RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DR. YAHIA FARÈS DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

Présenté par

Rabia Widad

Sur quelques problèmes paraboliques non-linéaires

Soutenu publiquement le 29 juin 2025 devant le jury composé de

Président :	Hocine Ayadi	Université de Médéa
Examinateur :	Rezak Souilah	Université de Médéa
Encadreur :	Khaled Bouadjila	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2024-2025

Table des matières

Remerciement **4**

Résumé **6**

Abstract **7**

Introduction **8**

Notations **10**

1 Préliminaires **12**
1.1 Rappel sur les espaces de Lebesgue et espaces de Sobolev 12
1.1.1 Espaces de Lebesgue 12
1.1.2 Espaces de Sobolev 15
1.2 Opérateur p-Laplacien 18
1.3 Fonctions à valeurs vectorielles en temps 19
1.3.1 Quelques propriétés utiles 21
1.4 Opérateurs monotones 23
1.4.1 Monotonie 23
1.4.2 Bornitude 24
1.4.3 Hémicontinuité 24
1.4.4 Coercivité 24
1.5 Différentiabilité au sens de Gateaux 24

2 Problème parabolique non-linéaire avec des données régulières **27**
2.1 Existence de la solution du problème (P_n) : Méthode de minimisation d'une fonctionnelle 28
2.1.1 Démonstration du théorème 2.2 33
2.2 Estimations a priori 34
2.3 Passage à la limite : Existence de la solution faible 37

3 Problème parabolique non linéaire avec conditions aux limites mixtes **41**
3.1 Position du problème 41
3.2 Formulation Variationnelle 42

3.3 Existence et Unicité 45
3.3.1 Existence 45
3.3.2 Unicité 52

Remerciement

Louange à Allah, unique sans associé,
qui ma accordé la force et la patience pour mener à bien ce travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à toutes les personnes qui mont accompagné(e) et soutenu(e) durant cette étape importante de ma vie universitaire.

Merci tout dabord à **Monsieur Bouajila Khaled**, mon encadrant, pour sa patience, ses conseils précieux et son soutien constant qui ont été essentiels à la réussite de ce travail.

Je remercie également mes professeurs de lUniversité Yahia Fares de Médéa, notamment ceux de département de *Mathématiques et Informatique*, ainsi que ceux du Master *Analyse Mathématique et Applications Mathématiques*, pour la qualité de leur enseignement et disponibilité.

Un remerciement tout particulier à **mes parents bien-aimés**, pour leur patience inlassable, leur soutien indéfectible à chaque étape de ma vie.
Alhamdoulillah, jai pu leur apporter de la joie grâce à ce travail.

Je remercie aussi **mes frères et surs** pour leur amour et leurs encouragements constants.

Enfin, je remercie **mes amis** et toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce mémoire.

Dédicace

Je dédie ce travail à :

♡ *Mes chers parents, pour leur amour, leurs prières, leur patience et leurs innombrables sacrifices.*

♡ *Mes surs et mon frère bien-aimés, pour leur soutien constant, leurs encouragements et leur présence à chaque étape.*

♡ *Toute ma famille, pour leur affection et leurs mots de réconfort qui mont portée dans les moments de doute.*

Résumé

Dans ce mémoire, nous examinons deux problèmes paraboliques non linéaires avec l'opérateur p-Laplacien. Nous étudions d'abord un problème non-linéaire avec des données régulières que nous résolvons par la méthode de Rothe. Ensuite, nous analysons un problème non linéaire avec conditions aux limites mixtes, pour lequel nous établissons l'existence et l'unicité des solutions à l'aide de la méthode de Faedo-Galerkin combinée à des techniques de monotonie.

Abstract

In this thesis we investigate two classes of nonlinear parabolic problems involving the p-Laplacian operator. First, we examine a nonlinear problem solved using Rothe's time-discretization method. Second, we analyze a nonlinear problem with mixed boundary conditions, where we establish existence and uniqueness of solutions through the Faedo-Galerkin method combined with monotonicity techniques.

