.2.5 : Graphe biparti complet $K_{3,2}$.

Graphe régulier

Un graphe est régulier si tous ses sommets ont le même degré.

Et d'autre part nous avous : $\delta(G) = \Delta(G)$.

Un graphe est k-**régulier** ou régulier de degré k si tous ses sommets sont de degré k.

Exemple 1.2.2 *Prenons par exemple le graphe de Petersen G_{10} de la Figure 1.2.6 . Le graphe G_{10} est un graphe* 3-***régulier.***

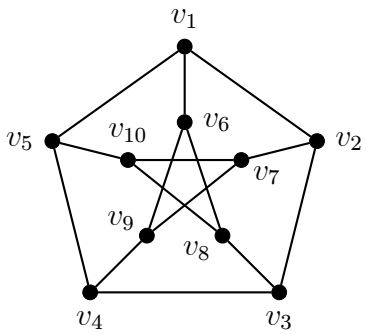


Figure 1.2.6 : Le graphe de Petersen G_{10}.

Étoile

Un cas particulier d'un graphe biparti complet dans lequel $|V_1| = 1$ et $|V_2| = s$ est appelé une étoile et noté $K_{1,s}$ (ou bien noté S_s). Le sommet de V_1 est appelé **centre** ou **sommet central** de l'étoile.

La Figure 1.2.7 représente une étoile $K_{1,5}$.

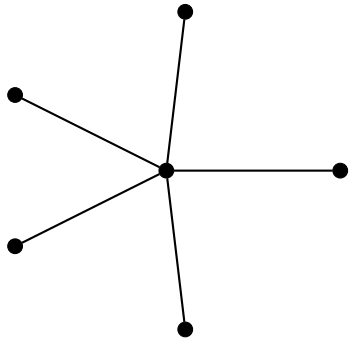


Figure 1.2.7 : étoile $K_{1,5}$.

Une double étoile est le graphe obtenu en ajoutant une aréte reliant les deux centres des étoiles $K_{1,p}$ et $K_{1,q}$, et notée par $S_{p,q}$.

La Figure 1.2.8 représente double étoile $S_{3,3}$.

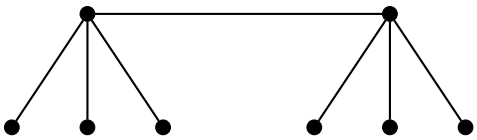


Figure 1.2.8 : Double étoile $S_{3,3}$.

Chaînes et cycles

Définition 1.2.1 *Une chaîne d'un graphe non orienté $G = (V, E)$ est une suite alternée de sommets et d'arêtes de la forme (v_0,e_0,v_1,..., e_k,v_k). Où k est un entier positif ou nul, les v_i sont des sommets de G et les e_i sont des arêtes de G tels que pour tout $i \in \{0, 1, ..., k-1\}$, v_i et v_{i+1} sont extrémités de l'arête e_i. L'entier k est la longueur de la chaîne. Une chaîne est dite simple si elle ne contient pas deux fois une même arête. Elle est élémentaire si elle ne contient pas deux fois un même sommet. Une chaîne minimale induite par n sommets, notée par P_n, est une chaîne élémentaire.*

Définition 1.2.2 *Un cycle est une chaîne telle que les extrémités sont confondues. Un cycle élémentaire est une chaîne élémentaire telle que ses deux extrémités sont confondues, il est noté par C_n.*

Par exemple voir la Figure 1.2.9 .

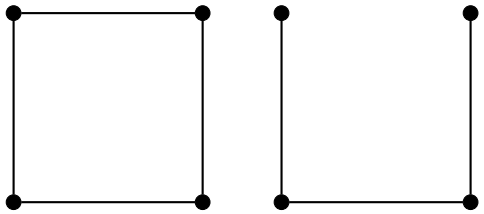


Figure 1.2.9 : Cycle C_4 et Chaîne P_4.

1.3 .

Graphe connexe

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **connexe**, s'il existe une chaîne reliant toute paire de sommets $u, v \in V$.

Une composante connexe d'un graphe G est un sous-graphe maximal connexe.

Un sommet v d'un graphe $G = (V, E)$ est dit **sommet d'articulation** si sa suppression de V augmente le nombre de composantes connexes de G. L'arête $e \in E$ s'appelle un **isthme** si sa suppression de E augmente le nombre de composantes connexes de G.

Exemple 1.3.1 *Le graphe connexe de la Figure 1.3.1 possède un isthme gh, car $G - gh$ est non connexe, et possède aussi trois sommets d'articulations d, g, h, car $G - g$, $G - h$ et $G - d$ sont non connexes.*

Le graphe G est connexe puisque il contient une seule composante connexe.

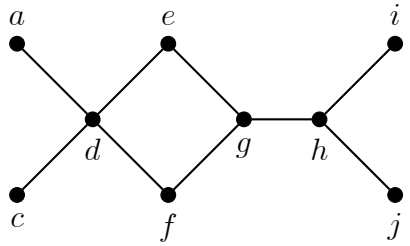


Figure 1.3.1 : Graphe possède un isthme (gh) et trois sommets d'articulations(d,g,h)

Arbre

Un arbre est un graphe connexe sans cycles. Il comporte exactement $(n-1)$ arêtes, et il est noté généralement T.

La Figure 1.3.2 représente un arbre T.

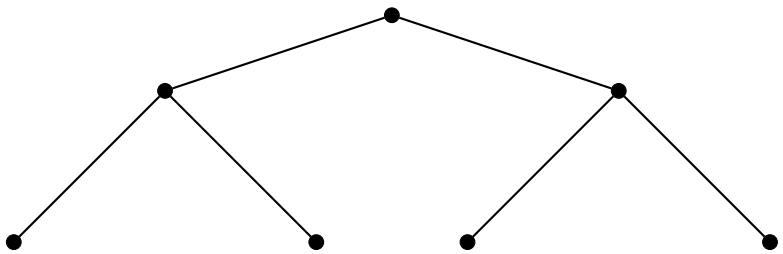


Figure 1.3.2 : Un arbre.

Forêt

Une forêt est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des arbres.

1.4 Invariants de graphes

Les graphes G et H sont dits isomorphes et on écrit $G \cong H$ s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes, $f : V(G) \to V(H)$ tel que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs images par la fonction bijective sont adjacentes dans l'autre graphe.

Si deux graphes sont **isomorphes** alors ils ont des propriétés communes. Ces propriétés communes sont appelées invariants de graphes. En d'autre termes un invariant est une propriétés stable par isomorphisme. Le nombre de sommets et d'arêtes sont deux invariants de base d'un graphe. Nous définissons ci-après quelques invariants de graphes intervenant dans la suite.

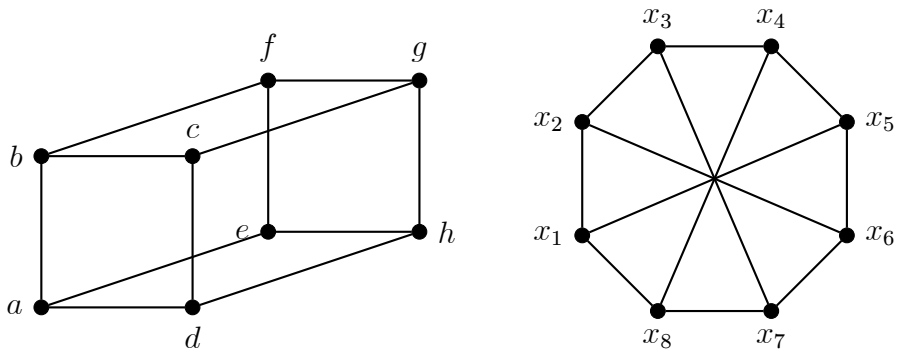


Figure 1.4.1 : Deux graphes isomorphes.

Un stable S (appellé aussi ensemble indépendant) dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de V deux à deux non adjacents. Un stable maximum de G est un stable de cardinalité maximale. La cardinalité d'un stable maximum est appelée nombre de stabilité (ou nombre d'indépendance). On la désigne par $\alpha(G)$, tel que

$$\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ est un stable de } G\}.$$

Exemple 1.4.1 *Dans le graphe G de la figure 1.4.2 , l'ensemble $S = \{b, e\}$ représente un stable maximum de G, d'où $\alpha(G) = 2$.*

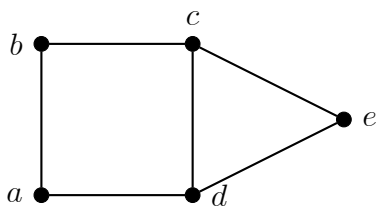


Figure 1.4.2 : $S = \{b, e\}$ est un ensemble stable avec $\alpha(G) = 2$.

1.5 La coloration

Une coloration (propre) d'un graphe G est une application c de $V(G)$ dans un ensemble $\{1, 2, ...k\}$ d'entiers positifs, appelés couleurs, telle que deux sommets adjacents quelconques n'aient pas la même couleur.

Ainsi, chaque ensemble de sommets de même couleur est un stable de G. Autrement dit, une coloration est une partition de l'ensemble des sommets $V(G)$ en stables.

Couplage

Un couplage dans un graphe G est un sous ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. On désigne par $\beta(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G.

