Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques et de L'informatique

Projet de fin d'étude

Présenté en vue de l'optention du

Diplôme de Master en

Mathématiques

Option :

Recherche Opérationnelle

Thème

Etude de la coloration packing dans les graphes

Par

MOUSSA Youcef et ALLOUCHE Omar

Soutenu devant le jury composé de :

M. BOUZEFRANE	MAA	U.D.Y.F-Médéa	Président.
R. LEMDANI	MAA	U.D.Y.F-Médéa	Encadreur.
M. ZAMIME	MCD	U.D.Y.F-Médéa	Examinateur.
M. ZEMIR	MAB	U.D.Y.F-Médéa	Examinateur.

Date de soutenance : 18/06/2018

Résumé

Le but de ce travail est consacré à l'étude du nombre de coloration packing, il s'agit de trouver le plus petit nombre de couleurs à affecter aux sommets d'un graphe G, de telle sorte que, si deux sommets u et v ont la même couleur $f(u) = f(v)$, alors $d_G(u, v) > f(u)$. Cette fonction f est appelée la coloration packing d'ordre k. Le nombre de la coloration packing d'un graphe G, noté par $\chi_{_p}(G)$, est l'ordre minimum de la coloration packing. Nous avons déterminé le nombre de la coloration packing du graphe produit cartésien de deux étoiles, la coloration packing du graphe milieu pour les graphes suivants : les chaines, les cyles, et les étoiles. On a déterminé aussi la coloration packing du graphe subdivisé super fini pour les graphes suivants : Friendship, produit carré de deux chaînes, produit croisé de deux chaînes, produit total des chaînes P_2 et P_n, graphe splitting du produit croisé de la chaîne P_2 par la chaîne P_n. Ainsi pour le graphe splitting des graphes : Friendship et produit croisé de la chaîne P_2 par la chaîne P_n. Tous les résultats obtenus dans ce mémoire ont été démontrés.

Abstract

The purpose of this work is devoted to the study of a packing chromatic number, it acts to find the smallest number of colors has to assign to the vertices of a graph G, such that for every vertices u and v, if $f(u) = f(v)$, then $d_G(u, v) > f(u)$. This function f is called packing coloring of order k. The packing chromatic number of a graph G, denoted by $\chi_p(G)$ is the minimum order of a packing coloring. We determine the packing chromatic number of the Cartesian product of two stars, the packing coloring of the middle graph for the following graphs : paths, cycles, and stars. One also determine the packing chromatic number of the finite super subdivision of graphs : Friendship, cartesian product graph of two paths, cross product of two paths, total product of path P_2 and P_n, graph splitting of cross product of path P_2 with P_n. We determined the packing chromatic number of the splitting of graphs : Friendship and cross product of paths P_2 and P_n. All results obtained in this paper have been demonstrated.

مـــــلـــــخـــــص

الغرض من هذا العمل هو دراسة عدد من تلوين الانتشار la coloration packing و ينقسم عملنا هذا إلـــى ثلاثة فصول :

- ✓ الفصل الأول : يحتوي على بعض التعاريف العامة والرموز الخاصة بالرسوم البيانية.
- ✓ الفصل الثاني : قدمنا فيه بعض النتائج المتحصل عليها بالنسبة لعدد من تلوين الانتشار، كل تطبيق معرف بـ : $f: V\{1 \dots n\}$ بحيث من أجل كل u و v من G إذا كان $f(u) = f(v)$ هذا معناه $d_G(u,v) > f(u)$ ويرمز له بالرمز $\chi_p(G)$.
- ✓ الفصل الثالث : قدمنا بعض النتائج التي تحصلنا عليها فيما يخص تعيين عدد تلوين الانتشار لكثير من الرسومات البيانية.



Remerciements

Louange á Allah,
le miséricordieux, sans Lui rien
de tout cela n'aurait pu être. Nous
remercions Allah qui nous a orienté
au chemin du savoir et les portes de la science.
Notre encadreur LEMDANI Rachid pour son encouragement,
son aide et son suivi pour terminer ce travail.
Nous tenons á remercier également les membres de
jury pour avoir accepter de jurer ce mémoire.
Nos remerciements les plus sincéres sont
adressés á mes enseignants, qui ont
contribué durant nos études á
notre formation et tous les
enseignants de l'Université
DR.YAHIA FARES de Médéa
Enfin, merci á
nos familles, pour leurs
amours et leurs soutiens
constant..

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents, ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.*

A toute ma famille.

A mon frère Sohayb et *A mes Soeurs.*

A mes amies.

A mon chèr binôme ***Omar*** et sa famille.

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

MOUSSA Youcef

Dédicace

J*e dédie ce mémoire*

A *mes chers parents, ma mère et mon père*

P*our leur patience, leur amour, leur soutien et leurs encouragements.*

A toute ma famille.

A *mes frères.*

A *mes amies.*

A mon chèr *binome* ***Youcef*** *et sa famille.*

S*ans oublier tous les professeurs que ce soit du primaire, du moyen, du secondaire ou de l'enseignement supérieur.*

ALLOUCHE Omar

Table des matières

Résumé **ii**

Abstract **iii**

molakhas **iv**

Table des figures **xi**

Introduction **xiii**

1 Notions fondamentales sur la théorie des graphes. **1**

1.1 Concepts fondamentaux 1

1.1.1 Graphe et sa présentation 1

1.1.2 Graphe non orienté 2

1.1.3 Multigraphe 2

1.1.4 Graphe simple 2

1.1.5 Voisinage, degré d'un sommet 3

1.1.6 Joint de deux graphes 4

1.1.7 Chaine et Cycle 4

1.1.8 Distance, excentricité et diamètre 4

1.1.9 Sous graphe 5

1.1.10 Sous-graphe induit, graphe partiel 5

1.1.11 Invariants de graphes 10

1.1.12 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum 11

1.1.13 Produit cartésien 12
1.2 La coloration dans les graphes 13
1.2.1 Coloration des sommets 13
1.2.2 Le nombre chromatique 13
1.2.3 Bornes sur le nombre chromatique : 14
1.2.4 i-packing 14

2 Quelques résultats obtenus sur le nombre de la coloration packing 15
2.1 Motivation et définition du problème de la coloration packing 15
2.1.1 Coloration packing de certains graphes particuliers 16
2.1.2 Graphes avec petit nombre de la coloration packing 17
2.1.3 Coloration packing pour les arbres 18
2.1.4 Coloration packing du graphe Moulin 20
2.2 Coloration packing de la couronne d'un graphe 20
2.2.1 La couronne d'une chaine 21
2.2.2 La couronne d'un cycle 22
2.3 Détermination du nombre de la coloration packing du graphe splitting 22
2.3.1 La coloration packing de graphe splitting pour les chaines 23
2.3.2 La coloration packing du graphe splitting pour les cycles 23
2.3.3 La coloration packing du graphe splitting de l'étoile 23
2.3.4 La coloration packing du graphe splitting de l'étoile double 24
2.3.5 La coloration packing du graphe splitting pour les graphes complets . 24
2.4 Détermination du nombre de la coloration packing du graphe subdivisés super finis 24
2.4.1 La coloration packing pour un graphe de subdivision super fini d'un arbre 25
2.4.2 La coloration packing pour le graphe subdivisé super fini d'un graphe complet 26
2.4.3 La coloration packing pour le graphe subdivisé super fini d'un cycle . 27

3 Détermination du nombre de la coloration packing de quelques types de graphes **28**

3.1 Coloration packing du graphe $k_{1,n} \square k_{1,n}$ 29

3.2 Coloration packing du graphe milieu d'une chaîne 30

3.3 Coloration packing du graphe milieu d'un cycle 31

3.4 Coloration packing du graphe milieu d'une étoile 32

3.5 Coloration packing du graphe subdivisé super fini de graphe Friendship . . . 33

3.6 Coloration packing du graphe subdivisé super fini d'un graphe $P_n \square P_k$ 34

3.7 Coloration packing du graphe subdivisé super fini d'un graphe $P_n \times P_k$ 36

3.8 Coloration packing du graphe subdivisé super fini d'un graphe $P_2 \boxtimes P_n$ . . . 37

3.9 Coloration packing du graphe de subdivisé super fini de splitting d'un $P_2 \times P_n$ 38

3.10 Coloration packing de splitting d'un graphe Friendship 39

3.11 Coloration packing de splitting du graphe $P_2 \times P_n$ 40

Conclusion **42**

Bibliographie **43**

Table des figures

Figure 1.1.1 Un multigraphe 2
Figure 1.1.2 Un graphe simple 2
Figure 1.1.3 Une chaine et un cycle 4
Figure 1.1.4 Sous graphe de graphe G 5
Figure 1.1.5 Graphe partiel de graphe G. 5
Figure 1.1.6 Le complémentaire et le graphe complet d'un C_4. 6
Figure 1.1.7 Un graphe biparti complet 7
Figure 1.1.8 Isthme et sommet d'articulation dans un graphe connexe . . . 8
Figure 1.1.9 Un arbre 8
Figure 1.1.10 Une étoile 9
Figure 1.1.11 Une étoile double 9
Figure 1.1.12 $Cr\ (C_5)$ 9
Figure 1.1.13 Une étoile subdivisée 10
Figure 1.1.14 Un graphe G 11
Figure 1.1.15 Une grille $G_{4\times3}$ 12
Figure 1.1.16 Un tore $T_{4\times3}$ 12
Figure 1.1.17 Un cylindre $C_{y_{4\times3}}$ 12
Figure 2.1.1 Un graphe G est un T-ajout du sommet v 18
Figure 2.1.2 Les plus petits arbres avec $\chi_p\ (T) = 4$ 19
Figure 2.1.3 Coloration packing d'un C_3^4 20
Figure 2.1.4 Coloration packing d'un C_8^3 et C_9^3 20

Figure 2.2.1 Un graphe C_4 et sa couronne 21

Figure 2.2.2 La couronne de P_n 21

Figure 2.2.3 Coloration packing de $Cr(P_{10})$, $Cr(P_2)$, $Cr(P_4)$ 21

Figure 2.2.4 La couronne d'un C_n 22

Figure 2.2.5 Coloration packing d'un $Cr(C_5)$ et $C_r(C_3)$ 22

Figure 2.3.1 Le graphe splitting et la coloration packing d'une P_4 23

Figure 2.3.2 Le graphe splitting et la coloration packing d'un C_4 23

Figure 2.3.3 Le graphe splitting et la coloration packing d'une étoile. 24

Figure 2.3.4 Le graphe splitting et la coloration packing d'une étoile double 24

Figure 2.3.5 Le graphe splitting et la coloration packing de K_3. 24

Figure 2.4.1 $FSSD_3(C_4)$. 25

Figure 2.4.2 $\chi_p(FSSD_2(K_{1,3})) = 3$. 25

Figure 2.4.3 $\chi_p(FSSD_2(T)) = 3$ 26

Figure 2.4.4 $\chi_p(FSSD_2(K_3)) = 4$ 26

Figure 2.4.5 $\chi_p(FSSD_2(C_4)) = 3, \chi_p(FSSD_2(C_3) = 4$. 27

Figure 3.0.1 le graphe milieu d'une chaîne d'ordre 4 28

Figure 3.0.2 F_4. 29

Figure 3.1.1 $\chi_{_p}(K_{1,3} \square K_{1,3})) = 7$. 29

Figure 3.2.1 $\chi_p(M(P_{13})) = 6$ 31

Figure 3.2.2 $\chi_p(M(P_{24})) = 7$ 31

Figure 3.3.1 $\chi_p(M(C_8)) = 7, \chi_p(M(C_6)) = 6$ 32

Figure 3.4.1 $\chi_p(M(K_{1,n})) = n + 1$. 33

Figure 3.5.1 $\chi_p(FSSD_m(F_n)) = 4$.. 34

Figure 3.6.1 $\chi_p(FSSD_3(P_3 \square P_3)) = 3$ 35

Figure 3.7.1 $\chi_p(FSSD_3(P_3 \times P_3)) = 3$ 37

Figure 3.8.1 $\chi_p(FSSD_2(P_2 \boxtimes P_4)) = 7$. 38

Figure 3.9.1 $\chi_p(FSSD_2(S'(P_2 \times P_4))) = 3$ 39

Figure 3.10.1 $\chi_p(S'(F_3)) = 8$ 40

Figure 3.11.1 $\chi_p(S'(P_{23})) = 7$. 41

Introduction

La théorie des graphes constitue une branche à part entière des mathématiques. Elle représente l'un des instruments les plus courants et les plus efficaces pour résoudre les problèmes discrets de la Recherche Opérationnelle.

