RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DR. YAHIA FARÈS DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Présenté par

Kermezli Maroua

Principe de la borne uniforme pour les relations linéaires sur les espaces asymétriques normés

Soutenue publiquement le 23 juin 2024 devant le jury composé de

Président :	Bagua Haoues	Université de Médéa
Examinateur :	Krimi Mohamed	Université de Médéa
Encadreur :	Bouadjila Khaled	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2023-2024

Table des matières

Remerciement 3

Dédicace 4

Résumé 5

Abstract 6

Notations 7

Introduction 8

1 Relations linéaires 9
1.1 Relations sur les ensembles 9
1.2 Relations linéaires 10
1.3 Algèbre des relations linéaires 12
1.4 Relations linéaires normés 12
1.4.1 Norme d'une relation linéaire 12
1.5 Relations linéaires continues 14

2 Espaces asymétriques normés 15
2.1 Topologie des espaces asymétriques normés 15
2.2 Opérateurs linéaires continus entre espaces asymétriques normés 17

3 Principe de la borne uniforme 19
3.1 Continuité des relations linéaires sur les espaces asymétriques normés . . 19
3.2 Théorème de Banach-Steinhaus 22

Conclusion générale 25

Bibliographie 26

Remerciement

La Lounange est à **ALLAH**, le seigneur des mondes. Et que la prière et le salut soient sur celui qu'ALLAH a envoyé en miséricorde pour l'univers, ainsi que sur famille, se compagnons et ses frères jusqu'au jour de la Rétribution.

Je voudrais tout d'abord et avant tout remercier Dieu le Tout-puissant de m'avoir accordé la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

Je remercie tout particulièrement Monsieur≪***BOUADJILA Khaled***≫, qui a dirigé ce travail. son enthousiasme, sa bienveillance et sa compétence m'a conduit bien plus loin que je n'aurrais pu l'imaginer. j'ai énormément appris auprès de lui et je tiens à lui faire part de toute ma gratitude.

Mes remerciement vont également à Monsieur ≪***Bagua Haoues*** ≫, président du jury qui accepté de relire ce travail.

Je remerci vivement Monsieur ≪***Krimi Mohamed*** ≫ qui m'ont fait l'honneur en acceptant d'examiner et de juger ce travail.

Je souhaite aussi remercier tous les enseignants du département de mathématique et informatique de la faculté des sciences de l'université ≪ ***Yahia Farés Médéa***≫.

Dédicace

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...
Comme d'abitude, il n'y a aucune joie en l'absence de ma mère, je voudrais avoir pitié de l'âme pure de ma mère, comme j'aurais souhaité qu'elle soit présente ...
c'est tout simplement que : je dédie ce modeste travail

À ma défunte mére

Tu représentes pour moi la source inépuisable de tendresse de patience, de sacrifice et l'exemple de dévoiement qui n'a pas cessé de m'encourager. Ta prière et ta bénédication m'ont été d'un grand secours tout au long de ma vie.

À mon très cher Père

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévoiement et le respect que j'ai toujours pour vous. Rien au monde ne vaut les efforts fournis jour et nuit pour mon éducation et mon bien être. En hommage à vos sacrifices et que tu as consentis dans mon éducation et ma formation le long de ces années.

À ma chère sœur ≪ *Insaf* ≫ et chers frères ≪ *Youcef* et *Mohcine* ≫

À qui je souhaite une vie pleine de bonheur et de succès et que Dieu, le tout puissant, vous protège et vous garde

À ma chers enfants ≪ *Mohamed*, *Ziad*, *Laila* ≫.

À ma chère amies ≪ *Faiza*, *Khadidja*, *Lina*≫.

À mes amies et tous collègues de analyse mathématique et applications université de Yahia fares, promotion 2024.

♣ *KERMEZLI. Maroua* ♣

Résumé

Nous introduisons et étudions le nouveau concept de relations linéaires bornées entre espaces asymétriques normés montrant certaines propriétés algébriques de cette nouvelle classe des opérateurs multi-valeurs. Nous caractérisons la norme d'une relation linéaire bornée obtenant ainsi une caractérisation géométrique importante de ces applications. En tant qu'application, nous prouvons le principe de la borne uniforme dans le cadre de relations linéaires sur les espaces asymétriques normés.

Abstract

We introduce and study the new concept of bounded linear relations between asymmetric normed spaces showing certain algebraic properties of this new class of multi-value operators. We characterize the norm of a bounded linear relation thus obtaining an important geometric characterization of these applications. As an application, we prove the uniform boundedness principle in the framework of linear relations on asymmetric normed spaces.

Notations

$\mathbb{N}$	L'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{R}, \mathbb{C}$	Les corps de nombres réels et complexes, respectivement.
q	Asymétrique norme(quasi-norme).
$\overline{q}$	Asymétrique norme conjuguée de q.
q^s	Norme (ou semi-norme) associe de q.
$\mathcal{T}_q$	La topologie induite par q.
$E, F, ..$	Des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.
$T, S, ..$	Des relations linéaires.
$D(T)$	Domaine de T.
$\Gamma(T)$	Le graphe de T.
T^{-1}	L'inverse de T.
$Im(T)$	L'image de T.
$\ker(T)$	Le noyau de T.
$d(.,.)$	Application de distance.
$(X, \|.\|_X)$	Espace normé.
$\|.\|$	Module complexe / valeur absolue.
$T \mid_M$	La restriction de T à M.
$\inf(A)$	La borne inférieure de l'ensemble A.
$\sup(A)$	La borne supérieure de l'ensemble A.
$R(\mathcal{E}, \mathcal{F})$	La collection de relation de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$.
$\mathcal{L}R(E, F)$	La classe des relations linéaires de E dans F.
$B_{E,q}(x_0, r)$	La boule ouvert dans l'espace asymétrique normé (E, q)
$B'_{E,q}(x_0, r)$	La boule fermée dans l'espace asymétrique normé (E, q).
$\mathcal{V}_q(x_0)$	L'ensemble des voisinages de point x_0.
$\mathcal{L}C(E, F)$	L'ensemble de tous les opérateurs linéaires continues de (E, q) à (F, p).
$\mathcal{L}C^s(E, F)$	L'ensemble de tous opérateurs linéaires continues de (E, q^s) à (F, p^s).