Introduction

Les équations aux dérivées partielles paraboliques non linéaires jouent un rôle fondamental dans la modélisation de nombreux phénomènes physiques, biologiques et chimiques. Parmi ces équations, celles impliquant l'opérateur p-Laplacien

$$-\Delta_p u = -\text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

présentent un intérêt particulier en raison de leurs propriétés mathématiques remarquables et de leurs applications variées en mécanique des fluides non newtoniens, en théorie du potentiel non linéaire et en traitement d'image.

Ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'étude des problèmes paraboliques non linéaires et se concentre sur deux aspects principaux. Dans un premier temps, nous étudions un problème parabolique non-linéaire avec des données régulières en utilisant la méthode de semi-discrétisation en temps, qui consiste à approcher le problème parabolique par une suite de problèmes elliptiques via une discrétisation de l'intervalle temporel $[0, T]$. Cette approche nous permet d'établir l'existence d'une solution faible en passant à la limite sur les solutions approchées. Dans un second temps, nous considérons un problème parabolique non linéaire avec conditions aux limites mixtes de type Dirichlet-Neumann. L'analyse de ce problème repose sur la méthode de Faedo-Galerkin combinée à des techniques de monotonie, qui permettent de démontrer l'existence et l'unicité de solutions dans des espaces fonctionnels appropriés.

Le manuscrit est organisé en trois chapitres :

— **Chapitre 1** : Présente les préliminaires mathématiques nécessaires à notre étude, incluant les espaces de Lebesgue et de Sobolev, les propriétés des fonctions à valeurs vectorielles et les opérateurs monotones..

— **Chapitre 2** : Consacré à l'étude du problème parabolique non-linéaire avec des données régulières, où nous montrons l'existence d'une solution faible via la méthode de Rothe.

— **Chapitre 3** : Traite du problème non linéaire avec conditions aux limites mixtes, en mettant l'accent sur la formulation variationnelle et les techniques de monotonie.

Notations

Ω	Un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$	Frontière topologique de Ω
$x = (x_1, \ldots, x_N)$	Point générique de $\mathbb{R}^N$
$dx = dx_1 \ldots dx_N$	Mesure de Lebesgue sur Ω
$Q = \Omega \times]0, T[$	Domaine espace-temps, $T > 0$
$\Sigma = \partial\Omega \times]0, T[$	Frontière espace-temps
$\overline{\Omega}$	Adhérence de Ω
$\rightharpoonup$	Convergence faible
$\overset{*}{\rightharpoonup}$	Convergence faible étoile
p.p.	Presque partout
V	Espace de Banach
H	Espace de Hilbert
V'	Dual topologique de V
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$	Crochet de dualité
$\| \cdot \|$	Norme sur V
$(\cdot, \cdot)$	Produit scalaire sur H
$\lvert \cdot \rvert$	Norme sur H
$\mathbb{R}^{m \times N}$	Espace des matrices réelles
Id	Matrice identité
$f^+ = \max(f, 0)$	Partie positive de f
$f^- = \max(-f, 0)$	Partie négative de f
$\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R})$	Fonctions continues à support compact
$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue
$\mathcal{D}(\Omega) = \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$	Fonctions C^∞ à support compact dans Ω
$\mathcal{D}(Q) = \mathscr{C}_0^\infty(Q)$	Fonctions C^∞ à support compact dans Q
$\mathscr{C}^k(\Omega)$, $\mathscr{C}^k(Q)$	Fonctions k-fois continûment différentiables

$\mathcal{D}'(\Omega)$	Espace des distributions
$W^{1,p}(\Omega)$	$\{u \in L^p(\Omega) \mid \nabla u \in L^p(\Omega)\}$
$W_0^{1,p}(\Omega)$	Fermeture de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$
$W^{-1,p'}(\Omega)$	Dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$)
$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$	Espace de Sobolev
$\mathscr{C}([0,T];V)$	Fonctions continues $u : [0,T] \to V$
$\mathcal{D}([0,T];V)$	Fonctions C^∞ à support compact, $u : [0,T] \to V$
$\mathcal{D}(\Omega)$	Fonctions C^∞ à support compact

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappel sur les espaces de Lebesgue et espaces de Sobolev

N est un entier naturel non nul, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

1.1.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1. 1. On désigne par $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, l'espace des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que la quantité

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \overset{\text{def}}{=} \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

est finie.

