République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Fares de Médéa
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et de l'Informatique



Mémoire

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Présenté Par :

AMMARI Hind et ALLOUN Rachida

Thème

Introduction aux Hybrinomiaux

Le jury composé de

Présidente :	F. BOULARIAH	MAA	U.Y.F.M.
Encadreur :	N. Rosa AIT-AMRANE	MCB	U.Y.F.M.
Co-encadreur :	L. AIT-AMRANE	MCA	E.S.I. d'Alger.
Examinatrice :	G. GUATTAI	MCB	U.Y.F.M.

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2021-2022

Remerciements

Nous remercions d'abord et avant tout ALLAH qui nous a donné la volonté, la santé, le courage et la patience pour réaliser ce travail.

Nous remercions chaleureusement notre encadreur de ce travail Madame AIT-AMRANE N.Rosa pour son aide précieuse et ses conseils éclairés dans la direction de notre travail ; Ainsi que leur grande disponibilité et son immense gentillesse .

Nous remercions également tous les membres de jury qui ont bien voulu et accepter d'examiner ce modeste travail. Sans oublier tous les enseignants, nos collègues et administrateurs du département de Mathématiques et Informatique . Mes grands remerciements vont aussi à toute ma famille précisément mon père et ma mère pour ses encouragements qu'ont accompagné durant cette mémoire . Enfin, nous tenons également à remercier toutes les personnes qui ont participé de prés ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail particulièrement à mes chèrs parents qui ont consacré leur existence à bâtir la mienne, pour leur soutien, patience et soucis de tendresse et d'affection pour tout ce qu'ils ont fait pour que je puisse arriver à ce stade.

"A ma mère "Hassina"" :

Tu m'as donné la vie, la tendresse et le courage pour réussir. Tout ce qui je peux t'offrir ne pourra exprimer l'amour et la reconnaissance que je te porte.
En témoignage, je t'offre ce modeste travail pour le remercier pour tes sacrifices et pour l'affection dont tu m'as toujours entourée.
J'espérais que tu serais avec moi aujourd'hui et que tu me soutiendrais, que Dieu ait pitié d'elle et lui pardonne et vous accorde un paradis spacieux..

"A mon père "nadhir"" :

L'épaule solide, l'oeil attentif compréhensif et la personne la plus digne de mon estime et de mon respect. Aucun de dédicace ne saurait exprimer mes sentiments, que dieu vous bénisse et que Dieu prolonge ta vie et te protège de tout mal.

"Je dédie aussi ce travail à" :

Mon chèr frère "Sidali"
Mes chères sœurs"Israa, Ilhame, Sabrine, Nour"

Á tous la famille "AMMARI"

A mes proches amies "Houda, Hadjer Sara, Amina, Maya"
A toutes les personne qui ont participé a l'élaboration de ce travail a tous mes collègue et tous ceux que j'ai omis de citer.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements i

Dédicace ii

Notations générales vi

Résumé vii

Résumé viii

Introduction 1

1 Rappel 2
- 1.1 Les nombres hybrides . . . 2
  - 1.1.1 Définition . . . 2
  - 1.1.2 Représentation matricielle des nombres hybrides . . . 4
  - 1.1.3 Opérations sur les nombres hybrides . . . 4
  - 1.1.4 La norme d'un nombre hybride . . . 4
  - 1.1.5 La caractère d'un nombre hybride . . . 5
- 1.2 Les nombres hybrides dans le plan . . . 5
- 1.3 Les nombres hybrides de Horadam . . . 6
  - 1.3.1 Les nombres de Horadam . . . 6
  - 1.3.2 Les cas particulier . . . 6
  - 1.3.3 Les nombres hybrides de Horadam . . . 7

2 Les polynômes de Horadam 8
- 2.0.4 Fonction génératrice . . . 9
- 2.1 Quelques propertiés . . . 9
- 2.2 Les cas particuliers de polynôme de Horadam . . . 11
  - 2.2.1 Les polynômes de Fibonacci . . . 11
  - 2.2.2 Les polynômes de Lucas . . . 12
  - 2.2.3 Les polynômes de Pell . . . 12
  - 2.2.4 Les polynômes de Pell-Lucas . . . 13

3 Hybrinomiaux 15
- 3.1 Hybrinomiaux de Horadam . . . 15
- 3.2 Hybrinomiaux de Fibonacci . . . 20
- 3.3 Hybrinomiaux de Lucas . . . 22

3.4 Hybrinomiaux de pell 23
3.5 Hybrinomiaux de Pell-Lucas 28

LISTE DES TABLEAUX

1.1 Table de multiplication des nombres hybrides 2

2.1 Table des polynômes de Horadam 9

TABLE DES FIGURES

1.1 Coordonnées d'un nombre hybride 5

Notation

$\mathbb{Z}$	l'ensembles des nombres entiers relatives.
$\mathbb{N}$	l'ensemble des nombrs naturels.
$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels.
K	les nombres hybrid.
W_n	les nombres de Horadam.
Zh_n	les nombres hybrid de Horadam.
Zf_n	les nombres hybrid de Fibonacci.
Zp_n	les nombres hybrid de pell.
Zq_n	les nombres hybrid de Pell-Lucas.
$h_n(x)$	les pôlynomes de horadam.
$Q_n(x)$	les pôlynomes de Pell-Lucas.
$P_n(x)$	les pôlynomes de Pell.
$F_n(x)$	les pôlynomes de Fibonacci.
$H_n(x)$	l'hybrinômiaux de Fibonacci.
$FH_n(x)$	l'hybrinômiaux de Fibonacci.
$PH_n(x)$	l'hybrinômiaux de pell.
$QH_n(x)$	l'hybrinômiaux de Pell-Lucas.

Résumé

Dans ce travail, a partir de divers articles, nous étudions les hybrinômiaux c'est à dire les polynômes des hybrides, nous avons spécifiquement étudié Horadam et en avons donné des cas particuliers (Fibonacci, Lucas, Pell et Pell-Lucas).

Et avant d'étudier les hybrinômiaux nous aurions du étudier les nombres hybrides, les nombres hybrides de Horadam et les polynômes de Horadam.

Mots-clés : hyparbolique, dual, la formule de Binet, le nombre hybrid, les polynômes de Horadam, hybrinômiaux, Horadam, Fibonacci, Lucas Pell, Pell-Lucas .

Abstract

In this work, from various articles, we study hybrinomials, that is polynomials of hybrids, we specifically studied Horadam and gave special cases (Fibonacci, Lucas, Pell and Pell-Lucas). And before studying hybrinomials we should have studied hybrid numbers, numbers Horadam hybrids and Horadam polynomials.

keywords : hyparbolic, dual, the Binet formula, the hybrid number, the polynomials of Horadam, hybrinomial, Horadam, Fibonacci, Lucas Pell, Pell-Lucas .

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les hybrinômiaux de Horadam $H_n(x)$ définis par la relation récurrente suivante :

$$H_n(x) = pxH_{n-1}(x) + qH_{n-2}(x), \quad n \geq 2. \tag{1}$$

avec les valeurs initiales H_0, H_1.

Divers articles sont apparus ces dernières années qui étudissent de manière détaillée les hybrinômiaux.

Dans notre mémoire nous nous intéressant à ces hybrinômiaux.

Dans le premier chapitre, nous faisons un rappel sur les nombres hybrides nous donnons quelques définitions une représentation matricielle et quelques opérations sur les nombres hybrides ainsi que les nombres de Horadam et les nombres hybrides de Horadam

Dans le deuxième chapitre, nous abordons les polynômes de Horadam, et nous étudions leurs propriétés de base comme : la formule de Binet et la fonction génératrice. Nous parlerons aussi des polynômes de Fibonacci, de Lucas et les polynômes de Pell et de les polynômes de Pell-Lucas.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les Hybrinômiaux de Horadam et donnons quelques appropriées de base comme : la formule de Binet, la fonction génératrice et la fonction exponentielle. Des représentations matricielles sont données.

CHAPITRE 1

RAPPEL

1.1 Les nombres hybrides

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions, ainsi que quelques propriétés des nombres hybrides et nous présentons quelques éléments de base qui seront utiles pour la suite, en les nombres de Horadam et les nombres hybrid de Horadam (Fibonacci, Pell, Pell-Lucas), on savoir [3, 4, 8, 11, 14, 15].

1.1.1 Définition

Les nombres Hybrides ont été introduits par [1], ces nombres définissent un nouveau système de nombres non commutatifs, qui sont des nombres créés avec des combinaisons des nombres complexes, $(i^2 = -1)$, hyperboliques, $(h^2 = 1)$, et dual, $(\varepsilon^2 = 0)$.

