**

Table des Matières

Liste des illustrations graphiques **5**

Remerciements **7**

Résumé **8**

Abstract **9**

Introduction **10**

CHAPITRE 1. Généralités sur les graphes **12**

1.1. Introduction 12

1.2. Définitions et notations 12

1.2.1. Graphe non orienté 13

1.2.2. Graphe partiel et sous graphe 14

1.2.3. Chaînes et cycles 15

1.2.4. Graphes particuliers 15

1.2.5. La Minimalité et La Maximalité d'un Ensemble 19

1.3. quelques invariants de graphes 19

1.4. le produit cartésien 20

1.5. Notions fondamentales sur la domination 20

1.5.1. Historique 20

1.5.2. Domination standard 21

1.6. Quelques invariants de domination 22

1.6.1. Domination stable 22

1.6.2. Domination totale 23

1.6.3. Domination connexe 23

1.6.4. Domination double 23

1.6.5. Domination couplée 23
1.6.6. Domination multiple 24

CHAPITRE 2. Les alliances dans les graphes **25**
2.1. introduction 25
2.2. Types d'alliances 25
2.2.1. Alliances défensives 25
2.2.2. Alliance offensive 28
2.2.3. Alliance puissante 29
2.3. partition alliance 36
2.4. k-alliances dans les graphes 37
2.4.1. Bornes supérieures sur γ_o^k 38
2.4.2. Bornes inférieures sur γ_o^k 38
2.4.3. Bornes sur γ_a^k 39
2.4.4. Bornes supérieures sur γ_o^k 39

CHAPITRE 3. L'égalité et la forte égalité entre les nombres d'alliances globales **41**
3.1. Introduction 41
3.2. Egalité entre le nombre d'alliance puissante globale γ_{ap} et le nombre de domination γ 42
3.3. Egalité entre le nombre d'alliance offensive globale γ_o et le nombre de domination γ 43
3.4. Arbres avec $\gamma_o(T) = \gamma(T)$ 44
3.5. La Forte égalité 45
3.6. Arbres avec $\gamma_o(T) \equiv \gamma(T)$ 45
3.7. Egalité entre le nombre d'alliance defensive globale γ_a et le nombre d'alliance puissante globale γ_{ap} 47
3.7.1. Egalité entre les chaines et les étoiles 47
3.7.2. Egalité entre les cycles 48
3.8. Arbres avec $\gamma_a(T) = \gamma_{ap}(T)$ 48

3.9. Forte égalité entre le nombre d'alliance defensive globale γ_a et le nombre d'alliance puissante globale γ_{ap} 50

Conclusion et perspectives **52**

Liste des illustrations graphiques

FIGURE 1.1. un graphe simple G 13
FIGURE 1.2. un graphe $3-$ *régulier* 14
FIGURE 1.3. un graphe partiel et sous-graphe de G 14
FIGURE 1.4. C_6 et P_6 15
FIGURE 1.5. un complémentaire de graphe G 15
FIGURE 1.6. un graphe planaire 16
FIGURE 1.7. un graphe biparti et biparti complet 17
FIGURE 1.8. un arbre T 17
FIGURE 1.9. une double étoile $S_{2,2}$ 18
FIGURE 1.10. une étoile subdivisé $S^*_{1,3}$ 18
FIGURE 1.11. la couronne de C_3 18
FIGURE 1.12. produit cartésien de chaînes P_2 et P_3 20
FIGURE 1.13. $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 4$ 22
FIGURE 1.14. un graphe G 24

FIGURE 2.1. $a(S_{2,1})$ et $\hat{a}(S_{2,1})$ 26
FIGURE 2.2. $\gamma_{\hat{a}}(p_4)$ et $\gamma_a(p_4)$ 26
FIGURE 2.3. un cycle C_4 avec $\gamma_a = \gamma_t = \gamma_{\hat{a}}$ 28
FIGURE 2.4. $\gamma_o(S_{1,2})$ et $\gamma_{\hat{o}}(S_{1,2})$ 29
FIGURE 2.5. $\gamma_{a_p}(P_5) = 3$ 30
FIGURE 2.6. un arbre de $\mathcal{F}$ 31
FIGURE 2.7. produit cartésien de P_3 et P_4 35
FIGURE 2.8. produit cartésien de P_3 et P_4 35
FIGURE 2.9. une alliance 2-offensive et 2-défensive 38

FIGURE 3.1. un arbre T 41
FIGURE 3.2. $\gamma_o(T) = \gamma_o(T') + 1$ et $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$ 42
FIGURE 3.3. $\gamma(P_4) = \gamma_{ap}(P_4) = 2$ 43

FIGURE 3.4. $\gamma_o(C_4) = \gamma(C_4) = 2$ 43
FIGURE 3.5. Un arbre T de $\mathcal{F}$ 44
FIGURE 3.6. La construction de la famille $\mathcal{F}'$ 46
FIGURE 3.7. un arbre T avec $\gamma_o\ (T) \equiv \gamma(T)$ 47
FIGURE 3.8. égalité entre γ_a et γ_{ap} dans les chaines 47
FIGURE 3.9. une double étoile $S_{3,3}$ 47
FIGURE 3.10. égalité entre γ_a et γ_{ap} 48
FIGURE 3.11. La construction de la famille $\mathcal{F}''$ 49
FIGURE 3.12. un arbre avec $\gamma_a(T) = \gamma_{ap}(T) = 7$ 50
FIGURE 3.13. $\gamma_a(Ch(2,1,1,3,2)) = \gamma_{ap}(Ch(2,1,1,3,2)) = 5$ 50
FIGURE 3.14. Forte égalité entre les chaines 50
FIGURE 3.15. une double étoile $S_{3,3}$ 51
FIGURE 3.16. l'étoile subdivisée $S^*_{1,k}$ 51
FIGURE 3.17. $\gamma_{ap}(C_3 \circ k_1) \equiv \gamma_a(C_3 \circ k_1) = 3$ 51

Remerciements

Avant tout nous remercions Allah tout puissant de nous avoir donné le courage et patience pour terminer ce travail.

La réalisation de ce mémoire a été possible grâce au concours de plusieurs personnes à qui nous voudrons témoigner toute notre reconnaissance .

Nous vodrons tout d'abord adresser toute notre gratitude à Monsieur **Bouzefrane Mohamed** maître assistant à l'universite Dr: Yahia Farés de médéa d'avoir accepte d'encadrer notre mémoire.

Nous remecions également Monsieur **Tablnehas Kamel** Maître assistant à l'université Dr. Yahia Farés de Médéa, pour l'honneure qu'il nous a fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Nous tenons à exprimer nos remerciements à Monsieur **Zamime Mohamed** Maître de conférences à l'université Dr. Yahia Farés de Médéa pour avoir accepté de participer au jury de ce mémoire.

Résumé

L'objective principal de ce mémoire est l'étude les alliances globales dans les graphes. Soit

$G = (V; E)$ un graphe simple d'ordre n et de taille m , où V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un dominant de G si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S. Un ensemble dominant S est une alliance offensive globale (aog) si pour tout sommet $v \in \partial S$ avec $\partial S = N(S) - S$, $|N(v) \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$. S est une alliance défensive globale (adg) si pour tout sommet $v \in S$, $|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V - S)|$.

une alliance puissante globale si elle est défensive et offensive au même temps (apg), Le nombre de domination $\gamma(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G et le nombre d'alliance offensive globale $\gamma_o(G)$ est le cardinal minimum d'une alliance offensive globale de G. Le nombre d'alliance défensive globale $\gamma_a(G)$ est le cardinal minimum d'une alliance défensive globale de G. Le nombre d'alliance puissante globale $\gamma_{a_p}(G)$ est le cardinal minimum d'une alliance puissante globale de G .

Dans ce mémoire, nous présentons en premier lieu l'égalité entre les chaines et les étoiles, les doubles étoiles, les cycles , En seconde lieu on s'intéresse à la caractérisation des arbres avec $\gamma_o(T) \equiv \gamma(T)$ et $\gamma_a(T) = \gamma_{ap}(T)$.

Abstract

The main purpose of this paper is the study of global alliances in graphs.

Let $G = (V; E)$ be a simple graph of order n, and of size m with vertex set V and edge set E.

A subset $S \subseteq V$ is a dominant of G if all vertex in $V - S$ is adjacent to at least one vertex of S. A set S is a global offensive alliance (goa) if for any vertex v in ∂S and $\partial S = N(S) - S$, $|N(v) \cap S| \geq |N[v] \cap (V - S)|$. S is a global defensive alliance (gda) if for any vertex $v \in S$, $|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V - S)|$. S is a global powerful alliance (gpa) if it is both défensive and offensive.

The number $\gamma(G)$ is the minimum cardinal of a dominating set of G and the global offensive alliance number $\gamma_o(G)$ is the cardinality of a minimum (goa) of G. The global défensive alliance number $\gamma_a(G)$ is the cardinality of a minimum (gda) of G. The global powerful alliance number $\gamma_{a_p}(G)$ is the cardinality of a minimum (gpa) of G.

In this paper, we first present the equality between the Stars, double stars, cycles and paths. after we are interesting the characterization of trees with $\gamma_o(T) \equiv \gamma(T)$ and $\gamma_a(T) = \gamma_{ap}(T)$.

Introduction

La recherche opérationnelle est un ensemble de techniques récentes, datant tout au plus de la deuxième guerre mondiale, ces techniques sont basées sur des concepts et outils mathématiques.

La théorie des graphes, la programmation linèaire, l'optimisation combinatoire, les processus aléatoires, l'optimisation dans les réseaux, la théorie des jeux, les files d'attentes, etc... sont les principales techniques auxquelles recourt la recherche opérationnelle.

La théorie des graphes représente une classe très importante de la recherche opérationnelle. Elle constitue un outil très puissant pour schématiser les modèles, des liens et relations entre les objets. On considére géneralement que le problème des ponts de konigsberg, résolu par Euler, est le premier résultat formel de la théorie des graphes "comment parcourir une fois et une seule fois les sept ponts de la ville de Konigsberg".

La théorie des graphes est devenue très utile comme modèle mathématique. Elle regroupe généralement des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristique commune de pouvoir être représentés par un schéma. Ce schéma est appelé graphe.

Un graphe est une structure trés simple puisqu'il est constitué d'un ensemble de sommets et d'une famille de liens (orientés ou non), appelés arêtes ou arcs, entre certains couples de sommets. Un graphe non orienté peut-être utilisé pour modiliser des relations de conflits entre individus ou objet. Un graphe orienté représente typiquement un réseau de communication, ou encore des relations de domination non-réciproque entre personnes, etc.

Parmi les problèmes les plus connus en théorie des graphes sont les problèmes de domination dans les graphes. De nombreuses recherches, au-delà de l'importance théorique liée à leur résolution, ces problèmes trouvent également un intérêt pratique dans la modélisation des problèmes réels issus de l'industrie.

La technique de domination est devenue donc un outil pour la résolution des problèmes de la théorie des graphes. Généralement, il s'agit de trouver un ensemble de sommets d'un

graphe qui satisfasse certaines conditions.

Nous étudions dans ce mémoire la notion des alliances dans les graphes. Les alliances dans les graphes ont été présentées la première fois par Kristiansen, Hedetniemi, et Hedetniemi dans [25] et [26]. Dans ce mémoire, trois chapitres fondamentaux sont développés. Nous nous intéressons principalement à la notion des alliances globales dans les graphes.

Dans le chapitre un, nous présentons les définitions et les notions de base nécéssaires utilisées tout au long de ce mémoire. Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre en question.

Dans le deuxième chapitre, Nous abordons le thème étudié et nous donnons un état de l'art sur les alliances dans les graphes, en rappelant les principaux résultats existants.

Notre contribution se situe dans le troisième chapitre. Nous étudions l'égalité et la forte égalité pour les nombres d'alliances globales γ_a , γ_o et γ_{ap} dans les chaines et les cycles, ainsi qu'une caractérisation des arbres pour lesquels le nombre de domination et le nombre d'alliance offensive globale sont égaux $\gamma_o(T) = \gamma(T)$ et la caractérisation des arbres pour lesquels le nombre d'alliance puissante globale et le nombre d'alliance défensive globale sont égaux $\gamma_a(T) = \gamma_{ap}(T)$, aussi nous donons une classe des arbres pour lesquels $\gamma_o(T) \equiv \gamma(T)$.

Enfin on termine par une conclusion générale sur nos travaux réalisés.