2. Pour $p = \infty$, on désigne par $L^\infty(\Omega)$, l'espace des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que la quantité

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \overset{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$$

est finie.

Remarque 1.1. La quantité $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ définit une norme sur les espaces $L^p(\Omega)$. De plus, $(L^p(\Omega), \|.\|_{L^p(\Omega)})$ sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, séparables pour $1 \leq p < \infty$ et réflexifs pour $1 < p < \infty$.

Proposition 1.1 (Inégalité de Young). Soient p et p' deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Pour tout réel positif a et b , on a

$$ab \leq \frac{1}{p}(\epsilon a)^p + \frac{1}{p'}\left(\frac{b}{\epsilon}\right)^{p'} = \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^{p'}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \tag{1.1}$$

pour tout $\varepsilon = \epsilon^p/p > 0$.

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats de convergence et de densité.

Théorème 1.1 (Théorème de convergence monotone de Beppo-Levi[7]). Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions de $L^1(\Omega)$, telle que $\sup_n \int_\Omega f_n \mathrm{d}x < \infty$. Alors f_n converge p.p. sur Ω vers une fonction $f \in L^1(\Omega)$ et $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0$.

Théorème 1.2. [Théorème de convergence dominée de Lebesgue[7]] Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ avec $1 \leq p < \infty$. On suppose que $(f_n)_n$ converge p.p. sur Ω vers une fonction f et qu'il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour chaque n : $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. $x \in \Omega$. Alors $f \in L^p(\Omega)$ et $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$.

Théorème 1.3 (Réciproque du théorème de Lebesgue[7]). Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ telles que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors il existe une sous-suite $(f_{k_n})_n$ telle que

1. $(f_{k_n})_k$ converge p.p. sur Ω vers f.
2. Il existe $h \in L^p(\Omega)$ tel que pour tout n : $|f_{k_n}(x)| \leq h(x)$ p.p. $x \in \Omega$.

Théorème 1.4 (Théorème de densité[2]). L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions de $C^\infty(\Omega)$ à support compact est dense dans $L^p(\Omega)$. C'est-à-dire pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $f \in L^p(\Omega)$, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que : $\|f - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \leq \epsilon$.

Théorème 1.5 (Inégalité de Hölder [1]). Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ avec $1 \leq p, q \leq \infty$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et on a l'inégalité suivante :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Définition 1.2. Soit E un espace de Banach. On appelle dual de E et note E' l'espace de toutes les formes linéaires continues f sur E, et on écrit $f(x) := \langle f, x\rangle$ $(x \in E)$.

Théorème 1.6 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet[1]). Soit H un espace de Hilbert et H' est son dual. Alors pour tout élément $f \in H'$, il existe un unique élément $x \in H$ tels que

$$\langle f, y\rangle = (x, y) \text{ pour tout } y \in H,$$

et $\|f\| = \|x\|$, où $(\ ,\ )$ désigne le produit scalaire sur H. De plus l'application $f \longmapsto x$ est linéaire et continue.

Théorème 1.7. [2] Soit $p \in]1, +\infty[$. Pour tout élément $f \in (L^p(\Omega))'$, il existe un unique élément $g \in L^{p'}(\Omega)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) tel que

$$\langle f, v\rangle_{(L^p(\Omega))' \times L^p(\Omega)} = \int_\Omega g v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in L^p(\Omega).$$

De plus, on a

$$\|f\|_{(L^p(\Omega))'} = \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Ce théorème nous permet d'identifier le dual de $L^p(\Omega)$ avec $L^{p'}(\Omega)$.