Définition 1.1.1 *Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, l'ensemble des nombres hybrides, noté $\mathbb{H}$, est l'ensemble de nombres Z de la forme :*

$$K = a + bi + c\varepsilon + dh, \tag{1.1}$$

et : i, ε, h sont des opérateurs vérifiant $(i^2 = -1), (\varepsilon^2 = 0), (h^2 = 1), (ih = -hi = \varepsilon + i)$, en utilisant ces propriétés, on obtient le tableau suivant :

↱

×	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	1-h	ε +i
ε	ε	h+1	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon$ -i	ε	1

TABLE 1.1 – Table de multiplication des nombres hybrides

Théorème 1.1.1 *Soient i, ε et h des opérateurs des nombres hybrides, tels que*

$$\begin{cases} i\varepsilon = 1 - h, \\ \varepsilon i = h + 1. \end{cases} \quad \begin{cases} h\varepsilon = \varepsilon, \\ \varepsilon h = -\varepsilon. \end{cases} \tag{1.2}$$

Preuve. On a $ih = -ih = \varepsilon + i$,

1) On prend

$$ih = \varepsilon + i,$$

alors

$$h = \frac{\varepsilon + i}{i} \Rightarrow h - 1 = \frac{\varepsilon}{i} \tag{1.3}$$

et

$$h - 1 = \frac{i\varepsilon}{i^2}, \quad avec \quad i^2 = -1, \tag{1.4}$$

donc

$$i\varepsilon = 1 - h. \tag{1.5}$$

2) On a

$$-ih = \varepsilon + i, \tag{1.6}$$

alors

$$-h = \frac{\varepsilon}{i} + i \Rightarrow -h - 1 = \varepsilon i, \tag{1.7}$$

donc

$$\varepsilon i = h + 1. \tag{1.8}$$

3) On prend

$$ih = \varepsilon + i. \tag{1.9}$$

On multiplie les deux égalité par l'opérateur ε , tel que $\varepsilon^2 = 0$ on obtient :

$$\varepsilon ih = \varepsilon(\varepsilon + 1), \tag{1.10}$$

on devise les deux égalité par l'opérateur i on trouve :

$$\frac{ih\varepsilon}{i} = \frac{\varepsilon^2 + i\varepsilon}{i}. \tag{1.11}$$

4) On a

$$-ih = \varepsilon + i, \tag{1.12}$$

alors

$$-\varepsilon ih = \varepsilon^2 + \varepsilon i \Rightarrow -\varepsilon h = \varepsilon, \tag{1.13}$$

donc

$$\varepsilon h = -\varepsilon. \tag{1.14}$$

Remarque 1.1.1 *Nous concluons que les nombres hybrides ne sont pas commutatif .*

■

1.1.2 Représentation matricielle des nombres hybrides

Une représentation matricielle d'un nombre hybride est particulièrement importante pour faciliter la multiplication des nombres hybrides, en définissant la symétrie entre les matrices et les nombres mixtes, nous pouvons facilement multiplier les nombres hybrides et prouver plusieurs de ses caractéristiques. En revanche, les nombres hybrides peuvent également être définis en considérant la représentation matricielle. on peut classer les nombres hybrides, en ce qui concerne le déterminant de la matrice (2×2) correspondante.

$$1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \varepsilon \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, h \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Ces quatre matrices forment une base pour l'espace vectoriel des matrices (2×2).

Donc chaque matrice 2×2 peut être écrite comme un composé : d'unités, de complexes, de duals et de nombres hyperboliques.

Définition 1.1.2 *1) Soient $K = a + bi + c\varepsilon + dh$ un nombre hybride, alors*

- *Le nombre réel a est appelé la partie scalaire et noté par $S(K)$.*
- *La partie $bi + c\varepsilon + dh$ est appelé la partie vectorielle est notée $V(K)$.*

2) Les nombres hybrides sont des nombres bi-dimensionnelles.

1.1.3 Opérations sur les nombres hybrides

Conjugué d'un nombre hybride

Définition 1.1.3 *Le conjugué d'un nombre hybride : $K = a + bi + c\varepsilon + dh$, est défini par :*

$$\overline{K} = \overline{a + bi + c\varepsilon + dh} = a - bi - c\varepsilon - dh = S(K) - V(K). \tag{1.16}$$

Propriétés 1.1.1 *soit $K_1 = a_1 + b_1 i + c_1\varepsilon + d_1 h$ et $K_2 = a_2 + b_2 i + c_2\varepsilon + d_2 h$ deux nombres hybrides quelconque ,alors l'égalité,l'addition, la soustraction, la multiplication et le produit vectoriel, sont définis comme suit :*

— *L'égalité :* $K_1 = K_2$ *si et seulement si* $a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$.

— *L'addition :* $K_1 + K_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)\varepsilon + (d_1 + d_2)h$.

— *La soustraction :* $K_1 - K_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - -b_2)i + (c_1 - c_2)\varepsilon + (d_1 - d_2)h$.

— *Le produit scalaire :* *Pour* $s \in \mathbb{R}$ *on a :* $sK_1 = sa_1 + sb_1 i + sc_1\varepsilon + sd_1 h$.

— *Le produit vectoriel :* $K_1 K_2 = \dfrac{K_1\overline{K_2} - \overline{K_1}K_2}{2}$.

Remarque 1.1.2 *L'opération "addition" dans les nombres hybrides est à la fois commutative et associative.*

1.1.4 La norme d'un nombre hybride

Définition 1.1.4 *La norme d'un nombre hybride est définit par :*

$$||K|| = \sqrt{|K\overline{K}|} = \sqrt{a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2bc - d^2}. \tag{1.17}$$

1.1.5 La caractère d'un nombre hybride

Définition 1.1.5 *Le caractère d'un nombre hybride est donnée par :*

$$C(K) = K\overline{K} = \overline{K}K = a^2 + (b-c)^2 - c^2 - d^2 = a^2 + b^2 - 2bc - d^2. \tag{1.18}$$

Remarque 1.1.3

1) Si K est un nombre complexe, alors $||K|| = \sqrt{|K\overline{K}|} = \sqrt{|a^2 - b^2|}$, avec $c = b = 0$.

2) Si K est hyperbolique alors $||K|| = \sqrt{|K\overline{K}|} = \sqrt{|a^2 - d^2|}$, telle que $c = d = 0$.

3) Si K est dual alors $||K|| = \sqrt{a^2} =\mid a \mid$, telle que $b = d = 0$.

4) L'invers du nombre hybride on a :

$$K = a + bi + c\varepsilon + dh \tag{1.19}$$

alors k^{-1} est défini par :

$$K^{-1} = \frac{||K||}{C(K)}. \tag{1.20}$$

1.2 Les nombres hybrides dans le plan

Tout nombre hybride peut être représente dans le plan $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Théorème 1.2.1 *Tout nombre hybride peut être affiché dans un système d coordonnées à deux dimensions comme le système de coordonnées cartésien.*

Définition 1.2.1 *Le système de coordonnée hybride, en conséquence les coordonnées hybrides d'un nombre hybride, on écrit comme ceci :*

$$K = a + bi + c\varepsilon + dh = x + yV \tag{1.21}$$

sont désignés par :

$$K = (x; y) = (a; N(K)) = (a; \sqrt{|-(b-c)^2 + c^2 + d^2|}), \tag{1.22}$$

la figure 1.1 est une présentation de nombre hybride dans le plan :

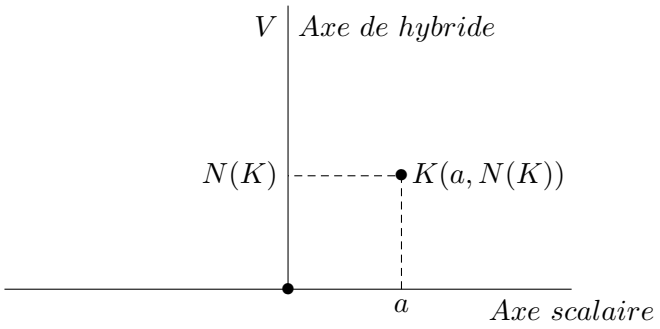


FIGURE 1.1 – Coordonnées d'un nombre hybride

Tel que l'axe des X représente le nombre réel a, et l'axe des Y représente le nombre hybride $N(K)$.

Exemple

Les coordonnées du nombre hybride : $K = 2 + 5i + 2\varepsilon + 1h$ sont $(a; N(K))$ tels que $a = 2, N(K) = 2$.

1.3 Les nombres hybrides de Horadam

1.3.1 Les nombres de Horadam

Définition 1.3.1 *Soient p, q, n des nombres entiers. Pour $n \geq 2$ Horadam a défini les nombres $W_n = W_n(W_0, W_1; p, q)$ par l'équation récurrente*

$$W_n = pW_{n-1} - qW_{n-2}, \tag{1.23}$$

avec les valeurs initiales W_0, W_1.

L'équation caractéristique de la relation de récurrence (1.23) est donnée par

$$x^2 - px + q = 0.$$

Cette équation a deux racines réelles :

$$\alpha = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad \beta = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

La formule de Binet pour le nombre de Horadam W_n à représenter par les racines α et β

$$W_n = A_1\alpha^n + A_2\beta^n, \tag{1.24}$$

tels que

$$A_1 = \frac{W_1 - W_0\beta}{\alpha - \beta}, \quad A_2 = \frac{W_0\alpha - W_1}{\alpha - \beta}.$$

1.3.2 Les cas particulier

Définition 1.3.2 *a) Les nombres de Fibonacci définis par :*

$$W_n(0, 1; 1, -1) = f_n.$$

b) Les nombres de Lucas définis par :

$$W_n(2, 1; 1, -1) = l_n.$$

c) Les nombres de Pell définis par :

$$W_n(0, 1; 2, -1) = p_n.$$

d) Les nombres h de Pell-Lucas définis par :

$$W_n(2, 2; 2, -1) = q_n.$$

1.3.3 Les nombres hybrides de Horadam

Définition 1.3.3 *Pour $n \geq 0$, les nombres hybrides de Horadam sont notés (Zh_n) définis par :*

$$Zh_n = W_n + iW_{n+1} + \varepsilon W_{n+2} + hW_{n+3}, \tag{1.25}$$

avec les condition initiales sont :Zh_0, Zh_1.