Parmi les problèmes les plus anciens de la Recherche Opérationnelle, ayant suscité l'intérêt de beaucoup de chercheurs, on peut citer le problème de coloration des graphes planaires. Il s'agit de répondre à la question : "Suffit-il de quatre couleur pour dessiner n'importe quelle carte géographique ? ". Dans le language des graphes, ce problème se formalise : " Peut-on colorer un graphe planaire en utilisant quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de couleurs différentes ? ". Ce problème a été posé sous forme de conjecture par **Francis Guthrie** en 1852, est devenu célèbre sous le nom de problème des quatres couleurs et n'a pu trouver une réponse positive en 1976, que grâce à l'ordinateur par **Appel** et **Haken**.

Actuellement, on trouve dans la littérature plusieurs types de colorations : Elles sont définies par la coloration des éléments du graphe (sommets, arêtes, faces,...) avec une ou plusieurs contraintes supplémentaires.

En 2002, **Sloper** [13] a introduit la packing coloration. Il sagit de trouver le plus petit nombre de couleurs, noté $\chi_p(G)$, à affecter aux sommets d'un graphe G de telle sorte que si deux sommets u et v ont la même couleur $\pi(u) = \pi(v)$, alors $d_G(u, v) > \pi(u)$ où π est une fonction de V dans l'ensemble $\{1, 2, ...\}$

Dans ce présent travail, nous nous intéressons principalement à l'étude de cet invariant, et l'étudions sur quelques types de graphes.

Après une introduction générale, le mémoire s'articule autour de trios chapitres :

Le premier chapitre portera des généralités sur la théorié des graphes, nous introduisons les définitions fondamentales, et les notations de base dans le domaine.A la fin de ce chapitre, nous précisons notamment les définitions de la coloration dans les graphes et nous donnons des borne sur le nombre chromatique $\chi(G)$.

Dans le deuxieme chapitre, on a étudié la coloration packing sur les graphes en donnant les définitions, les notations ainsi quelques résultats obtenus par les chercheurs dans [1,4,5,8,9,10,15,16].

Au troisième chapitre, nous présentons notre contribution sur la détermination du nombre de la coloration packing de quelques types de graphes, à savoir : le produit cartésien de deux étoiles, graphe milieu pour les graphes suivants : les chaines, les cyles, et les étoiles. On a déterminé aussi la coloration packing du graphe subdivisé super fini pour les graphes suivants : Friendship, produit carré de deux chaînes. produit croisé de deux chaînes, produit total des chaînes P_2 et P_n, graphe splitting de produit croisé des chaînes P_2 et P_n. Ainsi sur le graphe splitting pour les graphes: Friendship et produit croisé des chaînes P_2 et P_n. Tous les résultats obtenus dans ce mémoire ont été démontrés, des figures illustratives de chaque résultat en utilisant le logiciel Texmaker sont mêmes insérées.

Le mémoire s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble du travail réalisé.

Chapitre 1

Notions fondamentales sur la théorie des graphes.

Dans ce chapitre, nous donnons quelques concepts de base de la théorie des graphes, ainsi que les définitions nécessaires utilisées tout au long de ce mémoire, ensuite nous rappelons quelques paramètres de coloration que nous avons étudie.

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Graphe et sa présentation

Définition 1.1.1 *Un graphe $G = (V, E)$ est défini par deux ensembles finis non vide, un ensemble de sommets V et un ensemble d'arêtes E. Le cardinal de V est appelé l'ordre de G ; noté par $n(G)$ et le cardinal de E est appelé la taille de G ; noté par $m(G)$. Une arête $e \in E$ est un couple de sommets (u, v) noté par $e = uv$, ou u et v sont les extrémités de e. On dira dans ce cas que u et v sont adjacents et que e est incidente à u et v. Les graphes tiennent leur nom du fait qu'on peut les représenter par des dessins. A chaque sommet de G, on fait correspondre un point distinct du plan et on relie par une courbe simple les points correspondant aux extrémités de chaque arête. Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues.*

1.1.2 Graphe non orienté

Définition 1.1.2 *Un graphe non orienté n'est qu'un graphe orienté symétrique, si un arc relie le sommet u au sommet v, un autre arc relie le sommet v au sommet u. On ne trace alors qu'un trait entre u et v que l'on appelle une « arête ».*

1.1.3 Multigraphe

Définition 1.1.3 *Un multigraphe $G = (V, E)$est un graphe dans lequel il peut exister plusieurs arêtes entre une paire de sommets.*

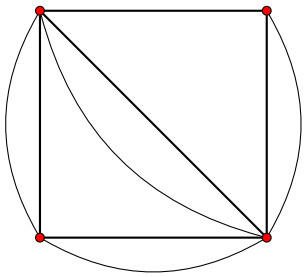


Figure 1.1.1 : Un multigraphe.

1.1.4 Graphe simple

Définition 1.1.4 *Un graphe est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples (deux arêtes distinctes joignantes la même paire de sommets). La figure 1.1.2 illustre un graphe simple $G = (V, E)$ où $V = \{a, b, c, d, e\}$et $E = \{ab, ae, bc, bd, be, cd, ce, de\}$.*

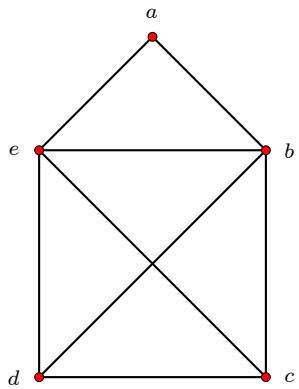


Figure 1.1.2 : Un graphe simple.

Par la suite, tous les graphes considérés dans ce mémoire sont simples.

1.1.5 Voisinage, degré d'un sommet

Définition 1.1.5 *Soit G (V, E) un graphe pour un sommet v de G, le voisinage ouvert de v est :*

$$N_G(v) = \{u \in V_G(v) : uv \in E(G)\}.$$

Le voisinage fermé de v est défini par :

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}.$$

Pour un sous-ensemble $S \subseteq V(G)$, le voisinage ouvert de S est :

$$N_G(S) = \cup_{v \in S} N_G(v).$$

le voisinage fermé de S est :

$$N_G[S] = \cup_{v \in S} N_G[S].$$

Définition 1.1.6 *Pour les graphe simple, le degré d'un sommet est la taille de son voisinage. Soit $v \in V(G)$, le degré de v est noté par :*

$$d_G(v) = |N_G(v)|.$$

Le degré d'un graphe est le degré maximum de tous ses sommets, noté par :

$$\Delta(G) = \max\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Le degré minimum d'un graphe est le degré minimum de tous ses sommets, noté par :

$$\delta(G) = \min\{d_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Par exemple pour le graphe G de la figure 1.1.2 le voisinage ouvert du sommet c est $\{b, d, e\}$ et son voisinage fermé est $[c, b, d, e]$. Le graphe G n'a pas de sommets isolés. Le degré minimum du G est donc $\delta(G) = 2$ et le degré maximum est $\Delta(G) = 4$.

1.1.6 Joint de deux graphes

Le graphe joint de G_1et G_2 est le graphe obtenu en reliant touts les arête entre G_1 et G_2.

1.1.7 Chaine et Cycle

Définition 1.1.7 *Une chaine joignante deux sommets x et y dans G est une suite de sommets et d'arêtes telle que la première arête de la suite est incidente à x, la dernière arête de la suite est incidente à y et chaque intermédiaire de la suite est adjacente à la précédente par une de ses extrémités.*

Une chaine est simple si la séquence qui constitue ne parcourt pas plusieurs fois la même arête.

Une chaine est élémentaire si la séquence qui la constitue ne parcourt pas plusieurs fois le même sommet.

On appelle cycle C_n dans un graphe G, une chaine qui se referme.

Un cycle simple est une chaine simple qui se referme.

Un cycle élémentaire est une chaine élémentaire qui se referme. La figure 1.1.3 illustre une P_4 et un C_4.



Une P_4 Un C_4

Figure 1.1.3 : Une chaine et un cycle.

1.1.8 Distance, excentricité et diamètre

Définition 1.1.8 *Soit u et v deux sommets d'un graphe G.*

On appelle distance entre u et v, notée $d\ (u, v)$, la longueur de la plus courte chaine joignante u et v. L'excentricité d'un sommet v dans G est : $exc(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$. Un sommet de G ayant une excentricité minimum est appelée un centre.

Le diamètre de G, noté diam (G), est égal $\max\{exc(v) : v \in V\}$.

Par exemple pour le graphe $G(V,\ E)$ de la figure 1.1.2 , $d(a,c) = 2$, $exc(a) = 2$ et $diam(G) = 2$.

1.1.9 Sous graphe

1.1.10 Sous-graphe induit, graphe partiel

Définition 1.1.9 *Soit $G = (V, E)$ un graphe avec V ensembles des sommets et E ensembles des arêtes.*

Le sous-graphe de G engendré par $A \subseteq V$ est le graphe dont les sommets sont ceux de A et dont les arêtes sont celles de G ayant leurs deux extrémités dans A. le sous graphe induit par A est le graphe $G[A] = (A, \{xy : xy \in E \text{ et } \{x, y\} \subset A\})$. Voir la figure 1.1.4 qui illustre un sous graphe du graphe 1.1.2 .

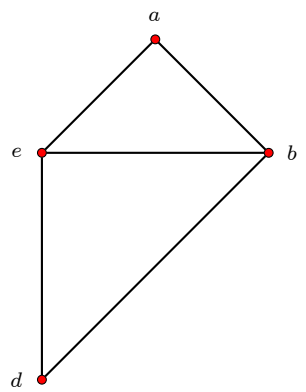


Figure 1.1.4 : Sous graphe de G.

Définition 1.1.10 *Le graphe partiel de G défini par $W \subseteq E$ est le graphe dont ces sommets sont ceux de G et dont ces arêtes sont celles de W. Voir la figure 1.1.5 qui illustre un graphe partiel du graphe 1.1.2 .*

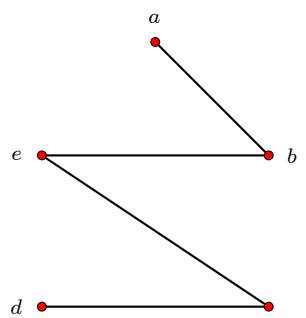


Figure 1.1.5 : Graphe partiel de G.

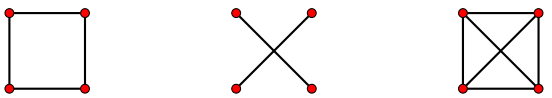
Graphe complet

Définition 1.1.11 *Un graphe complet, est un graphe dont toutes les paires des sommets sont adjacentes. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n et chaque sommet est de degré $n-1$.*

Graphe complémentaire

Définition 1.1.12 *Le graphe complémentaire d'un graphe simple, noté $\overline{G} = (V, \overline{E})$, défini par $V\ (\overline{G}) = V\ (G)$ et $E\left(\overline{G}\right) = \{u\ v : u \in V\,(G)\ ,\ v \in V\ \ (G)\ \ et\ u\ v\ \notin E(G)\ \}$.*

Remarque 1.1.1 *La superposition de G et $\overline{G}$ donne un graphe complet.Voir la figure 1.1.6 qui illustre un C_4 , $\overline{C}_4$ et K_4.*



C_4 $\overline{C}_4$ K_4

Figure 1.1.6 : Le complémentaire et le graphe Complet d'un C_4.

Clique

Définition 1.1.13 *Une clique dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets deux a deux adjacents, ou est un sous-graphe complet. Par exemple le graphe simple de la figure 1.1.2 admet une clique d'ordre* 3.