CHAPITRE 1

Généralités sur les graphes

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons les différentes notions utilisées en théorie des graphes de maniére courante et dont nous servirons dans ce document ces notations sont standards et peuvent être retrouvées avec plus de détails dans C. Berge [1], J. A. Bondy et U. S. R. Murty [2], R. Diestel [3].

La première partie de ce chapitre rassemble les définitions classiques de la théorie des graphes ainsi que les notations nécessaires dont on aura besoin le long de ce travail. Ces définitions peuvent être retrouvées avec plus de détails dans les ouvrages suivants: C. Berge [1], J. A. Bondy et U. S. R. Murty [2], R. Diestel [3].

1.2 Définitions et notations

Un graphe simple $G = (V; E)$ est le couple constitué de deux ensemble finis V et E. dont l'ensemble $V = \{v_{1,}v_2.....,v_n\}$ est appelé l'ensemble des sommets et $E = \{\ e_{1,}e_{2.....,}e_n\}$ est un ensemble de paires de sommets de V appelées arêtes. Le cardinal de V est appelé ordre de G, et noté par $|V| = n$. Le cardinal de $|E| = m$, est appelé la taille de G.

Une arête $e \in E$ est une paire de sommets (u, v), notée par $e = uv$ ou $e = vu$. Où u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents ou voisins et que e est incidente à u et v.

Représentation graphiques: Les graphes tiennent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins. à chaque sommet de G, on fait correspondre un point distinct du plan et on relie par une courbe simple les points correspondant aux extrémités de chaque arête.

Un graphe $G = (V, E)$ où $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et $E = \{v_1v_{2,}v_2v_3, v_2v_5, v_4v_5, v_1v_4\}$ peut se représenter par la Figure 1.1

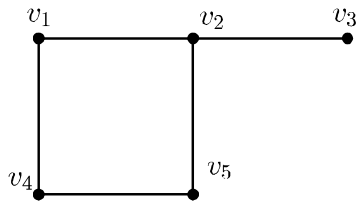


FIGURE 1.1. un graphe simple G

1.2.1 Graphe non orienté

Un graphe non orienté n'est qu'un graphe orienté symétrique, si un arc relie le sommet u au sommet v, un autre arc relie le sommet v au sommet u. On ne trace alors qu'un trait entre u et v que l'on appelle une «arête » .

Voisinage et degré

Définition 1.1. *Soit $G = (V,E)$ un graphe et $v \in V$ un sommet de G , le voisinage ouvert de v , noté $N_G(v)$, est donné par $N_G(v) = \{u \in V, uv \in E\}$.*

Définition 1.2. *Soit $G = (V,E)$ un graphe et $v \in V$ un sommet de G, Le voisinage fermé de v , noté $N_G[v]$, est donné par $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.*

Pour un sous ensemble $S \subseteq V$, le voisinage ouvert de S est : $N_G(S) = \cup_{v \in s} N_G(v)$ et le voisinage fermé de S est : $N_G[S] = N_G(S) \cup S$

Définition 1.3. *Pour un graphe ssimple $G = (V,E)$, On appelle degré d'un sommet v de G, noté $d_G(v)$ (ou $d(v)$), le nombre de ses voisins dans G. Un sommet de degré zéro est un sommet isolé. Un sommet de degré un est sommet pendant (feuille).*

Le **dégré maximum** d'un graphe G, noté $\Delta(G)$, est le maximum des degrés de ses sommets, en d'autres termes, $\Delta(G) = \max_{v \in V}\{d(v)\}$.

Le **dégré minimum** d'un graphe G, noté $\delta\ (G)$, est le minimum des degrés de ses sommets.

Pour le graphe G de la Figure 1.1, nous avons $\Delta\,(G) = 3$ et $\delta\ (G) = 1$.

Un graphe dont tous les sommets ont le même degré est un **graphe régulier**. Un graphe est k-régulier si tous ses sommets sont de degré k , par exemple le graphe G de la Figure 1.2 est un graphe $3-$régulier est aussi appellé graphe cubique :

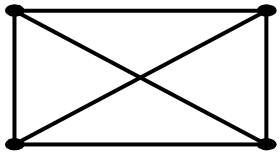


FIGURE 1.2. un graphe $3-$*régulier*

1.2.2 Graphe partiel et sous graphe

Définition 1.4. *Soit $G = (V,E)$ un graphe simple, pour un sous-ensemble $A \subset V$, on désigne par $G\,[A]$ le **sous-graphe** de G engendré par A. Donc le sous-graphe $G\,[A]$ est le graphe ayant A pour ensemble de sommets et dont les arêtes sont celles de E ayant leurs deux extrémités dans A. Dans ce cas, on dira que l'ensemble des sommets de A engendré ou induit le sous- graphe $G\,[A]$ Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe. Le graphe H est dit un **graphe partiel** de G si $V(H) = V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Voici dans la figure suivante un graphe partiel et sous-graphe de G .*

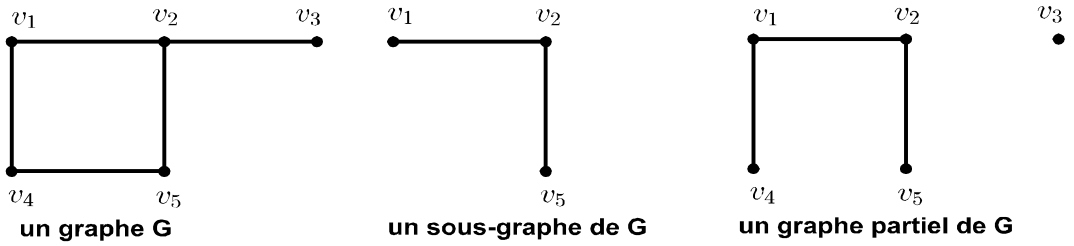


FIGURE 1.3. un graphe partiel et sous-graphe de G

1.2.3 Chaînes et cycles

Une **chaîne** dans un graphe G est une suite $\{v_0, v_2, ..., v_k\}$ de sommets telle que deux sommets consécutifs v_i et v_{i+1} sont reliés par une arête. La longueur d'une telle chaîne est le nombre d'arêtes qui la compose, k dans notre exemple.

Une chaîne qui ne contient pas deux fois le même sommet (à l'exception éventuelle de ses extrémités) est dite **élémentaire**. Si aucun des arêtes composant la chaîne n'apparaît plus d'une fois La chaîne est dite **chaîne simple**.

Un **cycle** est une chaîne simple $\{v_0, v_2, ..., v_k\}$ dont les deux extrémités sont confondues $v_0 = v_k$.

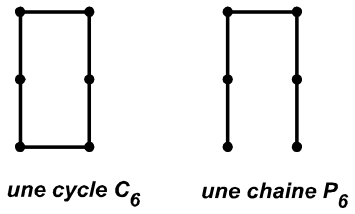


FIGURE 1.4. C_6 et P_6

1.2.4 Graphes particuliers

- Le graphe **complémentaire** d'un graphe $G = (V, E)$ est le graphe noté $\overline{G}$, défini par:

$V\left(\overline{G}\right) = V(G)$ et $E\left(\overline{G}\right) = \{uv : u \in V(G), v \in V(G)$ et $uv \notin E(G)\}$.

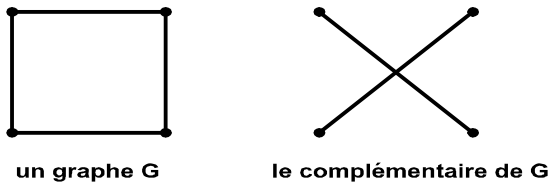


FIGURE 1.5. un complémentaire de graphe G

- Un graphe G est dit **connexe** si pour toute paire de sommets distincts u et v de ce graphe est reliée par une chaine. Une composante connexe d'un graphe G est sous graphe connexe maximal.

- Un graphe G est dit **complet** si pour toute paire de sommet (x, y), il existe une arête qui reliant, (touts les sommets sont deux à deux adjacents), un graphe simple complet d'ordre n noté K_n. Dans ce graphe, chaque sommet est de degré $n - 1$. Exemple de graphe Figure1.2

- Un graphe G est dit **planaire** s'il peut être déssiné dans le plan de sorte que ses arêtes ne se croisent pas.

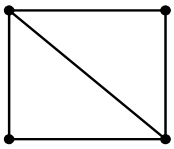


FIGURE 1.6. un graphe planaire

- Un graphe **discrêt** est un graphe sans arêtes.

- Un graphe $G = (V, E)$ est dit **biparti** si V peut se partager en deux sous ensembles V_1 et V_2 stables, Un graphe biparti complet est un graphe biparti telle que tout les sommets de V_1 sont adjacents à tout les sommets de V_2, si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$ le graphe biparti complet est noté par $K_{p,q}$, plus généralement, un graphe $G = (V, E)$ est dit k-parti ($k \geq 2$), si V peut être partitionné en k stables V_1, V_2, ..., V_k , il est dit **multiparti-complet** si pour tout $i \neq j$, tout sommet de V_i est adjacent à tout sommet de V_j . Notons qu'un graphe est multiparti-complet si et seulement s'il ne contient pas $K_1 + K_2$ comme sous graphe induit. Exemple de graphe biparti

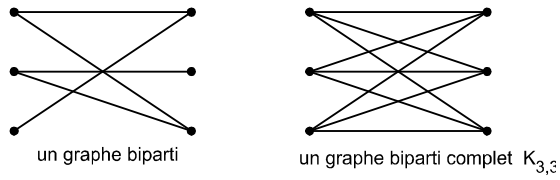


FIGURE 1.7. un graphe biparti et biparti complet

- On appelle **arbre**, et on note par T, un graphe simple connexe, sans cycles. Un arbre T d'ordre n contient $(n - 1)$ arêtes. Un arbre est dit trivial (respectivement non trivial) s'il contient un seul sommet (respectivement au moins deux sommets). On appelle **feuille** d'un arbre, un sommet de degré 1 (sommet pendant). Un sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet **support** . Voici l'exemple suivante d'un arbre:

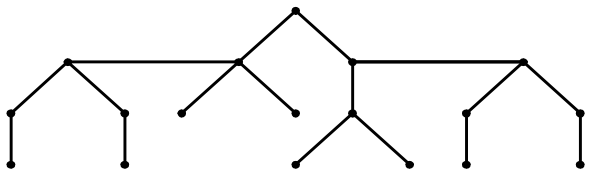


FIGURE 1.8. un arbre T

- On appelle **forêt** un graphe non-connexe ou chaque composante connexe est un arbre. On appelle **étoile**, et on note par $S_{1,n}$ $(n \geq 3)$, l'arbre à $n + 1$ sommets ayant n feuilles.

- Une **étoile double** noté $S_{p,q}$ est le graphe obtenu en ajoutant une arête reliant les deux centres des étoiles $S_{1,p}$ et $S_{1,q}$,Voici l'exemple suivante:

- **Un cactus** est un graphe ou chaque arête appartient à au plus un cycle, de plus un cactus qui contient un seul cycle est dit unicycle.

- Un graphe est dit **sans griffe** , s'il ne contient pas $K_{1,3}$ comme sous graphe induit

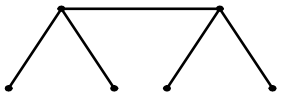


FIGURE 1.9. une double étoile $S_{2,2}$

- Une **subdivision** $S(G)$ d'un graphe G est le graphe obtenu en remplaçant chaque arête uv de G par un sommet w et les deux arêtes uw et wv :

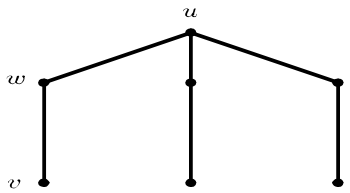


FIGURE 1.10. une étoile subdivisé $S^*_{1,3}$

- la **couronne** $G = H \circ K_1$, d'un graphe H est le graphe obtenu d'une copie de H , et pour tout sommet v , de $V(H)$, on relie un sommet pendant. Il est evident que l'ordre G est égale à $2n$ si celui de H est n. Voici un exemple sur la couronne de C_3.

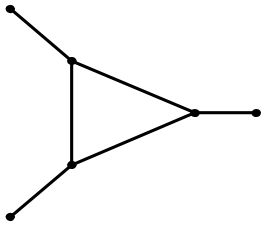


FIGURE 1.11. la couronne de C_3

- le **diamètre** du graphe G est le maximum des distance entre deux de ses sommets, c-à-d: $diam(G) = Max_{u,v \in V}(d(u,v))$.