Théorème 1.3.1 *Pour $n \geq 0$, la formule de Binet pour les nombres hybrides de Horadam définit par :*

$$Zh_n = A_1\alpha^n(1 + i\alpha + \varepsilon\alpha^2 + h\alpha^3) + A_2\beta^n(1 + i\beta + \varepsilon\beta^2 + h\beta^3).$$

Preuve. En utilisant la définition du nombre hybride de Horadam et la formule de Binet pour les nombres de Horadam :

$$Zh_n = A_1\alpha^n + A_2\beta^n + i(A_1\alpha^{n+1} + A_2\beta^{n+1}) + \varepsilon(A_1\alpha^{n+2} + A_2\beta^{n+2}) + h(A_1\alpha^{n+3} + A_2\beta^{n+3})$$

$$= A_1\alpha^n(1 + i\alpha + \varepsilon\alpha^2 + h\alpha^3) + A_2\beta^n(1 + i\beta + \varepsilon\beta^2 + h\beta^3).$$

■

Théorème 1.3.2 *La fonction génératrice du nombres hybrides de Horadam Zh_n définit par :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Zh_n t^n = \frac{Zh_0 + t(Zh_1 - pZh_0)}{1 - pt - qt^2}.$$

Les nombres hybrides de Fibonacci

Définition 1.3.4 *Pour $n \geq 0$, les nombres hybrides de Fibonacci sont notés Zf_n définis par :*

$$Zf_n = f_n + if_{n+1} + \varepsilon f_{n+2} + hf_{n+3}. \tag{1.26}$$

Les nombres hybrides de Pell

Définition 1.3.5 *Pour $n \geq 0$, les nombres hybrides de Pell sont notés Zp_n définis par :*

$$Zp_n = p_n + ip_{n+1} + \varepsilon p_{n+2} + hp_{n+3}. \tag{1.27}$$

Les nombres hybrides de Pell-Lucas

Définition 1.3.6 *Pour $n \geq 0$, les nombres hybrides de Pell-Lucas sont notés Zq_n définis par :*

$$Zq_n = q_n + iq_{n+1} + \varepsilon q_{n+2} + hq_{n+3}. \tag{1.28}$$

CHAPITRE 2

LES POLYNÔMES DE HORADAM

Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle généralisation des suites des polynômes d'ordre 2. A savoir, nous définissons la suite de polynômes de Horadam. Ensuite, nous étudions certaines propriétés des polynômes de Horadam et les polynomes (Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas) [1, 2, 5, 6, 12, 16].

Définition 2.0.7 *Pour $n \geq 3$, la suite des polynômes de Horadam, noté $h_n(x)$, la relation de récurrence est définie par :*

$$h_n(x) = pxh_{n-1}(x) + qh_{n-2}(x), \tag{2.1}$$

avec les conditions initiale

$$h_1(x) = a, \quad h_2(x) = bx. \tag{2.2}$$

On a a, b, p et q est constante réelle.

L'équation caractéristique de la relation de récurrence (2.1) est donnée par :

$$t^2 - pxt - q = 0. \tag{2.3}$$

Cet équation a deux racines réelles :

$$\alpha(x) = \frac{px + \sqrt{p^2x^2 + 4q}}{2}, \quad \beta(x) = \frac{px - \sqrt{p^2x^2 + 4q}}{2}. \tag{2.4}$$

La formule de Binet pour du polynôme de Horadam $h_n(x)$ à représenter par les racines α et β .

$$h_n(x) = A_1\alpha^{n-1}(x) + A_2\beta^{n-1}(x), \tag{2.5}$$

tels que

$$A_1 = \frac{bx - a\beta}{\sqrt{p^2x^2 + 4q}}, \quad A_2 = \frac{a\alpha - bx}{\sqrt{p^2x^2 + 4q}}. \tag{2.6}$$

D'après les formules (2.1) et (2.2), on obtient le tableau suivant :

n	$h_n(x,a,b;p,q)$
1	a
2	bx
3	bpx^2+aq
4	$bp^2x^3+(apq+bq)x$
5	$bp^3x^4+(ap^2q+2bpq)x^2+aq_2$
6	$bp^4x^5+(ap^3q+3bp^2q)x^3+(2apq^2+bq^2x)$
7	$bp^5x^6+(ap^4q+4bp^3q)x^4+(3ap^2q^2+3bpq^2x^2+aq^3$
8	$bp^6x^7+(ap^5q+5bp^4q)x^5+(4ap^3q^2+6bp^2q^2x^3+(3apq^3+bq^3)x$
⋮	⋮

TABLE 2.1 – Table des polynômes de Horadam

2.0.4 Fonction génératrice

La fonction génératrice associée au polynôme de Horadam, notée $G(x,t)$ est donnée par :

$$G(t)=\frac{a+xt(b-ap)}{1-pxt-qt^2}. \tag{2.7}$$

2.1 Quelques propertiés

Propriétés 2.1.1 *Soit $h_n(x)$ le nième polynôme de Horadam, alors*

$$\sum_{k=1}^{n-1}h_k(x)=\frac{h_n(x)+qh_{n-1}(x)-a-x(b-ap)}{px+q-1}.$$

Preuve.*En utilisant la formule de Binet pour les polynômes de Horadam, on a*

$$\sum_{k=1}^{n-1}h_k(x)=\sum_{k=1}^{n-1}A_1\alpha^{k-1}+A_2\beta^{k-1}$$

$$=A_1\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^{k-1}+A_2\sum_{k=1}^{n-1}\beta^{k-1}$$

$$=A_1\left(\frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\right)+A_2\left(\frac{1-\beta^{n-1}}{1-\beta}\right)$$

$$=\frac{(A_1-A_1\alpha^{n-1})(1-\beta)+(A_2-A_2\beta^{n-1})(1-\alpha)}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$

$$= \frac{(A_1 - (A_1\beta - (A_1\beta^{n-1} + (A_1\beta\alpha^{n-1} + A_2 - A_2\alpha - A_2\beta^{n-1} + A_2\alpha\beta^{n-1}}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$

$$= \frac{A_1 + A_2 - (A_1\beta + A_2\alpha) - (A_1\beta^{n-1} + A_2\beta^{n-1}) + \alpha\beta(A_1\alpha^{n-2} + A_2\beta^{n-2})}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$

$$= \frac{h_1(x) - a(\alpha^2 - \beta^2) + bx(\alpha - \beta) - h_n(x) - qh_{n-1}(x)}{1 - px - q}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} h_k(x) = \frac{h_1(x) + qh_{n-1}(x) - a - x(b - ap)}{px + q - 1}.$$

■

Théorème 2.1.1 *(Catalan's Identité) $h_n(x)$ le nième polynôme de Horadam. Alors*

$$h_n^2(x) - h_{n+r}(x)h_{n-r}(x) = \frac{(-q)^{n-r-1}(bxh_{r+1}(x) - ah_{r+2}(x))^2}{b^2x^2 - abpx^2 - a^2q}, \tag{2.8}$$

avec $n \geq 0$ et $n \geq r$.
Preuve.

$$h_n^2 - h_{n+r}(x)h_{n-r}(x) = (A_1\alpha^{n-1} + A_2\beta^{n-1})^2 - (A_1\alpha^{n+r-1} + A_2\beta^{n+r-1})(A_1\alpha^{n-r-1} - A_2\beta^{n-r-1})$$

$$= 2A_1A_2\alpha^{n-1}\beta^{n-1} - A_1A_2\alpha^{n+r-1}\beta^{n-r-1} - A_1A_2\alpha^{n-r-1}\beta^{n+r-1}$$

$$= A_1A_2(\alpha\beta^{n-1}(2 - \alpha^r\beta^{-r} - \alpha^{-r}\beta^r)$$

$$= A_1A_2(-q)^{n-1}\left(2 - \frac{\alpha^r}{\beta^r} - \frac{\beta^r}{\alpha^r}\right)$$

$$= A_1A_2(-q)^{n-1}\frac{-1}{(-q)^r}(\alpha^r - \beta^r)$$

$$= \frac{b^2x^2 - a^2q - abpx^2}{p^2x^2 + 4q}(-q)^{n-r-1}(\alpha^r - \beta^r)^2$$

$$= (b^2x^2 - a^2q - abpx^2)(-q)^{n-r-1}\left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}^2\right).$$

Depuis

$$\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta}^2 = \frac{bxh_{r+1}(x) - ah_{r+2}(x)}{b^2x^2 - abpx^2 - a^2q}.$$

Alors

$$h_n^2(x) - h_{n+r}(x)h_{n-r}(x) = (b^2x^2 - a^2q - abpx^2)(-q)^{n-r-1}\left(\frac{bxh_{r+1}(x) - ah_{r+2}(x)}{b^2x^2 - abpx^2 - a^2q}\right)^2.$$

Donc

$$h_n^2(x) - h_{n+r}(x)h_{n-r}(x) = \frac{(-q)^{n-r-1}(bxh_{r+1}(x) - ah_{r+2}(x))^2}{b^2x^2 - abpx^2 - a^2q}.$$

■

2.2 Les cas particuliers de polynôme de Horadam

2.2.1 Les polynômes de Fibonacci

Si $a = b = q = p = 1$

$$F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x), n \geq 1 \tag{2.9}$$

avec les conditions initiales

$$F_0(x) = 0, \quad F_1(x) = 1. \tag{2.10}$$

Quelques polynômes de Fionacci :

$$\begin{cases} F_2(x) = x, \\ F_3(x) = x^2 + 1, \\ F_4(x) = x^3 + 2x, \\ F_5(x) = x^4 + 3x^2 + 1, \\ F_6(x) = x^5 + 4x^3 + 3x. \end{cases}$$

L'équation caractéristique de la relation récurrence (2.19) est donnée par :

$$t^2 - xt - 1 = 0. \tag{2.11}$$

Cet équation a deux racines réelle :

$$\begin{cases} \alpha == \dfrac{x + \sqrt{x^2+4}}{2}, \\ \\ \beta = \dfrac{x - \sqrt{x^2+4}}{2}. \end{cases}$$

La forme de Binet pour le polynôme de Fibonacci donnée par :