Définition 1.3 (Convergence faible). Une suite $(x_n)_n$ est dite converger faiblement vers x dans un espace de Banach E et on note $x_n \rightharpoonup x$, si pour tout élément $f \in E'$, on a

$$\langle f, x_n\rangle_{E' \times E} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{E' \times E} \text{ quand } n \to +\infty.$$

Proposition 1.2. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite faiblement convergente dans un espace de Banach E. Alors :

1. La suite (x_n) est bornée.
2. Si $x_n \rightharpoonup x$ est la limite faible, alors :

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Proposition 1.3. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite faiblement convergente dans un espace de Banach E. Alors :

1. La suite (x_n) est bornée.
2. Si $x_n \rightharpoonup x$ est la limite faible, alors :

$$\|x\| \geq \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Proposition 1.4. [4] Une suite $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ est convergente faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ si et seulement si pour tout $g \in L^{p'}(\Omega)$, on a

$$\int f_n g \mathrm{d}x \longrightarrow \int f g \mathrm{d}x, \text{ quand } n \to \infty.$$

Proposition 1.5. (Dérivée d'une fonction discontinue) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, présentant des discontinuités en $x = a_k$, $k = 1, \ldots, n$, c'est-à-dire

que les limites :

$$f(a_k^+) = \lim_{x \to a_k^+} f(x), \quad f(a_k^-) = \lim_{x \to a_k^-} f(x),$$

existent et sont distinctes. On introduit le saut de f aux points $a_1, \ldots, a_n$:

$$\sigma_k = f(a_k^+) - f(a_k^-), \quad k \geq 1.$$

Alors, si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, on a la formule de saut pour la dérivée au sens des distributions :

$$T'_f = T_{f'} + \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \delta_{a_k}.$$

1.1.2 Espaces de Sobolev

Définition 1.4. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $p \in [1, \infty]$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit l'espace de Sobolev :

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ tel que } |\alpha| \leq k\}.$$

(les dérivées ici sont au sens de distributions). Et on définit sur $W^{k,p}(\Omega)$ la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

Définition 1.5. Avec les mêmes notations on définit les espaces $W_0^{k,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\Omega)$.

Remarque 1.2. Pour $p = 2$, on note $H^k(\Omega) := W^{k,p}(\Omega)$ et $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,p}(\Omega)$. Ces deux espaces sont des espaces de Hilbert.

Définition 1.6. On dit que la fonction $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ appartient à l'espace $\mathcal{C}^\alpha(\Omega)$, pour $\alpha \in]0, 1]$ si :

$$\rho_\alpha(u) := \sup_{x,y \in \Omega,\ x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

On munit $\mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ par la norme suivante :

$$|u|_\alpha := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \rho_\alpha(u).$$

On définit aussi les espaces de Hölder $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, par

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\Omega) : |u|_{k,\alpha} := \sum_{\beta\in\mathbb{N}^N;|\beta|\leq k} |D^\beta u|_\alpha < \infty, \ \}.$$

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{u \in \mathcal{C}(\Omega)/\ \exists v \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N) : v_{|\overline{\Omega}} = u\}.$$

Les espaces ainsi définis sont des espaces de Banach.

Théorème 1.8. [9] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1. Alors, l'injection canonique suivante

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & \text{si } p < N \\ L^q(\Omega),\ \forall q > 1, & \text{si } p = N \\ C^\alpha(\overline{\Omega}) & \text{si } p > N \end{cases}$$

est continue, où $p^* = \frac{Np}{N-p}$ (i.e. $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$) et $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, pour tout $p \geq 1$. De plus, pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a les inégalités suivantes :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{1.9}$$

$$|u|_\alpha \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

où $C_1,\ C_2 > 0$, dépendent seulement de N, p et le diamètre de Ω.

Théorème 1.9 (Rellich-Kondrachov [9]). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 et $1 \leq p < N$. Alors l'injection canonique suivante

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ pour tout } q < p^* \tag{1.11}$$

est compacte, où $p^* = \frac{Np}{N-p}$.