- **l'excentricité** d'un sommet v dans G est : $exe(v) = max\{d(u,v) : u \in V(G)\}$.

ainsi, le diamètre d'un graphe peut être défini comme l'éxcentricité maximale de ses sommets.

1.2.5 La Minimalité et La Maximalité d'un Ensemble

Définition 1.5. *Soit $G = (V, E)$ un graphe.*

- On dit qu'un sous-ensemble S de V est minimal (respectivement maximal) par rapport à une propriété P, s'il n'existe pas d'ensemble $S^{'} \subset S$ $\left(\text{resp } S \subset \ S^{'}\right)$ telle que $G\left[S^{'}\right]$ vérifier la propriété P.

- On dit qu'un sous-ensemble S de V est minimum ou de taille minimale (respectivement maximum ou de taille maximal) par rapport à une propriété P, s'il n'existe pas d'ensemble $S^{'} \subseteq V$ telle que $G\left[S^{'}\right]$ vérifier la propriété P et $\left|S^{'}\right| \langle |S|$ respectivement $\left(\left|S^{'}\right| \rangle |S|\right)$.

1.3 quelques invariants de graphes

- Une **clique** d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous ensemble de sommets de G qui engendre un graphe complet. Le cardinal d'une clique maximum de G est noté par $\omega\ (G)$.

- Un **stable** S (appellé aussi ensemble indépendant) dans un graphe G est un sous ensemble des sommets de V deux à deux non adjacents, $\alpha\ (G) = \max\ \{|S| : S$ est un stable de $G\}$ est appellé nombre de stabilité de G.

- Un **couplage** dans un graphe G est un sous ensemble d'arêtes deux à deux non adjacents, on noté $\beta\ (G)$ la taille d'un couplage maximum dans G.

Soit M un couplage dans G. Un sommet v de G est dit **saturé** par le couplage M s'il existe une arête de M incidente à v . Un couplage qui saturé tous les sommets de G est dit **couplage parfait** dans G, si non, v est dit **insaturé**.

1.4 le produit cartésien

Le produit cartésien, ou somme cartésienne, est une opération sur deux graphes et résultant en un graphe. Parler de produit ou de somme pour cette opération n'est pas une contradiction, mais une explication basée sur deux aspects différents : la construction peut se voir comme un produit, tandis que de nombreuses propriétés sont basées sur la somme.

Définition 1.6. *Le produit cartésien de deux graphes G_1 et G_2 notée par $G_1 \square G_2$, est un graphe simple avec $V(G_1) \times V(G_2)$ comme ensemble de sommets et deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents dans $G_1 \square G_2$ si et seulement si soit $u_1 = u_2$ et v_1, v_2 sont adjacents dans G_2, ou u_1, u_2 sont adjacents dans G_1 et $v_1 = v_2$. Dans la suite, où $|V(G_1)| = m$ et $|V(G_2)| = n$.*

On considère l'ensemble de sommets de $G_1 \square G_2$ est $m \times n$, comme un tableau dans lequel l'entrée (i, j) correspond au sommet (i, j), $i \in V(G_1)$ et $j \in V(G_2)$, et chaque colonne induit une copie du graphe G_1 chaque ligne induit une copie de graphe G_2. Voici un exemple illustré dans la figure suivante:

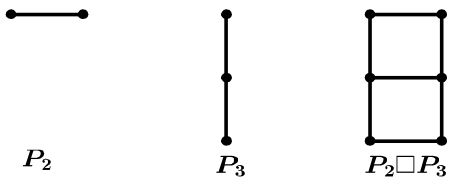


FIGURE 1.12. produit cartésien de chaînes P_2 et P_3

1.5 Notions fondamentales sur la domination

1.5.1 Historique

Bien que l'étude mathématique des ensembles dominants a commencé dans les années soixante, le sujet a trouvé son origine en 1862 dans les jeux d'échecs quand De

Jaenisch [4] étudia le problème de la détermination du nombre minimum de reines à placer sur un échiquier $n \times n$ de sorte que chaque case soit occupée par une reine ou peut être occupée en un seul mouvement par l'une d'elles, tout en sachant que les règles du jeu des échecs permet à une reine de se déplacer à travers les cases horizontalement, verticalement ou diagonalement. Pour un échiquier 8×8, cinq est le nombre minimum de reines qui dominent toutes les cases de l'échiquier. Dans ce cas, le problème est appelé "le problème des cinq reines" qui est à l'origine de l'étude mathématique de la domination. En 1892, Ball [5] a traité la question de De Jaenish en consedérant d'autres conditions supplémentaires. En 1964, les frères Yaglom étudièrent les problèmes posés par De Jainish et Ball. L'appellation "coe∉cient de stabilité externe" fut introduité par Berge [1] pour définir le nombre de domination et en 1962, Ore [5] fut le premier à employer les termes "*ensemble dominant*" et "*nombre de domination*" qu'il nota $d(G)$. L'étude moderne de la domination est débuté après l'appartition de l'article de Cockayne et Hedetniemi [6] en 1977. Les auteurs de [6] ont été les premiers à utiliser la notation $\gamma(G)$ pour désigner le nombre de domination.

1.5.2 Domination standard

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple et soit un sous ensemble $S \subseteq V$. On dit que S est un **dominant** de G, si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S. **Le nombre de domination**, noté par $\gamma(G)$ et **le nombre de domination supérieur**, noté par $\Gamma(G)$ de G sont respectivement le cardinal minimum et maximum d'un ensemble dominant minimal sur G. Un ensemble dominant minimal de G de cardinal minimum est appelé $\gamma - ensemble$, et un ensemble dominant minimal de G de cardinal maximum est appelé $\Gamma - ensemble$.

Exemple 1.7. *Le nombre de domination et le de domination supérieur du graphe illustré ci-dessous ,*$D_1 = \{v_4, v_7\}$ *est un* $\gamma(G) - ensemble$ *et* $D_2 = \{v_1, v_3, v_6, v_8\}$ *est un* $\Gamma(G) - ensemble$

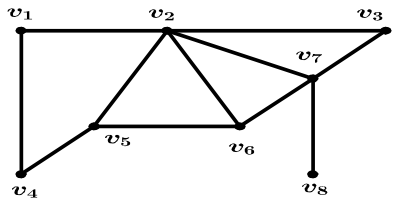


FIGURE 1.13. $\gamma(G) = 2$ et $\Gamma(G) = 4$

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. Voici des exemples :

- Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est un dominant si $N[S] = V$.
- Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est un dominant si quel que soit $v \in V \backslash S$,$N(v) \cap S = \emptyset$.
- Un ensemble $S \subseteq V(G)$ est un dominant si quel que soit $v \in V \backslash S$, $N(v) \cap S \geq 1$.

Théorème 1.8. ***(Ore[5])***

Tous graphe connexe $G = (V, E)$ d'ordre au moins deux possède un ensemble dominant S dont l'ensemble $V - S$ est aussi un ensemble dominant.

1.6 Quelques invariants de domination

On dénombre actuellement près d'une centaine de types de domination et références dans le domaine. Pour un aperçu détaillé, le lecteur peut consulter les deux livres de Haynes,Hedetniemi et Slater ([7]).

1.6.1 Domination stable

Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est un **dominant stable** (ou indépendant) s'il n'existe pas deux sommets adjacents dans S. Cette notion est reliée à celle de la domination par le fait qu'un indépendant est maximal (au sens de l'inclusion des ensembles) si et seulement si, il est dominant. De sorte qu'un indépendant maximal est un dominant minimal. La cardinalité maximum d'un ensemble indépendant maximal S est appelée

nombre d'indépendance supérieur de G, noté par $\beta_0(G)$. La cardinalité minimum d'un ensemble indépendant maximal S est appelée **nombre d'indépendance inférieur** de G noté par $i(G)$.

1.6.2 Domination totale

Un sous ensemble S de V est dit **dominant total** de G si tout sommet de V possède un voisin dans S. Ceci peut s'écrire par $N(S) = V$ ou bien S est un dominant et le sous graphe induit par S ne contient pas de sommets isolés. **Le nombre de domination totale**, noté par $\gamma_t(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant total de G.

i) La domination totale est définie uniquement pour les graphes sans sommets isolés.

ii) Si G est un graphe sans sommet isolés. Alors $\gamma(G) \leq \gamma_t(G)$ (puisque un ensemble dominant total est un ensemble dominant).

1.6.3 Domination connexe

Un sous ensemble S de $V(G)$ est dit **dominant connexe** de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S est connexe. **Le nombre de domination connexe** noté par $\gamma_c(G)$ est la taille minimum d'un ensemble dominant connexe de G.

1.6.4 Domination double

Un sous ensemble S de V est dit **dominant double** de G si tout sommet de V est dominé par au moins deux autres sommets. ($i.e$, si $v \in V - S$ alors v a au moins deux voisins dans S et si $v \in S$ alors v a au moins un voisin dans S. **Le nombre de domination double** noté par $\gamma_{\times 2}(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant double de G.

1.6.5 Domination couplée

Un sous ensemble S de V est dit **dominant couplé** de G si S est un dominant et le sous graphe induit par S admet un couplage parfait. **Le nombre de domination**

couplé noté par $\gamma_{pr}(G)$, est le cardinal minimum d'un ensemble dominant couplé de G.

1.6.6 Domination multiple

Un sous ensemble S de V est dit **dominant multiple** (ou k-dominant) de G si tout sommet de $V - S$ possède au moins k voisins dans D. **Le nombre de domination multiple** (ou nombre de k-domination), noté par $\gamma_k(G)$, est la taille minimum d'un ensemble dominant multiple de G.

Exemple 1.9. *Soit un graphe G de la figure suivante:*

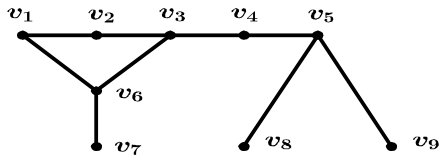


FIGURE 1.14. un graphe G

ona pour chaque cas un $u(G) - ensemble$.
$\gamma(G) = 3$, $D_1 = \{v_2, v_5, v_6\}$ est un $\gamma(G) - ensemble$
$\gamma_t(G) = 4$,$D_2 = \{v_1, v_6, v_4, v_5\}$ est un $\gamma_t(G) - ensemble$
$\gamma_{pr}(G) = 4$,$D_3 = \{v_1, v_6, v_4, v_5\}$ est un $\gamma_{pr}(G) - ensemble$
$i(G) = 3$,$D_4 = \{v_2, v_5, v_6\}$ est un $i(G) - ensemble$
$\gamma_{\times 2}(G) = 7, D_5 = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$ est un $\gamma_{\times 2}(G) - ensemble$
$\gamma_c(G) = 4, D_{6=}\{v_6, v_3, v_4, v_5\}$ est un $\gamma_c(G) - ensemble$

Remarque 1.10. ***(Haynes et al[8])*** *pour tout graphe G sans sommets isolés, $\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq \gamma_{pr}(G)$.*

CHAPITRE 2

Les alliances dans les graphes

2.1 introduction

l'alliance signifie un lien entre les individus ou des familles, des états ou des parties. les alliances sont trouvées dans beaucoups de variétés, chacun a des propriétés différentes, par exemple:

- alliances entre différentes parties politiques.
- alliances entre des compagnies pour des intérêts économiques communs.
- les alliance entre les nations .

les alliances dans les graphes ont été présentées la première fois par **Kristiansen et Hedetniemi** , Les nations sont représentées par des sommets dans un graphe et les arêtes correspondent aux relations possibles (amitié ou hostilité) entre les nations.

Dans ce chapitre, nous présenterons les différents types d'alliances et leurs variantes avec les paramètres associés.

2.2 Types d'alliances

Soit G un graphe simple $G = (V(G)\ ,\ E(G))$, Nous définissons les différent types d'alliances

2.2.1 Alliances défensives

Un ensemble non vide de sommets S est dite une alliance défensive si et seulement si pour chaque sommet $v \in S$, $|N[v] \cap S| \geq |N(v) \cap (V - S)|$ Si l'inégalité est stricte alors , l'alliance défensive est dite forte.