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \tag{2.12}$$

La fonction génératrice associée au polynômes de Fibonacci :

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)t^n = \frac{t}{1 - 2xt - t^2}. \tag{2.13}$$

2.2.2 Les polynômes de Lucas

Si $a = 2, b = q = p = 1$ et $n \geq 2$

$$L_n(x) = xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x), \tag{2.14}$$

avec les conditions initiales

$$L_0(x) = 2, \quad L_1(x) = x. \tag{2.15}$$

Quelques polynômes de Lucas :

$$\begin{cases} L_2(x) = x^2 + 2, \\ L_3(x) = x^3 + 3x, \\ L_4(x) = x^4 + 4x^2 + 2, \\ L_5(x) = x^5 + 5x^3 + 5x, \\ L_6(x) = x^6 + 6x^4 + 9x^2 + 2. \end{cases}$$

L'équation caractéristique de la relation récurrence (2.14) est donnée par :

$$t^2 - xt - 1 = 0. \tag{2.16}$$

Cet équation a deux racines réelle :

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2}, \\ \\ \beta = \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2}. \end{cases}.$$

La forme de Binet pour le polynôme de Lucas, donnée par :

$$L_n(x) = \alpha^n - \beta^n. \tag{2.17}$$

La fonction génératrice associée au polynôme de Lucas :

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n = \frac{2 - t}{1 - 2xt - t^2}. \tag{2.18}$$

2.2.3 Les polynômes de Pell

Si $a = q = 1, b = p = 2$

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x), n \geq 2 \tag{2.19}$$

avec les conditions initiales

$$p_0(x) = 0, \quad p_1(x) = 1. \tag{2.20}$$

Quelques polynômes de Pell :

$$\begin{cases} P_2(x) = 2x, \\ P_3(x) = 4x^2 + 1, \\ P_4(x) = 8x^3 + 4x, \\ P_5(x) = 16x^4 + 12x^2 + 1, \\ P_6(x) = 32x^5 + 32x^3 + 6x, \end{cases}$$

L'équation caractéristique de la relation récurrence (2.19) est donnée par :

$$t^2 - 2xt - 1 = 0. \tag{2.21}$$

Cet équation a deux racines réelle :

$$\begin{cases} \alpha = x + \sqrt{x^2+1}, \\ \beta = x - \sqrt{x^2+1}. \end{cases}$$

La forme Binet pour la polynôme de Pell donnée par :

$$p_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} \tag{2.22}$$

La fonction génératrice associée au polynômes de Pell :

$$G(t) = \sum_{r=0}^{\infty} P_{r+1}(x)t^r = \frac{1}{1 - 2xt - t^2}. \tag{2.23}$$

Propriétés 2.2.1

1) $P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2xP_n(x) + 2P_{n-1}(x).$

2) $P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) - P_n^2(x) = (-1)^n.$

3) $P_{n+1}^2(x) - P_{n-1}^2(x) = 2xP_{2n}(x).$

4) $\sum_{r=1}^{n} P_{2r}(x) = \frac{P_{2n+1}(x) - 1)}{2x}.$

5) $\sum_{r=1}^{n} P_{2r-1}(x) = \frac{P_{2n}(x)}{2x}.$

6) $\sum_{r=1}^{n} P_r(x) = \frac{P_{n+1}(x) + P_n(x) - 1}{2x}.$

2.2.4 Les polynômes de Pell-Lucas

Si $a = b = p = 2, q = 1$

$$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x) \quad n \geq 1, \tag{2.24}$$

avec les conditions initiales

$$Q_0(x) = 2, \quad Q_1(x) = 2x. \tag{2.25}$$

Quelques polynômes de Pell-lucas :

$$\begin{cases} Q_2(x) = 4x^2 + 2, \\ Q_3(x) = 8x^3 + 6x, \\ Q_4(x) = 16x^4 + 16x^2 + 2, \\ Q_5(x) = 32x^5 + 40x^3 + 10x, \\ Q_6(x) = 64x^6 + 96x^4 + 36^2 + 2, \end{cases}$$

L'équation caractéristique de la relation du récurrence (2.24) est donnée par :

$$t^2 - 2xt - 1 = 0, \tag{2.26}$$

Cet équation a deux racines réelle :

$$\begin{cases} \alpha = x + \sqrt{x^2+1}, \\ \beta = x - \sqrt{x^2+1}, \end{cases}$$

La forme de Binet pour le polynôme de Pell-Lucas est donnée par :

$$Q_n(x) = \alpha^n - \beta^n. \tag{2.27}$$

La fonction génératrice associée au polynôme de Pell-Lucas :

$$\sum_{r=0}^{\infty} Q_{r+1}(x)t^r = \frac{2x+2t}{1-2xt-t^2}. \tag{2.28}$$

Propriétés 2.2.2

1) $Q_{n+1}(x)Q_{n-1}(x) - Q_n^2(x) = (-1)^{n-1}4(x^2+1).$

2) $\sum_{r=1}^{n} Q_{2r}(x) = \dfrac{Q_{2n+1}(x) - 2x}{2x}.$

3) $\sum_{r=1}^{n} Q_{2r-1}(x) = \dfrac{Q_{2n}(x) - 2x}{2x}.$

4) $\sum_{r=1}^{n} Q_r(x) = \dfrac{Q_{n+1}(x) + Q_n(x) - 2 - 2x}{2x}.$

CHAPITRE 3

HYBRINOMIAUX

3.1 Hybrinomiaux de Horadam

Dans cette section, nous définissons les Hybrinômiaux de Horadam. Nous donnons ensuite quelques cas particuliers de Horadam tels que les Hybrinômiaux (Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas). Enfin, nous obtenons formule de Binet, fonction génératrice, fonction génératrice exponentielle, formule de sommation, l'identité de Catalan, l'identité de Cassini et l'identité d'Ocagne, respectivement, le lecteur pourra consulter [7, 9, 10, 13].

Théorème 3.1.1 *Pour $n > 2$, Les Hybrinomiaux de Horadam, notés $H_n(x)$, sont définis par la relation de récurrence :*

$$H_n(x) = pxH_{n-1}(x) + qH_{n-2}(x). \tag{3.1}$$

Preuve.D'aprés les relations de récurrences (1.25) et (2.1), on obtient pour $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} H_n(x) &= pxh_{n-1}(x) + qh_{n-2}(x) + (pxh_n(x) + qh_{n-1}(x))i + (pxh_{n+1}(x) + qh_n(x))\varepsilon \\ &\quad + (pxh_{n+2}(x) + qh_{n+1}(x))h \\ &= pxH_{n-1}(x) + qH_{n-2}(x). \end{aligned}$$

Donc

$$H_n(x) = pxH_{n-1}(x) + qH_{n-2}(x), \quad n \geq 2, \tag{3.2}$$

■

avec les condition initiales :

$$H_1(x) = a + bxi + (bpx^2 + aq)\varepsilon + (bp^2x^3 + (apq + bq)x)h.$$

$$H_2(x) = bx + (bpx^2 + aq)i + (bp^2x^3 + (apq + bq)x)\varepsilon + (bp^3x^4 + (ap^2q + 2bpq)x^2 + aq^2)h.$$

La formule de Binet

Théorème 3.1.2 *La formule de Binet pour le hybrinôme de Horadam $H_n(x)$ est donnée par :*

$$H_n(x) = A\alpha^{n-1}\widehat{\alpha} + B\beta^{n-1}\widehat{\beta},$$

avec $\widehat{\alpha} = 1 + \alpha i + \alpha^2\varepsilon + \alpha^3 h$ et $\widehat{\beta} = 1 + \beta i + \beta^2\varepsilon + \beta^3 h$.

Preuve.D'aprés les relation (1.25) et (2.5) on trouve :

$$H_n(x) = (A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}) + (A\alpha^n + B\beta^n)i + (A\alpha^{n+1} + B\beta^{n+1})\varepsilon + (A\alpha^{n+2} + B\beta^{n+2})h$$

$$= A\alpha^{n-1}(1 + \alpha i + \alpha^2\varepsilon + \alpha^3 h) + B\beta^{n-1}(1 + \beta i + \beta^2\varepsilon + \beta^3 h)$$

$$= A\alpha^{n-1}\widehat{\alpha} + B\beta^{n-1}\widehat{\beta}.$$

■

La fonction génératrice

Théorème 3.1.3 *La fonction génératrice pour l'hybrinôme de Horadam $H_n(x)$ est*

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)t^n = \frac{H_0(x) + (H_1(x) - pxH_0(x))t}{1 - pxt - qt^2}. \tag{3.3}$$

Preuve. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)t^n = H_0(x) + H_1(x)t + \ldots + H_k(x)t^k + \ldots. \tag{3.4}$$

$$pxt\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)t^n = pxH_0(x)t + pxH_1(x)t^2 + \ldots + pxH_k(x)t^{k+1} + \ldots \tag{3.5}$$

$$qt^2\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)t^n = qH_0(x)t^2 + qH_1(x)t^3 + \ldots + qH_k(x)t^{k+2} + \ldots \tag{3.6}$$

D'aprés (3.4), (3.5), (3.6) on trouve :

$$(1 - pxt - qt^2)\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)t^n = H_0(x) + (H_1(x) - pxH_0(x))t, \tag{3.7}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)t^n = \frac{H_0(x) + (H_1(x) - pxH_0(x))t}{1 - pxt - qt^2}. \tag{3.8}$$

■

Théorème 3.1.4 *La fonction génératrice exponentielle de hybrinôme de Horadam $H_n(x)$ est :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = A\alpha^{-1}\widehat{\alpha}e^{t\alpha} + B\beta^{-1}\widehat{\beta}e^{\beta t}. \tag{3.9}$$