Introduction

De nombreuses études dans le domaine des relations linéaires développent les propriétés et les résultats établis pour les opérateurs à valeurs uniques. Plusieurs de ces extensions sont décrites dans le livre de R. Cross (voir[5]).
Concernant les espaces asymétriques normés, les concepts et caractéristiques spécifiques des opérateurs linéaires et multilinéaires, initialement établis pour les espaces normés, ont été élargis pour englober les espaces asymétriques par plusieurs auteurs (voir [1, 2, 4])et (voir [8]).
L'objectif de notre mémoire est d'étudier et de caractériser les relations linéaires sur les espaces asymétriques normés et comme application on donne la preuve du principe de la borne uniforme dans ce cadre.
Ce mémoire se divise en trois chapitres :
Le 1^{er} **chapitre :** présente une étude générale de relations linéaires sur les espaces vectoriels normés.
Le 2^{eme} **chapitre :** présente une étude de quelques propriétés topologiques des espaces asymétriques normés.
Le 3^{eme} **chapitre :** l'étudions du principe de la borne uniforme dans le cadre des espaces asymétriques normés.

Chapitre 1

Relations linéaires

1.1 Relations sur les ensembles

Définition 1.1 (Relation sur un ensemble). Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ deux ensembles arbitraires non vides. Une relation T de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ est toute application ayant domaine $D(T)$, un sous-ensemble non vide de $\mathcal{E}$, et en prenant des valeurs dans $2^{\mathcal{F}} \backslash \emptyset$ (la collection de sous-ensembles non vides de $\mathcal{F}$). Une telle application T est également connue comme une application multivaleur. si T associée les points de son domaine en singletons, alors T est dite une relation à valeur unique ou une fonction.

Définition 1.2 (Domaine d'une relation). pour $x \in \mathcal{E}$, $x \notin D(T)$ nous définissons $Tx = \emptyset$, avec cette convention, on a :

$$D(T) := \{x \in \mathcal{E} : Tx \neq \emptyset\}$$

Notation

- La classe de toutes les relation de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ sera notée $R(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.
- On note par fois Tx seulement au lieu de $T(\{x\})$ ou $T(x)$

Définition 1.3 (Graphe d'une relation). Soit $T \in R(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, le graphe de T est le sous-ensemble $\Gamma(T)$ de $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ défini par :

$$\Gamma(T) := \{(x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F} : x \in D(T); y \in T(x)\}$$

Remarque 1.1. Une relation $R(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est est déterminée de façon unique par son graphe, et inversement, tout sous-ensemble non vide de $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ détermine de façon unique une relation.

Définition 1.4 (Relation inverse). Soit $T \in R(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ l'inverse de T est la relation T^{-1} donnée par :

$$\Gamma(T^{-1}) := \{(x, y) \in \mathcal{E} \times \mathcal{F} : (x, y) \in \Gamma(T)\}.$$

Définition 1.5 (Image d'un sous-ensemble). Soit A un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, l'image de A par T est donnée par :

$$T(A) := \cup\{T(a) : a \in A \cap D(T)\}. \tag{1.1}$$

L'image de la relation T est donnée, donc par :

$$Im(T) := T(\mathcal{E}) \quad (= T(D(T)) \quad par(1.1).$$

Définition 1.6 (Surjectivité et Injectivité). Soit $T \in R(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.

1. T est dite surjective, si $Im(T) = \mathcal{F}$.
2. T est dite injective, si T^{-1} est à valeur unique.

Définition 1.7 (Image réciproque). Soit $\emptyset \neq B \subset F$ l'image réciproque de B est donnée par :

$$T^{-1}(B) = \{x \in D(T) : B \cap Tx \neq \emptyset\}.$$

En particulier, pour $y \in Im(T)$,

$$T^{-1}y = \{x \in D(T) : y \in Tx\}$$

De plus, ona : $D(T^{-1}) = Im(T)$, et $Im(T^{-1}) = D(T)$

Définition 1.8 (Composition des relations). Soit $T \in R(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ et $S \in R(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ où $R(T) \cap D(S) \neq \emptyset$, la comoposition ou le produit $S \circ T$ dans $R(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ est définie comme suit :

$$(S \circ T)(x) := S(Tx), (x \in \mathcal{E})$$

Définition 1.9 (Restriction). Soit A un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ tel que $A \cap D(T) \neq \emptyset$. La restriction de T à A, notée $T|_A$, est définie par :

$$T|_A \in R(\mathcal{E}, \mathcal{F}),$$

$$D(T|_A) = D(T) \cap A,$$

$$(T\,|_A)_a = Ta, \text{ pour } a \in A.$$

Définition 1.10 (Extension). Soient S et T deux relation de $R(\mathcal{E}, \mathcal{F})$, on dit que S est une extension de T si :

$$S|_{D(T)} = T.$$

1.2 Relations linéaires

Définition 1.11. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Une relation $T \in R(E, F)$ est dite relation linéaire, si pour tous $x, y \in D(T)$ et pour tout scalaire non nul $\lambda \in K$, on a :

$$Tx + Ty = T(x + y),$$

$$\lambda Tx = T(\lambda x).$$

Proposition 1.1. (voir [5]) Si T est une relation linéaire, alors $D(T)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Notation