L'alliance défensives et utilisé pour la sécurité nationale ce problème est modéliser en terme de graphe et chaque sommet $v \in S$ pouvant défendre lui-même et ses voisins contre des attaques possibles par des sommets de $V - S$, chaque sommet dans une alliance défensive S a au moins autant de sommets de son voisinage fermé dans S que dans $V - S$, par la force des nombres, nous dirons que chaque sommet dans S peut être défendu contre une attaque possible par des sommets de $V - S$.

Le nombre d'alliance défensive $a(G)$ (respectivement le nombre d'alliance défensive forte $\hat{a}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance défensive (respectivement d'une alliance défensive forte). Voici un exemple sur une double étoile $S_{2,1}$ dans la figure suivante:

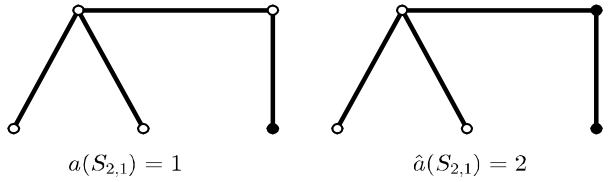


FIGURE 2.1. $a(S_{2,1})$ et $\hat{a}(S_{2,1})$

Définition 2.1. *Une alliance défensive S est dite globale si S est un ensemble dominant.*

Le nombre d'alliance défensive globale $\gamma_a(G)$ (respectivement, le nombre d'alliance défensive globale forte $\gamma_{\hat{a}}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance défensive globale (respectivement, d'une alliance défensive globale forte). Dans l'exemple suivant l'ensemble $S = \{A, B\}$ est une $\gamma_{\hat{a}}(G) - ensemble$ et $S = \{G, H\}$ est une $\gamma_a(G) - ensemble$.

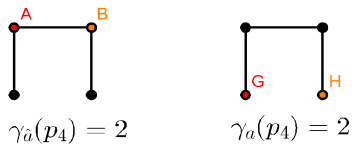


FIGURE 2.2. $\gamma_{\hat{a}}(p_4)$ et $\gamma_a(p_4)$

On note que tout graphe admet une alliance défensive car $V(G)$ est un tel ensemble .

Observation 2.2. *[Haynes, Hedetniemi et Henning [9]]*

- $1 \leq a(G) \leq \gamma_a(G) \leq n$
- $1 \leq \gamma(G) \leq \gamma_a(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$
- $1 \leq a(G) \leq \hat{a}(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$

Les valeurs exactes pour le nombre d'alliance forte et le nombre d'alliance globale forte est donnée pour quelques classes des graphes en [10] et [11] dans la liste suivante:

1. pour un graphe complet K_n, $a(K_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, $\hat{a}(K_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$
2. $\gamma_a(K_n) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, $\gamma_{\hat{a}}(K_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

pour $n \geq 3$ ona :

1. $a(C_n) = \hat{a}(C_n) = 2$
2. $\gamma_a(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$, $\gamma_{\hat{a}}(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$
3. $a(P_n) = 1$ et $\hat{a}(P_n) = 2$
4. $\gamma_a(P_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor - 1 & \text{si } n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4) \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor & \text{sinon} \end{cases}$
5. $\gamma_{\hat{a}}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$

Proposition 2.3. ***(Haynes, Hedetniemi et Henning [9])*** *Pour tout graphe biparti complet $K_{r,s}$*

1. $\gamma_a(K_{1,s}) = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 1$.
2. $\gamma_a(K_{r,s}) = \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ si $r, s \geq 2$
3. $\gamma_{\hat{a}}(K_{r,s}) = \lceil \frac{s}{2} \rceil + \lceil \frac{r}{2} \rceil$

Lemme 2.4. *[27] Pour tout graphe G avec $\delta(G) \geq 2$,$\gamma_t(G) \leq \gamma_a(G)$ si $\triangle(G) \leq 3$ alors $\gamma_t(G) = \gamma_a(G)$.*

Proposition 2.5. ***(Haynes et al [9])*** *Pour $n \geq 3$, $\gamma_{\hat{a}}(P_n) = \gamma_t(P_n)$*

Proposition 2.6. ***(Haynes et al [9])*** *Pour tout cycle C_n , $n \geq 3$*

$\gamma_a(C_n) = \gamma_t(C_n) = \gamma_{\hat{a}}(C_n)$.
Voici un exemple sur C_4, $\gamma_a(C_4) = \gamma_t(C_4) = \gamma_{\hat{a}}(C_4) = 2$.

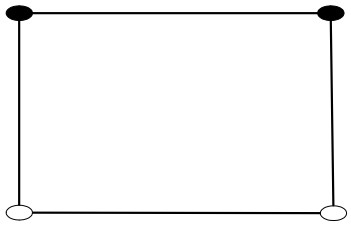


FIGURE 2.3. un cycle C_4 avec $\gamma_a = \gamma_t = \gamma_{\hat{a}}$

Proposition 2.7. ***(Haynes et al [9])*** *Pour $r, s \geq 1$*

1. $\gamma_a(S_{r,s}) = \lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s-1}{2} \rfloor + 2$
2. $\gamma_{\hat{a}}(S_{r,s}) = \lfloor \frac{r}{2} \rfloor + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor + 2$

2.2.2 Alliance offensive

Un sous ensemble $S \subseteq V$, notons par $\partial S = N(S) - S$

Définition 2.8. *Un ensemble non vide de sommets $S \subseteq V$ est dit une alliance offensive si et seulement si pour chaque $v \in \partial S$, $|N(v) \cap S| \geq |N[v](V - S)|$, ici, nous dirons que chaque sommet de ∂S est vulnérable à une attaque possible par des sommets de S (par la force des nombres). Aussi si l'inégalité est stricte, alors S est une alliance offensive forte.*

Définition 2.9. *Une alliance offensive S est dite globale (aog) si S est un dominant, Le nombre d'alliance offensive $o(G)$ (resp le nombre d'alliance offensive forte $\hat{o}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance offensive. (resp d'une alliance offensive forte) de G.*

Définition 2.10. *Le nombre d'alliance offensive globale $\gamma_o(G)$ (resp, le nombre d'alliance offensive globale forte $\gamma_{\hat{o}}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance offensive globale (resp, d'une alliance offensive globale forte), La figure suivante nous montrons une $S_{1,2}$ avec $\gamma_o(S_{1,2}) = 1$, $\gamma_{\hat{o}}(S_{1,2}) = 2$.*

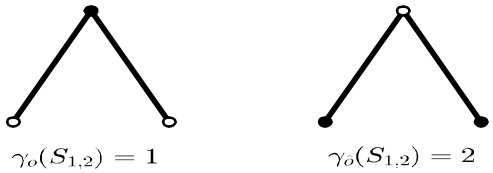


FIGURE 2.4. $\gamma_o(S_{1,2})$ et $\gamma_{\hat{o}}(S_{1,2})$

On note que tout graphe admet une alliance offensive car $V(G)$ est un tel ensemble .

Observation 2.11. *[12] pour $n \geq 1$*

i) $a_o(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

ii) $\hat{a}_o(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

iii) pour $n \geq 3$, $a_o(C_n) = \hat{a}_o(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Remarque 2.12. *[12] Si toutes les sommets du graphe G en même dégres alors : $a_o(G) = \hat{a}_o(G)$.*

Corollaire 2.13. *[12] Soit G un graphe connexe, alors :*

$$\begin{cases} a_o(G) = 1 \text{ si } G \text{ est une étoile} \\ \hat{a}_o(G) = 1 \text{ si } G = K_1 \end{cases}$$

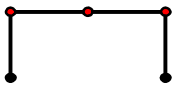
2.2.3 Alliance puissante

Définition 2.14. *Une alliance est dite puissante si elle est à la fois défensive et offensive. Ce concept peut être exprimé par la seule condition que pour chaque sommet $v \in N[S]$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$,*

Tout sommet de S peut être défendre lui même et ses voisins contre une attaque possible par les sommets de ∂S et il peut attaquer tous les sommets dans ∂S.

Définition 2.15. *Une alliance puissante globale de G est une alliance puissante qui domine G.*

Définition 2.16. *Le nombre d'alliance puissante a_p (respectivement, d'alliance puissante globale γ_{a_p}) est le cardinal minimum d'une alliance puissante (respectivement, d'une alliance puissante globale).*



$\boldsymbol{\gamma_{a_p}(P_5) = 3}$

FIGURE 2.5. $\gamma_{a_p}(P_5) = 3$

Voici quelques valeurs exactes de $\gamma_{a_p}(G)$ et $a_p(G)$ dans des familles de graphes spécifiques [13]

1. pour toute graphe complet K_n , $a_p(K_n) = \gamma_{a_p}(K_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$
2. pour toute étoile $S_{1,k}$, $\gamma_a(S_{1,k}) = \gamma_{a_p}(S_{1,k})$.
3. pour un graphe biparti complet $K_{r,s}$, $1 \leq r \leq s$.

$$a_p(K_{r,s}) = \gamma_{a_p}(K_{r,s}) = min\{r + \lfloor \frac{s}{2} \rfloor, \lceil \frac{r+1}{2} \rceil + \lceil \frac{s+1}{2} \rceil\}$$

4. pour les chaines P_n , $a_p(P_n) = \gamma_{a_p}(P_n) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$
5. pour les cycles C_n , $a_p(C_n) = \gamma_{a_p}(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$

Le résultat suivant établit une borne avec caractérisations dans les arbres, par chellali et bouzefrane.

Théorème 2.17. ***(chellali et bouzefrane [14])*** *Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$ avec , ℓ feuilles et s sommets supports. Alors $\gamma_o(T) \geq (n - \ell + s + 1)/3$ avec l'égalité atteinte si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.*

Ou $\mathcal{F}$ est la famille d'arbres d'ordre aux moins trois qui peuvent être obtenus de r étoiles disjointes en ajoutant premièrement $(r-1)$ arêtes incidentes seulement aux centres des étoiles, le graphe ainsi obtenu est connexe, ensuite en subdivisant chaque nouvelle arête exactement une seule fois. l'arbre de la Figure 2.6 est un exemple d'un arbre de $\mathcal{F}$.

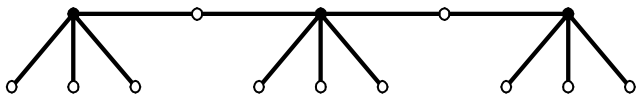


FIGURE 2.6. un arbre de $\mathcal{F}$

Chellali en **[14]** à donnée une borne supérieur pour γ_o dans les graphes bipartis

Théorème 2.18. ***(chellali [14])*** *Pour toute graphe biparti G sans sommet isolé $\gamma_o(G) \leq (n - \ell + s)/2$.*

Une autre résultat à été fourner dans **[14]** qui nous donne une relation entre $\gamma_o(T)$ et $\gamma(T)$.

Théorème 2.19. ***(chellali [14])*** *Pour toute arbre T d'order $n \geq 3$, $\gamma_o(T) \leq \frac{3}{2}\gamma(T) + \frac{s-2}{2}$.*

Il existe une autre résultat qui donne une relation entre $\gamma_o(T)$ et $\gamma_a(T)$ dans **[28]**

Théorème 2.20. ***(chellali et Bouzefrane [28])*** *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, Alors $\gamma_o(T) \leq \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1$.*

Ainsi d'autre résultats sur γ_o ont était établit par **Rodriguez** et **Sigaretta** dans **[15]** en fonction de degrée minimum δ et degrée maximum Δ **.**

Théorème 2.21. ***(Rodriguez et Sigaretta [15])*** *Pour tout graphe G d'ordre n, et de degré minimum δ et maximum Δ.*

$$\frac{2n}{3} \geq \gamma_o(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{n(\delta+1)}{2\Delta+\delta+1} \right\rceil & \text{si } \delta \text{ est impair} \\ \left\lceil \frac{n\delta}{2\Delta+\delta} \right\rceil & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 2.22. ***(Rodriguez et Sigaretta [15])*** *Pour tout graphe régulier G d'ordre n et de dégré minimum δ impair $\frac{n(\delta+1)}{3\delta+1} \leq \gamma_o(G) \leq \frac{n}{2}$.*

Dans le cas des graphes cubiques ($3-$ régulier) on a: $\frac{2n}{5} \leq \gamma_o(G) \leq \frac{n}{2}$

Les mêmes auteurs dans **[15]** ont donnée des résultats sur le nombre d'allaince offensive global forte, pour certains classes de graphes .