Preuve. En utilisant la formule de Binet pour le hybrinôme de Horadam, nous trouvons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}(A\alpha^{n-1}\widehat{\alpha} + B\beta^{n-1}\widehat{\beta})\frac{t^n}{n!}$$

$$= \frac{A\widehat{\alpha}}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha t)^n}{n!} + \frac{B\widehat{\beta}}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\beta t)^n}{n!}$$

$$= \frac{A\widehat{\alpha}}{\alpha}e^{\alpha t} + \frac{B\widehat{\beta}}{\beta}e^{\beta t}$$

$$= A\alpha^{-1}\widehat{\alpha}e^{t\alpha} + B\beta^{-1}\widehat{\beta}e^{\beta t}.$$

■

Théorème 3.1.5 ***(Catalan-Like Identité)*** *Pour $n \geq r$*

$$H_{n+r}(x)H_{n-r}(x) - H_n^2(x) = (-q)^{n-1}AB\left(\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r - 1\right) + \widehat{\beta}\widehat{\alpha}\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r - 1\right)\right).$$

Preuve. En utilisant la formule de Binet des Hybrinomiaux de Horadam, on a

$$\begin{aligned} H_{n+r}(x)H_{n-r-1}(x) - H_n^2(x) &= (A\alpha^{n-r-1}\widehat{\alpha} + B\beta^{n-r-1}\widehat{\beta})(A\alpha^{n+r-1}\widehat{\alpha} + B\beta^{n+r-1}\widehat{\beta}) \\ &\quad - ((A\alpha^{n-1}\widehat{\alpha} + B\beta^{n-1}\widehat{\beta})^2 \\ &= AB(\alpha\beta)^{n-1}\alpha^{-r}\beta^r\widehat{\alpha}\widehat{\beta} + BA(\beta\alpha)^{n-1}\beta^{-r}\alpha^r\widehat{\beta}\widehat{\alpha} \\ &\quad - AB(\alpha\beta)^{n-1}\widehat{\alpha}\widehat{\beta} - BA(\beta\alpha)^{n-1}\widehat{\beta}\widehat{\alpha} \end{aligned}$$

.

Après quelques calculs élémentaires, on obtient

$$H_{n+r}(x)H_{n-r}(x) - H_n^2(x) = (-q)^{n-1}AB\left(\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^r - 1\right) + \widehat{\beta}\widehat{\alpha}\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^r - 1\right)\right).$$

■

Théorème 3.1.6 ***(Cassini-Like Identité)***
Pour $n \geq 1$, l'égalité suivante est respectée :

$$H_{n+1}(x)H_{n-1}(x) - H_n^2(x) = (-q)^{n-1}AB\left(\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) + \widehat{\beta}\widehat{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right)\right) \tag{3.10}$$

Théorème 3.1.7 ***(d'Ocagne-Like Identité)***
Soit n un entier non négatif et m un nombre naturel tel que $m > n+1$, alors on a

$$H_m(x)H_{n+1}(x) - H_{m+1}(x)H_n(x) = \sqrt{\Delta}AB(-q)^{n-1}\left(\beta^{m-n}\widehat{\beta}\widehat{\alpha} - \alpha^{m-n}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\right), \tag{3.11}$$

avec $\Delta = p^2x^2 + 4q$

Preuve.

$$\begin{aligned} H_m(x)H_{n+1}(x) - H_{m+1}(x)H_n(x) &= (A\alpha^{m-1}\widehat{\alpha} + B\beta^{m-1}\widehat{\beta})(A\alpha^n\widehat{\alpha} + B\beta^n\widehat{\beta}) \\ &\quad - (A\alpha^m\widehat{\alpha} + B\beta^m\widehat{\beta})(A\alpha^{n-1}\widehat{\alpha} + B\beta^{n-1}\widehat{\beta}) \\ &= AB\alpha^{m-1}\beta^n\widehat{\alpha}\widehat{\beta} - AB\alpha^m\beta^{n-1}\widehat{\alpha}\widehat{\beta} \\ &\quad + BA\alpha^n\beta^{m-1}\widehat{\beta}\widehat{\alpha} - BA\alpha^{n-1}\beta^m\widehat{\beta}\widehat{\alpha}. \end{aligned}$$

Après quelques calculs élémentaires, on obtient

$$H_m(x)H_{n+1}(x) - H_{m+1}(x)H_n(x) = \sqrt{\Delta}AB(-q)^{n-1}\left(\beta^{m-n}\widehat{\beta}\widehat{\alpha} - \alpha^{m-n}\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\right).$$

■

Théorème 3.1.8 *Soit $n \geq 0$, on a*

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k(x) = \frac{H_1(x) - H_n(x) + q(H_0(x) - H_{n-1}(x))}{1 - px - q}. \tag{3.12}$$

Preuve. En utilisant la formule de Binet des Hybrinomiaux de Horadam, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} H_k(x) &= \sum_{k=1}^{n-1}\left(A\alpha^{k-1}\widehat{\alpha} + B\beta^{k-1}\widehat{\beta}\right) \\
&= A\widehat{\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^{k-1} + B\widehat{\beta}\sum_{k=1}^{n-1}\beta^{k-1} \\
&= A\widehat{\alpha}\left(\frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\right) + B\widehat{\beta}\left(\frac{1-\beta^{n-1}}{1-\beta}\right) \\
&= \frac{A\widehat{\alpha}(1-\beta)(1-\alpha^{n-1}) + B\widehat{\beta}(1-\alpha)(1-\beta^{n-1})}{1-px-q} \\
&= \frac{A_1 + A_2 - (A_1\beta + A_2\alpha) - (A_1\alpha^{n-1} + A_2\beta^{n-1}) + \alpha\beta(A_1\alpha^{n-2} + A_2\beta^{n-2})}{1-px-q}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n-1} H_k(x) = \frac{H_1(x) - H_n(x) + q(H_0(x) - H_{n-1}(x))}{1 - px - q}. \tag{3.13}$$

■

Les application sur les matrices

Théorème 3.1.9 *Soit $n \geq 0$, on a :*

$$\begin{bmatrix} H_{n+3}(x) & H_{n+2}(x) \\ H_{n+2}(x) & H_{n+1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_3(x) & H_2(x) \\ H_2(x) & H_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} px & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix}^n. \tag{3.14}$$

Preuve.

$$\begin{bmatrix} H_3(x) & H_2(x) \\ H_2(x) & H_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} px & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} H_3(x) & H_2(x) \\ H_2(x) & H_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} px & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix}^{n} \begin{bmatrix} px & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_{n+3}(x) & H_{n+2}(x) \\ H_{n+2}(x) & H_{n+1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} px & 1 \\ q & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} H_{n+4}(x) & H_{n+3}(x) \\ H_{n+3}(x) & H_{n+2}(x) \end{bmatrix}.$$

■

Propriétés 3.1.1 *Le nième terme de Horadam hybrinômial peut être obtenu par le calcul du déterminant de la matrice tridiagonale $M_{n-1}(x)$. Les matrices tridiagonales $n \times n$*

$$M_n(x) = \begin{pmatrix} H_2(x) & H_1(x) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -q & px & 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & -q & px & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & -q & px & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -q & px \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{3.15}$$

$$|M_n(x)| = \left|H_{n+1}(x)\right|.$$

Propriétés 3.1.2 *Notez que, Horadam hybrinomial peut être obtenu en utilisant l'autre matrice tridiagonale.*
Pour $n \geq 0$, on a

$$\begin{vmatrix} H_1(x) & H_2(x) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & q & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & px & q & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & px & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & px \end{vmatrix}_{n\times n} \tag{3.16}$$

Exemple 3.1.0.1 *On pose $a = 1$, $b = 2$, $p = 2$, $q = 1$*

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) + H_{n-2}(x).$$

Avec $H_1(x) = 1 + 2xi + (4x^2 + 1)\varepsilon(8x^3 + 4x)$,
et $H_2(x) = 2x + (4x^2 + 1)i + (8x^3 + 4x)\varepsilon + (16x^4 + 12x^2 + 1)h$.

La forme de Binet

$$\alpha = \frac{2x + \sqrt{4x^2+4}}{2}, \quad \beta = \frac{2x - \sqrt{4x^2+4}}{2},$$

$$et\ A_1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{4x^2+4}}, \quad A_2 = \frac{-x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{4x^2+4}}.$$

Donc

$$H_n(x) = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{4x^2+4}} \left(\frac{2x + \sqrt{4x^2+4}}{2} \right).$$

La fonction génératrice

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)t^n = \frac{H_0(x) + (H_1(x) - 2xH_0(x))t}{1 - 2xt - t^2}.$$

3.2 Hybrinomiaux de Fibonacci

Nous introduisons les Hybrinomiaux de Fibonacci, c'est-à-dire des polynômes de hybride, qui peuvent être considérés comme une généralisation des nombres hybrides de Fibonacci. Pour $n \geq 0$, les Hybrinomiaux de Fibonacci sont définit par :

$$FH_n(x) = F_n(x) + iF_{n+1}(x) + \varepsilon F_{n+2}(x) + hF_{n+3}(x). \tag{3.17}$$

Théorème 3.2.1 *Pour toute quantité variable x, on a*

$$FH_n(x) = xFH_{n-1}(x) + FH_{n-2}(x) \quad pour \quad n \geq 2 \tag{3.18}$$

avec $FH_0(x) = i + \varepsilon x + h(x^2+1), \quad FH_1(x) = 1 + ix + \varepsilon(x^2+1) + h(x^3+2x).$