La classe des relations linéaires de $R(E,F)$ sera notée $\mathcal{L}R(E,F)$, et on écrit $\mathcal{L}R(E,E) = \mathcal{L}R(E)$

Proposition 1.2. (voir [5]) Soit $T \in R(E,F)$. Les propriétés sont équivalentes :

i) T relation linéaire.

ii) $\Gamma(T)$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$.

iii) T^{-1} relation linéaire.

iv) $\Gamma(T^{-1})$ est un sous-espace vectoriel de $F \times E$

Corollaire 1.1. (voir [5]) Soit T une relation linéaire, alors $T(0)$ et $T^{-1}(0)$ sont des sous espaces vectoriels.

Définition 1.12. Le sous-espace $T^{-1}(0)$ est appelée le noyau de T, et est dénoté par $ker(T)$. Nous allons utiliser à la fois $ker(T)$ et $T^{-1}(0)$ tout au long de la suite,

$$ker(T) := T^{-1}(0) = x \in D(T) : (x,0) \in \Gamma(T)$$

Proposition 1.3. (voir [5]) Pour $x \in D(T)$ on a l'équivalence suivante :

$$y \in Tx \Longleftrightarrow Tx = y + T(0). \tag{1.2}$$

En particulier

$$0 \in Tx \Longleftrightarrow Tx = T(0).$$

Corollaire 1.2. (voir [5]) on a :

$$TT^{-1}y = y + T(0) \quad (y \in Im(T)),$$

et :

$$T^{-1}Tx = x + T^{-1}(0) \quad (x \in D(T))$$

En particulier :

$$T(T^{-1}(F)) = F \cap Im(T) + T(0), \tag{1.3}$$

et :

$$T^{-1}(T(E)) = E \cap D(T) + T^{-1}(0). \tag{1.4}$$

Corollaire 1.3. (voir [5])

1) T est à valeur unique si et seulement si $T(0) = \{0\}$.
2) T est injective si et seulement si $ker(T) = \{0\}$.

Corollaire 1.4. (voir [5])

$$T(T^{-1}(0)) = T(0),$$

et :

$$T^{-1}(T(0)) = T^{-1}(0).$$

Corollaire 1.5. (voir [5]) Si $\Gamma(S) \subset \Gamma(T)$, alors T est une extension de S si et seulement si $S(0) = T(0)$.

Proposition 1.4. (voir [5]) Soit T une relation de E à F. Alors T est une relation linéaire si et seulement si pour tout $x_1, x_2 \in D(T)$, et pour tout $\gamma, \eta \in \mathbb{K}$

$$\gamma T x_1 + \eta T \alpha_2 \subset T(\gamma \alpha_1 + \eta \alpha_2).$$

1.3 Algèbre des relations linéaires

Définition 1.13. Soient S et T deux relation linéaires dans $\mathcal{L}R(E, F)$, Les relation $S+T$ et λT sont définies comme suit :

$$(S + T)x = Sx + Tx, \quad (x \in E),$$
$$(\lambda T)x = \lambda(Tx), \quad (x \in E, \lambda \in \mathbb{K}).$$

Proposition 1.5. (voir [5])Soient $S, T, R \in \mathcal{L}R(E, F)$, on a :

1) $D(S + T) = D(S) \cap D(T)$.
2) $D(\lambda T) = D(T)$.
3) $\Gamma(S + T) = \{(x, y) \in E \times F : y = s + t,$ tel que $(x, s) \in \Gamma(S)$ et $(x, t) \in \Gamma(T)\}$.
4) $\Gamma(\lambda T) = \{(x, \lambda y) \in E \times F : (x, y) \in \Gamma(T)\}$.
5) $\lambda(\eta T) = (\lambda\eta)T \qquad (\lambda, \eta \in \mathbb{K})$.
6) $S + T = T + S$.
7) $R + (S + T) = (R + S) + T$.

1.4 Relations linéaires normés

1.4.1 Norme d'une relation linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et T une relation linéaire de E dans F. On rappelle que, si A et B deux ensembles non vides de l'espace vectoriel normé E, alors :

- $d(A,B) = inf\{\|x-y\|; x \in A, y \in B\}$.
- $d(x,A) = \inf\limits_{y\in A} \|x-y\|, pour$ x $\in E$

Définition 1.14. Soit M un sous-espace vectoriel fermé de F. Pour $y \in F$, on définit

$$\|\dot{y}\|_{F/M} = \inf_{x\in M} \|x-y\|, \text{ où } \dot{y} = \{z \in F, z-y \in M\} \tag{1.5}$$

L'espace quotient F/M est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et la formule (1.5) définit une norme sur F/M.

Définition 1.15 (L'application quotient naturelle).
Soit M un sous espace vectoriel fermé de F. L'application quotient naturelle et définie par :

$$Q : F \longrightarrow F \mid M$$
$$y \longmapsto \dot{y}$$

On a $D(Q) = F$ et $\ker(Q) = M$.

Notation

$$Q_T : F \longrightarrow F/\overline{T(0)}$$
$$y \longmapsto \dot{y} = \{z \in F, z-y \in \overline{T(0)}\}.$$

On a $\forall y \in F; Q_T y = y + \overline{T(0)}$, et

$$\|Q_T y\| = \|\dot{y}\| = d(y, \overline{T(0)}).$$

Proposition 1.6. (voir [5])$Q_T \circ T$ est à valeur unique.