Théorème 2.23. ***(Rodriguez et Sigaretta [15])*** *Soit G un graphe cubique d'ordre n*

- $\frac{n}{2} \leq \gamma_{\hat{o}}(G) \leq \frac{3n}{4}$.
- $\gamma_{\hat{o}}(G) = \frac{n}{2}$ si et seulement si G est un graphe biparti.
- $\gamma_{\hat{o}}(G) = \frac{3n}{4}$ si et seulement si G est isomorphe au graphe complet K_4.

Dans [10], **Haynes et al** ont donné des bornes inférieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$ en fonction de l'ordre n et le degré maximum Δ.

Théorème 2.24. ***(Haynes, Hedetniemi et Henning [10])*** *Si G est un graphe d'ordre n, alors*

a) $\gamma_a(G) \geq (\sqrt{4n+1} - 1)/2$.

b) $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \sqrt{n}$.

Théorème 2.25. ***(Haynes, Hedetniemi et Henning [10])*** *Si T est un arbre d'ordre n, alors:*

c) $\gamma_a(T) \geq \frac{n+2}{4}$

d) $\gamma_{\hat{a}}(T) \geq \frac{n+2}{3}$

Le résultat suivante établit par **Rodriguez** et **Sigaretta** dans **[16]** en fonction de dégre maximum Δ .

Théorème 2.26. ***(Rodriguez et Sigaretta [16])*** *Soit G un graphe simple d'ordre n et de degré maximum Δ Alors:*

$\gamma_a(G) \geq \lceil \frac{2n}{\Delta+3} \rceil$ et $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor + 1} \right\rceil$

La proposition suivante établie par **Haynes et al** dans [10] donne une borne supérieure sur γ_a et $\gamma_{\hat{a}}$ pour tout graphe G.

Proposition 2.27. ***(Haynes, Hedetniemi et Henning [10])*** *Pour tout graphe G sans sommets isolés et de degré minimum δ*

i) $\gamma_a(G) \leq n - \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$

ii) $\gamma_{\hat{a}}(G) \leq n - \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$

Le corollaire suivant se découle immédiatement de la proposition précédente.

Corollaire 2.28. ***(Haynes, Hedetniemi et Henning [10])***

Pour tout graphe G, $\gamma_a(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K}_n$ Les deux résultats suivants établis par Haynes et al dans [10] donnent une borne supérieure pour la classe des arbres sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$ avec une caractérisation des arbres extrémaux pour chaque borne.

Soit $\mathcal{F}_1$ la famille des arbres T contenant $T = P_5$, $T = K_{1,4}$ où bien T est obtenu à partir de $tK_{1,4}$ (l'union disjoint de t copies de $K_{1,4}$) en ajoutant $t-1$ arêtes entre les feuilles de ces copies de telle sorte que le centre de chaque $K_{1,4}$ est adjacent à exactement trois feuilles de T.

Théorème 2.29. ***(Haynes, Hedetniemi et Henning [10])*** *Si T est un arbre d'ordre $n \geq 4$, alors: $\gamma_a(T) \leq \frac{3n}{5}$ avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{F}_1$.*

Les mêmes auteurs ont introduit une famille $\mathcal{F}_2$ d'arbres T obtenus à partir de l'union disjoint $tK_{1,3}$ de $t \geq 1$ copies de $K_{1,3}$ en ajoutant $t-1$ arêtes entre les feuilles de ces copies de $K_{1,3}$ de telle sorte que le centre de chaque $K_{1,3}$ est adjacent à au moins une feuille dans T.

Théorème 2.30. ***(Haynes, Hedetniemi et Henning [10])***

Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors $\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{3n}{4}$, avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{F}_2$.

ont donée quelques résultat dans le produit cartésien entre chaines et cycles dans **[17]**

Théorème 2.31. ***(Chan-Wei Changa,Fu-Hsing Wangd [17])***

Si $2 \leq m \leq n$ alors $\gamma_a(P_m \square P_n) = \frac{mn}{3}$ si $mn \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$ alors :

$$\gamma_a(P_m \square P_n) \leq \begin{cases} \lfloor \frac{n}{3} \rfloor m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + a & \text{si } m \equiv n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3) \\ \lceil \frac{m}{3} \rceil m & \text{si } m \equiv n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3) \\ \min\left\{ \lfloor \frac{m}{3} \rfloor n + \lceil \frac{n}{2} \rceil + b, \lceil \frac{n}{3} \rceil m \right\} & \text{si } m \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3) \text{ et } n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3) \\ \min\left\{ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + a, \lceil \frac{m}{3} \rceil n \right\} & \text{si } m \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3) \text{ et } n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3) \end{cases}$$

telque $a = 1 + \lfloor \frac{m+2}{4} \rfloor - \lceil \frac{m+2}{4} \rceil, b = 1 + \lfloor \frac{n+2}{4} \rfloor - \lceil \frac{n+2}{4} \rceil$

Si $m \geq 3$, $n \geq 2$ alors $\gamma_a(C_m \square P_n) = \lceil \frac{mn}{3} \rceil$ si $mn \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$ ou $m \geq 7, m \equiv 1(\mathrm{mod}\, 6)$, et $n = 2$ ou 4 alors :

$$\gamma_a(C_m \square P_n) \leq \begin{cases} \min\{\lceil \frac{n}{3} \rceil m,\ \lceil \frac{m}{3} \rceil n\}, & \text{si } n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 3) \text{ et } m \ncong 0(mod3) \\ \min\{\lceil \frac{m}{3} \rceil n,\ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + a, & \text{si } n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)\} \text{ et } m \ncong 0(mod3) \end{cases}$$

telque $a = 1 + \lfloor \frac{m+2}{4} \rfloor - \lceil \frac{m+2}{4} \rceil$,de plus si $m \geq 7$,$m \equiv 1(\mathrm{mod}\, 6)$, et $n \equiv 2{,}4(\mathrm{mod}\, 6)$ alors :

$$\gamma_a(C_m \square P_n) \leq \begin{cases} \frac{mn}{3} + \min\{\frac{n}{6}, \frac{m}{3}\} & \text{si } n \equiv 2(\mathrm{mod}\, 6) \\ \frac{mn}{3} + \min\{\frac{n}{6}, \frac{m}{6} + \frac{3}{2} + \lfloor \frac{m+2}{4} \rfloor - \lceil \frac{m+2}{4} \rceil\ \}, & \text{si } n \equiv 4\,\mathrm{mod}(6) \end{cases}$$

Si $3 \leq m \leq n$ alors $\gamma_a(C_m \square P_n) = \lceil \frac{mn}{3} \rceil$ si $mn \equiv 0(\mathrm{mod}\, 3)$ ou $m = 4$,$n \geq 7$,$n \equiv 1(\mathrm{mod}\, 6)$ et $\gamma_a(C_m \square C_n) \leq \min\{\lceil \frac{n}{3} \rceil m, \lceil \frac{m}{3} \rceil n\}$ si $mn \ncong 0\,\mathrm{mod}(3)$.

Exemple 2.32. *Soit les deux chaines P_3 et P_4 , le produit cartésien $P_3 \square P_4$ dans la figure suivante :*

Les mêmes auteurs ont donné le produit cartésien entre deux graphes

Théorème 2.33. ***(Ismael G. Yero and Juan A. Rodriguez-Velazquez [18])***

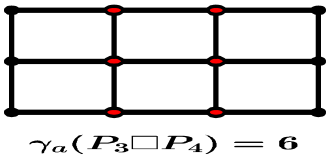


FIGURE 2.7. produit cartésien de P_3 et P_4

Pour tout graphe G et H :

$\gamma_o(G\square H) \geq \frac{1}{2}\max\{\gamma(G)\gamma_o(H), \gamma_o(G)\gamma(H)\}$

Il existe d'autres résultats pour le produit cartésien de toute graphe G avec les cycles et les chaines

Théorème 2.34. ***(Ismael G. Yero and Juan A. Rodriguez-Velazquez [18])***

Soit P_n un chaine d'ordre n. Pour tout graphe G de dégré minimum $\delta \geq 1$:

$\gamma_o(G\square P_n) \geq \lceil \frac{(n-1)\gamma_o(G)}{2} \rceil + \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$

Théorème 2.35. ***(Ismael G. Yero and Juan A. Rodriguez-Velazquez [19])***

Soit C_n cycle d'ordre n. Pour tout graphe G

$\gamma_o(G\square C_n) \geq \lceil \frac{n\gamma_o(G)}{2} \rceil$

Exemple 2.36. *Soit les deux chaines P_3 et P_4 le produit cartésien illustré dans la figure suivante:*

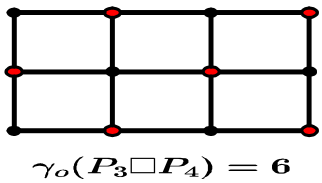


FIGURE 2.8. produit cartésien de P_3 et P_4

2.3 partition alliance

Définition 2.37. *Le nombre de partition en alliance d'un graphe G noté ψ_a est le nombre maximum d'ensembles dans une partition de $V(G)$, dans une alliance défensive, de telle sorte que chaque ensemble est une alliance . De même le nombre de partition en alliance globale ψ_g est le nombre maximal d'ensembles dans une partition de $V(G)$ de telle sorte que chaque ensemble est une alliance globale, c'est à dire chaque ensemble est une alliance et un ensemble dominant.*

Définition 2.38. *Le nombre de partition en alliance forte d'un graphe G noté $\psi_{\hat{a}}$ est le nombre maximum d'ensembles dans une partition de $V(G)$ de telle sorte que chaque ensemble est une alliance forte, De même le nombre de partition en alliance globale forte $\psi_{\widehat{g}}$ est le nombre maximal d'ensembles dans une partition de $V(G)$ de telle sorte que chaque ensemble est une alliance globale forte. c'est à dire chaque ensemble est une alliance forte et un ensemble dominant.*

Observation 2.39. *[20] Pour tout graphe G :*

i) $1 \leq \psi_{\widehat{g}}(G) \leq \psi_{\hat{a}}(G) \leq \psi_a(G) \leq n$

ii) $1 \leq \psi_{\widehat{g}}(G) \leq \psi_g(G) \leq \psi_a(G)$

Les mêmes auteurs dans [20] ont donné le résultat suivante :

Théorème 2.40. *([20]) Soit G un graphe connexe d'order $n \geq 3$ alors:*

$1 \leq \psi_a(G) \leq \lfloor n + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{1+4n}}{2} \rfloor$

Théorème 2.41. *([20]) Pour tout graphe G : $\psi_a(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{\lceil \frac{\delta(G)+1}{2} \rceil} \right\rfloor$.*

Il est clair, pour tout graphe G, $\psi_{\hat{a}}(G) \leq n$, car un partition d'alliance forte de tout graphe avec $\delta(G) \geq 1$ doit avoir au moins une alliance de deux ou plus de sommets, nous avons une caractérisation de graphes qui atteignent ce borne.

Théorème 2.42. *([20]) Pour tout graphe G , $\psi_{\hat{a}}(G) \leq n$ avec l'égalité si et seulement si $G = \overline{K_n}$.*

Motivé par Théorème 2.41 , Nous donnons un relation equivalent qui implique le dégré minimum pour le nombre du partition d'alliance forte.

Théorème 2.43. *([20]) Pour tout graphe G,* $\psi_{\hat{a}}(G) \leq \left\lfloor \frac{n}{\lceil \frac{\delta(G)+2}{2} \rceil} \right\rfloor$

Corollaire 2.44. *([19]) Si G est un graphe sans sommet isolé alors:* $\psi_{\hat{a}}(G) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

Nous déterminons maintenant le nombre de partition d'alliance et le nombre de partition d'alliance forte de plusieurs classes des graphes dans [19]

- pour tout $n \geq 1$, $\psi_a(K_n) = 1$
- pour toute chaine $n \geq 1$, $\psi_a(P_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$
- pour toute chaine P_n non trivial $\psi_{\hat{a}}(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
- pour toute cycle $n \geq 3$, $\psi_{\hat{a}}(C_n) = \psi_a(C_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

2.4 k-alliances dans les graphes

Les concepts des alliances défensives et offensives ont été généralisés aux $k-$alliances offensives et défensives respectivement, où la force d'une alliance est liée à la valeur du paramètre k. Avant de présenter quelques résultats éxistants sur ces concepts donnons les définitions suivantes.