Un sommet d'un graphe est saturé par un couplage de ce graphe lorsqu'il est extrémité d'une arête de ce couplage. Autrement, il est insaturé par ce couplage. Un couplage qui sature tous les sommets de G est dit parfait.

Exemple 1.5.1 *Dans la figure 1.5.1 l'ensemble des arêtes* $M = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ *représente un couplage parfait dans le graphe* G.

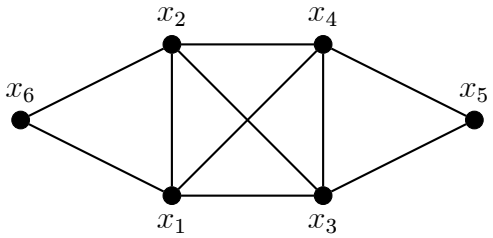


Figure 1.5.1 : $M = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ est un couplage parfait et $R = \{x_1x_6, x_2x_4, x_3x_5\}$ est un recouvrement.

1.6 Ensemble minimal, enemble maximal

Soient $G = (V, E)$ un graphe et P une propriété.

- Un sous-ensemble A de V est dit minimal par rapport à la propriété P si aucun sous-ensemble strict de A ne vérifie cette propriété.
- A est dit maximal par rapport à la propriété P, si aucun sous-ensemble de V contenant A et différent de A ne vérifie la propriété P.
- Un sous-ensemble B de V est minimum ou de taille minimale par rapport à la propriété P si aucun ensemble plus petit (pas nécessairement un sous-ensemble de B) ne vérifie cette propriété.
- B est maximum ou de taille maximale par rapport à P, si aucun ensemble plus grand que B (sans nécessairement le contenir) ne vérifie la propriété.

1.7 La domination dans les graphes

On peut dire que le problème des "cinq reines" est à l'origine de l'etude des ensembles dominants dans les graphes.

En 1862, De Jaenisch a etudié le problème des reines dans un jeu d'échecs, il voulait déterminer le nombre minimum de reines peuvant être placées sur l'echiquier de telle sorte que toutes les cases de ce dernier soient attaquées ou occupées par une reine en un seul coup. Il à eté montre que cinq est le nombre minimum de reines pour un échiquier . Le problème de la reine dominante peut être énoncé en général comme la domination des sommets d'un graphe, et le nombre minimum de reines restein détermine. Claude Berge [2] a déduit pour le premiere fois le concept du nombre de domination d'un graphe. Le terme "ensemble dominant" et "nombre de domination" est utilise pour la première fois par Ore [10] . En 1977, Cockayne et Hedetniemi [5] ont publie une etude des rares resultats connus a l'epoque concernant les ensembles dominants dans les graphes.

Dans ce papier, Cockayne et Hedetniemi [5] ont les premiers qui ont utiliser une notation $\gamma(G)$ pour le nombre de domination d'un graphe, qui est devenu par la suite la notation acceptée.

Proposition 1.7.1 *Un sous-ensemble des sommets D de V est dit ensemble dominant de G si tout sommet de $V - D$ possède au moins un voisin dans D.*

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un ensemble dominant D est dit dominant minimal si pour tout sommet $v \in D$, l'ensemble $D - \{v\}$ n'est pas un dominant.

Le nombre de domination inférieur d'un graphe G (appelé nombre de domination), noté $\gamma(G)$, représente la cardinalité minimal d'un ensemble dominant de G.

Un ensemble dominant de G de cardinal minimum est noté $\gamma(G)$-ensemble. On note qu'un graphe G peut avoir plusieurs $\gamma(G)$-ensembles.

Exemple 1.7.1 *Dans le graphe de la Figure 1.7.1 , l'ensemble $D = \{u, v\}$ est un ensemble dominant de G.*

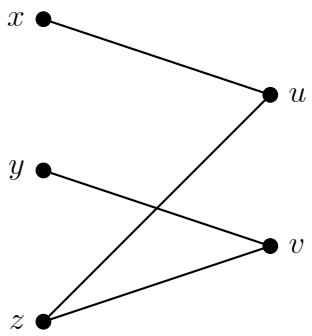


Figure 1.7.1 : graphe simple $G = (V, E)$ d'ordre 5.

Exemple 1.7.2 *Le nombre de domination du graphe G de la Figure 1.7.1 est égal à 2 ($\gamma(G) = 2$), puisqu'il n'existe aucun ensemble dominant de G de cardinal 1. D'où $D = \{u, v\}$ est un $\gamma(G)$-ensemble.*

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes des ensembles dominants dans les graphes, en voici des exemples:

1. Un ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant dans G si pour tout sommet $v \in V - D$, $|N(v) \cap D| \geq 1$.

2. Un ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant dans G si pour tout sommet $v \in V$, $|N[v] \cap D| \geq 1$.

3. Un ensemble $D \subseteq V$ est un ensemble dominant dans G si $\underset{v \in D}{\cup} N[v] = V$

4. Si D est un ensemble dominant d'un graphe G, alors D contient tous les sommets isolés de G.

5. Puisque le nombre de domination est défini pour tout graphe, et puisque tout graphe est dominé par son ensemble de sommets, alors le nombre de domination est toujours défini et $1 \leq \gamma(G) \leq |V(G)|$

1.8 Le produit des graphes

1.8.1 Couronne d'un graphe

La couronne $G_1 \circ H$ est le graphe $G = (V, E)$ tel que $V(G_1) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ et $H_1, H_2, ..., H_n$ sont les n copies de H dans $G_1 \circ H$,tel que v_i est adjacent à tout les sommets dans H_i .

La Figure 1.8.1 représente la couronne $C_4 \circ P_2$.

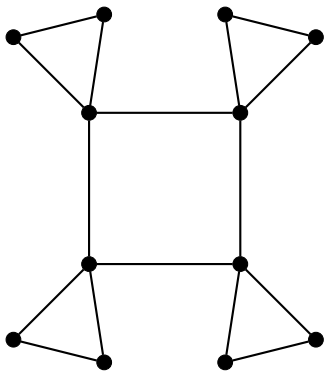


Figure 1.8.1 : Graphe $G = C_4 \circ P_2$.

1.8.2 Produit cartésien

Du **produit cartésien** $G_1 \square H_1$est le graphe $G = (V, E)$ tel que $V = \{(u, v) : u \in V(G_1), v \in V(H_1)\ \}$ et deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacent si $u_1 = u_2$ et $v_1 = v_2$ et $v_1v_2 \in E(H_1)$ ou $u_2 = v_2$ et $u_1u_2 \in E(G_1)$.

La Figure 1.8.2 représente le produit cartésien de deux graphes C_3 et P_3

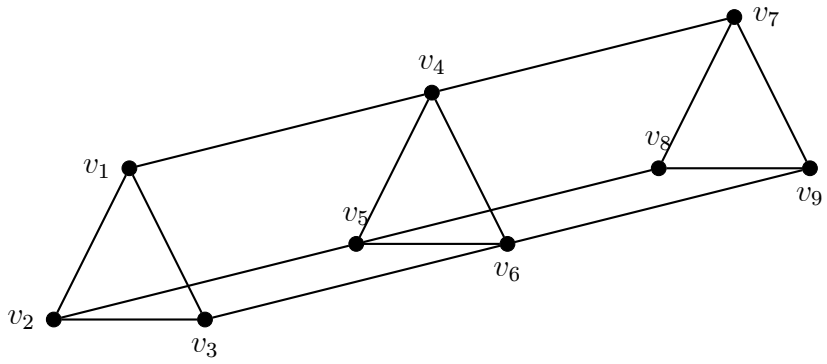


Figure 1.8.2 : Graphe $G = P_3 \square C_3$.

1.8.3 Joint et union

Etant donné deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ avec $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

union de G_1 et G_2 est le graphe $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ et leur **joint** est le graphe $G_1 \vee G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_{1,2})$ tel que $E_{1,2} = \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$.

La Figure 1.8.3 représente la joint $P_2 \vee P_3$.

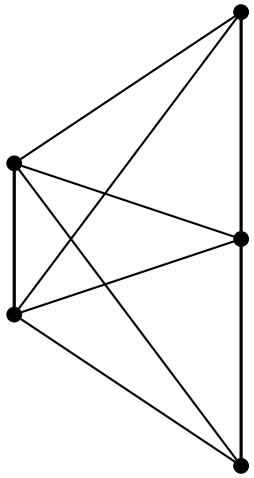


Figure 1.8.3 : Graphe $G = P_3$ V P_2.

Chapitre 2

Nombre domatique et b-domatique d'un graphe.

2.1 Nombre domatique

Un ensemble dominant d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de V tel que tout sommet qui ne se trouve pas dans C est adjacent à un sommet en $\mathcal{C}$.

Le nombre domatique $d(G)$ d'un graphe $G = (V, E)$ est le nombre entier positif maximal k tel que puisse être partitionné en k disjoints par paire ensembles dominants $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_b$ Une partition de V en ensembles dominants disjoints deux à deux s'appelle une partition domatique.

Dans un certain sens le nombre domatique est analogue au nombre chromatique d'un graphe, qui est le entier positif minimum k tel que l'ensemble de sommets puisse être partitionné en k ensembles stables disjoints.

Une partition domatique d'un graphe G est une partition de son ensemble de sommets V en ensembles dominants.

La partition $\{V\}$ de cardinalité 1 est domatique et les partitions domatiques les plus intéressantes sont celles de grande cardinalité.