Un graphe k-régulier

Définition 1.1.14 *Un graphe G est dit $k-$régulier si tout les sommets de G sont de degré k.*

Un graphe discret (nul)

Définition 1.1.15 *un graphe discret,est un graphe dont tous les sommets sont non adjacents deux à deux. Un graphe discret G est un graphe $(0)-$ régulier .*

Graphe biparti

Définition 1.1.16 *Un graphe $G = (V, U)$ est dit biparti si V peut se partager en deux sous ensembles V_1 et V_2, de sorte que tous les sommets d'un même ensemble sont non adjacents deux à deux.*

Un graphe biparti complet

Définition 1.1.17 *Un graphe biparti est dit complet si chaque sommet de V_1est adjacent à tous les sommets de V_2. Si $|V_1| = p$ et $|V_2| = q$, alors le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$ $p, q \geq 1$. Plus généralement, un graphe $G = (V; E)$est dit $k-$parti $(k \geq 2)$, si V peut être partitionné en k stables $\{V_1, V_2, ...V_k\}$. Il est dit multiparti-complet si pour tout $i \neq j$, tout sommet de V_i est adjacent à tout sommet de V_j. La figure1.1.7 illustre un graphe biparti complet $K_{3,2}$.*

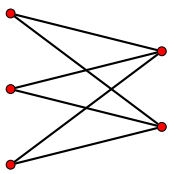


Figure 1.1.7 : Un graphe biparti complet.

Graphe connexe

Définition 1.1.18 *Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté G est connexe si $\forall x, y \in V$, il existe une chaine qui relie x à y. Une arête e est appelée un isthme (arête d'articulation du graphe G) si le graphe $G - e$ possède plus de composantes connexes que G, (i.e, si G est connexe alors $G - e$ n'est pas connexe).*

Un sommet v du graphe G est appelé un sommet d'articulation du graphe G si le graphe $(G - v)$ a plus de composantes connexes que G, (i.e, si G est connexe alors $(G - v)$ n'est pas connexe).

Exemple 1.1.1 *Le graphe G de la figure suivante admet l'arête $\{be\}$comme isthme, car $G - \{be\}$ est non connexe. Le sommet b est un sommet d'articulation du graphe G, car $G-$ b est non connexe.*

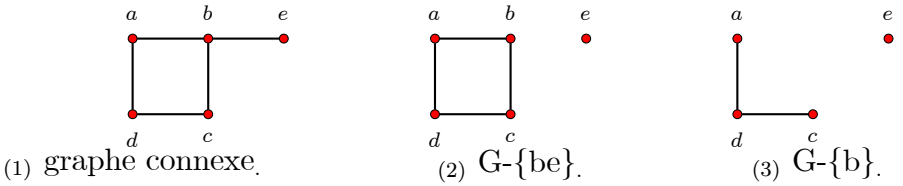


Figure 1.1.8 : Isthme et sommet d'articulation dans un graphe connexe.

Graphe $h-$connexe

Définition 1.1.19 *Pour un graphe connexe G, la connectivité $k(G)$ est le nombre minimum de sommets de G dont la suppression déconnecte le graphe G ou le réduit à un sommet isolé. G est dit $h-$connexe si sa connectivité $k(G)$ est supérieure ou égale à h.*

Arbre

Définition 1.1.20 *On appelle arbre, et on note par T, un graphe connexe et sans cycle. Il comporte exactement $(n-1)$ arêtes. On appelle feuille d'un arbre, un sommet de degré 1, dit aussi sommet pendant. Dans un arbre T, tout sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet support. La hauteur $h\ (T)$ de l'arbre T est la longueur du plus long chemin de la racine à une feuille.*

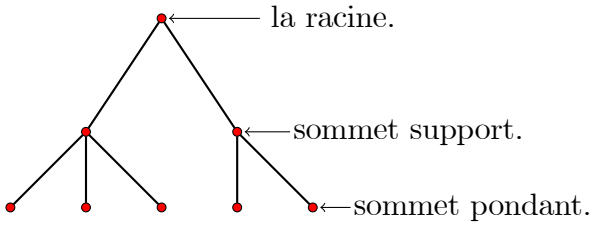


Figure 1.1.9 : Un arbre.

Forêt

Définition 1.1.21 *Une forêt est un graphe sans cycle, chacun de ses composants connexes étant un arbre.*

étoile

Définition 1.1.22 *On appelle étoile et on note par $K_{1,n}$, l'arbre à $n+1$ sommets ayant n feuilles.*

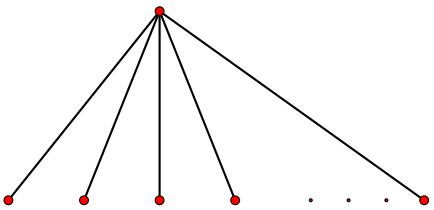


Figure 1.1.10 : Une étoile.

L'étoile double

Définition 1.1.23 *L'étoile double, notée $S_{p,q}$, est le graphe obtenu en reliant par une arête le sommet non pendant d'une étoile $k_{1,p}$ au sommet non pendant d' une étoile $K_{1,q}$.*

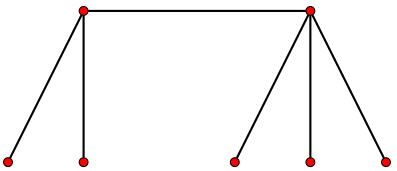


Figure 1.1.11 : Une étoile double.

La couronne

Définition 1.1.24 *La couronne de $G = (V, E)$ notée $Cr\ (G)$, c'est le graphe obtenu en attachant à chaque sommet de G un nouveau sommet. Donc il est évident que l'ordre de $Cr\ (G)$ est égal à $2|V|$. Pour le cycle C_5 sa couronne est représentée par le graphe de la figure suivante :*

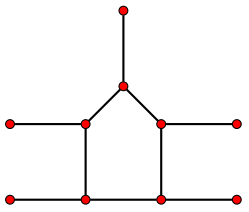


Figure 1.1.12 : $\mathrm{Cr}(C_{5)}$.

La subdivision

Définition 1.1.25 *Le graphe subdivisé $S(G)$ d'un graphe G, est le graphe obtenu en subdivisant chaque arête de G une seule fois.*

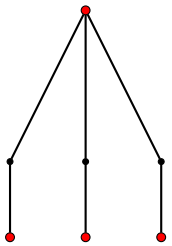


Figure 1.1.13 : Une étoile subdivisée.

1.1.11 Invariants de graphes

Stable

Définition 1.1.26 *Etant donné un graphe simple G, on appelle stable de G un ensemble de sommets de G deux a deux non adjacents.*

Un stable maximum de G est un stable de cardinalité maximale est appelée nombre de stabilité, et notée $\alpha(G)$.

Transversal

Définition 1.1.27 *Un transversal d'un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble T de sommets de V qui couvre toutes les arêtes de G. Notons qu'un transversal existe pour tout graphe et si T est un transversal alors $V - T$ est un stable.Un transversal minimum est un transversal qui a le plus petit nombre possible de sommets. la cardinalité d'un transversal minimum est appelée nombre transversal, notée $\tau(G)$.*

Couplage

Définition 1.1.28 *Etant donné un graphe $G(V, E)$, on appelle un couplage M dans G un sous – ensemble d'arêtes de E deux a deux non adjacentes. Un couplage maximum est un couplage de taille maximale. On désigne par $\alpha_0(G)$ la taille d'un couplage maximum dans G.*

Un sommet x de G est dit saturé par le couplage M, s'il existe une arête de M incidente à x. Un couplage qui sature tout les sommets de G est appelé un couplage parfait dans G, sinon, x est dit insaturé par M .

Recouvrement

Définition 1.1.29 *Etant donné un graphe simple $G\ (V, E)$ sans sommet isolé. On appelle recouvrement de G un ensemble R d'arêtes de E qui couvre tout les sommets de G.*

Un recouvrement minimum est un recouvrement de cardinalité minimum. On désigne par $\upsilon(G)$ la taille minimum d'un recouvrement de G.

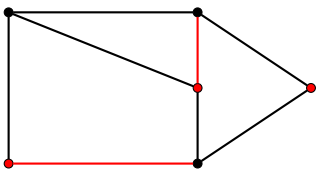


Figure 1.1.14 : Un graphe G.

Pour le graphe G illustré dans la figure 1.1.14 , l'ensemble des sommets en rouge représente un stable S de cardinalité maximum, l'ensemble des sommets noirs représente un transversal T de cardinalité minimum. L'ensemble des arêtes en rouge représente un recouvrement de cardinalité minimum $\upsilon(G)$. D'oú $\alpha(G) = \tau(G) = 3$, $\omega(G) = 3$, $\upsilon(G) = 2$.

1.1.12 Concept de minimalité, maximalité, minimum et maximum

Définition 1.1.30 *Un sous ensemble A de V est dit minimal (respectivement maximal) par rapport à une propriété P s'il n'existe pas un sous ensemble $B \subset A$ (resp $A \subset B$) tel que $G[B]$vérifie la propriété P.*

Définition 1.1.31 *On dit qu'un sous-ensemble A de V est minimum ou de taille minimale (respectivement maximum ou de taille maximale) par rapport à une propriété P, s'il n'existe pas d'ensemble $B \subseteq V$ tel que $G[B]$vérifie la propriété P et $|B| < |A|$ (resp $|B| > |A|$).*

1.1.13 Produit cartésien

Définition 1.1.32 *Soit $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$ deux graphes. Le produit cartésien ou la somme cartésienne de G et H, notée par $G\square H$, est le graphe défini par :*

- $V(G\square H) = \{(u, v) : u \in V(G)$ *et* $v \in V(H)\}$.
- $E(G\square H) = (u_1; v_1)(u_2; v_2) : (u_1 = u_2$ *et* $v_1v_2 \in E(H))$*ou* $(v_1 = v_2$ *et* $u_1u_2 \in E(G)\}$.

Exemple 1.1.2 *Une grille $G_{m\times n}$ est le produit cartésien de deux chaînes P_m et P_n.*

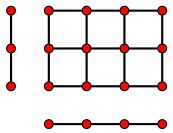


Figure 1.1.15 : Une grille $G_{4\times 3}$.

Exemple 1.1.3 *Un tore $T_{m\times n}$ est le produit cartésien de deux cycles C_m et C_n.*

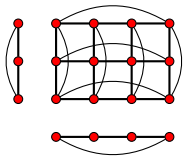


Figure 1.1.16 : Un tore $T_{4\times 3}$.

Exemple 1.1.4 *Un cylindre $C_{y_{n\times m}}$ est le produit cartésien d'une chaine P_m et un cycle C_n.*

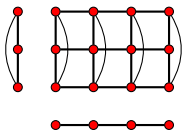


Figure 1.1.17 : Un cylindre $C_{y4\times 3}$.

1.2 La coloration dans les graphes

1.2.1 Coloration des sommets

Définition 1.2.1 *On appelle coloration des sommets d'un graphe, toute attribution d'une couleur a chaque sommet (est une fonction* $c : V \to \{1, 2, 3, .., k\}(k \in N)$*).*

Une coloration est propre si chaque deux sommets voisins portent des couleurs différentes($c\ (v) \neq c\ (w), \forall v, w \in V$ *adjacents).*

G *est* $k-$*colorable si on peut colorer ses sommets avec* k *couleurs distinctes, sans que deux sommets voisins aient la même couleur.*

Etant donné un graphe $G = (V, E)$*. Une coloration triviale de* G *consiste à attribuer à chacun de ses sommets une couleur différente. Ainsi, tout graphe à* n *sommets admet une* $n-$*coloration. Donc il est naturel de se demander quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer* G*. D'où la définition du nombre chromatique de* G*.*

1.2.2 Le nombre chromatique

Définition 1.2.2 *Le nombre chromatique d'un graphe* G*, noté* $\chi(G)$ *est le plus petit nombre de couleurs nécessaires à une coloration propre des sommets de* G*.*

On le définit comme étant le plus petit entier k *tel que* G *admet une* $k-$*coloration, il est dit aussi que* G *est* $\chi(G)-$*chromatique*

Définition 1.2.3 *Une classe de couleur* i *est un ensemble stable de sommets de* V *colorés avec la même couleur* i*.*

Exemple 1.2.1 *:* $G = P_3$ *est* $2-$ *colorable,* $\chi(G) = 2$*.*

Remarque 1.2.1 *: Soit* G *un graphe d'ordre* n*. Il est clair que :* $1 \leq \chi(G) \leq n$ *.*

- $\chi(G) = 1$ *si et seulement si* G *est un graphe discret.*
- $\chi(G) = n$ *si et seulement si* G *est un graphe complet.*

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 \text{ si } n \text{ est pair.} \\ 3 \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

1.2.3 Bornes sur le nombre chromatique :

Proposition 1.2.1 *[5] Si H est un sous-graphe de G,*

$$\chi(H) \leq \chi(G).$$

Proposition 1.2.2 *[11] Pour tout graphe G,*

$$\chi(G) \geq \omega(G).$$

où $\omega(G)$ est la taille d'une clique maximum de G.