Définition 2.45. *Soit $k \geq 1$ un entier. Un ensemble non vide S de sommets d'un graphe G est appelé une $k-$alliance offensive globale si $|N(v) \cap S| \geq |N(v) - S| + k$ pour tout $v \in V(G) - S$, le nombre $k-$alliance offensive globale de G, noté $\gamma_o^k(G)$ est le cardinal minimum d'une $k-$alliance offensive globale de G.*

Définition 2.46. *Un ensemble non vide $S \in V$ est une $k-$alliance défensive globale si pour tout $v \in S$, $|N(v) \cap S| \geq |N(v) - S| + k$. le nombre $k-$alliance défensive globale de G, noté $\gamma_a^k(G)$ est le cardinal minimum d'une $k-$alliance défensive globale de G.*

Fernau, **Rodriguez** et **Sigarreta** ont montré que le problème de la recherche du nombre d'alliance $k-$offensive (défensive) globale est $NP-$Complet. Voici un exemple

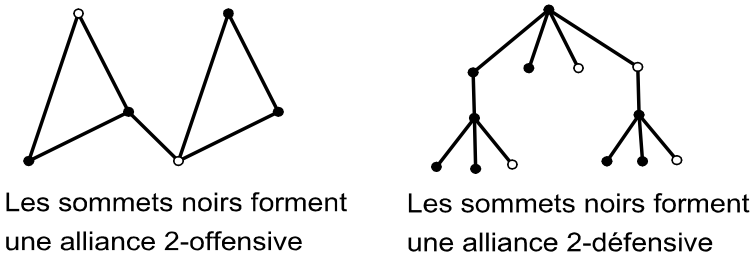


FIGURE 2.9. une alliance 2-offensive et 2-défensive

2.4.1 Bornes supérieures sur γ_o^k

Chellali et Volkmann ont donné une borne supérieure sur γ_o^k pour les graphes bipartis. Soit $L_k(G) = \{x \in V(G) : d_G(x) \leq k-1\}$.

Théorème 2.47 (Chellali et Volkmann [21] 2008)**.** *Soit $k \geq 1$, un entier. Si G est un graphe bipartit alors, $\gamma_o^k(G) \leq \frac{n(G)+|L_k(G)|}{2}$.*

Théorème 2.48 (Chellali et Volkmann [21] 2008)**.** *Soit $k \geq 2$ un entier. Un arbre T satisfait $\gamma_o^k(T) = (n(T) + |L_k(T)|)/2$ si et seulement si ou bien $\triangle(T) \leq k-2$ ou $T \in \mathcal{F}_k$. ou $\mathcal{F}_k$ est obtenu d'une manière constructive.*

Par ailleurs dans [22] Chellali et al. Ont donné une borne supérieure sur γ_o^k pour tout graphe.

Théorème 2.49 (Chellali et al. [22] 2009)**.** *Soit $k \geq 1$ un entier. Si G est un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq k$ alors, $\gamma_o^k(G) \leq \frac{k+1}{k+2}n$.*

Dans le cas ou $\delta \geq k+2$, on obtient la borne suivante qui améliore la borne du Théorème précédent.

Théorème 2.50 (Chellali et al. [22] 2009)**.** *Soit $k \geq 2$ un entier, et soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq k+2$. Alors $\gamma_o^k(G) \leq \frac{k}{k+1}n$.*

2.4.2 Bornes inférieures sur γ_o^k

Deux bornes inférieures ont été données par Chellali et al. dans [22] sur le nombre k-alliance offensive globale γ_o^k pour tout graphe G d'ordre n de dégré minimum δ et de dégré

maximum $\triangle$.

Théorème 2.51 (Chellali et al. [22] 2009)**.** *Soit k un entier positif. Si G est un graphe d'ordre n , de degré minimum δ et de degré maximum $\triangle$, alors $\gamma_o^k(G) \geq \frac{n(\delta+k)}{2\triangle+\delta+k}$.*

Théorème 2.52 (Chellali et al. [22] 2009)**.** *Soit $k \geq 1$ est un entier et soit G est un graphe d'ordre n , et de degré minimum δ et maximum $\triangle$. Si δ est pair et k est impair ou δ est impair et k est pair alors, $\gamma_o^k(G) \geq \frac{n(\delta+k+1)}{2\triangle+\delta+k+1}$.*

2.4.3 Bornes sur γ_a^k

Théorème 2.53 (Rodriguez et Sigaretta [23] 2006)**.** *Pour tout graphe G, $\frac{\sqrt{4n+k^2}+k}{2} \leq \gamma_a^k(G) \leq n - \left\lfloor \frac{d_n-k}{2} \right\rfloor$.*

Les mêmes auteurs ont géneralisé la borne du Théorème précédent

Théorème 2.54 (Rodriguez et Sigaretta [23] 2006)**.** *Pour tout graphe G*

$\gamma_a^k(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\left\lfloor \frac{d_1-k}{2} \right\rfloor +1} \right\rceil$.

Où d_1 est le degré maximum, $d_1 \geq d_2 \geq$.....$\geq d_n$.

Rodriguez et al. ont donnés d'autres résultats pour les graphes cubiques et planaires sur ce paramétre, pour plus de détaille (Voir [23]).

2.4.4 Bornes supérieures sur γ_o^k

Chellali et Volkmann ont donné une borne supérieure sur γ_o^k pour les graphes bipartis. Soit $L_k(G) = \{x \in V(G) : d_G(x) \leq k-1\}$.

Théorème 2.55 (Chellali et Volkmann [21] 2008)**.** *Soit $k \geq 1$, un entier. Si G est un graphe bipartit alors, $\gamma_o^k(G) \leq \frac{n(G)+|L_k(G)|}{2}$.*

Théorème 2.56 (Chellali et Volkmann [21] 2008)**.** *Soit $k \geq 2$ un entier. Un arbre T satisfait $\gamma_o^k(T) = (n(T) + |L_k(T)|)/2$ si et seulement si ou bien $\triangle(T) \leq k-2$ ou $T \in \mathcal{F}_k$. Ou $\mathcal{F}_k$ est obtenu d'une manière constructive.*

Par ailleurs dans [22] Chellali et al. Ont donné une borne supérieure sur γ_o^k pour tout graphe.

Théorème 2.57 (Chellali et al. [22] 2009)**.** *Soit $k \geq 1$ un entier. Si G est un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq k$ alors, $\gamma_o^k(G) \leq \frac{k+1}{k+2}n$.*

Dans le cas ou $\delta \geq k+2$, on obtient la borne suivante qui améliore la borne du Théorème précédent.

Théorème 2.58 (Chellali et al. [22] 2009)**.** *Soit $k \geq 2$ un entier, et soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq k+2$. Alors $\gamma_o^k(G) \leq \frac{k}{k+1}n$.*

CHAPITRE 3

L'ÉGALITÉ ET LA FORTE ÉGALITÉ ENTRE LES NOMBRES D'ALLIANCES GLOBALES

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions l'égalité et la forte égalité pour les nombres d'alliances globales γ_a , γ_o et γ_{ap} dans les chaines et les cycles , nous étudions aussi quelques classes de graphes pour lesquels $\gamma_a(T) = \gamma_{ap}(T)$ et $\gamma_o(T) \equiv \gamma(T)$.

On commence par donner une définition de la forte égalité .

Définition 3.1. *Soit P_1 et P_2 les propriétés des sous-ensembles de sommets d'un graphe G et supposons que chaque sous-ensemble de $V(G)$ avec la propriété P_2 possède également la propriété P_1. Soit $\Psi_1\ (G)$ et $\Psi_2(G)$, [les cardinalités minimales des ensembles avec les propriétés P_1 et P_2], (respectivement). Alors $\Psi_1\ (G) \leq \Psi_2(G)$. Si $\Psi_1\ (G) = \Psi_2(G)$ et chaque $\Psi_1(G) - ensemble$ est également un $\Psi_2(G) - ensemble$, Alors on dit que $\Psi_1\ (G)$ fortement égale à $\Psi_2\ (G)$, et on écrit $\Psi_1\ (G) \equiv \Psi_2\ (G)$.*

On donne quelques observations sur l'ensemble d'alliance offensive globale.

Observation 3.2. [*28*] *Si G est un graphe connexe d'ordre au moins trois, alors il existe un $\gamma_o(G)$-ensemble qui contient tous les sommets supports.*

Voici un exemple sur un arbre T

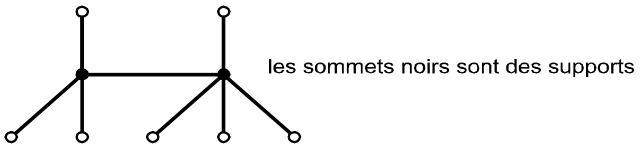


FIGURE 3.1. un arbre T

Observation 3.3. *[28] Soit T un arbre obtenu à partir d'un arbre non trivial T' en attachant l'ètoile $K_{1,t}$ de centre x par une arête xz à un sommet support z de T'. Alors $\gamma_o(T) = \gamma_o(T') + 1$ et $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$.*

Preuve: Par l'Observation 3.2, il y'a un $\gamma_o(T)$-ensemble. D qui contient tous les sommets supports, d'ou $x, z \in D$. Donc $D - \{x\}$ est une *aog* de T' et $\gamma_o(T') \leq \gamma_o(T) - 1$. Puisque tout $\gamma_o(T')$-ensemble peut être étendu en une aog de T en ajoutant le sommet x, alors $\gamma_o(T) \leq \gamma_o(T') + 1$. Ce qui nous donne $\gamma_o(T) = \gamma_o(T') + 1$. D'autre part si D' est un $\gamma(T')$-ensemble, alors $D' \cup \{x\}$ est un ensemble dominant de T, ce qui implique que $\gamma(T) \leq \gamma(T') + 1$. L'égalité est atteinte par le fait que x, z appartiennent à un $\gamma(T)$-ensemble et un tel ensemble sans le sommet x est un dominant de T'. □

Voici un arbre T' avec $\gamma_o(T) = \gamma_o(T') + 1 = 4$ et $\gamma(T) = \gamma(T') + 1 = 4$

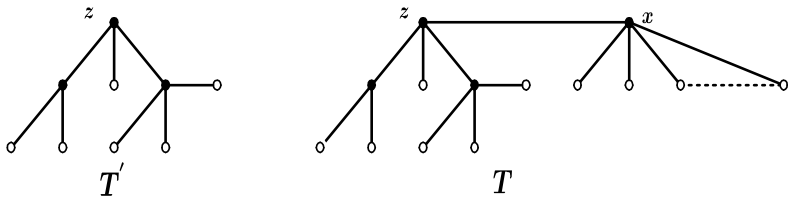


FIGURE 3.2. $\gamma_o(T) = \gamma_o(T') + 1$ et $\gamma(T) = \gamma(T') + 1$

3.2 Egalité entre le nombre d'alliance puissante globale γ_{ap} et le nombre de domination γ

Brigham et al dans **[24]** ont donnés une caractérisation discreptive pour tout graphe G vérifiant $\gamma(G) = \gamma_{a_p}(G)$.

Théorème 3.4. ***(Brigham et al [24])*** *Un graphe G vérifie $\gamma(G) = \gamma_{a_p}(G)$ si et seulement si $N[v]$ contient au moins $\lceil N[v]/2 \rceil$ sommets supports pour tout sommet $v \in V(G)$.*

Exemple 3.5. *Voici une chaine P_4 avec $\gamma(P_4) = \gamma_{ap}(P_4) = 2$.*



FIGURE 3.3. $\gamma(P_4) = \gamma_{ap}(P_4) = 2$

3.3 Egalité entre le nombre d'alliance offensive globale γ_o et le nombre de domination γ

Observation 3.6. *Pour toute chaine d'order $n \geq 2$, $\gamma_o(P_n) = \gamma(P_n)$ si et seulement si $P_n = \{P_2, P_3, P_4, P_5, P_7\}$*

Observation 3.7. *Pour toute étoile $S_{1,k}$, $\gamma_o(S_{1,k}) = \gamma(S_{1,k})$.*

Observation 3.8. *Pour une double étoile $S_{p,q}$, $\gamma_o(S_{p,q}) = \gamma(S_{p,q})$.*

Proposition 3.9. *Pour tout $n \geq 3$, $\gamma_o(C_n) = \gamma(C_n)$ si et seulement si $C_n = C_4$*

Preuve: On peut voir facilement que $\gamma_o(C_3) \neq \gamma(C_3)$ et $\gamma_o(C_4) = \gamma(C_4)$, pour $n \geq 5$, Si on prend un cycle contient des sommets $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n, v_1\}$, pour toute ensemble alliance offensive globale S, chaque sommet $v \in V - S$ possède au moins deux voisin dans S , mais pour l'ensemble dominant D il ya des sommets qui possède un seul voisin dans D , ce qui veut dire que $\gamma_o(C_n) > \gamma(C_n)$ donc la seul cycle qui vérifier l'égalité est C_4. □

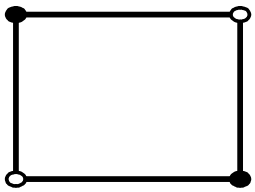


FIGURE 3.4. $\gamma_o(C_4) = \gamma(C_4) = 2$

3.4 Arbres avec $\gamma_o(T) = \gamma(T)$

Théorème 3.10. ***(Bouzefrane,chellali [28])*** *Soit T un arbre, alors $\gamma_o(T) = \gamma(T)$ si et seulement si $T = K_1$ ou bien $T \in \mathcal{F}$.*

Dans [**28**] Bouzefrane et chellali ont définit la famille $\mathcal{F}$ de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence T_1, T_2..., T_k ($k \geq 1$) d'arbres, où $T_1 = P_2$, $T = T_k$ et si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu récursivement à partir de T_i par un des quatre opérations ci-dessous. Considérons l'un des sommets de T_1 un support et l'autre une feuille.