Un résultat important qui découle de ce théorème est l'inégalité de Poincaré :

Théorème 1.10 (Inégalité de Poincaré [9]). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 et $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.12}$$

Définition 1.7. On définit l'espace $W^{-1,p'}(\Omega)$ comme l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Autrement dit un élément f de $W^{-1,p'}(\Omega)$ est une forme linéaire continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, et on note par $\langle\ ,\ \rangle$ le crochet de dualité entre $W^{-1,p'}(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$. Et rappelons que

$$\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\langle f, v\rangle}{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \langle f, v\rangle$$

et

$$\langle f, v\rangle \leq \|f\|_{W^{-1,p'}} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Théorème 1.11 (Caractérisation de $W^{-1,p'}(\Omega)$ [1]). Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Alors il existe

$$f^0, f^1, \ldots, f^N \quad \text{dans } L^p(\Omega),$$

tels que pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega \left(f^0 v + \sum_{i=1}^{N} f^i v_{x_i} \right) \mathrm{d}x \tag{1.13}$$

et

$$\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{i=0}^{N} |f^i|^p \right)^{1/p}. \tag{1.14}$$

En particulier si $f \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ alors

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega f v \mathrm{d}x \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Définition 1.8. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné de frontière Γ régulière tel que $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, on définit l'espace V par :

$$V = \left\{ v \in W^{1,p}(\Omega),\ \gamma_0 u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\},$$

où γ_0 désigne l'opérateur de trace. En désignant par V' son dual.

Proposition 1.6 ([5]). Soit V un sous-espace de $W^{1,p}(\Omega)$, alors :

1. V est un espace de Banach, pour $1 \leq p \leq +\infty$.
2. V est un espace séparable, pour $1 \leq p < +\infty$ (i.e. il admet un ensemble dénombrable dense).
3. V est un espace réflexif, pour $1 < p < +\infty$.
4. V' est un espace de Banach.

Théorème 1.12 ([3]). [Formule de Green] Soit Ω un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ et Γ son bord. $\forall u, v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, on a :

$$\int_\Omega \Delta u\, v\, dx = \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} v\, d\Gamma - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx.$$

où $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \eta$ (la dérivée normale de u).

Théorème 1.13 ([8]). Soient p et q deux réels vérifiant $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de bord Γ, variété lipschitzienne de dimension $n-1$, $\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_n)$ la normale extérieure à Ω en un point de Γ, alors on a la formule suivante dite formule de Green :

$$\forall (u, v) \in W^{1,p}(\Omega) \times W^{1,q}(\Omega) : \quad \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = \int_\Gamma u v n_i \, ds + \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx,$$

où la normale est notée $\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_n)$.

Proposition 1.7 (Inégalités d'interpolation). Soit $1 \leq p \leq p' \leq +\infty$. Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^{p'}(\Omega)$ alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $p \leq r \leq p'$ et on a

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\theta}_{L^{p'}(\Omega)}, \quad \text{où} \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{p'}. \tag{1.2}$$

On a aussi cette inégalité pour tout $2 \leq p \leq p' \leq p^*$:

$$\|u\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq C_{p,p'} \|\nabla u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \times \|u\|^{1-\theta}_{L^2(\Omega)} \tag{1.3}$$

pour tout $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$, où

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p^*} + \frac{1-\theta}{p}.$$

1.2 Opérateur p-Laplacien

Soit $p \in]1, +\infty[$. L'opérateur p-Laplacien est défini par

$$\Delta_p u \overset{\text{def}}{=} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = |\nabla u|^{p-4} \left[|\nabla u|^2 \Delta u + (p-2) \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right].$$

Pour $p = 2$, on obtient l'opérateur Laplacien

$$\Delta_2 u = \Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Pour $p > 2$, l'opérateur p-Laplacien est dégénéré aux points critiques ($\nabla u = 0$), et pour $1 \leq p < 2$, l'opérateur est singulier.