Définition 2.1.1 *Soit $\mathcal{C}$ une classe d'une partition $\mathcal{P}$. Un sommet $x \in \mathcal{C}$ est dominé par $V \setminus \mathcal{C}$ si x admet au moins un voisin dans chaque classe différente de sa classe $\mathcal{C}$.*

Définition 2.1.2 *Le nombre domatique de G est le plus grant entier k pour le quel il existe une partition de l'ensemple des sommet en k ensemples dominants*

On note qu'une partition est domatique si et seulement si chaque sommet $x \in \mathcal{C}$ est dominé par chaque classe différente de sa classe propre.

Définition 2.1.3 *Le nombre domatique d'un graphe $G = (V, E)$, noté $d(G)$ est le nombre maximum de classes dominants d'une partition domatique de G*

Exemple 2.1.1 *Dans le graphe de la Figure 2.1.1 , $d(G = C_6) = 3$ est $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3\}$ est le nombre maximum de classes qui partitionnent l'ensemble V tel que : $\mathcal{C}_1 = \{x_1, x_2\}$,$\mathcal{C}_2 = \{x_3, x_6\}$ et $\mathcal{C}_3 = \{x_4, x_5\}$.*

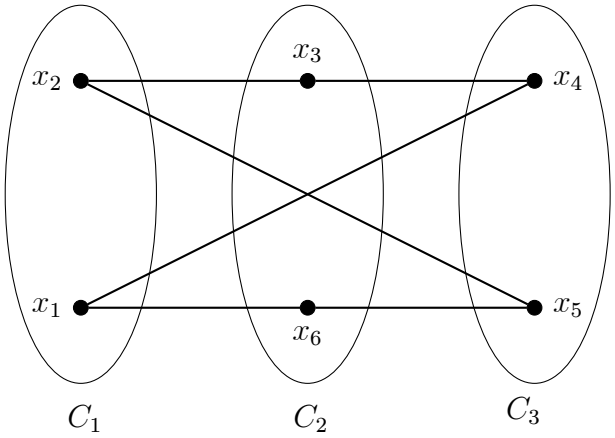


Figure 2.1.1 : Partition domatique du cycle C_6 .

Cockayne et Hedetniemi [5] ont montré le résultat suivant.

Proposition 2.1.1 *([5])Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 1$. $d(G) \geq 2$ si et seulement si G sans sommet isolé.*

Proposition 2.1.2 ([5]) *Tout graphe G de degré minimum δ, satisfait*

$$d(G) \leq \delta + 1.$$

Proposition 2.1.3 ([5]) *Pour tout graphe G, on a*

$$d(G)\gamma(G) \leq n.$$

Proposition 2.1.4 (*[5]*)*Si H est un sous graphe couvrant de G, alors*

$$d(H) \leq d(G).$$

Monika [9] donnée le nombre domatique de certains graphes.

Proposition 2.1.5 (*[9]*)

1. $d(P_n) = 2$, *pour tout* $n \geq 2$.
2. $d(C_n) = \begin{cases} 3 & si \quad n \equiv 0 \,(\mathrm{mod})\, 3. \\ 2 & sinon \end{cases}$
3. $d(K_n) = n$, *pour tout* $n \geq 2$.
4. $d(K_{m,n}) = \min\{m, n\}$, *pour tout* $n, m \geq 2$.
5. $d(S_n) = 2$, *pour tout* $n \geq 1$.

2.2 Nombre b-domatique

2.2.1 Définitions et notations

Définition 2.2.1 *Une partition domatique $\mathcal{P}$ est dite b-maximale si aucune partition domatique $\mathcal{P}'$ de cardinalité plus grande que $\mathcal{P}$ peut être obtenue en rassemblant des sous-ensembles de certaines classes de $\mathcal{P}$ pour former une nouvelle classe.*

* Plus formellement la partition b-maximale peut être définie comme suit.

Définition 2.2.2 *$\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_p\}$ est b-maximale s'il n'existe pas p sous-ensembles $\mathcal{C}'_i$ de $\mathcal{C}_i$ (parmi eux $p-1$ peuvent être vides) telle que la partition*

$$\mathcal{P}' = \{\mathcal{C}_1 \backslash \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}_2 \backslash \mathcal{C}'_2, ..., \mathcal{C}_p \backslash \mathcal{C}'_P, \mathcal{C}'_1 \cup \mathcal{C}'_2 \cup ... \cup \mathcal{C}'_P\} \text{ soit domatique.}$$

* La cardinalité minimale d'une partition b-maximale de G est appelée le nombre b-domatique et notée par $bd(G)$.

Exemple 2.2.1 *Dans le graphe de la Figure 2.2.1* $bd(G) = 2$ *et* $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$.

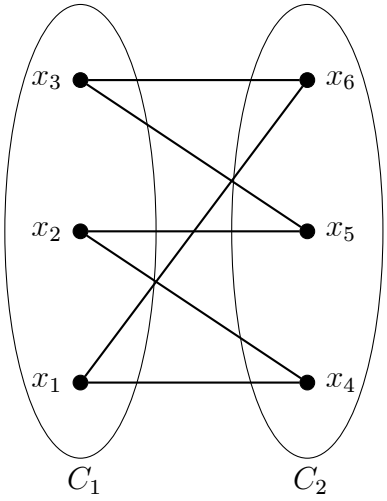


Figure 2.2.1 : Partition domatique b-maximal du cycle C_6 .

Remarque 2.2.1 *1. Une partition domatique b-maximale de cardinalité maximum est une partition domatique.*

2. Si $\delta = 0$, alors $\{V\}$ est l'unique partition domatique et $1 = bd(G) = d(G)$.

2.3 Résultats fondamentaux

Proposition 2.3.1 *([7]) Tout graphe G de degré minimum $\delta \geq 1$ satisfait:*

$$2 \leq bd(G) \leq d(G) \leq \delta + 1.$$

* La Proposition 2.3.2 est une autre formulation de la définition d'une partition b-maximal et les Propositions de 2.3.3 à 2.3.5 sont des corollaires de la Proposition 2.3.2.

Proposition 2.3.2 ([7]) *Une partition domatique $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_k\}$ est une partition b-maximal si et seulement si pour tout choix d'ensembles dominants minimaux $\mathcal{D}_i$ de G respectivement contenus dans $\mathcal{C}_i$, $V \setminus \cup_{i=1}^{k} \mathcal{D}_i$ ne domine pas G.*

Proposition 2.3.3 ([7]) *Toute partition domatique $\mathcal{P} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_k\}$ dont chaque classe est un ensemble dominant minimal de G .*

Proposition 2.3.4 ([7]) *Si G admet une partition b-maximale de cardinalité k, alors il existe une famille $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_k\}$ de k ensembles dominants minimaux disjoints de G tel que $V \setminus \cup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i$ n'est pas un ensemble dominant de G.*

Proposition 2.3.5 ([7]) *S'il existe une famille $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_k\}$ avec k ensembles dominants minimaux disjoints de G, et l' indice i_0 tel que $V \setminus \cup_{i=1}^{k} \mathcal{C}_i$ ne domine pas G, mais $V \setminus \cup_{i=1, i \neq i_0}^{k} \mathcal{C}_i$ est un ensemble dominant indivisible de G, alors G admet une partition b-domatique de cardinalité k.*

* Le Théorème suivant détermine $bd(G)$ lorsque G est non connexe.

Théorème 2.3.1 ([7]) *Soit $G_1, ..., G_k$ les composantes d'un graphe non connexe G sans sommets isolés. Alors*

$$bd(G) = \min \{bd(G_i) \mid 1 \leq i \leq k\}.$$

Théorème 2.3.2 ([7]) *Soit b, n des entiers tels que $2 \leq b \leq n$. Alors il existe un graphe connexe G d'ordre n tel que*

$$bd\,(G) = b.$$

* Cockayne et Hedetniemi [5] ont montré le résultat suivant.

Proposition 2.3.6 ([5]) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta(G)$. Alors*

$$d(G) \leq \min\{\frac{n}{\gamma(G)}, \delta(G) + 1\}. \tag{2.3.1}$$

* Favaron [7] a montré que si G possède un sommet isolé, alors $\{V\}$ est l'unique partition domatique de G. Il a montré également que le nombre domatique de G est une borne supérieure du nombre b-domatique de G.

Proposition 2.3.7 ([7]) *Soit G un graphe de degré minimum $\delta(G)$. Si $\delta(G) = 0$, alors $bd(G) = d(G) = 1$, et si $\delta(G) \geq 1$, alors $2 \leq bd(G) \leq d(G)$.*

Des Propositions 2.3.6 et 2.3.7 découle le résultat suivant:

Proposition 2.3.8 ([7]) *Tout graphe G de degré minimum $\delta(G)$ satisfait*

$$bd(G) \leq \min\{\frac{n}{\gamma(G)}, \delta(G) + 1\}.$$

Si G est un graphe sans sommets universels, alors $\gamma(G) \geq 2$. Ainsi, en utilisant la Proposition 2.3.8, on obtient le corollaire suivant:

Corollaire 2.3.1 *Si G est un graphe à n sommets et sans sommets universels, alors $bd(G) \leq \frac{n}{2}$.*

* Benatallah et al donné une condition suffisante pour laquelle une partition domatique donnée d'un graphe G est b-maximale est donnée ci-dessous. Pour un sommet $v \in V$, notons par U_v la classe d'une partition domatique $\mathcal{P}$ contenant v.