- **Opération O1**: Attacher un nouveau sommet en le joignant à un sommet support quelconque de T_i.
- **Opération O2**: Attacher une chaine $P_2 = xy$ en joignant x à tout sommet support z de T_i.
- **Opération O3**: Attacher une étoile subdivisée SS_k, $k \geq 2$, de centre u en joignant u à un sommet v de T_i avec la condition que si v n'appartient pas à un $\gamma_o(T_i)$-ensemble D, alors la majorité stricte des sommets de $N_{T_i}[v]$ sont dans D.
- **Opération O4** :Attacher une étoile P_3= xyz en joignant x à tout sommet de T_i qui appartient à un $\gamma_o(T_i)$-ensemble.

l'arbre de la Figure 3.5 est un exemple d'arbre T de $\mathcal{F}$.

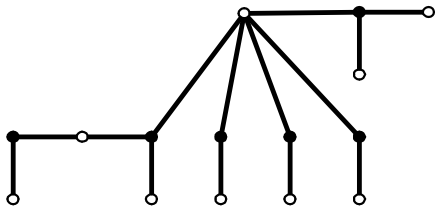


FIGURE 3.5. Un arbre T de $\mathcal{F}$

3.5 La Forte égalité

Observation 3.11. *d'àprés l'observation 3.6 on remarque :*

- $\gamma_o(P_2) \equiv \gamma(P_2)$.
- $\gamma_o(P_3) \equiv \gamma(P_3)$.

Observation 3.12. *Pour une étoile* $S_{1,k}$,$\gamma_o(S_{1,k}) \equiv \gamma(S_{1,k})$

Observation 3.13. *Pour une double étoile* $S_{p,q}$,$\gamma_o(S_{p,q}) \equiv \gamma(S_{p,q})$

De ce concepte il est trés intéressant de voir les classes des arbres qui vérifiant $\gamma_o(T) \equiv \gamma(T)$

3.6 Arbres avec $\gamma_o(T) \equiv \gamma(T)$

Afin de caractériser les arbres avec la famille $\mathcal{F}$ introduit dans [28] , Nous définisson la famille $\mathcal{F}'$de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence T_1,T_2... ,T_k ($k \geq 1$) des arbres, où $T_1 = P_2$,$T = T_k$ et , si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu récursivement de T_i par l'une des trois opérations ci-dessous. Considérons l'un des sommets de T_1 un support et l'autre une feuille.

- **Opération** $O1$: Attacher un nouveau sommet en le joignant à un sommet support quelconque de T_i.
- **Opération** $O2$: Attacher une chaîne $P_2 = xy$ en joignant x à n'importe quel sommet support forte z de T_i.
- **Opération** $O3$: Attacher une chaîne $P_3 = xyz$ en joignant x à n'importe quel sommet support z de T_i.

Théorème 3.14. *Soit* T *un arbre alors* $\gamma_o\ (T) \equiv \gamma(T)$ *si et seulement si* $T = K_1$ *ou* $T \in \mathcal{F}'$.

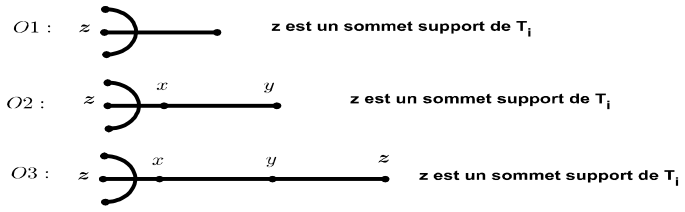


FIGURE 3.6. La construction de la famille $\mathcal{F}'$

Preuve: Il est clair que si $T = K_1$, alors $\gamma_o\ (T) \equiv \gamma(T)$. Si $n = 2$ alors $T = P_2$ d'ou $\gamma_o\ (P_2) \equiv \gamma(P_2)$ et T appartient à $\mathcal{F}'$, Si $n = 3$, alors $T = P_3$ qui appartient à $\mathcal{F}'$ puisqu'il est obtenu de P_2 en utilisant l'opération $O1$. Supposons que chaque arbre T'd'ordre $n' \geq 3$ satisfaisant $\gamma_o\ (T') \equiv \gamma(T')$ appartient à $\mathcal{F}'$. □

Soit T un arbre d'ordre $n > n'$ tel que $\gamma_o\ (T) \equiv \gamma(T)$, Si T est une étoile $K_{1,t}$, alors $\gamma_o\ (T) \equiv \gamma(T)$ et $T \in \mathcal{F}'$ car il est obtenu à partir de P_2 en utilisant l'opération $O1$. Si T est une double étoile, alors $\gamma_o\ (T) \equiv \gamma(T)$ et $T \in \mathcal{F}'$car il est obtenu à partir de P_2 en utilisant l'operations $O3$. ainsi, supposons que T a un diamètre d'au moins quatre. Si un sommet support disons x de T est adjacent à trois feuilles ou plus , alors soit T'est l'arbre obtenu à partir de T en enlevant une feuille adjacente à x. Alors $\gamma_o\ (T') \equiv \gamma_o(T)$, $\gamma\ (T')$ $\equiv \gamma(T)$ et donc $\gamma_o\ (T') \equiv \gamma(T')$ par induction sur T', Nous avons $T' \in \mathcal{F}'$. Donc $T\ ' \in \mathcal{F}'$ car il est obtenu à partir de T en utilisant l'opération $O1$.

Pour montrer la condition suffisante on utilise une induction sur le nombre d'opérations k exécutées pour construire l'arbre T. La propriété est vraie pour $T_1 = P_2$. Supposons que la propriété est vraie pour tous les arbres de $\mathcal{F}'$construits par $k - 1 \geq 0$ opérations. Soit $T = T_k$ avec $k \geq 2$, $T' = T_{k-1}$, et soit D un $\gamma_o(T)$-ensemble qui ne contient aucune feuille de T. Nous examinons les cas suivants:

Il est clair que si T est obtenu à partir de T' par l'Opération O_1, alors $\gamma_o(T') \equiv \gamma_o(T)$, $\gamma(T') \equiv \gamma(T)$ et donc $\gamma_o(T) \equiv \gamma(T)$.

Si T est obtenu à partir de T' par l'opération O_2, alors, $\gamma_o(T) \equiv \gamma_o(T') + 1$ et $\gamma(T) \equiv \gamma(T') + 1$. En Utilisant l'induction sur T' on trouve que $\gamma_o(T) \equiv \gamma(T)$.

Voici un arbre $\gamma_o\ (T) \equiv \gamma(T) = 6$.

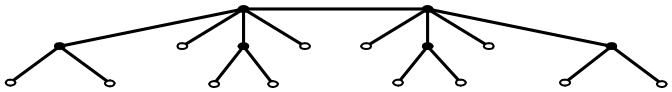


FIGURE 3.7. un arbre T avec $\gamma_o\ (T) \equiv \gamma(T)$

3.7 Egalité entre le nombre d'alliance defensive globale γ_a et le nombre d'alliance puissante globale γ_{ap}

3.7.1 Egalité entre les chaines et les étoiles

Observation 3.15. *Pour toute chaîne P_n $n \geq 2$, $\gamma_a(P_n) = \gamma_{ap}(P_n)$ si et seulement si $P_n = \{P_2, P_3, P_4, P_5, P_7\}$.*

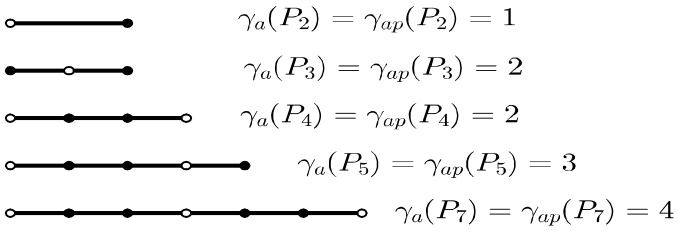


FIGURE 3.8. égalité entre γ_a et γ_{ap} dans les chaines

Observation 3.16. *Pour toute étoile $S_{1,k}$, k un entier positive $\gamma_a(S_{1,k}) = \gamma_{ap}(S_{1,k}) = 1 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$*

Observation 3.17. *Pour une double étoile $S_{p,q}$, $\gamma_a(S_{p,q}) = \gamma_{ap}(S_{p,q})$*

Exemple 3.18. *Soit une double étoile $S_{3,3}$ avec $\gamma_a(S_{3,3}) = \gamma_{ap}(S_{3,3}) = 4$*

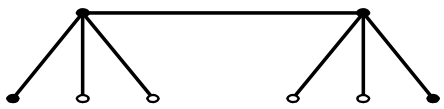


FIGURE 3.9. une double étoile $S_{3,3}$

3.7.2 Egalité entre les cycles

Proposition 3.19. *Pour toute cycle* C_n , $n \geq 3$, $\gamma_{ap}(C_n) = \gamma_a(C_n)$ *si et seulement si* $n = 3$ *ou* 6

Preuve: Soit S un ensemble alliance défensive globale et $v \in V - S$ et soit $S^{'}$ un ensemble alliance puissante globale et $v^{'} \in V - S^{'}$, pour $n = 3$, $\gamma_{ap}(C_3) = \gamma_a(C_3) = 2$, pour $n = 6$, $\gamma_{ap}(C_6) = \gamma_a(C_6) = 4$, v et $v^{'}$ possède au moins deux voisins dans S et $S^{'}$respectivement , et pour $n \neq 3, 6$ chaque sommet $v \in V - S$ possède un seul voisin dans S , Mais le sommet $v^{'} \in V - S^{'}$ possède au moins deux voisins dans $S^{'}$ ce qui veut dire que $\gamma_{ap}(C_n) > \gamma_a(C_n)$. Voici l'exemple suivant avec $\gamma_{ap}(C_6) = \gamma_a(C_6) = 4$ et $\gamma_{ap}(C_3) = \gamma_a(C_3) = 2$ □

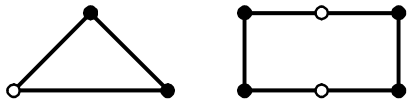


FIGURE 3.10. égalité entre γ_a et γ_{ap}

Remarque 3.20. *Soit* H *un cycle* C_n*, et* $G = H \circ K_1$ *alors* $\gamma_a(G) = \gamma_{ap}(G) = n(H)$.

De ce concepte il est trés intéressant de voir les classes des arbres qui vérifiant $\gamma_a(T) = \gamma_{ap}(T)$

3.8 Arbres avec $\gamma_a(T) = \gamma_{ap}(T)$

Nous définisson la famille $\mathcal{F}^{''}$ de tous les arbres T qui peuvent être obtenus à partir d'une séquence T_1,T_2... ,T_k $(k \geq 1)$ des arbres, où $T_1 = P_2$, $T = T_k$ et si $k \geq 2$, T_{i+1} est obtenu récursivement de T_i par l'une des trois opérations définies ci-dessous. Considérons l'un des sommets de T_1 un support et l'autre une feuille.

- **Opération** $O1$: Attacher un nouveau sommet en le joignant à un sommet support quelconque de T_i .