Preuve. Si $n = 2$, on a

$$\begin{aligned} FH_2(x) &= xFH_1(x) + FH_0(x) \\ &= x(1 + ix + \varepsilon(x^2+1) + h(x^3+2x)) + i + \varepsilon x + h(x^2+1) \\ &= x + i(x^2+1) + \varepsilon(x^3+2x) + h(x^4+3x^2+1) \\ &= F_2(x) + iF_3(x) + \varepsilon F_4(x) + hF_5(x). \end{aligned}$$

Si $n \geq 3$ alors en utilisant la définition des polynômes de Fibonacci, on a

$$\begin{aligned} FH_n(x) &= F_n(x) + iF_{n+1}(x) + \varepsilon F_{n+2}(x) + hF_{n+3}(x) \\ &= (xF_{n-1} + F_{n-2}) + i(xF_n + F_{n-1}) + \varepsilon(xF_{n+1} + F_n) + h(xF_{n+2} + F_{n+1}) \\ &= x(F_{n-1}(x) + iF_n(x) + \varepsilon F_{n+1}(x) + hF_{n+2}(x)) + F_{n-2}(x) + iF_{n-1}(x) + \varepsilon F_n(x) + hF_{n+1}(x) \\ &= xFH_{n-1}(x) + FH_{n-2}(x). \end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.2 ***(La forme de Binet)*** *Soit $n \geq 0$ un nombre entier. Alors*

$$FH_n(x) = \frac{\alpha^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\Phi(x) - \frac{\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\Psi(x). \tag{3.19}$$

avec $\Phi(x) = 1 + i\alpha(x) + \varepsilon\alpha^2(x) + h\alpha^3(x)$

et $\Psi(x) = 1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x)$.

Preuve.

$$\begin{aligned} FH_n(x) &= F_n(x) + iF_{n+1}(x) + \varepsilon F_{n+2}(x) + hF_{n+3}(x) \\ &= \frac{\alpha^n(x)-\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} + i\frac{\alpha^{n+1}(x)-\beta^{n+1}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} + \varepsilon\frac{\alpha^{n+2}(x)-\beta^{n+2}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} \\ &+ h\frac{\alpha^{n+3}(x)-\beta^{n+3}(x)}{\alpha(x)-\beta(x)} \\ &= \frac{\alpha^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}(1 + i\alpha(x) + \varepsilon\alpha^2(x) + h\alpha^3(x)) \\ &- \frac{\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x)). \end{aligned}$$

■

On pose

$$\Phi(x) = 1 + i\alpha(x) + \varepsilon\alpha^2(x) + h\alpha^3(x), \quad \Psi(x) = 1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x)).$$

Donc

$$FH_n(x) = \frac{\alpha^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\Phi(x) - \frac{\beta^n(x)}{\alpha(x)-\beta(x)}\Psi(x) \tag{3.20}$$

La fonction génératrice

Théorème 3.2.3 *La fonction génératrice de hybrinomiaux de Fibonacci $FH_n(x)$ est*

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} FH_n(x)t^n = \frac{i + \varepsilon x + h(x^2+1) + (1 + \varepsilon + hx)t}{1 - xt - t^2}. \tag{3.21}$$

Preuve. On a

$$G(t) = FH_0(x) + FH_1(x)t + FH_2(x)t^2 + \dots$$

et

$$-G(t)xt = FH_0(x)xt + FH_1(x)xt^2 + FH_2(x)t^3x + \dots$$

$$-G(t)t^2 = FH_0(x)t^2 + FH_1(x)xt^3 + FH_2(x)t^4x + \dots$$

■

En ajoutant les trois égalités ci-dessus, nous obtiendrons

$$G(t)(1 - xt - t^2) = FH_0(x) + (FH_1(x) - FH_0(x)x)t$$

depuis $FH_n(x) = xFH_{n-1}(x) + FH_{n-2}(x)$, et $FH_0(x) = i + \varepsilon x + h(x^2+1)$,

$FH_1(x) - FH_0(x)x = 1 + \varepsilon + hx.$

Donc

$$G(t) = \frac{i + \varepsilon x + h(x^2+1) + (1 + \varepsilon + hx)t}{1 - xt - t^2}.$$

Les application sur les matrices

Théorème 3.2.4 *Soit $n \geq 0$ un nombre entier Alors :*

$$\begin{bmatrix} FH_{n+3}(x) & FH_{n+2}(x) \\ FH_{n+2}(x) & FH_{n+1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FH_3(x) & FH_2(x) \\ FH_2(x) & FH_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \tag{3.22}$$

Preuve.

$$\begin{bmatrix} FH_3(x) & FH_2(x) \\ FH_2(x) & FH_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} FH_3(x) & FH_2(x) \\ FH_2(x) & FH_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} FH_{n+3}(x) & FH_{n+2}(x) \\ FH_{n+2}(x) & FH_{n+1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} FH_{n+4}(x) & FH_{n+3}(x) \\ FH_{n+3}(x) & FH_{n+2}(x) \end{bmatrix}$$

■

3.3 Hybrinomiaux de Lucas

Dans cette section, nous introduisons les Hybrinomiaux de Lucas, c'est-à-dire les polynômes, qui sont une généralisation des nombres hybrides de Lucas.

Définition 3.3.1 *Pour $n \geq 0$, les Hybrinomiaux de Lucas sont définis par :*

$$LH_n(x) = L_n(x) + iL_{n+1}(x) + \varepsilon L_{n+2}(x) + hL_{n+3}(x). \tag{3.23}$$

Théorème 3.3.1 *Soit $n \geq 0$ un nombre entier. Pour toute quantité variable x, on a :*

$$LH_n(x) = 2xLH_{n-1}(x) + LH_{n-2}(x) \quad for \quad n \geq 2, \tag{3.24}$$

avec

$$LH_0(x) = 2 + ix + \varepsilon(x^2+2) + h(x^3+3x),$$

et

$$LH_1(x) = x + i(x^2+2) + \varepsilon(x^3+3x) + h(x^4+4x^2+2).$$

Théorème 3.3.2 *(La formule de Binet) Soit $n \geq 0$ un nombre entier. Alors*

$$LH_n(x) = \alpha^n(x)(1 + i\alpha(x) + \varepsilon\alpha^2(x) + h\alpha^3(x)) \tag{3.25}$$

$$+\beta^n(x)(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x)).$$

Avec $\alpha(x) = 1/2(x + \sqrt{x^2+4}), \beta(x) = 1/2(x - \sqrt{x^2+4})$.

Théorème 3.3.3 *(La formule de Binet) Soit $n \geq 0$ un nombre entier. Alors*

$$LH_n(x) = \alpha^n(x)(1 + i\alpha(x) + \varepsilon\alpha^2(x) + h\alpha^3(x)) \tag{3.26}$$

$$+\beta^n(x)(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x)).$$

Avec $\alpha(x) = 1/2(x + \sqrt{x^2+4}), \beta(x) = 1/2(x - \sqrt{x^2+4})$.

Théorème 3.3.4 *La fonction génératrice de hybrinôme de Lucas $LH_n(x)$ est donnée par :*

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} LH_n(x)t^n = \frac{LH_0(x) + (LH_1(x) - LH_0(x)x)t}{1 - xt - t^2}. \tag{3.27}$$

Avec $LH_0(x) = 2+ix+\varepsilon(x^2++h(x^3+3x), LH_1(x)-LH_0(x)x = -x+2i+\varepsilon x+h(-3x^2+4x+2)$.

Théorème 3.3.5 ***(Catallan identity)*** *Soit $n \geq 0, r \geq 0$, un nombre entier. Alors*

$$LH_{n-r}(x) * LH_{n+r}(x) - (LH_n(x))^2$$

$$= (-1)^n\widehat{\alpha}(x)\widehat{\beta}(x)\left(\frac{\beta^r}{\alpha^r} - 1\right) + (-1)^n\widehat{\beta}(x)\widehat{\alpha}(x)\left(\frac{\alpha^r}{\beta^r} - 1\right). \tag{3.28}$$

Théorème 3.3.6 ***(Cassini identité)*** *Soit $n \geq 0, r \geq 0$, un nombre entier. Alors*

$$LH_{n-1}(x) * LH_{n+1}(x) - (LH_n(x))^2$$

$$= (-1)^n\widehat{\alpha}(x)\widehat{\beta}(x)\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) + (-1)^n\widehat{\beta}(x)\widehat{\alpha}(x)\left(\frac{\alpha}{\beta} - 1\right). \tag{3.29}$$

Théorème 3.3.7 ***(d'Ocagne identité)*** *Soit $n \geq 0, r \geq 0, m \geq 0$ un nombre entier et $m \geq n$. Alors*

$$LH_m(x) * LH_{n+1}(x) - LH_{m+1}(x)LH_n$$

$$= (-1)^n\beta^{m-n}(x)\Delta(x)\widehat{\beta}(x)\widehat{\alpha}(x) - (-1)^n\alpha^{m-n}(x)\Delta(x)\widehat{\alpha}(x)\widehat{\beta}(x). \tag{3.30}$$

Les application sur les matrices

Théorème 3.3.8

$$\begin{bmatrix} LH_{n+2}(x) & LH_{n+1}(x) \\ LH_{n+1}(x) & LH_n(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} LH_2(x) & LH_1(x) \\ LH_1(x) & LH_0(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \tag{3.31}$$

3.4 Hybrinomiaux de pell

Dans cette section, nous introduisons les Hybrinomiaux de Pell , c'est-à-dire les polynômes, qui sont une généralisation des nombres hybrides de Pell ,

Définition 3.4.1 *Pour $n \geq 0$, les Hybrinomiaux de Pell sont définis par :*

$$PH_n(x) = P_n(x) + iP_{n+1}(x) + \varepsilon P_{n+2}(x) + hP_{n+3}(x). \tag{3.32}$$