Définition 1.16. On définit :

$$\|Tx\| = \|Q_T \circ T(x)\|,$$
$$\|T\| = \|Q_T \circ T\|.$$

Définition 1.17 (Relation bornée). Si $\|T\| < \infty$ et $D(T) = E$, alors on dit que T est bornée.

Proposition 1.7. (voir [5]) Soient$S, T \in \mathcal{L}R(E,F)$ on a :

1. $\|Sx+Tx\| \leq \|Sx\| + \|Tx\|; (x \in D(T+S))$:
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\alpha \in D(T)$ on a :

$$\|\lambda Tx\| = |\lambda| \|Tx\|.$$

Proposition 1.8. (voir[5])

$$\|T\| = \sup_{x\in B_E} \|Tx\|.$$

Proposition 1.9. (voir [5]) Soient $S, T \in \mathcal{L}R(E, F)$. On a

1) $\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|$.
2) $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$, $(\lambda \in \mathbb{K})$.

Proposition 1.10. (voir [5]) $\|T\| < \infty$ si et seulement si il existe un nombre $\xi > 0$ pour lequel :

$$TB_{(D(T))} \subset \xi B_{Im(T)} + T(0). \tag{1.6}$$

1.5 Relations linéaires continues

Définition 1.18. Soit T une relation arbitraire d'un espace topologique à un autre. Alors T est dite continue si pour chaque voisinage V dans $Im(T)$, l'image inverse $T^{-1}(V)$ est un voisinage dans $D(T)$. La relation T est dite ouverte, si pour chaque voisinage U dans $D(T)$, l'image $T(U)$ est un voisinage dans $Im(T)$.

Remarque 1.2. On remarque que T est continue si et seulement si T^{-1} est ouverte.

Proposition 1.11. (voir [5]) Soit $T \in \mathcal{L}R(E, F)$, alors

1) T est continue si et seulement si $\|T\| < \infty$.
2) Si dim $D(T) < \infty$, alors T est continue.
3) Si dim $R(T) < \infty$, alors T est ouverte.

Proposition 1.12. (voir [5]) $ker(T) \subset \ker(Q_T \circ T)$ avec égalité si $T(0)$ est relativement fermé dans $Im(T)$.

Remarque 1.3. De la proposition (1.11) et (1.12), on vois que

$$T \text{ est ouverte} \Rightarrow Q_T \circ T \text{ est ouverte.}$$

L'inverse est faux.

Chapitre 2

Espaces asymétriques normés

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions, résultats et propriétés sur les espaces asymétriques normés. Pour plus de détails, on peut consulter [4].

2.1 Topologie des espaces asymétriques normés

Définition 2.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une asymétrique-semi-norme sur E est une application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que pour tous $x, y \in E$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a :

i) $q(\alpha x) = \alpha q(x)$.

ii) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$.

De plus si q satisfait la propriété suivante

$$q(x) = q(-x) = 0 \Longrightarrow x = 0,$$

alors q est appelée asymétrique-norme. On dit alors que le couple (E, q) est un espace asymétrique normé.

Dans tout ce qui suit, (E, q) est un espace asymétrique normé.

Définition 2.2. Soit (E, q) un espace asymétrique normé.

1) L'asymétrique norme $\overline{q}$ conjuguée de q est défini par

$$\overline{q}(x) = q(-x), \text{pour tout} \quad x \in E.$$

2) La norme q^s associe de q est définie sur E par

$$q^s(x) = \max\{q(x), \overline{q}(x)\}, \text{pour tout} \quad x \in E.$$

Exemple 2.1. On considère sur $\mathbb{R}$ l'asymétrique norme α définie par

$$\alpha(x) = x^+ = \max\{x, 0\}$$

Alors, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\overline{\alpha}(x) = \alpha(-x) = x^- = \max\{-x, 0\},$$

et

$$\alpha^s(x) = \max\{x^-, x^+\} = |x|.$$

Définition 2.3. Soit E un ensemble arbitraire non vide. Une quasi-semi-métrique sur E est une application $\delta : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tel que pour tous $x, y, z \in E$, on a :

i) $\delta(x, x) = 0$.

ii) $\delta(x, y) \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$.

De plus si δ satisfait la propriété suivante

$$\delta(x, y) = \delta(y, x) = 0 \Longrightarrow x = y, \tag{2.1}$$

alors δ est appelée quasi-métrique. Un espace quasi-métrique est un ensemble non vide E muni d'une quasi-métrique δ. Il est clair que toute métrique est une quasi-métrique.

Définition 2.4.

1) Le conjugué de δ est la quasi-métrique $\overline{\delta}$ définie par :

$$\overline{\delta}(x, y) = \delta(y, x), \text{ pour tous } x, y \in E. \tag{2.2}$$

2) La métrique associée de δ est l'application $\delta^s : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\delta^s(x, y) = \max\{\delta(x, y), \overline{\delta}(x, y)\}.$$

Remarque 2.1. Toute asymétrique norme q sur un espace vectoriel réel E induite une quasi-métrique δ_q sur E donnée par :

$$\delta_q(x, y) = q(y - x), \forall x, y \in E.$$

Définition 2.5.