- **Opération** $O2$: Attacher une chaine $P_2 = xy$ en joignant x à n'importe quel sommet support z de T_i.

- **Opération** $O3$: Attacher une chaine $P_3 = xyz$ en joignant x à n'importe quel sommet support z de T_i, ou une feuille de T_i .

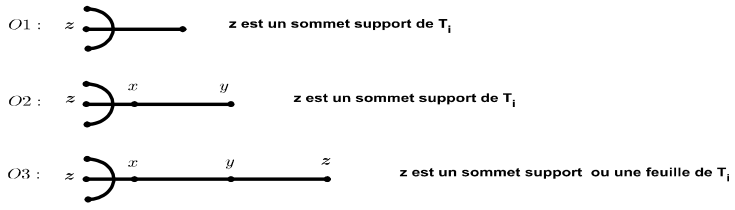


FIGURE 3.11. La construction de la famille $\mathcal{F}''$

Théorème 3.21. *Soit T un arbre, alors $\gamma_a(T) = \gamma_{ap}(T)$ si et seulement si $T = K_1$ ou $T \in \mathcal{F}''$*

Preuve: Il est clair, Si $T = K_1$, alors $\gamma_a\ (T) = \gamma_{ap}(T)$, Si $T \in \mathcal{F}''$, Maintenant pour montrer l'inverse, on utilise une induction sur l'ordre n de T. Il est évident que $\gamma_a(K_1) = \gamma_{ap}(K_1)$ supposons que $n \geq 2$. Si $n = 2$, alors $T = P_2$ et T appartient à $\mathcal{F}''$, Si $n = 3$, alors $T = P_3$ qui appartient à $\mathcal{F}''$ car il est obtenu de P_2 en utilisant l'opération $O1$. Supposons que chaque arbre T' d'ordre $n' \geq 2$ satisfaisant $\gamma_a\ (T') = \gamma_{ap}(T')$ est en $\mathcal{F}''$.

Soit T un arbre d'ordre $n > n'$ tel que $\gamma_a(T) = \gamma_{ap}(T)$, si T est une étoile $K_{1,t}$, alors $\gamma_a(T) = \gamma_{ap}(T)$ et $T \in \mathcal{F}''$ car il est obtenu à partir de P_2 en utilisant l'opération $O1$. Si T est une double étoile, alors $\gamma_a(T) = \gamma_{ap}(T)$ et $T \in \mathcal{F}''$ car il est obtenu à partir de P_2 en utilisant l'operations $O1$ et $O2$. Ainsi, supposons que T a un diamètre d'au moins quatre. Si un sommet support, disons x , de T est adjacent à deux feuilles ou plus, alors soit T'est l'arbre obtenu à partir de T en enlevant une feuille adjacente à x. Alors $\gamma_a(T') = \gamma_a(T)$, $\gamma_a(T') = \gamma_{ap}(T)$ et donc $\gamma_a(T') = \gamma_{ap}(T')$ par induction sur T', nous avons $T' \in \mathcal{F}''$. Ainsi $T\ ' \in \mathcal{F}''$car il est obtenu à partir de T en utilisant l'opération $O1$. □

Exemple 3.22. *un arbre avec $\gamma_a(T) = \gamma_{ap}(T)$*

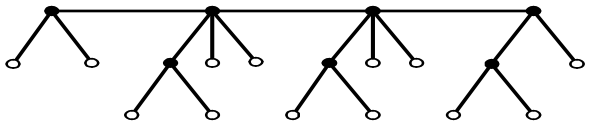


FIGURE 3.12. un arbre avec $\gamma_a(T) = \gamma_{ap}(T) = 7$

Proposition 3.23. *Pour toute chenille C_h , $\gamma_a(C_h) = \gamma_{ap}(C_h)$*

Voici un exemple sur une chenille $C_h(2,1,1,3,2)$ avec $\gamma_a(C_h) = \gamma_{ap}(C_h)$

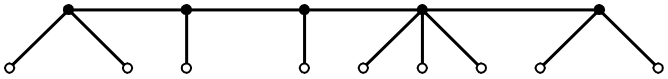


FIGURE 3.13. $\gamma_a(Ch(2,1,1,3,2)) = \gamma_{ap}(Ch(2,1,1,3,2)) = 5$

3.9 Forte égalité entre le nombre d'alliance defensive globale γ_a et le nombre d'alliance puissante globale γ_{ap}

Observation 3.24. *Pour toute chaîne d'order $n \geq 2$, $\gamma_a(P_n) \equiv \gamma_{ap}(P_n)$, si et seulement si $P_n = P_2, P_3, P_5$*

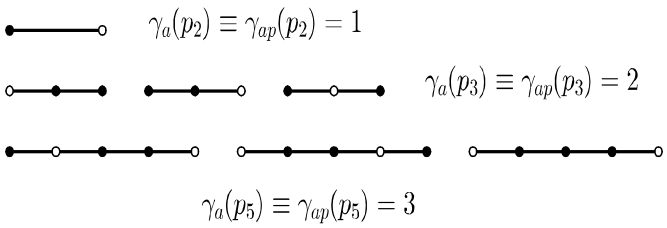


FIGURE 3.14. Forte égalité entre les chaines

Observation 3.25. *Pour une étoile $S_{1,k}$, $\gamma_a(S_{1,k}) \equiv \gamma_{ap}(S_{1,k})$.*

Observation 3.26. *Pour une double étoile $S_{p,q}$, $\gamma_a(S_{p,q}) \equiv \gamma_{ap}(S_{p,q})$.*

Voici un exemple sur une double étoile $S_{3,3}$ avec $\gamma_a(S_{3,3}) \equiv \gamma_{ap}(S_{3,3}) = 4$.

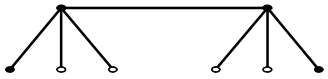


FIGURE 3.15. une double étoile $S_{3,3}$

Observation 3.27. *Pour une étoile subdivisé* $S^*_{1,k}$, $k \geq 1$, $\gamma_a(S^*_{1,k}) \equiv \gamma_{ap}(S^*_{1,k}) = k + 1$.

Exemple 3.28. *Pour l'étoile subdivisée* $S^*_{1,k}$ *de la figure suivante, prenons toutjour le sommet* w *avec l'ensemble soit* $u_1, u_2...u_k$ *ou* $v_1, v_2...v_k$

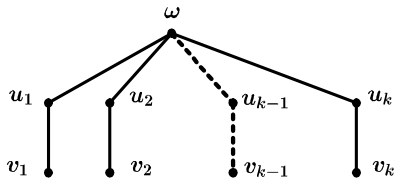


FIGURE 3.16. l'étoile subdivisée $S^*_{1,k}$

Proposition 3.29. *Pour un cycle* C_n , $n \geq 3$, $\gamma_{ap}(C_n) \equiv \gamma_a(C_n)$ *si et seulement si* $n = 3$

Preuve: D'àprés la proposition 3.19 , C_3 , C_6 vérifier l'égalité entre γ_{ap} et γ_a, on remarque que C_3 vérifier la forte égalité puisque toute ensemble alliance défensive globale S est un ensemble alliance puissante globale , Mais dans C_6, il ya un ensemble S, qui un ensemble alliance défensive globale mais ne pas un ensemble alliance puissante globale. □

Remarque 3.30. *Pour toute cycle* C_n , $\gamma_{ap}(C_n \circ K_1) \equiv \gamma_a(C_n \circ K_1) = n(C_n)$

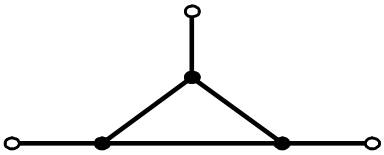


FIGURE 3.17. $\gamma_{ap}(C_3 \circ k_1) \equiv \gamma_a(C_3 \circ k_1) = 3$

Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude des alliances dans les graphes. Dans un premier lieu on a donner une brief historique sur la domination dans les graphes. Apres nous avons donner un état de l'art sur les principaux resultats existants sur les invariants d'alliances. En derner lieu on a etudiés l'égalité et la forte égalité entre les chaines et les étoiles, doubles étoiles, aussi nous avons établi une famille d'arbres obtenue d'une maniere constructive pour lesquels $\gamma_o(T) \equiv \gamma(T)$ et $\gamma_a(T) = \gamma_{ap}(T)$.

Références

[1] *C. Berge. Graphs.* North Holland, 1985.

[2] *J. A. Bondy, U. S. R. Murty.* Graph theory with applications, North-Holland, New York,

[3] *R. Diestel.* Graph theory. Electronic Edition 2005, Springer-Verlag, New York 1997, 2000, 2005

[4] *S.F. De Jaenisch*, Trait des applications de l'analyse mathématique au jer des Echecs,Petrograd, 1862.

[5] *W.W. Ball Rouse*, Mathematical recreation and problem of past and present times, Mac Millan, London, 1892.

[5] *O.Ore*, Theory of graph, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 38 (Amer. Math. Soc. Providence, RI), 1962.

[6] E.J. Cockayne and S.T. Hedetniemi, Towards a theory of domination, Networks,7 : 247 − 261, 1977.

[7] *T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, P.J. Slater*, Fundamentals of domination in graphs, Marcel Dekker, New York, *1998.*

[8] *T,W,Haynes* et *P.J.slater*,"paired-domination in graphs",Networks 32,199-206,1998.

[9] *T.W. Haynes*, *S. T. Hedetniemi* et *M. A. Henning*, Global defensive alliances in graphs.The Electronic. J. Combin 10(2003) *R*47.

[10] *T. W. Haynes*, *S. T. Hedetniemi*, and *M. A. Henning*, Global defensive alliances in graphs, Electron. J. Combin. 10(2003), Research Paper 47, 13*pp*.

[11] *S. M. Hedetniemi*, *S. T. Hedetniemi*, and *P. Kristiansen*, Alliances in graphs, J.Combin. Math. Combin. Comput. 48(2004)157 − 177.

[12] S.M. Hedetniemi, S.T Hedetniemi and P. Kristiansen, Alliances in graphs, J. Combin. Math. Combin. Comput, to appear.

[13] *R. C. Brigham*, *R. D. Dutton*, *T. W. Haynes, and S. T. Hedetniemi.*

[14] M. Chellali, Offensive alliances in bipartite graphs.

[15] *J. A. Rodriguez-Velazquez*, *J. M. Sigarreta*, offensive alliances in cubic graphs. International mathematical forum 1 (36) (2006) 1773-1782.

[16] *J. A. Rodriguez* et *J. M. Sigarreta*, Spectral study of alliances in graphs. Discussiones Mathematicae Graph Theory 27 (1) (2007) 143- 157.

[17] Globale defensive alliance of trees and cartesian product of paths an cycls, Discrète Applied Mathematics 160 (2012) 479- 487.

[18] *Ismail G.yero* and *Tuan* ,Computing global offensive alliances in cartesian product graphs,2012.

[19] *Linda Eroh* et *Ralucca Gera*, Global alliance partition in trees, *J. Combin.* Math. Combin Comput. 66 (2008),161-169.

Références

[20] *L. Eroh and R. Gera*, Alliance partition number in graphs, submitted for publication, January 2007.

[21] M. Chellali, T. W. Haynes et L. Volkmann, Global offensive alliance numbers in graphs with emphasis on trees. Australasian Journal of Combinatorics, 45 (2009) 87-96.

[22] M. Chellali, T. W. Haynes, B. Randerath et L. Volkmann, Bounds on the global offensive k-alliance number in graphs. Discussiones Mathematicae Graph Theory 29 (2009) 597 - 613

[23] J. A. Rodríguez-Velázquez et J. M. Sigarreta, Global defensive k-alliances in graphs Disc Applied Math 157 (2009) 211-218.

[24] *R. C. Brigham*, *R. D. Dutton*, *T. W. Haynes*, et *S. T. Hedetniemi*, Powerful alliances ingraphs. Discrete Math.,Vol. 309, Issue 8 (2009), pp. $2140 - 2147$.

[25] P. Kristiansen, S. M. Hedetniemi et S. T. Hedetniemi, Alliances in graphs. The Journal of Combinatorial Mathematics et Combinatorial Computing, $48(2004), 157 - 177$.

[26] P. Kristiansen, S.M. Hedetniemi et S.T. Hedetniemi. Introduction to alliances in graphs, IBID, pp.$308 - 312, 2002$.

[27] S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, and P. Kristiansen, Alliances in graphs.

[28] M. Bouzefrane et M. Chellali, A note on global alliances in trees.