Théorème 3.4.1 *Soit $n \geq 0$ un nombre entier. Pour toute quantité variable x, on a*

$$PH_n(x) = 2xPH_{n-1}(x) + PH_{n-2}(x) \quad for \quad n \geq 2 \tag{3.33}$$

avec

$$PH_0(x) = i + \varepsilon(2x) + h(4x^2 + 1)$$

et

$$PH_1(x) = 1 + i(2x) + \varepsilon(4x^2 + 1) + h(8x^3 + 4x).$$

Preuve. Pour $n = 2$ on a

$$\begin{aligned} PH_2(x) &= 2xPH_1(x) + PH_0(x) \\ &= 2x(1 + i(2x) + \varepsilon(4x^2 + 1) + h(8x^3 + 4x)) + i + \varepsilon(2x) + h(4x^2 + 1) \\ &= 2x + i(4x^2 + 1) + \varepsilon(8x^3 + 4x) + h(16x^4 + 12x^2 + 1) \\ &= P_2(x) + iP_3(x) + \varepsilon P_4(x) + hP_5(x). \end{aligned}$$

Pour $n \geq 3$alors en utilisant la définition des polynômes de Pell, nous avons

$$\begin{aligned} PH_n(x) &= P_n(x) + iP_{n+1}(x) + \varepsilon P_{n+2}(x) + hP_{n+3}(x) \\ &= (2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x)) + i(2xP_n(x) + P_{n-1}(x)) + \varepsilon(2xP_{n+1}(x) + P_n(x)) \\ &+ h(2xP_{n+2}(x) + P_{n+1}(x)) \\ &= 2x(P_{n-1}(x) + iP_n(x) + \varepsilon P_{n+1}(x) + hP_{n+2}(x)) + P_{n-2}(x) + iP_{n-1}(x) + \varepsilon P_n(x) + hP_{n+1}(x) \\ &= 2xPH_{n-1} + PH_{n-2}. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.4.2 *(La forme de Binet) Soit $n \geq 0$, alors :*

$$\begin{aligned} PH_n(x) &= \frac{\alpha^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}(1 + i\alpha(x) + \varepsilon\alpha^2(x) + h\alpha^3(x)) \\ &- \frac{\beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x)). \end{aligned}$$

avec $\alpha(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ et $\beta(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$.

Preuve. En utilisant la forme de Binet pour la polynôme de Pell(2.22)on a

$$PH_n(x) = P_n(x) + iP_{n+1}(x) + \varepsilon P_{n+2}(x) + hP_{n+3}(x)$$

$$= \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha - \beta} + i\frac{\alpha^{n+1}(x) - \beta^{n+1}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)} + \varepsilon\frac{\alpha^{n+2}(x) - \beta^{n+2}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

$$+ h\frac{\alpha^{n+3}(x) - \beta^{n+3}(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}$$

$$= \frac{\alpha^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}(1 + i\alpha(x) + \varepsilon\alpha^2(x) + h\alpha^3(x))$$

$$- \frac{\beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x)).$$

■

Théorème 3.4.3 ***(Catalan identité)*** *Soit $n \geq 0$,$r \geq 0$ des entiers tels que $n \geq r$. Alors*

$$PH_{n-r}(x)PH_{n+r}(x) - (PH_n(x))^2 = \frac{(-1)^n}{4x^2+4}\widehat{\alpha}(x)\widehat{\beta}(x)\left(1 - \frac{\beta^r(x)}{\alpha^r(x)}\right)$$

$$+\frac{(-1)^n}{4x^2+4}\widehat{\beta}(x)\widehat{\alpha}(x)\left(1 - \frac{\alpha^r(x)}{\beta^r(x)}\right).$$

Preuve. Pour les entiers $n \geq 0$; $r \geq 0$ et $n \geq r$, on a :

$$\begin{aligned}
&PH_{n-r}(x)PH_{n+r}(x)-(PH_n(x))^2 \\
&= \left(\frac{\alpha^{n-r}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\alpha}^n(x) - \frac{\beta^{n-r}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\beta}^n(x)\right)\left(\frac{\alpha^{n+r}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\alpha}^n(x) - \frac{\beta^{n+r}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\beta}^n(x)\right) \\
&- \left(\frac{\alpha^{n}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\alpha}^n(x) - \frac{\beta^{n}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\beta}^n(x)\right)\left(\frac{\alpha^{n}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\alpha}^n(x) - \frac{\beta^{n}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\beta}^n(x)\right) \\
&= -\frac{\alpha^{n-r}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\alpha}(x)\frac{\beta^{n+r}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\beta}(x) - \frac{\beta^{n-r}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\beta}(x)\frac{\alpha^{n+r}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\alpha}(x) \\
&+ \frac{\alpha^{n}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\alpha}(x)\frac{\beta^{n}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\beta}(x) + \frac{\beta^{n}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\beta}(x)\frac{\alpha^{n}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\alpha}(x) \\
&= -\frac{\alpha^{n-r}(x)\beta^{n+r}(x)}{\Delta^2(x)}\widehat{\alpha}(x)\widehat{\beta}(x) - \frac{\beta^{n-r}(x)\alpha^{n+r}(x)}{\Delta^2(x)}\widehat{\beta}(x)\widehat{\alpha}(x) \\
&+ \frac{\alpha^{n}(x)\beta^{n}(x)}{\Delta^2(x)}\widehat{\alpha}(x)\widehat{\beta}(x) + \frac{\beta^{n}(x)\alpha^{n}(x)}{\Delta^2(x)}\widehat{\beta}(x)\widehat{\alpha}(x) \\
&= \frac{(-1)^n}{\Delta^2(x)}\widehat{\alpha}(x)\widehat{\beta}(x)\left(1 - \frac{\beta^r(x)}{\alpha^r(x)}\right) + \frac{(-1)^n}{\Delta^2(x)}\widehat{\beta}(x)\widehat{\alpha}(x)\left(1 - \frac{\alpha^r(x)}{\beta^r(x)}\right)
\end{aligned}$$

avec $\Delta^2(x) = 4x^2 + 4$
alors :

$$\begin{aligned}
PH_{n-r}(x)PH_{n+r}(x) - (PH_n(x))^2 = &\frac{(-1)^n}{4x^2+4}\widehat{\alpha}(x)\widehat{\beta}(x)\left(1 - \frac{\beta^r(x)}{\alpha^r(x)}\right) \\
&+\frac{(-1)^n}{4x^2+4}\widehat{\beta}(x)\widehat{\alpha}(x)\left(1 - \frac{\alpha^r(x)}{\beta^r(x)}\right).
\end{aligned}$$

■

Théorème 3.4.4 ***(Cassini identité)*** *Pour les entiers $n \geq 0$; $r \geq 0$ et $n \geq r$, on a :*

$$PH_{n-1}(x)PH_{n+1}(x) - (PH_n(x))^2 = \frac{(-1)^{n-1}\beta(x)}{\Delta(x)}\widehat{\alpha}(x)\widehat{\beta}(x) - \frac{(-1)^{n-1}\alpha(x)}{\Delta(x)}\widehat{\beta}(x)\widehat{\alpha}(x)$$

Théorème 3.4.5 ***(d'Ocagne identity)*** *Pour les entiers $n \geq 0$; $m \geq 0$ et $m \geq n$, on a :*

$$PH_m(x)PH_{n+1}(x) - PH_{m+1}(x)PH_n(x) = \frac{(-1)^n\alpha^{m-n}(x)}{\Delta(x)}\widehat{\alpha}(x)\widehat{\beta}(x) - \frac{(-1)^n\beta(x)}{\Delta(x)}\widehat{\beta}(x)\widehat{\alpha}(x)$$

Théorème 3.4.6 ***(La fonction génératrice)***

$$G(t) = \frac{i + \varepsilon(2x) + h(4x^2+1) + (1 + \varepsilon + h(2x))}{1 - 2xt - t^2}. \tag{3.34}$$

Preuve. Supposons que la fonction génératrice hybrinomiale de Pell $PH_n(x)$ a la forme : $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} PH_n(x)t^n$ *alors* :

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} PH_n(x)t^n$$

$$= PH_0(x) + PH_1(x)t + PH_2(x)t^2 + \dots$$

$$-G(t)(2x)t = -PH_0(x)(2x)t - PH_1(x)(2x)t^2 - PH_2(x)(2x)t^3 - \dots$$

$$-G(t)t^2 = -PH_0(x)t^2 - PH_1(x)t^3 - PH_2(x)t^4 - \dots$$

En additionnant ces trois égalités ci-dessus, on obtien :

$$G(t)(1 - 2xt - t^2) = PH_0(x) + (PH_1(x) - PH_0(x)(2x))t$$

On a $PH_n(x) = 2xPH_{n-1}(x) + PH_{n-2}(x)$ et $PH_0(x) = i + \varepsilon(2x) + h(4x^2+1)$ et

$PH_1(x) - PH_0(x)(2x) = 1 + \varepsilon + h(2x)$ Donc

$$G(t) = \frac{i + \varepsilon(2x) + h(4x^2+1) + (1 + \varepsilon + h(2x))}{1 - 2xt - t^2}.$$

■

Les application des Hybrinomiaux de Pell dans les matrices

Nous allons donner la représentation matricielle des Hybrinomiaux de Pell :

Théorème 3.4.7 *Soit $n \geq 0$ un nombre entier Alors :*

$$\begin{bmatrix} PH_{n+3}(x) & PH_{n+2}(x) \\ PH_{n+2}(x) & PH_{n+1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PH_3(x) & PH_2(x) \\ PH_2(x) & PH_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n. \tag{3.35}$$

Preuve.