1) La boule ouverte de centre a est de rayon r est l'ensemble des points de E :

$$B_{E,q}(a, r) = \{x \in E, q(x - a) < r\}.$$

La boule fermé de centre a est de rayon r est l'ensemble des points de E :

$$B'_{E,q}(a, r) = \{x \in E, q(x - a) \leq r\}.$$

2) La boule d'unité ouverte notée $B_{E,q}$ et la boule d'unité fermée notée $B'_{E,q}$ de E sont définies (respectivement) par :

$$B_{E,q} = B_{E,q}(0, 1) \quad \text{et} \quad B'_{E,q} = B'_{E,q}(0, 1).$$

3) La sphère de centre a et de rayon r notée $S_{E,q}(a, r)$ et la sphère d'unité notée $S_{E,q}$ de E sont définies (respectivement) par :

$$S_{E,q}(a, r) = \{x \in E : q(x - a) = r\} \quad \text{et} \quad S_{E,q} = S_{E,q}(0, 1).$$

Définition 2.6 (Convergence dans un espace asymétrique normé). Soit (x_n) une suite dans E. On dit que (x_n) converge vers x si

$$\lim_{n \to +\infty} q(x_n - x) = 0.$$

Dans ce cas on dit que (x_n) est q-convergente vers x.

Définition 2.7 (Voisinage d'un point). On dit que V est un voisinage de $a \in E$, et on écrit $V \in \mathcal{V}_q(a)$, s'il existe $B_{E,q}(a,r)$, telle que $B_{E,q}(a,r) \subset V$. Dans ce cas la topologie $\mathcal{T}_q$ générée par q sur E est définie à partir de la famille $\mathcal{V}_q(a)$.

Définition 2.8. (Ouvert et fermé)

1) Un sous ensemble $A \subset E$ est dit ouvert dans (E,q), et on écrit $\mathcal{T}_q$-ouvert, si pour tout $a \in A$, il existe $B_{E,q}(a,r)$, telle que $B_{E,q}(a,r) \subset A$.
2) Un sous-ensemble $A \subset E$ est dit fermé dans (E,q), et on écrit $\mathcal{T}_q$-fermé, si A^c est ouvert.

2.2 Opérateurs linéaires continus entre espaces asymétriques normés

Définition 2.9. Soit l'opérateur linéaire $T : (E,q) \longrightarrow (F,p)$. On dit que T est (p,q)-continu s'il est continu par rapport aux topologies τ_q sur E et τ_p sur F.

Définition 2.10. L'opérateur linéaire $T : (E,q) \longrightarrow (F,p)$ est dit borné s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$p(T(x)) \leq Cq(x). \tag{2.3}$$

pour tout $x \in E$.

On note par $\mathcal{L}C(E,F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de (E,q) dans (F,p).
Dans le théorème suivant on a un critère très simple, et très utile, de continuité comme le cas des espaces normés.

Théorème 2.1. (voir [4]) Soient (E,q) et (F,p) deux espaces asymétriques normés et
$T : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. Alors T est continu si et seulement s'il est borné.

Asymétrique norme sur $\mathcal{L}C(E,F)$

Soient (E,q) et (F,p) deux espaces asymétriques normés. Pour tout $T \in \mathcal{L}C(E,F)$, on pose

$$\|T\|_{q,p} = \inf\{C \geq 0 : p(T(x)) \leq Cq(x), \forall x \in E\}. \tag{2.4}$$

Dans ce cas on a

$$p(T(x)) \leq \|T\|_{q,p} q(x), \quad \text{pour tout} \quad x \in E. \tag{2.5}$$

Proposition 2.1. (voir[4]) Soit $T \in \mathcal{L}C(E,F)$ un opérateur linéaire continue entre deux espaces asymétriques normés (E,q) et (F,p). Alors

$$\|T\|_{q,p} = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{p(T(x))}{q(x)}. \tag{2.6}$$

On a aussi

$$\|T\|_{q,p} = \sup\{p(T(x)); x \in E, q(x) \leq 1\}. \tag{2.7}$$

Proposition 2.2. (voir[4]) L'application $T \longrightarrow \|T\|_{q,p}$ est une asymétrique norme sur $\mathcal{L}C(E,F)$.

Exemple 2.2. Soit $(C_0[0,1],q)$ l'espace asymétrique semi-normé défini par

$$C_0[0,1] = \left\{ g \in C[0,1] : \int_0^1 g(t)dt = 0 \right\} \text{ et } q(g) = \sup_{x\in[0,1]} g(x).$$

Soit l'application linéaire

$$\psi : (C_0[0,1],q) \longrightarrow (\mathbb{R},\alpha), \psi(g) = g(0),$$

où α est l'asymétrique norme définie dans l'exemple (2.1). Alors ψ est continue mais $-\psi$ n'est pas continue. En effet, pour tout $g \in C_0[0,1]$

$$\psi(g) = g(0) \leq \sup_{x\in[0,1]} g(x) = q(g),$$

d'où ψ est bornée. Maintenant on prend la suite $(g_n)_{n\geq 2} \subset C_0[0,1]$ définie par :

$$g_n(x) = \begin{cases} (n-1)(nx-1), & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ \frac{n}{n-1}(x-\frac{1}{n}), & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$q(g_n) = 1 \text{ et } -\psi(g_n) = -g_n(0) = n-1,$$

alors, $-\psi$ est n'est pas bornée sur la boule unité de $(C_0[0,1],q)$, donc il n'est pas continue.

On note par $\mathcal{L}C^s(E,F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de (E,q^s) dans (F,p^s).

Proposition 2.3. (voir[4]) Soient (E,q) et (F,p) deux espaces asymétriques normés. Alors tout application linéaire continue de (E,q) dans (F,p) est aussi continue de $(E,\overline{q})$ dans $(F,\overline{p})$. Par conséquent $\mathcal{L}C(E,F) \subseteq \mathcal{L}C^s(E,F)$.