Théorème 2.3.3 ([1]) *Soit $\mathcal{P}$ une partition domatique d'un graphe $G = (V, E)$. Si G possède un sommet v tel que pour tout sommet $u \in N_G[v]$, l'ensemble $pn[u, U_u]$ est non vide, alors $\mathcal{P}$ est une partition b-maximale de G.*

Nous présentons ci-après d'autres classes de graphes dont le nombre b-domatique est égal à 2.

Théorème 2.3.4 ([1]) *Si G contient un sommet tel que ses voisins forment un ensemble indépendant, alors*

$$bd(G) = 2.$$

Définition 2.3.1 *Soit H un graphe d'ensemble de sommets $V(H)$.*

- *Etant donnée une permutation π des sommets de $V(H)$, le prisme de H par rapport à π est le graphe obtenu en prenant deux copies disjointes H_1 et H_2 de H, et joignant tout sommet $u \in V(H_1)$ avec $\pi(u) \in V(H_2)$.*
- *Le prisme complémentaire de H est le graphe formé par l'union disjointe de H et de $\overline{H}$ en ajoutant les arêtess d'un couplage parfait entre les sommets correspondants de H et de $\overline{H}$.*

Proposition 2.3.9 ([1]) *Si G est le prisme ou le prisme complémentaire d'un certain graphe H, alors*

$$bd(G) = 2.$$

* Chang [3] a montré que si v est un sommet universel, alors $d(G) = d(G \diagdown v) + 1$. Benatallah et al donné le résultat similaire de Chang [3] sera établie pour le nombre b-domatique.

Proposition 2.3.10 ([1]) *Si v est un sommet universel dans G, alors*

$$bd(G) = bd(G \diagdown v) + 1.$$

Le graphe W_6 présenté par (voir la Figure 2.3.1), possède un sommet universel v_0 qui satisfait la propriété de la Proposition 2.3.10.

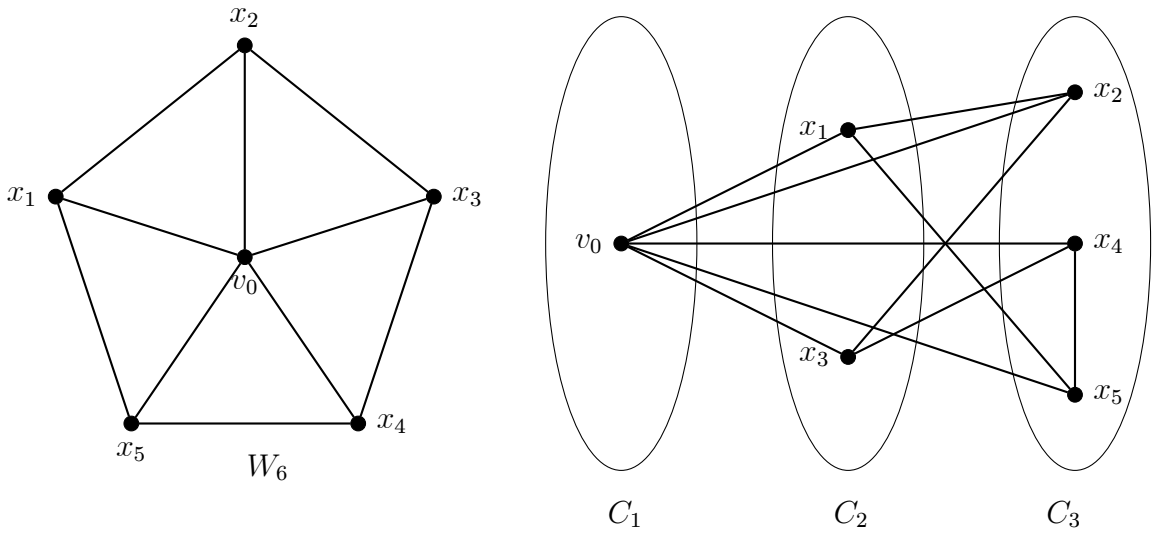


Figure 2.3.1 : Partition domatique b-maximal d'un graphe W_6.

Proposition 2.3.11 ([7]) *Soit $K_{p,q}$ un graphe bipartite complet avec $2 \leq p \leq q$.*

$$bd(K_{p,q}) = 2 \text{ et } d\,(K_{p,q}) = p.$$

Corollaire 2.3.2 ([7]) :

1. Le cycle C_n satisfait $bd\,(C_n) = 2$, pour tout $n \geq 4$.
2. chaque graphe connexe de degré minimum $\delta = 1$, et en particulier chaque arbre non-trivial, satisfait $bd(G) = d(G) = 2$.
3. La clique K_n satisfait, $bd(K_n) = d(K_n) = n = \delta + 1$.

2.4 Nombre domatique du joint

Théorème 2.4.1 (*[9]*)*Pour deux graphes* G_1, G_2 *nous avons*

$$\begin{aligned}\max\{d(G_1)+d(G_2), \min\{|V(G_1)|, |V(G_2)|\} &\leq d(G_1 \vee G_2)\\ &\leq \min\{\delta(G_1)+|V(G_2)|, \delta(G_2)+|V(G_1)|\}+1.\end{aligned}$$

Corollaire 2.4.1 (*[9]*) :

1. Siot G un graphe et K_m un graphe complet d'ordre $m \geq 1$ alors $d(G \vee K_m) = d(G)+m$.
2. Pour $n \geq 4$, $d(P_n \vee P_n) = n$.
3. Pour $n, m \geq 2, d(S_n \vee S_m) = 2 + \min\{n, m\}$.

Exemple 2.4.1 *La Figure 2.4.1 représente une partition domatique de* $S_3 \vee S_2$ *tel que* $d(S_3 \vee S_2) = 4$.

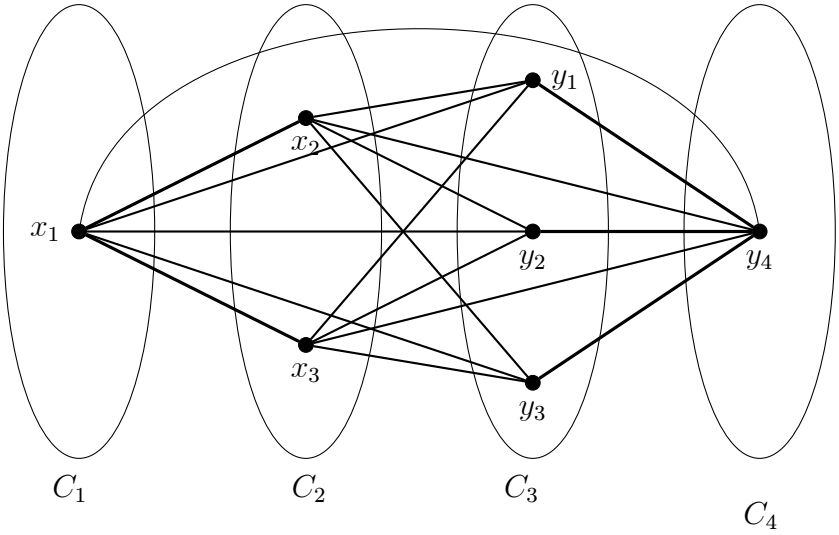


Figure 2.4.1 : Partition domatique du joint S_3 V S_2 .

2.5 Nombre domatique du produit cartécien $G_1 \square G_2$

Dans [3], il a été calculé le nombre domatique du produit cartésien $P_n \square P_m$, pour $m, n \geq 2$.

Proposition 2.5.1 *([3]) pour $n, m \geq 2$,*

$$d(P_n \square P_m) = \begin{cases} 2 & \text{si } m = n = 2 \text{ ou } n = 4 \text{ et } m = 2 \\ & \text{ou } m = 4 \text{ et } n = 2 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

* Nous calculons ce nombre pour le produit cartésien de deux graphes spéciaux.

Proposition 2.5.2 *([9]) Pour deux graphes G_1, G_2 nous avons*

$$\max\{d(G_1), d(G_2)\} \leq d(G_1 \square G_2) \leq \delta(G_1) + \delta(G_2) + 1.$$

Corollaire 2.5.1 *([9]) Pour $n, m \geq 1$,*

$$d(S_n \square S_m) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = m = 1 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 2.5.1 *([9]) Si G un grahe d'ordre m, alors $d(K_n \square G) = n$, pour $n \geq m \geq 2$.*

Corollaire 2.5.2 *([9])* :

1. Pour $n, m \geq 2$, $d(K_n \square K_m) = \min\{n, m\}$.
2. Pour $n, m \geq 2, d(P_n \square K_m) = \begin{cases} 3 & \text{si } m = 2 \text{ et } n \in \{3, 5, 6, 7, ...\} \\ m & \text{sinon} \end{cases}$.
3. Soit $n \geq 2, m \geq 3$. Si $m \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$, alors $d(P_n \square C_m) = 4$.

Nous considérons maintenant le produit cartésien de deux graphes bipartites complets.