Proposition 1.2.3 *[14] Pour tout graphe G d'ordre n,*

$$\left\lceil \frac{n}{\alpha(G)} \right\rceil \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

oú $\alpha(G)$ est le nombre de stabilité de G, et $\Delta(G)$est le degré maximum de G.

Proposition 1.2.4 *[2] Soit $G = (V, E)$un graphe simple d'ordre n,*

$$\chi(G) + \alpha(G) \leq n + 1.$$

Théorème 1.2.1 *[12] Soit G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire,*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1.$$

1.2.4 i-packing

Définition 1.2.4 *Un sous ensemble de sommets V_i d'un graphe $G = (V, E)$ est dit $i-$packing si et seulement si la distance entre deux sommets quelconques de V_i est supérieure à i.*

Chapitre 2

Quelques résultats obtenus sur le nombre de la coloration packing

Dans ce chapitre, nous exposons la coloration packing de certains graphes et nous citons les valeurs exactes du nombre chromatique de la coloration packing des graphes simples, à savoir : les chaines, les cycles, les arbres, le graphe Moulin , la couronne d'un graphe et graphe splitting et graphe subdivisé super fini.

2.1 Motivation et définition du problème de la coloration packing

Le problème de la coloration packing a été posé suite à l'établissement de nombreux régles et réglements par la Commission des Communications des Etats-Unis concernant l'attribution des fréquences de radio-diffusion à des stations de radio. En particulier, deux stations de radio qui sont affectées de la même fréquence de diffusion doivent être localisées suffisamment loin l'une de l'autre pour que la diffusion de l'une n'altére pas la réception de l'autre. La distance géographique entre deux stations qui sont affectées de la même fréquence est donc directement liée à la puissance de leurs signaux de radio-diffusion.

Définition 2.1.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $k \in \mathbb{N}^{\star}$. La fonction $f : V \to \{1, ..., k\}$ est appelée coloration packing d'ordre k si l'égalité $f\ (u) = f\ (v)$ implique $d\ (u, v) > f\ (u)$.*

L'ordre minimum d'une coloration packing de G est appelé le nombre packing chromatique, et il est noté par $\chi_p(G)$. La coloration packing est donc une partition $P_\pi = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ de V en k $(1 \leq i \leq k)$ $i-$packing. Notons que toute coloration packing est une coloration propre et donc $\chi(G) \leq \chi_{_p}(G)$.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les graphes sont simples.

2.1.1 Coloration packing de certains graphes particuliers

Tout graphe G d'ordre n admet une coloration packing d'ordre n. Il est possible d'affecter n entiers distincts, entre 1 et n, à chaque sommet de V. Ainsi, une borne supérieure naturelle serait l'ordre du graphe qui n'est pas forcément la meilleure.

Proposition 2.1.1 *[5] Pour $2 \leq n \leq 3$, $\chi_{_p}(P_n) = 2$, et pour $n \geq 4, \chi_{_p}(P_n) = 3$.*

l'affectation des couleurs $1, 2, 1, 3, ...$ aux sommets $u_1, u_2, ..., u_n$ de P_n représente une coloration packing minimum.

Proposition 2.1.2 *[5] Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_{_p}(C_n) = \begin{cases} 3 & si\ n \equiv 0\,[4]\ ou\ n = 3. \\ 4 & sinon. \end{cases}$$

La coloration packing optimale est donnée par l'affectation aux sommets $v_1, ..., v_n$ de C_n les séquences des couleurs :

$$\begin{aligned} 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3 \quad si\ n &= 4r. \\ 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,4 \quad si\ n &= 4r+1. \\ 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,1,4 \quad si\ n &= 4r+2. \\ 1,2,1,3,1,2,1,3,...,1,2,1,3,1,2,4 \quad si\ n &= 4r+3. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.3 *[5] Soit G un graphe complet, $\chi_{_p}\ (K_n) = n$.*

Proposition 2.1.4 *[5] Pour tout graphe G, $\chi_{_p}(G) \leq \tau(G) + 1$, avec égalité si G a le diamètre deux.*

Proposition 2.1.5 *[5] Si G est un graphe biparti de diamètre 3, alors :*

$$\tau(G) \leq \chi_{_p}(G) \leq \tau(G) + 1.$$

Proposition 2.1.6 *[5] Pour tout graphe G,*

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \chi_{_p}(G).$$

Où $\omega(G)$ est la taille maximun d'une clique.

Proposition 2.1.7 *[5] Soit G un graphe , si $\chi(G) = \chi_p(G)$, alors : $\omega(G) \geq \chi(G) - 2$.*

Proposition 2.1.8 *[5] Pour tout graphe connexe G, $\chi_p(G) = 2$ si et seulement si G est une étoile.*

Proposition 2.1.9 *[1] Pour tout $n \geq 3$,*

$$\chi_p(S(K_n)) = n + 1.$$

Proposition 2.1.10 *[1] Pour tout graphe connexe G avec au moins trois sommets,*

$$\omega(G) + 1 \leq \chi_p(S(G)) \leq \chi_{_p}(G) + 1.$$

Où $S(G)$ est le graphe obtenu en subdivisant toutes les arêtes de G.

Lemme 2.1.1 *[5] Pour tout sous graphe H d'un graphe G,*

$$\chi_{_p}(H) \leq \chi_{_p}(G).$$

2.1.2 Graphes avec petit nombre de la coloration packing

En utilisant le fait qu'un graphe G tel que $\chi_p(G) = 2$ ne contient pas P_4 comme sous-graphe induit et vérifie $diam(G) \leq 2$, alors d'aprés la proposition (**2.1.4**), on a forcément $\tau(G) = 1$ c.à.d que G est une étoile. D'où la caractérisation des graphes de nombre packing chromatique égal à 2.

Proposition 2.1.11 *[4] Soit G un graphe $2-$connexe. Alors $\chi_p(G) = 3$ si et seulement si $G = S(H)$ où H est un multi-graphe biparti ou G est le joint de K_2 et d'un stable. Pour un sommet v, on définit un $T-$ajout de v comme étant l'opération qui consiste à ajouter un sommet w_v, un stable X_v, l'arête vw_v et quelques arêtes entre $\{v, w_v\}$ et X_v. Voir la figure 2.1.1 .*

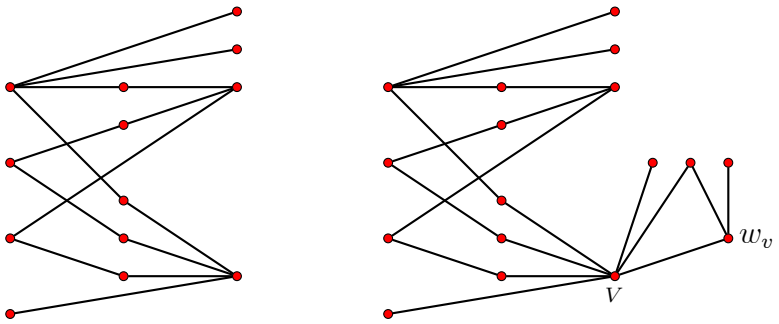


Figure 2.1.1 : Un graphe G est un T-ajout du sommet v.

Proposition 2.1.12 *[4] Soit G un graphe. $\chi_p(G) = 3$ si et seulement si G peut être formé en prenant un certain multigraphe biparti H avec bipartition (V_2, V_3), en subdivisant chaque arête exactement une fois, en ajoutant des feuilles à certains sommets dans $V_2 \cup V_3$, puis en effectuant un seul T-ajout à certains sommets de V_3.*

2.1.3 Coloration packing pour les arbres

Nous nous intéressons aux arbres avec un nombre de coloration packing très grand. Pour cela, il est nécessaire d'examiner les petits cas. Un arbre de diamètre 2 (étoile) a un nombre chromatique packing égal à 2. Un arbre de diamètre 3 a un nombre chromatique packing 3. Le cas d'un arbre de diamètre 4 est plus compliqué, mais **Goddard et al** [5] ont pu donner une formule explicite basée sur le sommet central et leurs voisins de degré 1, 2 et 3 et de degré supérieur ou égal à 4. Pour cela on définit un sommet petit s'il est de degré inférieur ou égal à 3 et un sommet grand s'il est de degré supérieur ou égal à 4.

Soit T un arbre de diamètre 4 avec un sommet central v. Pour $i = 1, 2, 3$, soit n_i le nombre de voisins de v de degré i et soit L le nombre de grands voisins de v, alors nous avons la proposition suivante :

Proposition 2.1.13 *[5] Soit T un arbre de diamètre 4. Si $L = 0$, alors :*

$$\chi_p(T) = \begin{cases} 4 & si \quad n_3 \geq 2 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 3, \\ 3 & sinon. \end{cases}$$

et si $L > 0$, alors :

$$\chi_p(T) = \begin{cases} L+3 & si \quad n_3 \geq 1 \quad et \quad n_1 + n_2 + n_3 \geq 2, \\ L+1 & si \quad n_1 = n_2 = n_3 = 0, \\ L+2 & sinon. \end{cases}$$

Proposition 2.1.14 *[5] L'ordre minimum d'un arbre avec $\chi_p(T) = 2$ est 2. Pour $\chi_p(T) = 3$ c'est 4 et pour $\chi_p(T) = 4$ c'est 8. En outre, P_4 est l'arbre unique de 4 sommets qui ont besoin de 3 couleurs. Les deux arbres de 8 sommets qui ont besoin de 4 couleurs sont :*

(*i*) *l'arbre de diamètre 4 avec $n_3 = 2$, $n_1 = 1$ et $L = n_2 = 0$, appelé A_8.*

(*ii*) *l'arbre de diamètre 5 où les deux sommets centraux ont le degré 3 et pour chaque sommet central 3 sommets voisins de degrés 1, 2 et 3 respectivement, appelé B_8.*



A_8 $\qquad$ B_8

Figure 2.1.2 : Les plus petits arbres avec $\chi_{_p(T)} = 4$.

Proposition 2.1.15 *[5] Soit T un arbre différent de P_4. Supposons T contient une chaîne $\{t\ u\ v\ w\}$ où t est de degré 1. u et v ont le degré 2. Alors : $\chi_p(T) = \chi_p(T - t)$.*

Théorème 2.1.1 *[5] Pour tout arbre T d'ordre n ,*

$$\chi_p(T) \leq (n+7)/4$$

excepter quand $n = 4$ ou 8, et cette borne est atteinte.

2.1.4 Coloration packing du graphe Moulin

Nous définissons maintenant, un nouveau graphe noté le graphe **Moulin**.

Définition 2.1.2 *Le **graphe Moulin** C_n^m est une famille des graphes qui consistent de m copies d 'un cycle C_n avec un sommet commun.*

Proposition 2.1.16 *[9] Pour tout $m \geq 1$, $\chi_p(C_3^m) = m + 2$.*

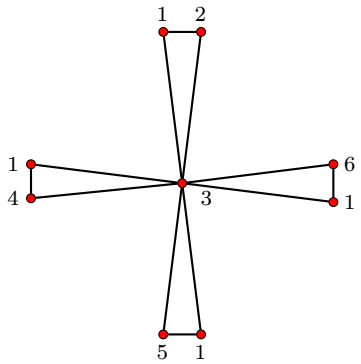


Figure 2.1.3 : Coloration packing d'un C_3^4.