Chapitre 3

Principe de la borne uniforme

Soit $T : (E, q) \longrightarrow (F, p)$ une relation linéaire, pour définir la norme de T, on a besoin de l'espace quotient $F/\overline{T(0)}$, mais dans les espaces asymétrique normés, $\overline{T(0)}$ peut ne pas être un sous-espace vectoriel de F (voir [1] Exemple 2.1). Pour cette raison, on considère des relations linéaires entre espaces asymétriques normés et espaces vectoriels normés. On note par $\mathcal{L}R_q(E, F)$ l'ensemble des relations linéaires entre l'espace asymétrique normé (E, q) et l'espace vectoriel normé $(F, \|\cdot\|)$.

3.1 Continuité des relations linéaires sur les espaces asymétriques normés

Définition 3.1. Une relation linéaire $T \in \mathcal{L}R_q(E, F)$, est dite continue si pour chaque voisinage V dans $Im(T)$, l'image inverse $T^{-1}(V)$ est un voisinage dans $D(T)$. On dit aussi que T est ouverte si pour chaque voisinage U dans $D(T)$, l'image $T(U)$ est un voisinage dans $Im(T)$.

Asymétrique norme sur $\mathcal{L}R_q(E, F)$

Soit $T \in \mathcal{L}R_q(E, F)$, on considère l'espace quotient $F/\overline{T(0)}$ muni de la norme

$$\|\dot{y}\| = \inf_{c \in \overline{T(0)}} \|y + c\|.$$

Définir

$$\|Tx\| := \|Q_T \circ Tx\| = \inf_{c \in \overline{T(0)}} \|y + c\|,\ x \in D(T), y \in Tx.$$

De plus, on pose $\|T|_q := \|Q_T \circ T\|_{q,\|\cdot\|}$ et par conséquent

$$\|T|_q := \sup_{q(x) \leq 1} \|Q_T \circ Tx\|.$$

Si N est un sous espace de E(ou F) et β est une asymétrique norme sur E, ou une norme sur F nous considérons que

$$B_N = \{x \in N, \beta(x) \leq 1\},$$

et

$$U_N = \{p \in N, \beta(x) < 1\}.$$

Ces notations permettent de caractériser la continuité d'une relation linéaire $T \in \mathcal{L}R_q(E,F)$ en utilisant le nombre $\|T|_q$. Pour la preuve, nous avons besoin de la caractérisation géométrique suivante de $\|T|_q$.

Proposition 3.1. (voir[3]) Soit $T \in \mathcal{L}R_q(E,F)$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) $\|T|_q < \infty$.

ii) $\exists \lambda > 0$ tel que :

$$T(B_{D(T)}) \subset \lambda B_{Im(T)} + T(0). \tag{3.1}$$

Démonstration.

1) $(i) \Longrightarrow (ii)$
Prenons $y \in T(B_{D(T)})$, alors il existe $x \in B_{D(T)}$ tel que $y \in Tx$ il résulte de $\|T|_q < \infty$ que

$$\|Tx\| = \inf_{c \in \overline{T(0)}} \|y + c\| = \inf_{c \in T(0)} \|y + c\| < \infty.$$

On remarque que la deuxième égalité est une conséquence directe de la continuité de la norme. On fixe $\xi > 0$ et on choisit $c \in T(0)$ tel que $\|y + c\| < \|T|_q + \xi$, ce qui signifie que $y + c \in \lambda B_{Im(T)}$ avec $\lambda = \|T|_q + \xi$, alors $y \in \lambda B_{Im(T)} + T(0)$.

2) $(ii) \Longrightarrow (i)$
Supposons que (3.1) soit vérifiée pour un $\lambda > 0$. Soit $x \in B_{D(T)}$ et $y \in Tx$ par hypothèse il existe $y_1 \in B_{Im(T)}$ et $c_1 \in T(0)$ tel que $y = \lambda y_1 + c_1$. Ainsi par (1.2) on obtient

$$\begin{aligned} \|Tx\| =& \|Q_T \circ Tx\| = \inf_{c \in \overline{T(0)}} \|y + c\| \\ \leq& \|y - c_1\| = \lambda \|y_1\| \leq \lambda, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\|T|_q = \sup_{q(x) \leq 1} \|Tx\| \leq \lambda < \infty.$$

□

Théorème 3.1. (voir[3]) Soit $T \in \mathcal{L}R_q(E,F)$. Alors la relation linéaire T est continue si et seulement si $\|T|_q < \infty$.

Démonstration.

1) $(\Longleftarrow)$
Supposons que $\|T|_q < \infty$. Soit V une boule ouverte dans $Im(T)$ avec le centre y_0.

Alors pour un certain $\beta > 0$ nous pouvons écrire $V - \{y_0\} = \beta U_{Im(T)}$. Par (3.1) il existe $\lambda > 0$ tel que $T(U_{D(T)}) \subset \lambda U_{Im(T)} + T(0)$. En utilisant (1.4) on obtient

$$U_{D(T)} + T^{-1}(0) \subset \lambda T^{-1}(U_{Im(T)}) = \frac{\lambda}{\beta} T^{-1}(V - \{y_0\}).$$

Ainsi

$$\frac{\beta}{\lambda} U_{D(T)} + T^{-1}(y_0) \subset T^{-1}(V),$$

ce qui signifie que $T^{-1}(V)$ est un voisinage dans $D(T)$. Donc T est continue.