Proposition 2.5.3 *([9]) Soit $n \geq 2$. Alors*

$$d(K_{n,n} \square K_{n,n}) = 2n.$$

Proposition 2.5.4 (*[9]*) *Soit* $m \geq 3$, *Alors*

$$d(P_2 \square C_m) = \begin{cases} 4 & si \;\; m \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4) \\ 3 & sinon \end{cases} .$$

Exemple 2.5.1 *La Figure 2.5.1 représente une partition domatique de* $C_3 \square P_2$ *tel que* $d\,(C_3 \square P_2) = 3$.

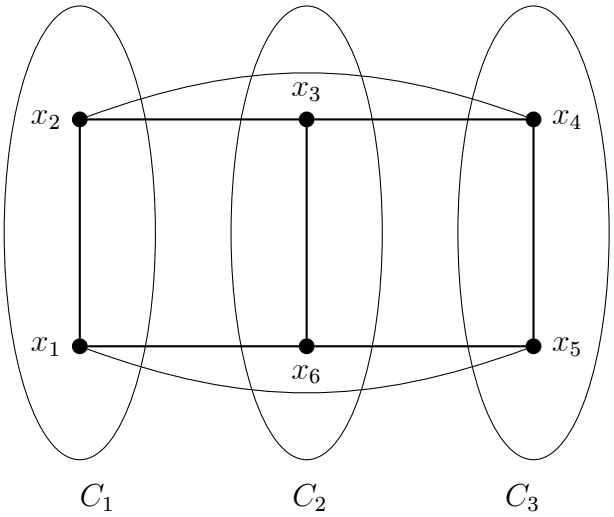


Figure 2.5.1 : Partition domatique du produit cartésien $G = P_2 \square C_3$.

Chapitre 3

Nombre b-domatique dans les produits de graphes

Le premier papier traitant le nombre domatique du joint , du produit cartésien et de l'union de deux graphes a été publié en 1994 par Chang [3]. Dans ce chapitre, nous étudions différents problèmes liés à la partition domatique b-maximale du produit de deux graphes. Principalement, nous donnons des bornes sur le nombre b-domatique du joint et du produit cartésien de deux graphes.

3.1 Le nombre b-domatique du joint de deux graphes

* Nous commençons cette section par la définition suivante.

Définition 3.1.1 *Soit $\mathcal{P}$ une partition domatique b-maximale d'un graphe G et soit U une classe de $\mathcal{P}$. Un sommet $v \in U$ est dit non-transférable si pour tout sommet $u \in N[v]$, l'ensemble $pn[u, U_u]$ est non vide.*

Par la définition du joint de deux graphes G_1 et G_2, on trouve que

$$\delta(G_1 \vee G_2) = \min\{\delta(G_1) + |V(G_2)|, \delta(G_2) + |V(G_1)|\},$$

et par les Propositions 2.3.6 et 2.3.7, on constate que

$$bd(G_1 \vee G_2) \leq \min\{\delta(G_1) + |V(G_2)|, \delta(G_2) + |V(G_1)|\} + 1.$$

Dans ce qui suit, nous allons présenter d'autres bornes supérieures sur le nombre b-domatique dans le produit de graphes. Rappelons qu'une partition b-maximale de cardinalité minimale est appelée une *bd*-partition.

Nous donnons une condition sur un sommet d'une classe d'une partition domatique qui ne peut pas être transférable à une autre nouvelle classe.

Corollaire 3.1.1 *Soit P une partition domatique d'un graphe $G = (V,\ E)$. Si G a un sommet v tel que pour chaque $u \in N_G\ [v]$ l'ensemble $pn\ [u,\ U_{\{u\}}]$ n'est pas vide, alors v ne peut pas être transférable vers d'autres nouvelles classes de $\mathcal{P}'$ supérieur à $\mathcal{P}$ D'autre part, s'il existe un sommet v tel que pour chaque $u \in N_G[v]$ l'ensemble $pn\ [u,\ U_{\{u\}}]$ soit vide, alors v peut être transférable à d'autres nouvelles classes de $\mathcal{P}'$.*

Proposition 3.1.1 *Soient $\mathcal{P}(G_1)$ et $\mathcal{P}(G_2)$ deux bd-partitions domatiques de G_1 et G_2, respectivement. Si tous les sommets appartenant aux classes de $\mathcal{P}(G_1)$ (ou $\mathcal{P}(G_2)$) ne sont pas transférables, alors*

$$bd(G_1 \vee G_2) \leq bd(G_1) + bd(G_2).$$

Preuve. Supposons que tous les sommets de $\mathcal{P}(G_1)$ sont non-transférables. Notons que pour $t = 1, 2$, $|\mathcal{P}(G_t)| = bd(G_t)$ et par suite

$$|\mathcal{P}(G_1)| + |\mathcal{P}(G_2)| = bd(G_1) + bd(G_2). \tag{3.1.1}$$

Posons $k = bd(G_1) + bd(G_2)$, $\mathcal{P}(G_1) = \{A_1, \ldots, A_{bd(G_1)}\}$ et $\mathcal{P}(G_2) = \{B_1, \ldots, B_{bd(G_2)}\}$. Il est aisé de voir que $V(G_1 \vee G_2) = (\bigcup_{i=1}^{bd(G_1)} A_i) \cup (\bigcup_{j=1}^{bd(G_2)} B_j)$. Observons que chaque classe $A_i, 1 \leq i \leq bd(G_1)$, domine tous les sommets de $V(G_2)$ et chaque classe B_j, $1 \leq j \leq bd(G_2)$, domine tous les sommets de $V(G_1)$. Vu que les classes A_i et B_j sont disjointes, alors $\mathcal{P}(G_1) \cup \mathcal{P}(G_2)$ est une partition domatique de $G_1 \vee G_2$. Posons $\mathcal{P}(G_1 \vee G_2) = \mathcal{P}(G_1) \cup \mathcal{P}(G_2)$. Il est immédiat de voir que

$$|\mathcal{P}(G_1)| + |\mathcal{P}(G_2)| = |\mathcal{P}(G_1 \vee G_2)|\,. \tag{3.1.2}$$

Soit $U_i = A_i$ pour $i = 1, ..., bd(G_1)$ et $U_{bd(G_1)+j} = B_j$ pour $j = 1, ..., bd(G_2)$. Alors $\mathcal{P}(G_1 \vee G_2) = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$. Il est à souligner que tous les sommets de A_i sont non-transférables dans la partition $\mathcal{P}(G_1 \vee G_2)$ puisque il le sont dans la partition $\mathcal{P}(G_1)$. Nous allons montrer

que $\mathcal{P}(G_1 \vee G_2)$ est b-maximale de $G_1 \vee G_2$. Supposons le contraire. Alors, il existe k sous-ensembles non vides $U_i^{'} \subseteq U_i$, $i \in \{1, .., k\}$ avec inclusion stricte pour au moins un sous-ensemble non vide, $\mathcal{A} = V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_i^{'}$, $(\mathcal{A} \neq \emptyset)$ et $\{U_1^{'}, U_2^{'}, ..., U_k^{'}\}$ est une partition domatique de $(G_1 \vee G_2) - \mathcal{A}$ et $\mathcal{P}' = \{U_1^{'}, U_2^{'}, ..., U_k^{'}, V \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U_i^{'}\}$ est une partition domatique de $G_1 \vee G_2$. Pusique tous les sommets de A_i sont non-transférables, alors $\mathcal{A}$ ne contient aucun sommet de A_i. Autrement dit, $\mathcal{A}$ contient seulement les sommets de B_i et donc de $\mathcal{P}(G_2)$. Ceci implique que $\mathcal{P}(G_2)$ est non b-maximale, contradiction. D'où $\mathcal{P}(G_1 \vee G_2)$ est b-maximale, ce qui implique que $bd(G_1 \vee G_2) \leq |\mathcal{P}(G_1 \vee G_2)|$. D'après (3.1.1) et (3.1.2), on trouve que $bd(G_1 \vee G_2) \leq bd(G_1) + bd(G_2)$. ■

Par exemple D'apre La Figure 2.4.1 on a la Propriété vérifiée

$$bd(S_3 \vee S_2) = d(S_3 \vee S_2) = 4 \leq bd\,(S_3) + bd\,(S_2) = 2 + 2.$$

Proposition 3.1.2 *Soient T un arbre d'ordre m et G un graphe d'ordre n. Alors,*

$$bd(T \vee G) \leq 2 + bd(G).$$

Preuve. Par la théorème 2.3.4, $bd(T) = 2$. On sait que tous les sommets de T peuvent être partitionné en deux sous-ensembles stable. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ une 2-partition de T telle que U_i $(i = 1, 2)$ est un stable. Clairement tous les sommets $U_1 \cup U_2$ sont non-transférables. D'où, en vertu de la Proposition 3.1.1, $bd(T \vee G) \leq 2 + bd(G)$. ■

Par un raisonnement similaire, on obtient le resultat suivant.

Corollaire 3.1.2 *Soient $P_n, n \geq 2$ une chaîne à n sommets et G un graphe d'ordre n. Alors,*

$$bd(P_n \vee G) \leq 2 + bd(G).$$

par exemple dans la Figure 3.1 on a $bd(P_3 \vee C_4) = 4 \leq 2 + bd(C_4) = 2 + 2 = 4$.