Pour $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$, l'application

$$W^{1,p}_0(\Omega) \ni v \longmapsto \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla v \mathrm{d}x$$

est une forme linéaire continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Elle appartient donc à $W^{-1,p'}(\Omega)$. De plus si u est assez régulière, on a d'après la formule de Green

$$\int_\Omega -\Delta_p u \; v \; \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v \mathrm{d}x.$$

D'où on peut définir le paire de dualité suivant

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v \mathrm{d}x, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

L'application définie par

$$W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$$
$$u \longmapsto -\Delta_p u$$

est uniformément continue et elle est aussi strictement monotone, c'est-à-dire

$$\langle -(\Delta_p u - \Delta_p v), u - v\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega)} > 0 \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ avec } u \neq v.$$

1.3 Fonctions à valeurs vectorielles en temps

Définition 1.9 (Fonction simple). Soit V un espace de Banach. Une fonction $s : (0,T) \to V$ est dite simple si elle est mesurable, sannule en dehors dun ensemble de mesure fini et prend un nombre fini de valeurs. On note $S((0,T);V)$ lensemble des fonctions simples $(0,T) \to V$.
Une fonction simple $s \in S((0,T);V)$ admet donc une unique écriture

$$s = \Sigma_{i=1}^n a_i I_{A_i}$$

Définition 1.10. Une fonction $f : (0,T) \longrightarrow V$ est dite fortement mesurable s'il existe une suite de fonctions simples qui converge presque partout vers f.

Définition 1.11. On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans un espace de Banach V, et on note $L^p(0,T;V)$, l'espace des fonctions fortement mesurables $u : [0,T] \to V$ avec

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} < +\infty \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty$$

et

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_V < +\infty \quad \text{pour } p = \infty.$$

Définition 1.12. L'espace $\mathcal{C}([0,T];V)$ est l'ensemble des fonctions continues $u:[0,T]\to V$ avec

$$\|u\|_{\mathcal{C}([0,T];V)}=\max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_V<+\infty.$$

Définition 1.13. i) On appelle espace de distributions sur $(0,T)$ à valeurs dans V et on note $\mathcal{D}'(0,T;V)$ l'espace des applications linéaires continues $f:\mathcal{D}(0,T)\to V$. Pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(0,T)$, la continuité de l'application linéaire est au sens de la définition 1.3. On note la valeur de f en φ par $\langle f,\varphi\rangle\in V$.

ii) La dérivée de $f\in\mathcal{D}'(0,T;V)$, notée f', est un élément de $\mathcal{D}'(0,T;V)$ (à démontrer) définie par

$$\langle f',\varphi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}=-\langle f,\varphi'\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}},\quad \text{pour tout } \varphi\in\mathcal{D}(0,T).$$

Définition 1.14 (Distribution régulière). Si $f\in L^1_{\text{loc}}(0,T;V)$, on peut lui associer une distribution dite distribution régulière, encore notée f, définie par :

$$f:\mathcal{D}(0,T)\to V,\quad \varphi\mapsto\langle f,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}=\int_0^T f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

et la dérivée f' est définie par

$$f':\mathcal{D}(0,T)\to V,\quad \varphi\mapsto\langle f',\varphi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}=-\int_0^T f(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

Remarque 1.3. Pour $1\le p<\infty$, on peut identifier les deux espaces $L^p(0,T;L^p(\Omega))$ et $L^p((0,T)\times\Omega)$, grâce à l'isomorphisme suivant :

$$\begin{array}{rcl} L^p(0,T;L^p(\Omega)) & \longrightarrow & L^p((0,T)\times\Omega) \\ u & \longmapsto & \tilde{u}:\tilde{u}(t,x):=[u(t)](x)\end{array}$$

De la même manière, on peut aussi identifier l'espace $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ avec l'espace des fonctions $\tilde{u}:(0,T)\times\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^T\int_\Omega\left(|\tilde{u}(t,x)|^p+|\nabla\tilde{u}(t,x)|^p\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t<+\infty.$$

De plus, on a le résultat suivant :