2) $(\Longrightarrow)$
Supposons que T est continue. En utilisant la proposition précédente, il suffit de montrer l'inclusion (3.1).Soit un voisinage ouvert O dans $D(T)$ tel que $O \subset T^{-1}(U_{Im(T)})$. Donc

$$O - O \subset T^{-1}(U_{Im(T)}) - T^{-1}(U_{Im(T)}).$$

D'autre part nous avons

$$T^{-1}(U_{Im(T)}) - T^{-1}(U_{Im(T)}) = T^{-1}(U_{Im(T)} - U_{Im(T)}) = 2T^{-1}(U_{Im(T)}),$$

ci qui signifie que $2T^{-1}(U_{Im(T)})$ est un voisinage ouvert de $\{0\}$ dans $D(T)$, par conséquent il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\frac{4}{\lambda} U_{D(T)} \subset 2T^{-1}(U_{Im(T)}),$$

il découle de $B_{D(T)} \subset 2U_{D(T)}$ et $U_{Im(T)} \subset B_{Im(T)}$ que

$$\frac{2}{\lambda} B_{D(T)} \subset 2T^{-1}(B_{Im(T)}),$$

par (1.3) nous obtenons

$$\frac{2}{\lambda} T(B_{D(T)}) \subset 2T(T^{-1}(B_{Im(T)})) = 2B_{Im(T)} + T(0),$$

et nous obtenons

$$T(B_{D(T)}) \subset \lambda B_{Im(T)} + T(0).$$

□

On note par $CR_q(E, F)$ l'espace des relations linéaires continues de l'espace asymétrique normé (E, q) dans l'espace normé $(F, \|.\|)$, et par $CR_q^s(E, F)$ l'espace des relations linéaires continues de l'espace normé (E, q^s) dans l'espace normé $(F, \|.\|)$.

Proposition 3.2. (voir[3]) Soit $T \in CR_q(E, F)$

$$\|Tx\| \leq \|T|_q q(x), \tag{3.2}$$

pour tout $x \in E$. De plus $\|T|_q$ se calcule aussi par la formule

$$\|T|_q = \inf\{\lambda : \|Tx\| \leq \lambda q(x) \text{ pour tout } x \in E\}. \tag{3.3}$$

Démonstration.
Pour tout $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$, on obtient, à partir de $\|T|_q = \sup_{q(x)\leq 1} \|Tx\|$, que

$$\|T\frac{x}{q(x)}\| \leq \|T|_q,$$

et on obtient l'inégalité (3.2).
Si $q(x) = 0$, l'inégalité est évidente. D'autre part, si I est le membre de droite de l'égalité (3.3) alors il est clair que $I \leq \|T|_q$. Pour l'inégalité inverse, si $\lambda > 0$ satisfait $\|Tx\| \leq \lambda q(x)$ pour tout $x \in E$, il s'ensuit que $\|T|_q = \sup_{q(x)\leq 1} \|Tx\| \leq \lambda$ et donc $\|T|_q \leq I$. □

Corollaire 3.1. (voir[3]) Une relation linéaire $T : E \longrightarrow F$ est continue de (E, q) dans $(F, \|.\|)$ si et seulement si , elle est continue de $(E, \overline{q})$ dans $(F, \|.\|)$.
Ainsi $CR_q(E, F) \subset CR_q^s(E, F)$.

On donne maintenant un exemple de relation linéaire continue .

Exemple 3.1. Nous pouvons définir une relation linéaire $T : (\mathbb{R}, \alpha) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|.\|)$ par

$$T(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y + z = x\},$$

où α est l'asymétrique norme sur $\mathbb{R}$ définie par $\alpha(x) = \max\{x, 0\}$ et $\|.\|$ est la norme sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\|(y, z)\| = |y| + |z|$.
Montrons que T est continue. Tout d'abord, il est facile de voir que $T(0)$ est un sous espace fermé de $\mathbb{R}^2$. Par un simple calcul nous pouvons voir que

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \inf_{(c_1,c_2)\in T(0)} \|(y + c_1, z + c_2)\| \\ &= \inf_{c\in\mathbb{R}}\{|y + c| + |z - c|\} = |y + z|,\end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$,$(y, z) \in T(x)$. D'où $\|T|_q = \sup_{(y+z)^+\leq 1} |y + z| \leq 1$.

3.2 Théorème de Banach-Steinhaus

Dans cette section, nous présentons un théorème de Banach-Steinhaus pour les relations linéaires continues définies sur des espaces asymétriques normés, on peut consulter[3]. Comme il est bien connu, le théorème de la catégorie de Baire joue un rôle fondamental dans la démonstration du principe de la borne uniforme (appelé aussi le théorème de Banach-Steinhaus). Dans le but de l'extension de ce principe au cas asymétrique, nous présentons quelques définitions de la catégorie de Baire dans les espaces quasi-métriques (voir[2]).

Définition 3.2. On dit qu'un espace quasi-métrique (E, δ), est de la demi-deuxième catégorie si la condition $E = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, implique $int_\delta(cl_{\overline{\delta}} A_m) \neq \emptyset$ pour certain $m \in \mathbb{N}$.

Définition 3.3. On dit qu'un espace asymétrique normé (E, q) est de la demi-deuxième catégorie si l'espace quasi-métrique (E, δ_q) est de la demi-deuxième catégorie.

Le résultat suivant, une version asymétrique du théorème de Banach-Steinhaus pour les opérateurs linéaires, se trouve dans [2] et sera généralisé au contexte des relations linéaires.

Théorème 3.2. Soit (E,q) et (F,p) deux espaces asymétriques normés, on suppose que (E,q) est de la demi-deuxième catégorie. Soit $\mathcal{A}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de (E,q) dans (F,p). Supposons que $\mathcal{A}$ soit bornée ponctuellement, c'est-à-dire pour chaque $x \in E$ il existe $b_x > 0$ tel que $p(Tx) \leq b_x$, pour tout $T \in \mathcal{A}$.
Alors

$$\sup_{T\in\mathcal{A}} \|T\|_{q,p} < \infty.$$

Pour la preuve du théorème principal, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1. (voir[2]) Si (E,q) est un espace asymétrique normé de la demi-deuxième catégorie et $\mathcal{A}$ est une famille de fonctions à valeurs réelles semi-continues inférieurement sur l'espace quasi métrique $(E,\overline{\delta}_q)$ de telle sorte que pour chacun $x \in E$ il existe $b_x > 0$ tel que $f(x) \leq b_x$ pour tout $f \in \mathcal{A}$, alors il existe un ensemble ouvert non vide U dans (E,q) et $b > 0$ tel que $f(x) \leq b$ pour tout $f \in \mathcal{F}$ et $x \in U$.