Théorème 2.1.2 *[16] Pour tout $n \neq 3$,* $\chi_p(C_n^m) = \begin{cases} 3 \text{ si } n \cong 0\,[4]\,. \\ 4 \text{ sinon.} \end{cases}$

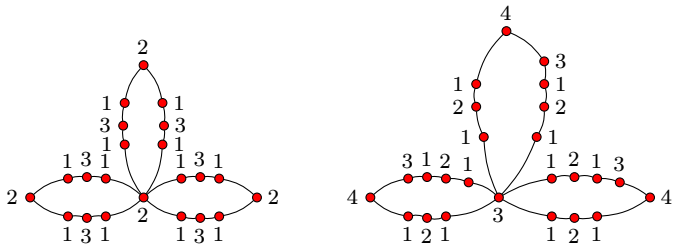


Figure 2.1.4 : Coloration packing d'un C_8^3 et C_9^3.

2.2 Coloration packing de la couronne d'un graphe

Dans cette section, nous exposons des valeurs exactes du nombre chromatique packing des couronnes des chaînes et des cycles, déterminées par [7]. Des valeurs exactes, et des bornes

sur les différentes classes de chenilles sont énoncées. On définit la couronne d'un graphe G, notée $Cr(G)$, est le graphe obtenu à partir d'une copie de G dans laquelle on attache un sommet pendant à chaque sommet de G.

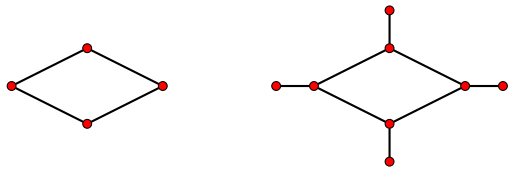


Figure 2.2.1 : Un graphe C_4 et sa couronne.

2.2.1 La couronne d'une chaine

Soit $P_n = \{x_1, ..., x_n\}$ une chaine de longueur n et $Cr(P_n)$ la couronne de P_n. Notons par $y_1, ..., y_n$ les sommets pendants adjacents aux sommets $x_1, ..., x_n$ respectivement.



Figure 2.2.2 : La couronne de P_n.

Proposition 2.2.1 *[7] Pour tout entier n, $n \geq 10$,*

(1) *Pour $n = 2, \chi_p(Cr(P_n)) = 3$.*

(2) *Pour $n \in \{3, ..., 9\}, \chi_p(Cr(P_n)) = 4$.*

(3) *Pour $n \geq 10, \chi_p(Cr(P_n)) = 5$.*

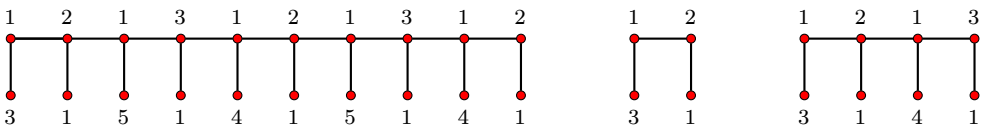


Figure 2.2.3 : Coloration packing de $\mathrm{Cr}(\mathrm{P}_{10}), Cr(P_2), Cr(P_4)$.

2.2.2 La couronne d'un cycle

Soit $Cr(C_n)$ la couronne d'un cycle $C_n = \{x_1, ..., x_n\}$ de longueur n. Notons par $y_1, ..., y_n$ les sommets pendants adjacents aux sommets de C_n.

Pour la couronne du cycle, il y'a un résultat identique à celui de la couronne d'une chaîne. Pour les autres valeurs de n, le résultat est donné par la proposition suivante :

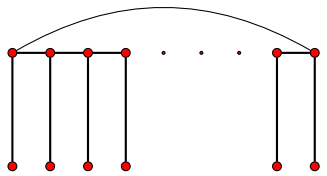


Figure 2.2.4 : La couronne d'un C_n.

Proposition 2.2.2 *[7] Pour tout entier n,*

$$\chi_p\left(Cr\left(C_n\right)\right) = \begin{cases} 4 & si \quad n \in \{3,\ 4\}, \\ 5 & sinon \end{cases}$$

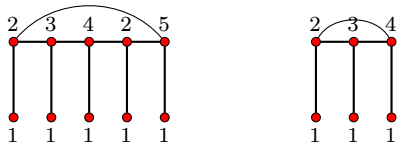


Figure 2.2.5 : Coloration packing d'un $Cr(C_5)$ et $Cr(C_3)$.

2.3 Détermination du nombre de la coloration packing du graphe splitting

Définition 2.3.1 *[15] Pour un graphe G, le graphe splitting d'un graphe G, noté par $S'(G)$, est obtenu en ajoutant un nouveau sommet v' correspondant à chaque sommet v de G, tel que le nombre de voisinage ouvert de v dans G est égal au nombre de voisinage ouvert de v' dans $s'(G)$.*

2.3.1 La coloration packing de graphe splitting pour les chaines

Proposition 2.3.1 *[9] Pour tout n,* $\chi_p(S^{'}(P_n)) \leq 7$.

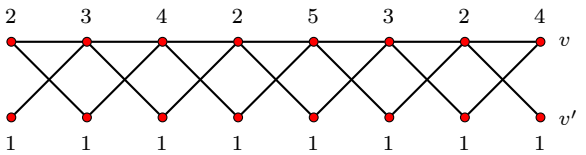


Figure 2.3.1 : la coloration packing de $\mathrm{S}'(P_8)$.

2.3.2 La coloration packing du graphe splitting pour les cycles

Proposition 2.3.2 *[9] Pour* $n \leq 19$, $\chi_p(S^{'}(C_n)) \leq 8$, *et pour* $n \geq 20$, *si* $n \equiv 0[4]$, *alors* $\chi_p(S^{'}(C_n)) = 7$.

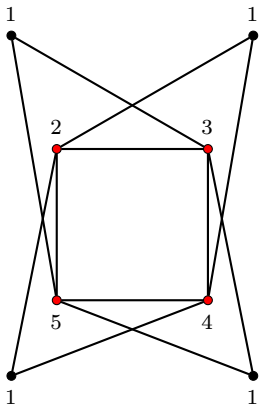


Figure 2.3.2 : la coloration packing de $\mathrm{S}'(C_4)$.

2.3.3 La coloration packing du graphe splitting de l'étoile

Proposition 2.3.3 *[16] Soit* $K_{1,n}$, $n \geq 2$ *une étoile avec n sommets. Alors* $\chi_p(S^{'}(K_{1,n})) = 3$.

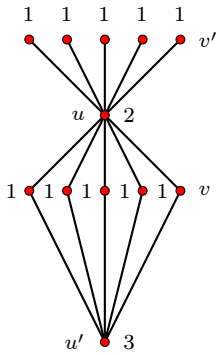


Figure 2.3.3 : la coloration packing de S$'(K_{1,5}$).

2.3.4 La coloration packing du graphe splitting de l'étoile double

Théorème 2.3.1 *[9] Pour le graphe* $S^{'}(S_{p,q})$, $\chi_p(S^{'}(S_{p,q})) = 4$.

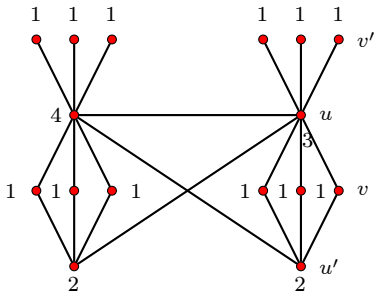


Figure 2.3.4 : la coloration packing de S$'(S_{3,3}$).

2.3.5 La coloration packing du graphe splitting pour les graphes complets

Proposition 2.3.4 *[10] Pour* K_n, $\chi_p(S^{'}(K_n)) = n + 1$.

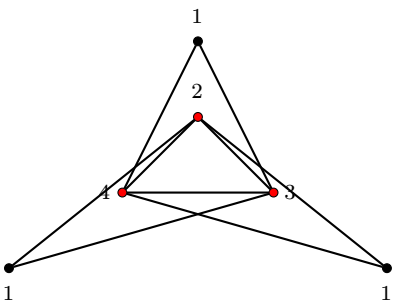


Figure 2.3.5 : la coloration packing de S$'(K_3)$.

2.4 Détermination du nombre de la coloration packing du graphe subdivisés super finis

Définition 2.4.1 *[17] Soit G un graphe à n sommets et t arêtes. Le graphe obtenu en remplaçant chaque arête de G par un graphe biparti complet $K_{2,m}$ (m est fini) est appelé graphe de subdivision super fini de G, noté $FSSD_m(G)$.*

Remarque 2.4.1 *Pour $m = 1$, le graphe $FSSD_m(G)$ est également le graphe $S(G)$.*

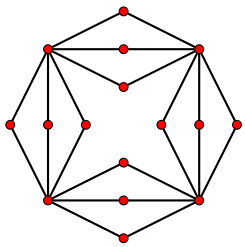


Figure 2.4.1 : $\mathrm{FSSD}_3(C_4)$.

2.4.1 La coloration packing pour un graphe de subdivision super fini d'un arbre

Théorème 2.4.1 *[17] Soit $K_{1,n}$ une étoile à $n+1$ sommets. Alors :*

$$\chi_{_p}(FSSD_m(k_{1,\,n})) = 3.$$

Exemple 2.4.1 *La figure suivante représente la coloration packing de $FSSD_2(k_{1,\,3})$.*

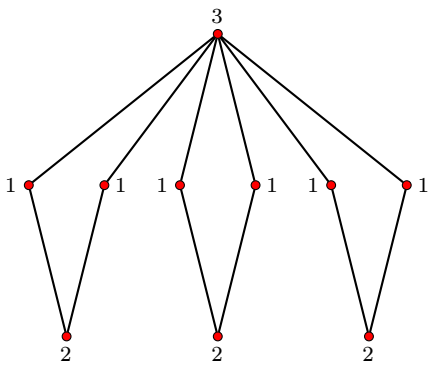


Figure 2.4.2 : $\chi_{_{p(FSSD_2(k_{1,3}))}} = 3$.

Théorème 2.4.2 *[8] Pour tout arbre T d'ordre n,*

$$\chi_p(FSSD_m(T)) = 3.$$

Exemple 2.4.2 *La figure suivante représente un arbre T et la coloration packing de $FSSD_2(T)$.*

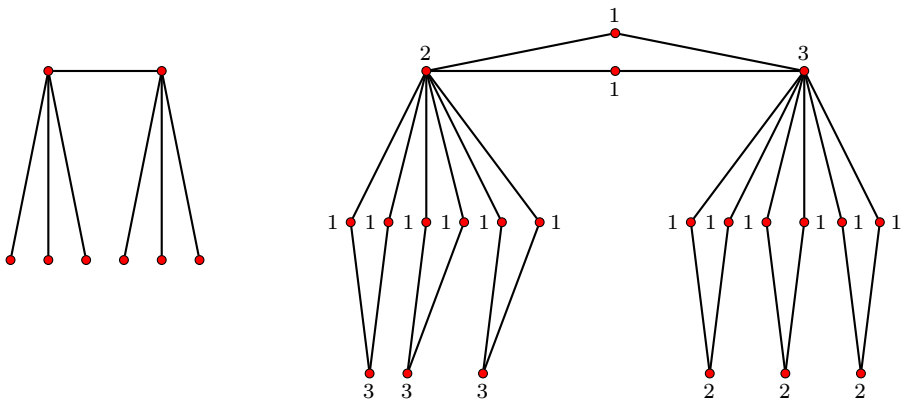


Figure 2.4.3 : $\chi_{p(FSSD_2(T))} = 3$.

2.4.2 La coloration packing pour le graphe subdivisé super fini d'un graphe complet

Proposition 2.4.1 *[8] Pour tout $n \geq 3$, $m \geq 1$,*

$$\chi_p(FSSD_m(K_n)) = n + 1.$$

Exemple 2.4.3 *La figure suivante, représente la coloration packing de $FSSD_2(K_3)$.*

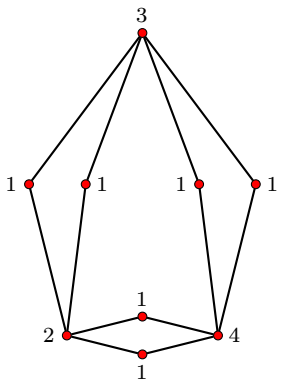


Figure 2.4.4 : $\chi_{p(FSSD_2(K_3))} = 4$.