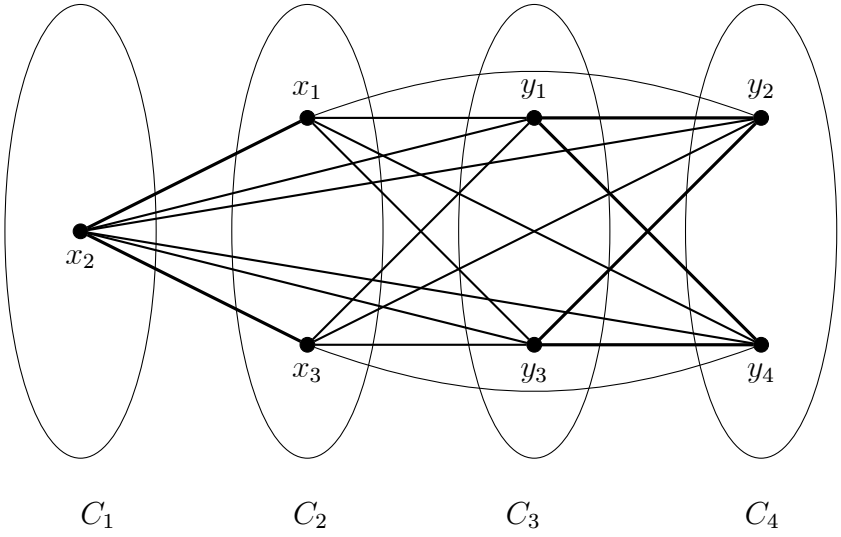


Figure 3.1.1 : Partition domatique b-maximal du joint P_3 V C_4 .

Proposition 3.1.3 *Soient K_m un graphe complet d'ordre m et G un graphe d'ordre n. Alors,*

$$bd(K_m \vee G) = m + bd(G).$$

Preuve. Observons que tous les sommets de K_m sont des sommets universels dans $K_m \vee G$. Donc par la Proposition 2.3.10, $bd\,(K_m \vee G) = bd((K_m \vee G) \setminus K_m) + m$. D'autre part $bd((K_m \vee G) \setminus K_m) = bd(G)$. D'où $bd(K_m \vee G) = m + bd(G)$. ■

par exemple de la Figure 3.1.1 pour $G \cong C_5$ et $m = 2$ on a $bd\,(K_2 \vee G) = 2 + bd\,(G) = 2 + 2$.

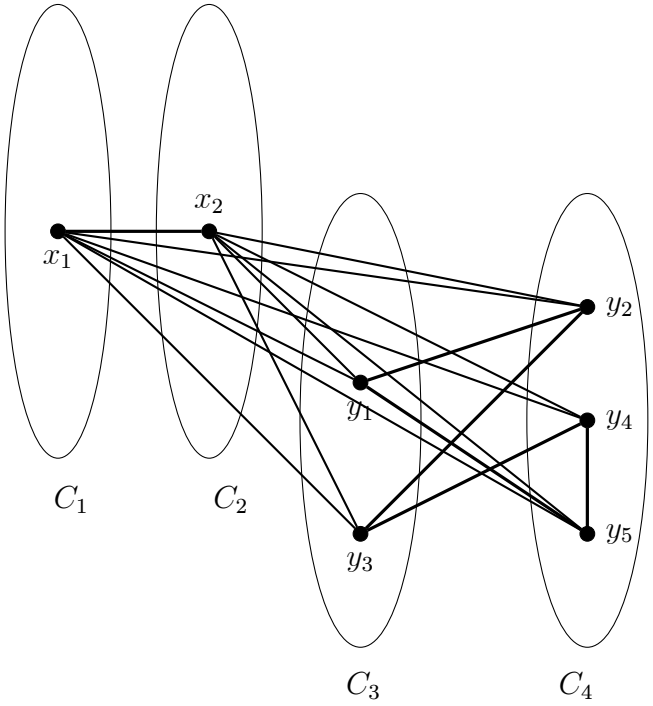


Figure 3.1.2 : Partition domatique b-maximal du joint K_2 V C_5 .

Proposition 3.1.4 *Soient P un graphe de Petersen et G un graphe d'ordre n. Alors,*

$$bd(P \vee G) \leq 2 + bd(G).$$

Preuve. D'près la Proposition 2.3.9 et la Figure 1.2.6 ., $bd(P) = 2$. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ telle que $U_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $U_2 = \{v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$. Tous les sommets de $U_1 \cup U_2$ sont non-transférables dans $\mathcal{P}$. D'où, en vertu de la Proposition 3.1.1, $bd(P \vee G) \leq 2 + bd(G)$. ■

Proposition 3.1.5 *Soient C_n et C_m deux cycles avec $n, m \geq 4$. Si n ou m est pair, Alors*

$$bd(C_n \vee C_m) \leq 4.$$

Preuve. Soient C_n et C_m deux cycles avec $n, m \geq 4$. D'après la corollaire 2.3.2, $bd(C_n) = bd(C_m) = 2$. Sans perte de généralité, soit n pair, alors tous les sommets de C_n peuvent être partitionné en deux sous-ensembles stable. Donc tous les sommets de C_n dans toute bd-partition de C_n sont non-transférables. D'où, par la Proposition 3.1.1,$bd(C_n \vee C_m) \leq 4$.

■

par exemple : posons $n = m = 4, bd\,(C_4 \vee C_4) = 4$

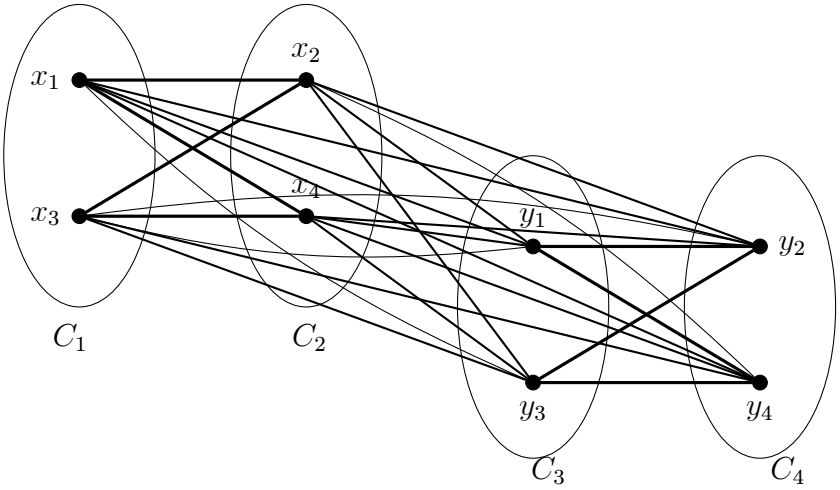


Figure 3.1.3 : Partition domatique b-maximal du joint C_4 V C_4 .

Proposition 3.1.6 *Pour tout m, n, p et $q \geq 2$,*

$$bd(K_{p,q} \vee K_{m,n}) \leq 4.$$

Preuve. Soit $K_{p,q}, K_{m,n}$ deux graphes bipartis complets de bipartition (A_p, B_q) et (C_n, D_m) respectivement. Il est clair que $K_{p,q} = G[A_p] \vee G[B_q]$ et $K_{m,n} = G[C_n] \vee G[D_m]$. Dans toute *bd*-partition de $K_{p,q}$ et $K_{m,n}$, tous les sommets de $K_{p,q}$ et $K_{m,n}$ sont non-transférables. D'où, en vertu de la Proposition 3.1.1, $bd(K_{p,q} \vee K_{m,n}) \leq 4$. ■

3.2 Le nombre b-domatique du produit cartésien de deux graphes

* Dans cette section, nous allons déterminer le nombre b-domatique du produit cartésien de deux graphes.

Par la définition du produit cartésien $G_1 \square G_2$, on trouve

$$\delta(G_1 \square G_2) = \delta(G_1) + \delta(G_2),$$

et par la Proposition 2.3.6,

$$\min(bd(G_1), bd(G_2)) \leq bd(G_1 \square G_2) \leq \delta(G_1) + \delta(G_2) + 1. \tag{3.2.1}$$

Proposition 3.2.1 *Soient G_1 et G_2 deux graphes avec $bd(G_1) \leq bd(G_2)$. Soit $\mathcal{P}(G_1)$ une bd-partition de G_1. S'il existe un sommet v appartenant à une classe de $\mathcal{P}(G_1)$ tel que tout sommet de $N_{G_1}[v]$ possède un voisin privé par rapport à sa classe, alors*

$$bd(G_1 \square G_2) = bd(G_1).$$

Preuve. Soient $\mathcal{P}(G_1) = \{A_1, \ldots, A_{bd(G_1)}\}$ et $\mathcal{P}(G_2) = \{B_1, \ldots, B_{bd(G_2)}\}$ deux bd-partition de G_1 et G_2, respectivement. Posons $k = bd(G_1)$. Soit $\mathcal{P}(G_1 \square G_2) = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$ une partition de $G_1 \square G_2$ tel que $U_i = V(\langle A_i \rangle \square G_2)$, $i = 1, ..., bd(G_1)$. Il est facile de vérifier que $\mathcal{P}(G_1 \square G_2)$ est une partition domatique. Montrons que $\mathcal{P}(G_1 \square G_2)$ est une partition b-maximale de $G_1 \square G_2$. Soit $v \in A_p$, p fixé appartenant à $\{1, ..., k\}$, tel que tout sommet $u \in N_{G_1}[v]$ possède un voisin privé relative à A_p dans G_1. Soit $z \in U_p$. Il n'est pas difficile de vérifier que tout sommet $w \in N_{G_1 \square G_2}[z]$ possède aussi un voisin privé relative à U_p dans $G_1 \square G_2$. Par conséquent, en utilisant le Théorème 2.3.3, on constate que $\mathcal{P}(G_1 \square G_2)$ est une partition domatique b-maximale de $G_1 \square G_2$. D'où $bd(G_1 \square G_2) \leq k$ et par (3.2.1), on conclut que $bd(G_1 \square G_2)$. ■

Proposition 3.2.2 *Soient H un prisme graphe et G un graphe quelconque . Alors*

$$bd(H \square G) = 2.$$

Preuve. d'après la Proposition 2.3.9, $bd(H) = 2$. Etant donnée une bd-partition de H, tout sommet de H possède un voisin privé par rapport à sa classe. Donc par la Proposition 3.2.1, $bd(H \square G) = 2$. ■

* Le corollaire suivant est immediat.