Théorème 3.3. Soient (E,q) un espace asymétrique normé de la demi-deuxième catégorie, $(F,\|.\|)$ un espace normé et $\mathcal{A}$ une famille de relations linéaires continues de (E,q) dans $(F,\|.\|)$. Supposons que $\mathcal{A}$ soit bornée ponctuellement, c'est-à-dire pour chaque $x \in E$ il existe $b_x > 0$ tel que $\|Tx\| \leq b_x$, pour tout $T \in \mathcal{A}$.
Alors

$$\sup_{T\in\mathcal{A}} \|T|_q < \infty.$$

Démonstration.
Pour chaque $T \in \mathcal{A}$ considérons la fonction $f_T : E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$f_T(x) = \|Q_T \circ T(x)\|, x \in E,$$

tel que $Q_T : F \to F/\overline{T(0)}$ est l'application quotient. On montre que f_T est semi-continue inférieurement sur $(E,\overline{\delta}_q)$. Soit $x \in E$ et $(x_n)_n$ une suite dans E tel que $\overline{\delta}_q(x,x_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. On a :

$$f_T(x)-f_T(x_n) = \|Q_T\circ T(x)\|-\|Q_T\circ T(x_n)\| \leq \|Q_T\circ T(x)-Q_T\circ T(x_n)\| \leq \|T|_q q(x-x_n) \to 0,$$

quand $n \to +\infty$. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$, $f_T(x) - f_T(x_n) < \varepsilon$.
L'application du lemme précédent à la famille $\mathcal{A} = \{f_T : T \in \mathcal{A}\}$, révèle l'existence d'un sous-ensemble ouvert non vide U de (E,q) et $d > 0$ tel que $f_T(x) \leq d$ pour tout $T \in \mathcal{A}$ et $x \in U$.
Soit B_q une boule ouverte de centre z et de rayon r contenue dans U.

Pour $x \in rB_{E,q}$, on a $x + z \in B_q$

$$\begin{aligned}\|Tx\| = \|Q_T \circ T(x)\| &\leq \|Q_T \circ T(x+z)\| + \|Q_T \circ T(-z)\| \\ &= f_T(x+z) + f_T(-z) \leq d + b_{-z} \\ &= b.\end{aligned}$$

Donc

$$\sup_{T \in \mathcal{A}} \|T|_q \leq \frac{b}{r}.$$

□

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous présentons le sujet "Principe de la borne uniforme pour les relations linéaires sur les espaces asymétriques normés" nous étudions les relations linéaires bornées entre espaces asymétriques normés, et nous avons essayé de connaitre certaines des preuves, des théorème et des caractéristique des espaces asymétriques normés, et sourtout l'étude de la continuité, et nous avons aussi fait connaissance de théorème de Banach-Sheinhaus et certaines propriétés des relations linéaires sur les espaces asymétriques.

Nous tenons à dire que nous sommes très favorables à toute critique constructive concernant ce travail car il reste qu'une goutte dans une vaste mer, et nous souhaitons aller plus loin dans l'avenir

Bibliographie

[1] C. Alegre, I. Ferrando, Quotient subspaces of asymmetric normed linear spaces, Bol. Soc. Mat. Mexicana. 13 (161) (2007), 357–365.

[2] C. Alegre, S. Romaguera and P. Veeramani, The Uniform Boundedness Theorem in Asymmetric Normed Spaces, Abstr. App. Anal. (2012), Article ID809626, 8pp.

[3] K.Bouadjila, A.Tallab, and E.Dahia , Banach-Steinhaus theorem for linear relations on asymmetric normed spaces. Carpathian Mathematical Publications, 14(1)(2022), 230-237.

[4] S. Cobzaş, Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.

[5] R.W. Cross, Multivalued Linear Operators, Marcel-Dekker, New York (1998).

[6] J. Ferrer, V. Gregori and C. Alegre, Quasi-uniform structures in linear lattices, Rocky Mountain J. Math. 23 (1993), 877–884.

[7] L.M. García-Raffi, S. Romaguera, E.A. Sánchez-Pé rez, The dual space of an asymmetric normed linear space, Quaestiones Math. 26 (2003), 83–96.

[8] F. Latreche and E. Dahia, Multilinear operators between asymmetric normed spaces, Colloq. Math. 161 (2) (2020), 157–171.

[9] M.D. Mabula and S. Cobzaş, *Zabrejko's lemma and the fundamental principles of functional analysis in the asymmetric case*, Topology and its Applications. 184 (2015), 1–15.

[10] S. Romaguera and M. Schellekens, On the structure of the dual complexity space : The general case, Extracta Math. 13 (1998), 249-253.

[11] S. Romaguera and M. Schellekens, Quasi-metric properties of complexity spaces. Topology Appl. 98 (1999), 311-322.

[12] S. Romaguera and M. Schellekens, Weightable quasi-metric semigroups and semilattices, Electronic Notes in Theoretical Computer Science 40 (2001), 12 pages.

[13] S. Romaguera and M. Schellekens, The quasi-metric of complexity convergence, Quaestiones Math. 23 (2000), 359-374.