2.4.3 La coloration packing pour le graphe subdivisé super fini d'un cycle

Théorème 2.4.3 *[8] Pour $n \geq 3$, $m \geq 1$,*

$$\chi_p(FSSD_m(C_n)) = \begin{cases} 3 \text{ si } n \text{ est pair} \\ 4 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exemple 2.4.4 *La figure suivante représente la coloration packing des $FSSD_3(C_4)$ et $FSSD_2(C_3)$.*

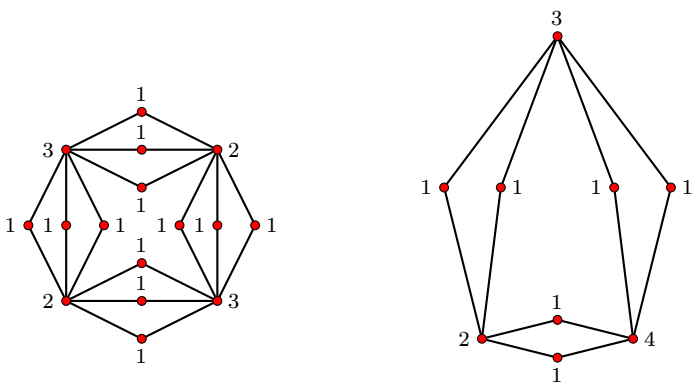


Figure 2.4.5 : $\chi_{p(FSSD_3(C_4))} = 3, \chi_{p(FSSD_2(C_3))} = 4$.

Chapitre 3

Détermination du nombre de la coloration packing de quelques types de graphes

Dans ce chapitre, nous donnons nos résultats sur la détermination du nombre de coloration packing de quelques types de graphes.

Définition 3.0.2 *(Hamada et Yoshimura)[6] Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe simple. Le graphe milieu de G, noté $M(G)$ est défini comme suit : l'ensemble des sommets de $M(G)$ est $V(G) \cup E(G)$, et deux sommets x, y de $M(G)$ sont adjacents si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

$-x, y \in E(G)$ et x est adjacent à y dans G.
$-x \in V(G), y \in E(G)$ et x est incident à y dans G.

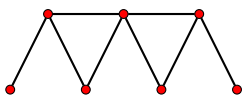


Figure 3.0.1 : Le graphe milieu d'une chaine d'ordre 4.

Définition 3.0.3 *Le graphe de Friendship noté F_n, est un graphe planaire avec $2n + 1$ sommet et $3n$ arêtes, peut être construit à partire de n copies de C_3 par indentification d'un sommet de chaque copie C_3.*

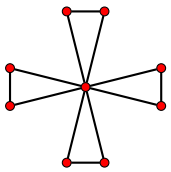


Figure 3.0.2 : F_4.

3.1 Coloration packing du graphe $\mathbf{k}_{1,n} \square \mathbf{k}_{1,n}$

Proposition 3.1.1 *Pour tout* $n \geq 2$,

$\chi_p(k_{1,n} \square k_{1,n}) \leq 2n + 1$.

Preuve. Pour montrer que $\chi_p(k_{1,n} \square k_{1,n}) \leq 2n + 1$, on utilise la coloration suivante :

on colore les n^2 sommets de degré 2 et le sommet de degré $2n$ dans $k_{1,n} \square k_{1,n}$ par 1, et puisque $d(u, v) = 2$ entre tous les sommets de degré $n + 1$, toute couleur superieur ou égale à 2 est utilisée une seule fois. Alors on colore les $2n$ sommets de degé $n + 1$ dans $k_{1,n} \square k_{1,n}$ par une couleur différente de l'ensemble $\{2, 3, 4, ..., 2n + 1\}$. D'où $\chi_p(k_{1,n} \square k_{1,n}) \leq 2n + 1$. ■

Exemple 3.1.1 *La figure suivante représente une coloration packing de* $k_{1,3} \square k_{1,3}$

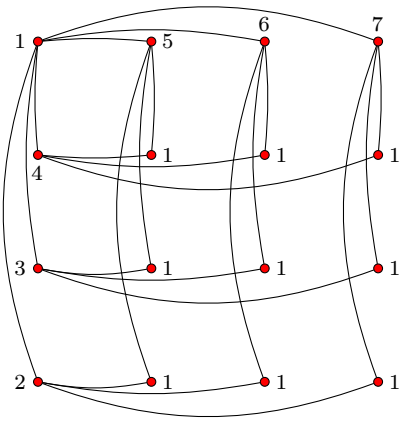


Figure 3.1.1 : $\chi_{p(K_{1,3} \square K_{1,3})} = 7$.

3.2 Coloration packing du graphe milieu d'une chaîne

Théorème 3.2.1 *Pour tout entier $n \geq 2$,*

$$\chi_p(M(P_n)) = \begin{cases} 2 \text{ si n} = 2 \\ 3 \text{ si n} = 3 \\ 4 \text{ si n} = 4, 5 \\ 5 \text{ si } 6 \leq \text{n} \leq 9 \\ 6 \text{ si } 10 \leq \text{n} \leq 23 \\ 7 \text{ si n} \geq 24 \end{cases}$$

Preuve. Premièrement, si $n = 2$ alors $M(P_2) \simeq P_3$. D'où $\chi_p(M(P_2)) = 2$.

Dans tous les cas suivants, les sommets de degré 1 et 2 sont colorés par la couleur 1 et les sommets de degré 3 et 4 sont colorés comme suit, en commençant par un sommet de degré 3 :

Pour $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, on utilise la coloration suivante :

-$n = 3$, utilisons les couleurs : 23.

-$n = 4$, utilisons les couleurs : 234.

-$n = 5$, utilisons les couleurs : 2342.

-$n = 6$, utilisons les couleurs : 23425.

-$n = 7$, utilisons les couleurs : 234253.

-$n = 8$, utilisons les couleurs : 2342532.

-$n = 9$, utilisons les couleurs : 23425324.

Pour $10 \leq n \leq 22$, on utilise la coloration suivante:

-n = 10, utilisons les couleurs : 234253246.

-n = 11, utilisons les couleurs : 2342532462.

-n = 12, utilisons les couleurs : 23425324623.

-n = 13, utilisons les couleurs : 234253246235.

-n = 14, utilisons les couleurs : 2342532462352.

-n = 15, utilisons les couleurs : 23425324623524.

-n = 16, utilisons les couleurs : 234253246235243.

-n = 17, utilisons les couleurs : 2342532462352432.

-n = 18, utilisons les couleurs : 23425324623524326.

-n = 19, utilisons les couleurs : 234253246235243265.

-n = 20, utilisons les couleurs : 2342532462352432652.

-n = 21, utilisons les couleurs : 23425324623524326523.

-n = 22, utilisons les couleurs : 234253246235243265234.

-n = 23, utilisons les couleurs : 2342532462352432652342.

Si $n \geq 24$, alors 6 couleurs ne sont pas suffisantes pour colorer le graphe $M(P_n)$. Dans ce cas on prend la figure 3.2.2 et par une simple viréfication, on vérifie que $\chi_p(M(P_{24})) = 7$.

D'aprés Lemme 2.1.1, $\chi_p(M(P_n)) \geq 7$. Maintenant, il nous reste qu'à démontrer que $\chi_p(M(P_n)) \leq 7$. Pour cela on utilise la coloration séquentielle suivante :

234253246235243265234273245236243257,.... D'où $\chi_p(M(P_n)) = 7$. ■

Exemple 3.2.1 *La figure suivante représente une coloration packing de* $M(P_{13})$ *et* $M(P_{24})$.

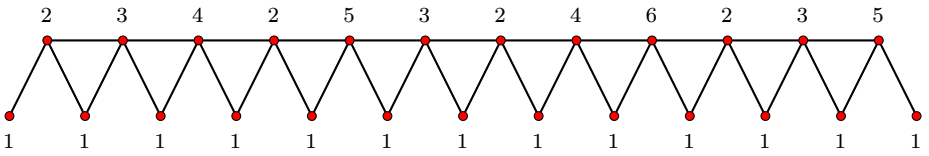


Figure 3.2.1 : $\chi_{p(M(P_{13}))} = 6$.

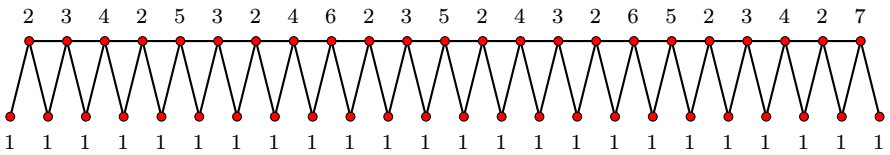


Figure 3.2.2 : $\chi_{p(M(P_{24}))} = 7$.

3.3 Coloration packing du graphe milieu d'un cycle

Conjecture 3.3.1 *Pour tout entier* $n \geq 3$,

$$\chi_p(M(C_n)) = \begin{cases} 4 \text{ si } n = 3 \\ 5 \text{ si } n = 4 \\ 6 \text{ si } n = 5, 6 \\ 7 \text{ si n} \geq 7 \end{cases}$$

Exemple 3.3.1 *La figure suivante représente la coloration packing de* $M(C_8)$ *et* $M(C_6)$.

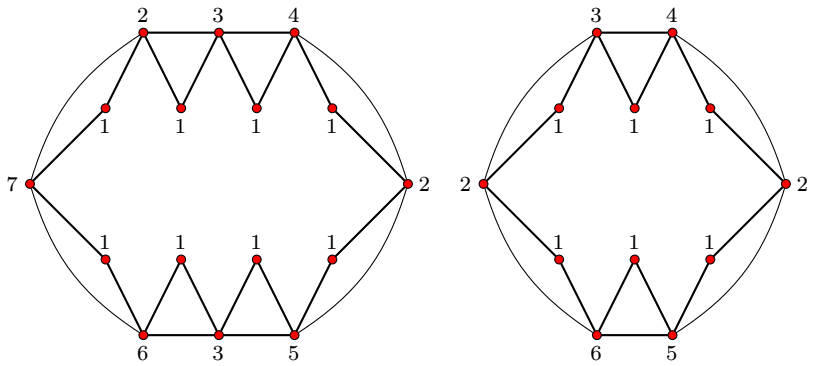


Figure 3.3.1 : $\chi_{p(M(C_8))} = 7, \chi_{p(M(C_6))} = 6$.

3.4 Coloration packing du graphe milieu d'une étoile

Proposition 3.4.1 *Pour tout* $n \geq 1$, $\chi_p(M(K_{1,n})) = n + 1$.

Preuve. On note par u la racine de $K_{1,n}$ et par $u_i; 1 \leq i \leq n$ les sommes pendants de $K_{1,n}$, et par $v_i; 1 \leq i \leq n$ les sommets de degré $n + 1$ dans $M(K_{1,n})$.

Soit $c : v \to \{1, 2, ...\}$ une coloration packing sur $M(K_{1,n})$. Alors $c(u) = 1$ et $c(u_i) = 1$,

$1 \leq i \leq n$. Puisque $d(v_i, v_j) = 1, i, j = 1, ...n, i \neq j$, toute couleur supérieure ou égale à 2 est utilisée une seule fois, donc $c(v_i) \in \{2, 3, ..., n + 1\}$. D'où $\chi_p(M(K_{1,n})) = n + 1$. ■

Exemple 3.4.1 *La figure suivante représente la coloration packing de* $M(K_{1,n})$.

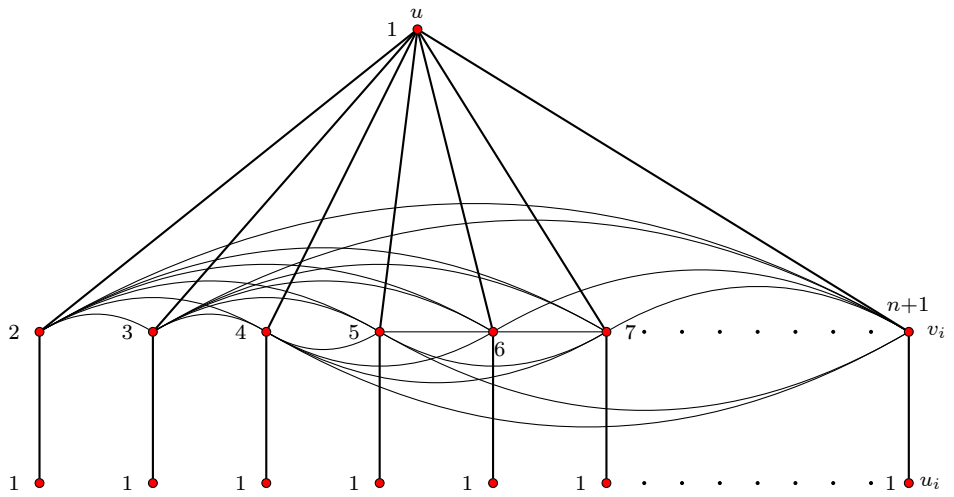


Figure 3.4.1 : $\chi_{p(M(K_{1,n}))} = n + 1$.