Corollaire 3.2.1 *Pour tout $n, m \geq 2$, nous avons*

$$bd(K_n \square K_m) = \min(n, m).$$

par exemple : pour $n = 2$ et $m = 3$ on a $bd(K_2 \square K_3) = \min(2, 3) = 2$.

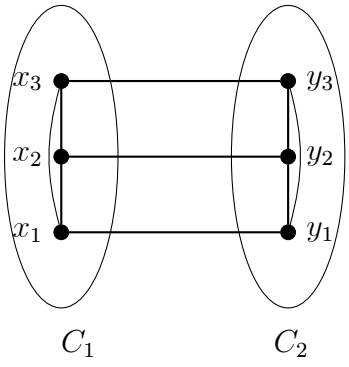


Figure 3.2.1 : Partition domatique b-maximale du $K_2 \square K_3$.

Théorème 3.2.1 *Soient G_1 et G_2 deux graphes tels chacun contient un sommet dont les voisins forment un ensemble stable. Alors*

$$bd(G_1 \square G_2) = 2.$$

Preuve. Soit $v = (v_1, v_2)$ un sommet de $G_1 \square G_2$ avec $v_1 \in V(G_1)$ et $v_2 \in V(G_2)$ tel que les ensembles $N_{G_1}(v_1)$ et $N_{G_2}(v_2)$ forment deux stables dans G_1 et G_2, respectivement. La structure de $G_1 \square G_2$ implique que l'ensemble $N_{G_1 \square G_2}(v)$ forme aussi un stable dans $G_1 \square G_2$. De ce fait, en vertu du Théorème 2.3.4, on constate que $bd(G_1 \square G_2) = 2$. ■

Exemple 3.2.1 *on pose $G_1 \cong P_2$ et $G_2 \cong C_4$ on a $bd(P_2 \square C_4) = 2$.*

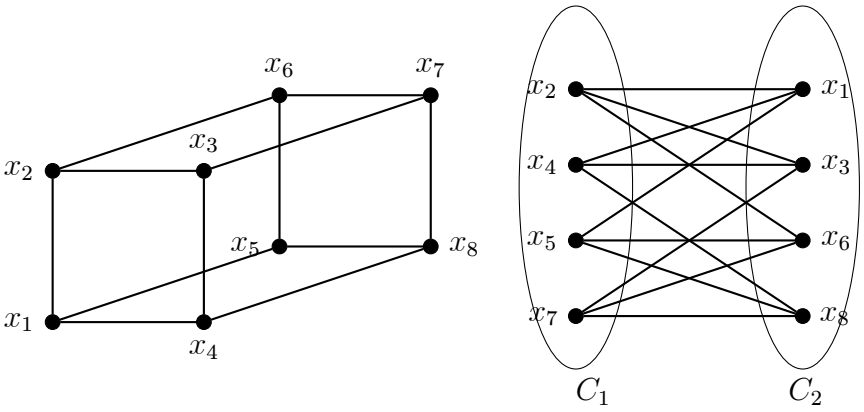


Figure 3.2.2 : Graphe $G = P_2 \square C_4$ et Partition domatique b-maximale du $P_2 \square C_4$.

Corollaire 3.2.2 *Pour tout n, m, p et $q \geq 2$. Alors,*

$$bd(K_{n,m} \square K_{p,q}) = 2.$$

par exemple : pour $n = m = p = q = 2$,$bd(K_{2,2} \square K_{2,2}) = 2$.

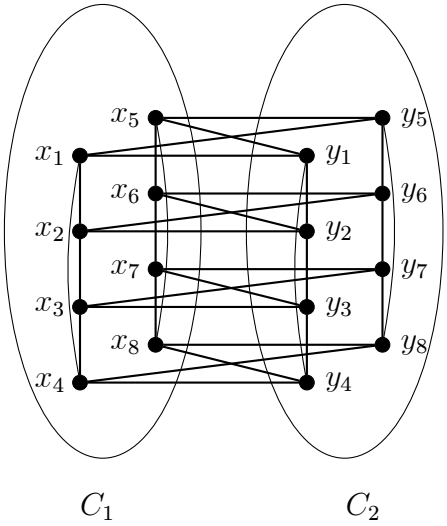


Figure 3.2.3 : Partition domatique b-maximale du $K_{2,2}\Box K_{2,2}$.

Proposition 3.2.3 *Soient P_n une chaîne et C_m un cycle avec $n \geq 2$ et $m \geq 3$, alors*

$$bd(P_n\Box C_m) = \begin{cases} 2 & si\ n \neq 3\ et\ m \neq 3 \\ 3 & sinon \end{cases} .$$

Preuve. Soient P_n une chaîne d'ordre $n \geq 2$ et C_m un cycle d'ordre $m \geq 3$. Posons $G_{n,m} = P_n\Box C_m$. Si $n = 2$, alors d'après la Proposition 2.3.9 , $bd(G_{2,m}) = 2$. Egalement si $n \geq 4$ et $m \geq 4$, alors en vertu du Théorème 3.2.1, $bd(G_{n,m}) = 2$. Il nous reste à examiner le cas $n = m = 3$. Pour cela, posons $V(G_{3,3}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ (voir Figure 1.8.2). La partition $\{\{v_1, v_4, v_7\}, \{v_2, v_5, v_8\}, \{v_3, v_6, v_9\}\}$ est domatique b-maximale de $G_{3,3}$ d'après le Théorème 2.3.3 puisque chaque sommet possède un voisin privé relatif à sa classe. De ce fait $bd(G_{3,3}) \leq 3$. Nous allons montrer que $bd(G_{3,3}) < 3$**(=3!)**. Supposons le contraire. Alors $bd(G_{3,3}) = 2$ puisque $G_{3,3}$ est sans sommets isolés. Soit $\mathcal{P} = \{U_1, U_2\}$ une *bd*-partition de $G_{3,3}$. Il est à observer que les sommets de $G_{3,3}$ peuvent être partitionné en trois copies de K_3. Par ailleurs, chaque sommet de $G_{3,3}$ est contenu dans une copie de K_3. De ce fait, l'une des deux classes U_1 ou U_2 contient au moins deux sommets du même copie de K_3. Supposons d'abord que les trois sommets du certains copies sont dans U_1. Par symétrie, on peut supposer que les sommets de la première copie v_1, v_2, v_3 appartiennent à U_1. Dans ce cas les trois sommets v_4, v_5, v_6 de la deuxième copie sont dans U_2 car sinon l'un des sommets de la première copie ne sera dominé par U_2. Mais dans ce cas $\{U_1, U_2, \{v_1, v_4\}\}$ serait une

partition domatique de $G_{3,3}$, contradiction. Supposons maintenant que exactement deux sommets du même copie appartiennent à U_1 ou U_2 contient exactement deux partition contient au plus deux sommets de chaque copie. Soit A une nouvelle classe obtenue à partir de U_1 et U_2 de la façon suivante. Pour toute paire de deux sommets du même copie qui se trouvent dans la même classe U_1 ou U_2, on déplace l'un des deux sommets à A et on garde l'autre sommet dans sa classe. Il est facile de vérifier que cette nouvelle partition est domatique, contradiction. ■

Exemple 3.2.2 *D'après la Figure 1.8.2 pour* $n = m = 3$ *ona* $bd\,(P_3 \square C_3) = 3$.

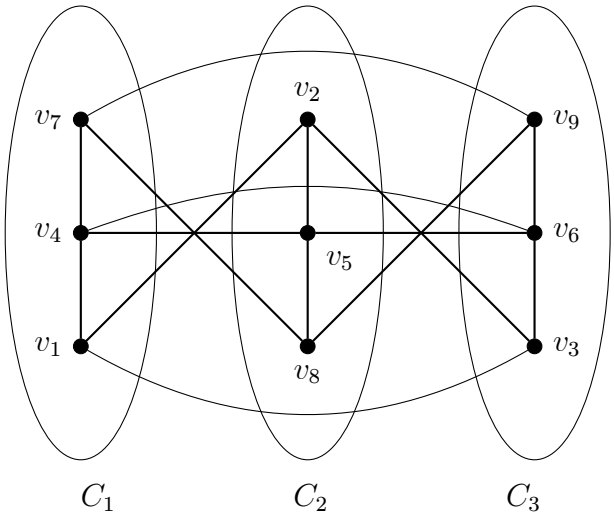


Figure 3.2.4 : Partition domatique b-maximale du $P_3 \square C_3$.