Proposition 1.8. Soient $p,q\ge 1$, $u\in W^{1,p}(0,T;L^q(\Omega))$. Alors, la fonction $\tilde{u}$ définie sur $(0,T)\times\Omega$ par $\tilde{u}(t,x)=[u(t)](x)$ p.p. satisfait :

$$\tilde{u},\partial_t\tilde{u}\in L^1_{\text{loc}}((0,T)\times\Omega)$$

$$\int_0^T \left(\int_\Omega |\tilde{u}(t,x)|^q \right)^{p/q} \mathrm{d}t + \int_0^T \left(\int_\Omega |\partial_t \tilde{u}(t,x)|^q \right)^{p/q} \mathrm{d}t < +\infty.$$

De plus, on a presque pour tout $t \in (0,T)$: $\partial_t \tilde{u}(t,.) = u'(t)(.)$ p.p. sur Ω. ($\partial_t \tilde{u}$ est la dérivée partielle dans la direction t au sens des distributions sur $(0,T) \times \Omega$).

Remarque 1.4. Supposons que $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Alors $u' \in L^1_{\text{loc}}(0,T;H_0^1(\Omega))$ et on a :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T) : \langle u', \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

D'après le théorème de Riesz, on peut identifier $L^2(\Omega)$ avec son dual et aussi $H_0^1(\Omega)$ avec son dual $H^{-1}(\Omega)$, mais pas en même temps.

- Si on identifie $L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))'$, alors, pour tout $w \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a :

$$\langle \langle u', \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}, w \rangle := \int_\Omega \left(- \int_0^T u \varphi' \mathrm{d}t \right) w \mathrm{d}x = - \int_\Omega \int_0^T u \partial_t(\varphi w) \mathrm{d}t \mathrm{d}x = \langle \partial_t u, \varphi w \rangle_{\mathcal{D}'(Q) \times \mathcal{D}(Q)}.$$

  D'où $u'(t)(x) \equiv \partial_t u(t,x)$ presque partout sur Q.

- Si on identifie $H_0^1(\Omega)$ avec $H^{-1}(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \langle u', \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}, w \rangle &:= \int_\Omega \nabla \left(- \int_0^T u \varphi' \mathrm{d}t \right) \cdot \nabla w \mathrm{d}x \\ &= - \int_\Omega \int_0^T u \partial_t(\varphi \Delta w) \mathrm{d}t \mathrm{d}x = \langle \partial_t(\Delta u), \varphi w \rangle_{\mathcal{D}'(Q) \times \mathcal{D}(Q)}. \end{aligned}$$

  D'où $u'(t)(x) \equiv \partial_t(\Delta u(t,x))$ presque partout sur Q.

1.3.1 Quelques propriétés utiles

Proposition 1.9 (Commuter action et intégrale). Soient V un espace de Banach, $u \in L^1(0,T;V)$ et $\psi \in V'$. Alors on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$:

$$\left\langle \psi, \int_0^T u(t)\varphi(t)\mathrm{d}t \right\rangle_{V' \times V} = \int_0^T \langle \psi, u(t) \rangle_{V' \times V} \varphi(t) \mathrm{d}t.$$

Proposition 1.10 (Commuter action et dérivée). Soit $u \in W^{1,p}(0,T;L^1(\Omega))$ avec $1 \leq p \leq +\infty$. Alors l'application $t \mapsto \int_\Omega [u(t)](x)\mathrm{d}x$ est dans $W^{1,p}(0,T)$ et on a :

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u(t) \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{d}{dt} u(t) \mathrm{d}x.$$

Plus généralement, si $\ell : E \to F$ est linéaire et continue, alors pour tout $u \in W^{1,p}(0,T;E)$ on a :

$$\ell(u) \in W^{1,p}(0,T;F), \quad \text{et} \quad (\ell(u))' = \ell(u').$$

On a les résultats importants suivants :

Théorème 1.14. Si V' est séparable, alors V est séparable et on a :

$$(L^p(0,T;V))' = L^{p'}(0,T;V'), \quad \text{pour } p \geq 1.$$

De plus, on a la paire de dualité suivante :

$$\langle f, u \rangle_{L^{p'}(0,T;V') \times L^p(0,T;V)} = \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle_{V' \times V} \mathrm{d}t.$$

Pour $p > 1$, si V est séparable et réflexif, alors $L^p(0,T;V)$ est réflexif.