3.5 Coloration packing du graphe subdivisé super fini de graphe Friendship

Proposition 3.5.1 *Pour tout* $m \geq 2$, $n \geq 2$,

$$\chi_p(FSSD_m(F_n)) = 4.$$

Preuve. Le $FSSD_m(F_n)$ contient un sous graphe induit $FSSD_m(C_3)$. D'après le Théorème (2.4.3), $\chi_p(FSSD_m(C_3)) = 4$ et par Lemme (2.1.1), $\chi_p(FSSD_m(C_3)) \leq \chi_p(FSSD_m(F_n))$.

D'où $\chi_p(FSSD_m(F_n)) \geq 4$.

Maintenant, on montre que $\chi_p(FSSD_m(F_n)) \leq 4$.On utilise la coloration suivante :

on colore les $3mn$ sommets de degré 2 dans $FSSD_m(F_n)$ par 1, et on colore les $2n$ sommets de degré $2m$ dans $FSSD_m(F_n)$ par la séquence suivante $23, 23, ...23$, et on colore un sommet de degré $2mn$ dans $FSSD_m(F_n)$ par 4. Par conséquence, $\chi_p(FSSD_m(F_n)) \leq 4$. On conclut que : $\chi_p(FSSD_m(F_n)) = 4$. ■

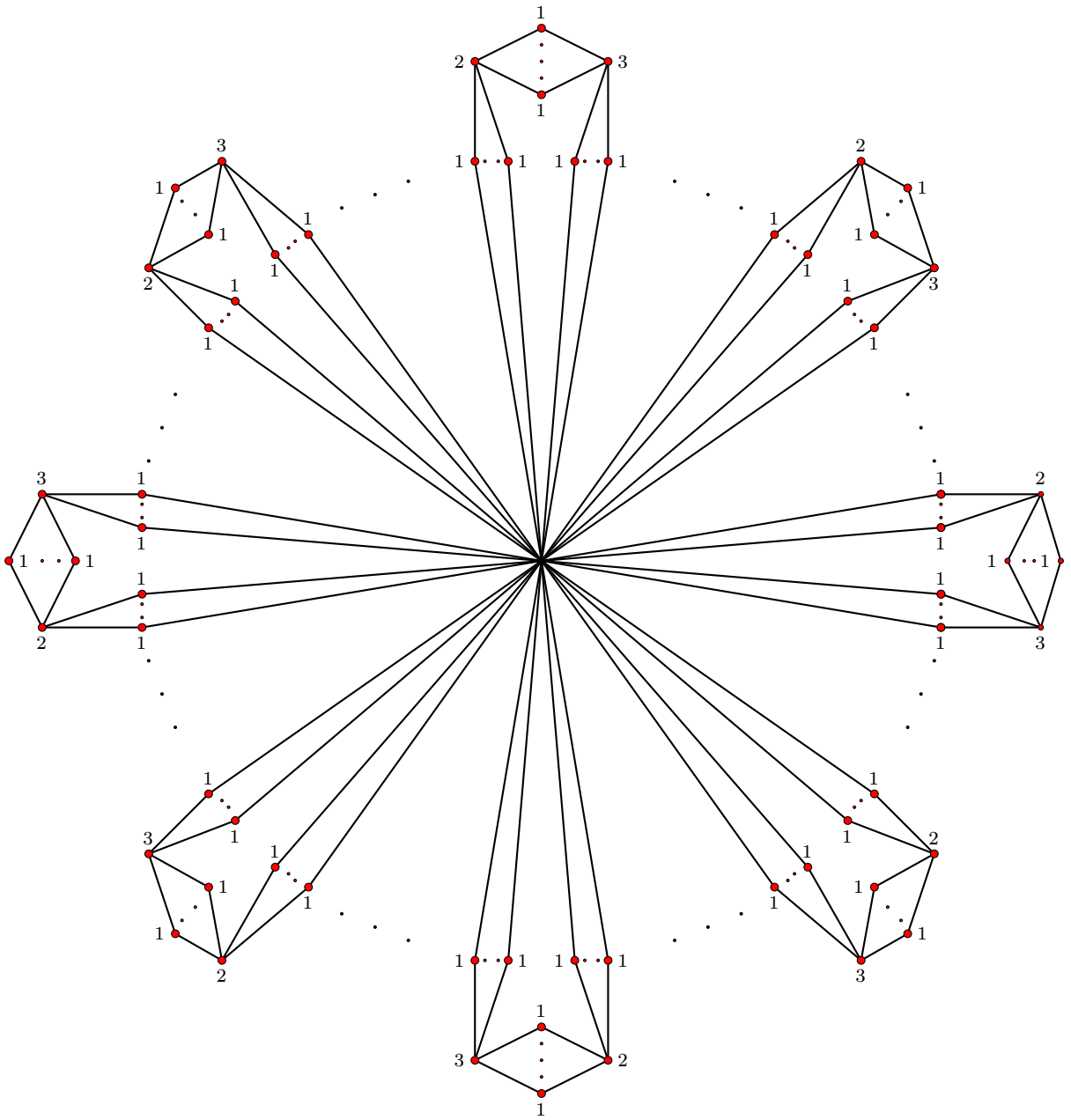


Figure 3.5.1 : $\chi_{p(FSSD_m(F_n))} = 4$. (le sommet noirs est coloré par 4).

3.6 Coloration packing du graphe subdivisé super fini d'un graphe $P_n \square P_k$

Théorème 3.6.1 *Pour tout* $m \geq 2, n \geq 2, k \geq 2,$ $\chi_p(FSSD_m(P_n \square P_k)) = 3.$

Preuve. Le $FSSD_m(P_n \square P_k)$ contient un sous graphe induit $FSSD_m(C_4)$. D'après le Théorème (2.4.3), $\chi_p(FSSD_m(C_4)) = 3$ et par Lemme (2.1.1), $\chi_p(FSSD_m(C_4)) \leq \chi_p(FSSD_m(P_n \square P_k))$. D'où $\chi_p(FSSD_m(P_n \square P_k)) \geq 3$.

Maintenant, on montre que $\chi_p(FSSD_m(P_n \square P_k)) \leq 3$. On utilise la coloration suivante : on colore les sommets de degré 2 dans $FSSD_m(P_n \square P_k)$ par 1, et on colore les sommets de degré supèrieure ou égal à 3 dans $FSSD_m(P_n \square P_k)$ par la séquence suivante :

$32, 32, \cdots, 32.$

$23, 23, \cdots, 23.$

. . . .

. . . .

. . . .

$32, 32, \cdots, 32.$

$23, 23, \cdots, 23.$

Par conséquence, $\chi_p(FSSD_m(P_n \square P_k)) \leq 3$.

On conclut que : $\chi_p(FSSD_m(P_n \square P_k)) = 3$. ■

Exemple 3.6.1 *La figure suivante représente une coloration packing de* $FSSD_3(P_3 \square P_3)$.

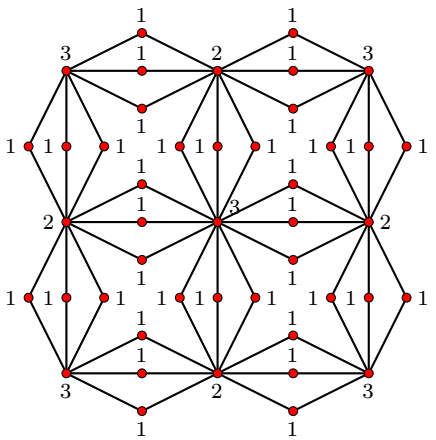


Figure 3.6.1 : $\chi_{p(FSSD_3(P_3 \square P_3))} = 3$.

3.7 Coloration packing du graphe subdivisé super fini d'un graphe $P_n \times P_k$

Théorème 3.7.1 *Pour tout $m \geq 2$, $n \geq 2$, $k \geq 2$,*

$$\chi_p(FSSD_m(P_n \times P_k)) = 3.$$

Preuve. Le $FSSD_m(P_n \times P_k)$ contient un sous graphe induit C_4 avec $\chi_p(C_4)) = 3$ et par Lemme 2.1.1, $\chi_p(FSSD_m(P_n \times P_k)) \geq \chi_p(C_4) = 3$. Maintenant, on montre que $\chi_p(FSSD_m(P_n \times P_k)) \leq 3$.

Le graphe $P_n \times P_k$ contient 2 composantes connexes.

Pour chaque composante connexe, les m sommets de chaque sous graphe $k_{2,m}$ remplaçant les arêtes de $P_n \times P_k$ sont colorés par 1.

Les sommets de degré $4m$ sont colorés par les couleurs 2 ou 3 de telle sorte que deux sommets colorés 2 ou 3 sont à distance au moins 4.

Les sommets de degré m et $2m$ sont colorés par 2 ou 3 de telle sorte qu'un sommet coloré 2 soit à distance 2 à un sommet de degré $4m$ coloré par 3 et le contraire. D'où $\chi_p(FSSD_m(P_n \times P_k)) \leq 3$. Par conséquence $\chi_p(FSSD_m(P_n \times P_k)) = 3$. ■

Exemple 3.7.1 *La figure suivante représente une coloration packing de $FSSD_2(P_3 \times P_3)$.*

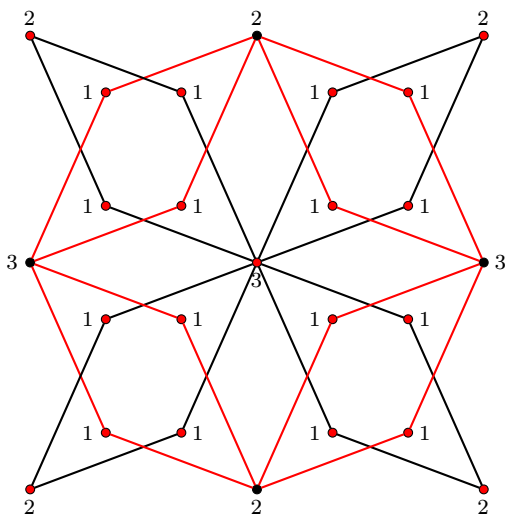


Figure 3.7.1 : $\chi_{p(FSSD_2(P_3 \times P_3))} = 3$.

3.8 Coloration packing du graphe subdivisé super fini d'un graphe $P_2 \boxtimes P_n$

Proposition 3.8.1 *Pour tout* $n \geq 2$,$m \geq 2$,

$$\chi_p(FSSD_m(P_2 \boxtimes P_n)) = \begin{cases} 5 \text{ si n} = 2,3 \\ 7 \text{ si n } \geq 4 \end{cases}$$

Preuve. Premièrement pour $n = 2$,3, les sommets de chaque $K_{2,m}$ remplaçant chaque arête de $P_2 \boxtimes P_n$ sont colorés par 1. Pour $n = 2$, les sommets de dégré $3m$ sont colorés par l'une des couleurs de $\{2, 3, 4, 5\}$. Pour $n = 3$, les sommets de degré $3m$ sont colorés par les couleurs 2 ou 3 de telle sorte que la distance entre deux sommets colorés 2 ou 3 soit strictement supèrieure à 2 ou 3 respectivement. Deuxièment pour $n \geq 4$, le $FSSD_m(P_2 \boxtimes P_n)$ contient un sous graphe induit $FSSD_m(P_2 \boxtimes P_4)$ avec $\chi_p(FSSD_m(P_2 \boxtimes P_4)) = 7$ et par Lemme 2.1.1, $\chi_p(FSSD_m(P_2 \boxtimes P_4)) \leq \chi_p(FSSD_m(P_2 \boxtimes P_n))$. D'où $\chi_p(FSSD_m(P_2 \boxtimes P_n)) \geq 7$.