Théorème 3.2.2 *Soient* K_n *un graphe complet et* $K_{1,r}$ *un star. Alors*

$$bd(K_n \square K_{1,r}) \leq \min(r+1, n).$$

Preuve. Soit $G = K_n \square K_{1,r}$ un graphe du produit cartisien de deux graphes K_n et $K_{1,r}$. Soient $V(K_n) = \{u_0, ..., u_{n-1}\}$ et $V(K_{1,r}) = \{v_0, v_1, ..., v_r\}$ où v_0 est le sommet centre de $K_{1,r}$. On distingue deux cas.

Cas 1. $r > n$.

Soit $\mathcal{P} = \{U_0, U_1, ..., U_{n-1}\}$ tel que $U_i = \{(u_i, v_j) : 0 \leq j \leq r\}$, $0 \leq i \leq n-1$ avec $V(G) = \bigcup_{i=0}^{n-1} U_i$ et $|V(G)| = n \times (r+1)$. Il est clair que, le sous-graphe induit $\langle\{(u_i, v_j) : 0 \leq j \leq r\}\rangle$ de G est un isomorphe de $K_{1,r}$, pour tout i, $0 \leq i \leq n-1$ et $\mathcal{P}$ est une partition domatique. Il n'est pas difficile de vérifier que chaque classe U_i, $0 \leq i \leq n-1$ est un dominant minimale

de G, alors par la Proposition 2.3.3, $\mathcal{P}$ est b-maximale de G avec $|\mathcal{P}| = n$ et $|U_i| = r + 1$, pour tout $0 \leq i \leq n - 1$. D'où $bd(G) \leq n$.

Cas 2. $n \geq r$.

Soit $\mathcal{P} = \{U_0, U_1, ..., U_r\}$ tel que $U_i = \{(u_j, v_{j+i}) : 0 \leq j \leq r\} \cup \{(u_i, v_j) : r + 1 \leq j \leq n - 1\}$, $0 \leq i \leq r$. Il n'est pas difficile de vérifier que chaque classe U_k, $0 \leq i \leq r$ est un dominant minimale de G et $\mathcal{P}$ est une partition domatique, alors par la Proposition 2.3.3 $\mathcal{P}$ est b-maximale de G et $|U_i| = r + 1$, pour tout $0 \leq i \leq r$. D'où $bd(G) \leq r + 1$. ■

par exemple : pour $n = 2$ et $r = 3$ an a $bd(K_2 \square K_{1,3}) = 2 \leq \min(3 + 1, 2) = 2$

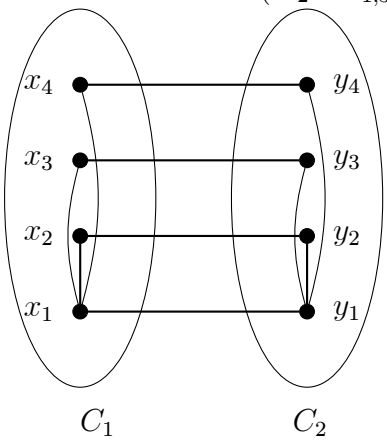


Figure 3.2.5 : Partition domatique b-maximal du $K_2 \square K_{1,3}$.

3.3 Le nombre b-domatique de la couronne $G \circ H$

Théorème 3.3.1 *Soient G et H deux graphes connexes et G d'ordre $n \geq 2$, alors*

$$bd(G \circ H) \leq bd(H) + 1.$$

Preuve. Soient $V(G) = \{v_1, ..., v_n\}$ et $H_1, H_2, ..., H_n$ sont les n copies de H dans $G \circ H$ tel que v_i est adjacent à tous les sommet dans H_i. Soient $\mathcal{P}(H) = \{A_1, A_2, ..., A_{bd(H)}\}$ une partition domatique b-maximale de H et $v_i \vee H^{v_i}$, $i = 1, ..., n$ les composantes d'un graphe déconnecté de la couronne $G \circ H$. Par la Proposition 2.3.10, $bd(v_i \vee H^{v_i}) = bd(H^{v_i}) + 1 = bd(H) + 1$ et par le Théorème 2.3.1, $bd(\bigcup_{i=1}^{n} (v_i \vee H^{v_i})) = \min\{bd(v_i \vee H^{v_i}) : 1 \leq i \leq n\} = bd(H) + 1$. Donc $bd(G \circ H) \geq bd(H) + 1$.

Soit $\mathcal{P} = \{U_1, ..., U_{bd(H)}, U_{bd(H)+1}\}$ une partition domatique de $G \circ H$ telle que $U_j = \bigcup_{i=1}^{n} A_j^i$, $j = 1, ..., bd(H)$ et $U_{bd(H)+1} = V(G)$. Supposons, au contraire, que $\mathcal{P}$ n'est pas b-maximale, alors, il existe $bd(H)+1$ sous-ensembles non vides $U'_j \subseteq U_j$, $j = 1, ..., bd(H)+1$ avec inclusion stricte pour au moins un sous-ensemble non vide et soit $\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{bd(H)+1}(U'_j \diagdown \pi_j) \neq \emptyset$ et pour que $\mathcal{P}' = \{U'_1, U'_2, ..., U'_{bd(H)+1}, \mathcal{A}\}$ est une partition domatique de G. L'ensemble $\mathcal{A}$ ne contient aucun sommet de $U_{bd(H)+1}$, autrement $\mathcal{P}$ n'est pas une partition domatique. Donc, $\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^{bd(H)}(U_j \diagdown U'_j) \neq \emptyset$ et $\bigcap_{j=1}^{bd(H)} \left(U_j \diagdown U'_j\right) = \emptyset$, il suit que $\mathcal{A}$ contient des sous-ensembles disjoints de copies de H, contradiction. ■

par exemple : d'après la Figure 1.8.1 ona $bd\left(C_4 \circ P_2\right) = 3 \leq bd\left(P_2\right) + 1 = 3$.

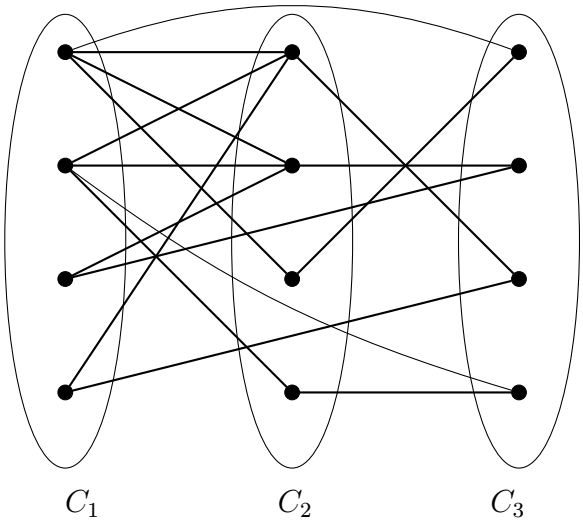


Figure 3.3.1 : Partition domatique b-maximal de la couronne $C_4 \circ P_2$.

Conclusion

Au cours de ce mémoire, nous avons étudié quelques paramètres des partitions b-domatique dans les produits de graphes

En premier lieu, nous nous sommes intéressés à la notion de le nombre domatique, puis on a rappelé certaines propriétés sur les paramètres d'une partition domatique et sur le nombre b-domatique.

En suite, nous avons présenté quelques nouveaux résultats sur le nombre b-domatique dans les produits de graphes (joint, produit cartesièn et la couronne) et déterminer la valeur exacte ou bien Les meilleurs bornes de ces paramètres pour certains types des graphes.

En perspectives, un grand nombre de problèmes restent ouverts dans le domaine et peuvent être étudiés ultérieurement. On citera, par exemples:(nombre b-domatique dans produit fort , lexicographique,etc....).

Bibliographie

[1] M. Benatallah, N. Ikhlef-Eschouf and M. Mihoubi, "*On the b-domatic number of graphs*", Discussiones Mathematicae Graph Theory, 39 (2019) 313324.

[2] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs* (North-Holland, Amsterdam, 1973).

[3] G. J. Chang, *The domatic number problem.* Discrete Math. 125 (1994) 115–122.

[4] E. J. Cockayne, *Domination of undirected graphs — a survey.* In: Theory and Applications of Graphs, Proc. Michigan 1976, ed. By Y.Alavi and D. R. Lick (Springer — Verlag Berlin-Heldelberg-New York 1978) 141-147.

[5] E. J. Cockayne, S.T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*, Networks 7 (1977) 247-261.

[6] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlang (1996).

[7] O. Favaron. *The b-domatic number of a graph*, Discussiones Mathematics, Graph Theory 33 (2013)747–757.

[8] T. W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater, *Fundaments of domination in graphs*, New York, Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, Inc. (1998).

[9] K. Monika. *Domatic number of graph products.* Journal of Mathematics and Applications. No 30, pp 71-81 (2008).

[10] O. Ore, *Theory of graphs*, Amer. Math soc. Colloq. Publ. 38 (1962).

[11] B. Zelinka, *Domatically critical graphs*, Czech. Math. J. 30 (1980) 468-489.