$$\begin{bmatrix} PH_3(x) & PH_2(x) \\ PH_2(x) & PH_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} PH_3(x) & PH_2(x) \\ PH_2(x) & PH_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n} \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} PH_{n+3}(x) & PH_{n+2}(x) \\ PH_{n+2}(x) & PH_{n+1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} PH_{n+4}(x) & PH_{n+3}(x) \\ PH_{n+3}(x) & PH_{n+2}(x) \end{bmatrix}.$$

■

3.5 Hybrinomiaux de Pell-Lucas

Dans cette section, nous introduisons les Hybrinomiaux de Pell-Lucas , c'est-à-dire les polynômes, qui sont une généralisation des nombres hybrides de Pell-Lucas ,

Définition 3.5.1 *Pour $n \geq 0$, les Hybrinomiaux de Pell-Lucas sont définis par :*

$$QH_n(x) = Q_n(x) + iQ_{n+1}(x) + \varepsilon Q_{n+2}(x) + hQ_{n+3}(x). \tag{3.36}$$

Théorème 3.5.1 *Soit $n \geq 0$ un nombre entier. Pour toute quantité variable x, on a :*

$$QH_n = 2xQH_{n-1}(x) + QH_{n-2}(x) \quad for \quad n \geq 2 \tag{3.37}$$
$$\tag{3.38}$$

avec

$$QH_0(x) = 2 + i(2x) + \varepsilon(4x^2 + 2) + h(8x^3 + 6x).$$

et

$$QH_1(x) = 2x + i(4x^2 + 2) + \varepsilon(8x^3 + 6x) + h(16x^4 + 16^2 + 2).$$

Théorème 3.5.2 ***(La forme de Binet)*** *Soitn ≥ 0 un nombre entier. Alors :*

$$QH_n(x) = \alpha^n(x)(1 + i\alpha(x) + \varepsilon\alpha(x)^2 + h\alpha(x)^3) + \beta^n(x)(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x)),$$

avec $\alpha(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ et $\beta(x) = x - \sqrt{x^2+1}$.

Preuve. En utilisant la forme Binet pour la polynôme de Pell-Lucas(2.27)on a :

$$QH_n(x) = Q_n(x) + iQ_{n+1}(x) + \varepsilon Q_{n+2}(x) + hQ_{n+3}(x)$$

$$= \alpha^n(x) - \beta^n(x) + i\alpha^{n+1}(x) - i\beta^{n+1}(x) + \varepsilon\alpha^{n+2}(x) - \varepsilon\beta^{n+2}(x) + h\alpha^{n+3}(x) - h\beta^{n+3}(x)$$

$$= \alpha^n(x)(1 + i\alpha(x) + \varepsilon\alpha(x)^2 + h\alpha(x)^3) + \beta^n(x)(1 + i\beta(x) + \varepsilon\beta^2(x) + h\beta^3(x)).$$

■

Théorème 3.5.3 ***(Catalan identité)*** *Soit $n \geq 0$,$r \geq 0$ des entiers tels que $n \geq r$. Alors*

$$QH_{n-r}(x)QH_{n+r}(x) - (QH_n(x))^2 = (-1)^n\widehat{\alpha}(x)\widehat{\beta}(x)\left(\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} - 1\right) + (-1)^n\widehat{\beta}(x)\widehat{\alpha}(x)\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right).$$

Théorème 3.5.4 ***(Cassini identité)*** *Pour les entiers $n \geq 0$; $r \geq 0$ et $n \geq r$, on a :*

$$QH_{n-1}(x)QH_{n+1}(x) - (QH_n(x))^2 = (-1)^n\widehat{\alpha}(x)\widehat{\beta}(x)\left(\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} - 1\right) + (-1)^n\widehat{\beta}(x)\widehat{\alpha}(x)\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1\right)$$

Théorème 3.5.5 ***(d'Ocagne identity)*** *Pour les entiers $n \geq 0$, $m \geq 0$ et $m \geq n$, on a*

$$\begin{aligned} QH_m(x)QH_{n+1}(x) - QH_{m+1}(x)QH_n(x) &= (-1)^n\beta^{m-n}(x)\Delta(x)\widehat{\beta}(x)\widehat{\alpha}(x) \\ &\quad - (-1)^n\alpha^{m-n}(x)\Delta(x)\widehat{\alpha}(x)\widehat{\beta}(x). \end{aligned}$$

Théorème 3.5.6 ***(La fonction génératrice)*** *La fonction génératrice pour hybrinôme de Fibonacci $FH_n(x)$ est :*

$$G(t) = \frac{QH_0(x) + (QH_1(x) - QH_0(x)(2x))}{1 - 2xt - t^2}. \tag{3.39}$$

Preuve. Supposons que la fonction génératrice hybrinomiale de Pell-Lucas $QH_n(x)$ a la forme :

$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} QH_n(x)t^n \quad alors :$

$$G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} QH_n(x)t^n$$

$$= QH_0(x) + (QH_1(x) + QH_2(x)t^2 + \dots$$

$$-G(t)(2x)t = -QH_0(x)(2x)t - QH_1(x)(2x)t^2 - QH_2(x)(2x)t^3 - \dots$$

$$-G(t)t^2 = -QH_0(x)t^2 - QH_1(x)t^3 - QH_2(x)t^4 - \dots$$

En additionnant ces trois égalités ci-dessus, on obtien :

$$G(t)(1 - 2xt - t^2) = QH_0(x) + (QH_1(x) - QH_0(x)(2x))t$$

On a $QH_n(x) = 2xQH_{n-1}(x) + QH_{n-2}(x)$

et $QH_0(x) = 2 + i(2x) + \varepsilon(4x^2 + 2) + h(8x^3 + 6x)$

et $QH_1(x) - QH_0(x)(2x) = -2x + 2i + \varepsilon(2x) + h(4x^2 + 2)$.

Donc

$$G(t) = \frac{QH_0(x) + (QH_1(x) - QH_0(x)(2x))t}{1 - 2xt - t^2}.$$

■

Les application sur les matrices

Théorème 3.5.7 *Soit $n \geq 0$ un nombre entier Alors :*

$$\begin{bmatrix} QH_{n+3}(x) & QH_{n+2}(x) \\ QH_{n+2}(x) & QH_{n+1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} QH_3(x) & QH_2(x) \\ QH_2(x) & QH_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n. \tag{3.40}$$

Preuve.

$$\begin{bmatrix} QH_3(x) & QH_2(x) \\ QH_2(x) & QH_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} QH_3(x) & QH_2(x) \\ QH_2(x) & QH_1(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} QH_{n+3}(x) & QH_{n+2}(x) \\ QH_{n+2}(x) & QH_{n+1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} QH_{n+4}(x) & QH_{n+3}(x) \\ QH_{n+3}(x) & QH_{n+2}(x) \end{bmatrix}.$$

■

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons étudié de manière détaillée les hybrinômiaux de Horadam et donné les propriétés de bases de ces polynômes, tels que : la formule de Binet et la fonction génératrice. Ces polynômes peuvent intervenir dans plusieurs domaines scientifiques, comme en physique et en mécanique. Les nombres hybrides de Horadam ainsi que les hybrinômiaux de Horadam sont un sujet d'actualité et les travaux récents sont en développement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aziz, Semaa Hassan, Suha Shihab, and Mohammed Rasheed. "On Some Properties of Pell Polynomials." Al-Qadisiyah Journal of Pure Science 26.1 (2021) : 39-54.

[2] Catarino, P. A note on certain matrices with Fibonacci quaternion polynomials, J. Differ. Equ. Appl., 22, (2016).

[3] Cerda-Morales, Gamaliel. "Investigation of generalized hybrid Fibonacci numbers and their properties. arXiv preprint arXiv :1806.02231 (2018).

[4] Falcón, S., On the generating matrices of the k-Fibonacci numbers, Proyecciones J. Math, 32(4), (2013).

[5] Horadam, A. F., Mahon, J. M., et al. Pell and pell-lucas polynomials. Fibonacci Quart, 1985, vol. 23, no 1, p. 7-20.

[6] Hordam, Tugba, and E. Gokcen Kocer. "On some properties of Horadam polynomials." Int. Math. Forum. Vol. 4. No. 25. 2009.

[7] Kızılateş, Can. "A note on Horadam hybrinomials." (2020).0

[8] Koshy T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Vol. 1, Second edition, Pure and Applied Mathematics (Hoboken), John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, NJ, (2018).

[9] Liana, Mirosław, A. Szynal-Liana, and Iwona Włoch. "Jacobsthal representation hybrinomials." Annales Mathematicae Silesianae. Vol. 36. No. 1. 2022.

[10] Liana, Miroslaw, A. Szynal-Liana, and Iwona Wloch. "On Pell hybrinomials." Miskolc Mathematical Notes 20.2 (2019) : 1051-1062.

[11] M. Özdemir, Introduction to hybrid Numbres, Advances in Applied Clifford, Algebras 28, 1P, 11 (2018).

[12] Rangarajan, R., C. K. Honnegowda, and P. Shashikala. "A two variable Lucas polynomials corresponding to hybrid Fibonacci polynomials." Global Journal of Pure and Applied Mathematics 12.6 (2017) :

[13] Szynal-Liana, A., and Iwona Włoch. "Introduction to Fibonacci and Lucas hybrinomials." Complex Variables and Elliptic Equations 65.10 (2020) : 1736-1747.

[14] Szynal-Liana A., The Horadam hybrid numbers, Discuss. Math. Gen. Algebra Appl. 38, no. 1, (2018).

[15] Szynal-Liana A., Wloch I., The Fibonacci hybrid numbers, Utilitas Math., 110, (2019).

[16] Tuglu, Naim, E. Gokcen Kocer, and Alexey Stakhov. "Bivariate Fibonacci like p–polynomials." Applied Mathematics and Computation 217.24 (2011) : 10239-10246 1669-1682.