On montre que $\chi_p(FSSD_m(P_2 \boxtimes P_n)) \leq 7$. On utilise la coloration suivante :

On colore les sommets de chaque $K_{2,m}$ dans $FSSD_m(P_2 \boxtimes P_n)$ par 1, et on colore les sommets de degré $3m$ et $5m$ par la séquence suivante :

$2426, 2426, ..., 2426$

$3537, 3537, ..., 3537$

Par conséquence, $\chi_p(FSSD_m(P_2 \boxtimes P_n)) \leq 7$. On conclut que : $\chi_p(FSSD_m(P_2 \boxtimes P_n)) = 7$.

■

Exemple 3.8.1 *La figure suivante donne une coloration packing de* $FSSD_2(P_2 \boxtimes P_4)$

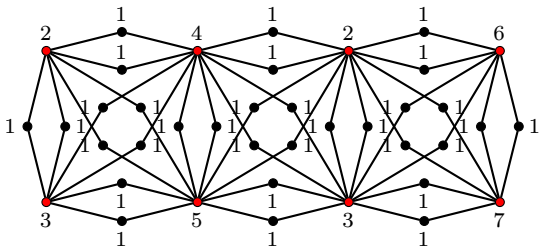


Figure 3.8.1 : $\chi_{p(FSSD_2(P_2 \boxtimes P_4))} = 7$.

3.9 Coloration packing du graphe de subdivisé super fini de splitting d'un $P_2 \times P_n$

Proposition 3.9.1 *Pour tout* $n \geq 2$,

$\chi_p(FSSD_m(S'(P_2 \times P_n))) = 3$.

Preuve. Le graphe $FSSD_m(S'(P_2 \times P_n))$ contient deux composantes connexe égales.

$FSSD_m(S'(P_2 \times P_n))$ contient un sous graphe induit C_4. D'où $\chi_p(FSSD_m(S'(P_2 \times P_n))) \geq 3$.

Pour montrer la borne supérieure, on utilise la coloraion suivante pour chaque composante connexe :

On colore les sommets de chaque $K_{2,m}$ dans $FSSD_m(S'(P_2 \times P_n))$ par 1, et on colore les sommets de degré m, $2m$ et $4m$ dans le $FSSD_m(S'(P_2 \times P_n))$ par 2 ou 3 de telle sorte que deux sommets colorés par 2 ou 3 ont la distance égale à 4. Par conséquence $\chi_p(FSSD_m(S'(P_2 \times P_n))) \leq 3$. On conclut que : $\chi_p(FSSD_m(S'(P_2 \times P_n))) = 3$. ■

Exemple 3.9.1 *La figure suivante donne une coloration packing de* $FSSD_2(S'(P_2 \times P_4))$

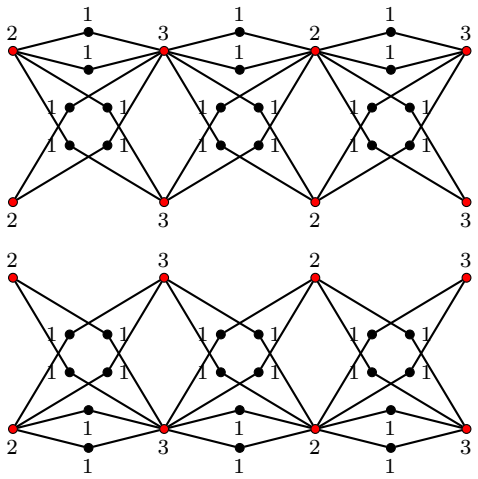


Figure 3.9.1 : $\chi_{_p}(FSSD_2(S'(P_2 \times P_4))) = 3$.

3.10 Coloration packing de splitting d'un graphe Friendship

Proposition 3.10.1 *Pour tout* $n \geq 1$,

$$\chi_p\ (S'(F_n)) = 2n + 2.$$

Preuve. Pour montrer que $\chi_p\ (S'(F_n)) = 2n + 2$, on utilise la coloration suivante :

On colore les $2n$ sommets de degré 2 et le sommet de degré $2n$ dans $S'(F_n)$ par 1, et puisque $d(u, v) \leq 2, \forall u, v \in V(S'(F_n))$, toute couleur superieur ou égal à 2 est utilisée une seule fois. Donc, on colore les $2n$ sommets de degré 3 et un sommet de degré $4n$ dans $S'(F_n)$ par l'une des couleurs de l'ensemble $\{2, 3, ..., 2n + 2\}$. D'où $\chi_p(S'(F_n)) = 2n + 2$. ■

Exemple 3.10.1 *La figure suivante donne une coloration packing de* $S'(F_3)$

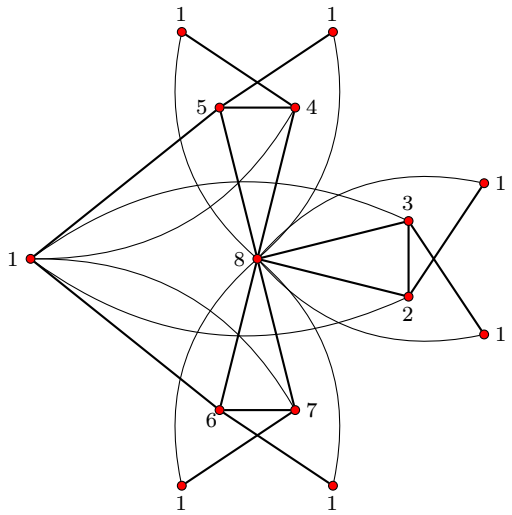


Figure 3.10.1 : $\chi_p(S'(F_3)) = 8$.

3.11 Coloration packing de splitting du graphe $P_2 \times P_n$

Proposition 3.11.1 *Pour tout* $n \geq 2$,

$$\chi_p(S'(P_2 \times P_n)) = \begin{cases} 3 \text{ si } n = 2 \\ 4 \text{ si } n = 3,4 \\ 5 \text{ si } 5 \leq n \leq 8 \\ 6 \text{ si } 9 \leq n \leq 22 \\ 7 \text{ si } n \geq 23 \end{cases}$$

Preuve. Le graphe $S'(P_2 \times P_n)$ est deux composantes connexes de $S'(P_n)$, par conséquence $\chi_p(S'(P_2 \times P_n)) = \chi_p(S'(P_n))$. Donc, il suffit de trouver une coloration packing de $S'(P_n)$. On note par u_i $(i = 1, 2, ..., n)$ les sommets de la chaîne P_n,et par v_i $(i = 1, 2, ..., n)$ les sommets corespondants aux sommets u_i $(i = 1, 2, ..., n)$. Donc, dans tous les cas, les sommets v_i $(i = 1, 2, ..., n)$ sont colorés par 1. Il ne reste qu'à colorer les sommets u_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Si $n = 2$, on utilise la coloration 23.

Si $n \in \{3, 4\}$, on utilise la coloration 234 et 2342.

Si $n \in \{5, 6, 7, 8\}$, on utilise suivant le nombre n, la coloration 23425324.

Si $9 \leq n \leq 22$,alors, on utilise suivant le nombre n, la coloration suivante : 2342532462352432652342.

Si $n \geq 23$, alors le graphe $S'(P_n)$ contient un sous graphe $S'(P_{23})$ (voir la figure 3.11.1).

D'où : $\chi_p(S'(P_n)) \geq 7$.

Pour montrer que : $\chi_p(S'(P_n)) \leq 7$,on utilise la coloration séquentielle suivante :

$2342532462352432652342, ...$

Par conséquence. $\chi_p(S'(P_n)) = 7$ et $\chi_p(S'(P_2 \times P_n)) = 7$. ■

Exemple 3.11.1 *La figure suivante donne une coloration packing de* $S'(P_{23})$

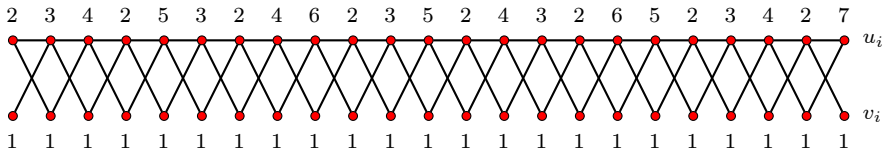


Figure 3.11.1 : $\chi_p(S'(P_{23})) = 7$.

Conclusion

Tout au long de ce travail, nous nous sommes intéréssés principalement à l'étude du problème de la coloration packing . Dans un premier temps, nous avons rappelé quelques résultats existant sur la coloration dans les graphes. Ensuite, nous avons abordé la notion du nombre de la coloration pakcing, qui a été introduite par **Goddard** et **al**.[5], et nous avons exposé des différents résultats obtenus, concernant la détermination du nombre de la coloration packing de plusieurs types de graphes par les chercheurs dans ce sens, notamment dans [1,2,8,9,10,11,12,15]. Nous avons déterminé aussi le nombre de la coloration packing de quelques types de graphes. On conclut que la détermination de ce nombre en général n'est pas facile pour certains types de graphes, et que les résultats obtenus en ce mémoire sont des bons résultats. Comme perspective à notre travail,

nous proposons de :

- Trouver d'autres bornes de $\chi_p(G)$.
- Déterminer le nombre de la coloration packing du graphe $FSSD_m(P_q \boxtimes P_n)$, $q \geq 3$.
- Déterminer le nombre de la coloration packing du graphe $M(C_n)$, $T(P_n)$ et $T(C_n)$.

Bibliographie

[1] B. Bresar, S. Klavsãr, D. F. Rall, On the packing chromatic number of cartesian products, Hexagonal lattice, and trees. Discrete Appl. Math., 155(17) : 2303- 2311; 2007.

[2] C. Berge. Graphes, North Holland, 1985.

[3] M. Behzad : A criterion for the planarity of the total graph of a graph. Proc. Camb.Philos. Soc. 63 : 679 − 681; 1967.

[4] W. Goddard, Sandra M. Hedetniemi, Stephen T. Hedetniemi. Broadcast Chromatic Numbers of Graphs, Ars Comb. 86, 2008.

[5] W. Goddard, S.M. Hedetniemi, J. M. Harris, D.F. Rall, Broadcast chromati numbers of graphs, Ars Combin., 86 : 33 49, 2008.

[6] T. Hamada, I. Yoshimura : Traversability and connectivity of the middle graph of a graph. Discrete Math.14 : 247 − 256; 1976.

[7] D. Laiche, Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de magister en recherche opérationnelle. Sur les nombres broadcast chromatiques, USTHB, Bab Ezzouar, (2010).

[8] R. Lemdani et A. Souadkia et F. Dahmani. Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de master en recherche opérationnelle. Opérations sur le nombre de la coloration broadcast de quelques types de graphe, Univ Dr. Yahya Farés de Médéa, juin 2016.

[9] R. Lemdani et A.Taibaoui et O. Mezioud . Mémoire Présenté pour l'obtention du diplome de master en recherche opérationnelle. Opérations sur le nombre de la coloration broadcast, Univ Dr. Yahya Farés de Médéa, juin 2015.

[10] R. Lemdani et M. Abbas. On the broadcast chromatic subdivision number in graphs. Soumi, 2016.

[11] D. Miller**.** Introduction à la théorie des graphes, www.apprendre-en-ligne.net/graphes, 2008.

[12] E. A. Nordhaus, J.W. Garddum. On complementary graphs. Ann. Monthly, 63:175 − 177, 1956.

[13] Christian Sloper. Broadcast-coloring of trees, Reports in informatics ISSN 0333-3590, 2002

[14] E. Sigward. Introduction à la théorie des graphes.

[15] S. K. Vaidya et P. L. Vihol, Discussion on Some Interesting Topics in GraphTheory, Ph.DThesis, Saurashtra University, Rajkot, April 2011.

[16] A. William, S. Roy**,** Paking chromatic number of certain graphs. Department of Mathematics, Loyola College, Chennai 600034, INDIA.

[17] A. William, S. Roy**,** Paking Chromatic Number of certain Trees and Cycle Related Graphs Chennai 600034, INDIA.