Remarque 1.5. Pour $u \in L^p(0,T;V)$ et $u' \in L^q(0,T;V')$, $\forall v \in V$, on a :

$$\frac{d}{dt}\langle u(\cdot), v \rangle = \langle u'(\cdot), v \rangle \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0,T[) \tag{1.4}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le crochet de dualité entre V et V'.

Théorème 1.15. Supposons que $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et que la dérivée (au sens de la définition 1.4) $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Alors :

i) Après avoir redéfini u sur un ensemble de mesure nulle, on a :

$$u \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega)).$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de T telle que :

$$\max_{t \in [0,T]} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \left(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \right).$$

ii) L'application :

$$t \longmapsto \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$$

est absolument continue et on a pour p.p. $t \in (0,T)$:

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} = 2\langle u'(t), u(t) \rangle.$$

Théorème 1.16. Soient $p, q \geq 1$, V_1, V_2 des espaces de Banach tels que $V_1 \hookrightarrow V_2$. Soit $u \in L^p(0,T;V_1)$ avec $u' \in L^q(0,T;V_2)$. Alors :

$$u \in \mathcal{C}([0,T];V_2).$$

De plus, il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de T telle que :

$$\max_{t\in[0,T]} \|u\|_{V_2} \leq C\left(\|u\|_{L^p(0,T;V_1)} + \|u'\|_{L^q(0,T;V_2)}\right).$$

Théorème 1.17 (Aubin-Simon). Soient $1 < p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$, V, E et F des espaces de Banach tels que :

$$V \hookrightarrow_c E \hookrightarrow F.$$

Soit $\{u_n\}_n$ une suite bornée dans $W^{1,p}(0,T;F)$ et dans $L^q(0,T;V)$. Alors, on peut extraire une sous-suite $\{u_{n_k}\}_k$ convergente dans $\mathcal{C}([0,T];F)$ et dans $L^q(0,T;E)$.

1.4 Opérateurs monotones

V désigne un espace de Banach, V' son dual topologique. $A : V \longrightarrow V'$, $u \mapsto Au$ est un opérateur.

1.4.1 Monotonie

Définition 1.15. Un opérateur $A : V \longrightarrow V'$ est dit monotone si :

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0, \quad \forall u, v \in V.$$

A est strictement monotone si

$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0, \quad \forall u, v \in V, u \neq v.$$

Remarque 1.6. Si A est strictement monotone alors A est monotone.

Proposition 1.11 (Inégalité de convexité). Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$, $p > 1$:

$$(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b)(a - b) \geq 0.$$

Démonstration. Considérons la fonction $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \frac{1}{p}|x|^p$. Cette fonction est différentiable et strictement convexe pour $p > 1$.

Le gradient de ϕ est donné par :

$$\nabla\phi(x) = |x|^{p-2}x.$$

Par convexité stricte de ϕ, pour tout $a \neq b$, on a :

$$\phi(b) > \phi(a) + \nabla\phi(a) \cdot (b - a).$$

De même,

$$\phi(a) > \phi(b) + \nabla\phi(b) \cdot (a - b).$$

En additionnant ces deux inégalités, on obtient :

$$0 > \nabla\phi(a) \cdot (b - a) + \nabla\phi(b) \cdot (a - b) = (\nabla\phi(b) - \nabla\phi(a)) \cdot (a - b).$$

Ainsi,

$$(\nabla\phi(a) - \nabla\phi(b)) \cdot (a - b) > 0.$$

En remplaçant $\nabla\phi$, on obtient :

$$\left(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b\right) \cdot (a - b) > 0.$$

Dans le cas où $a = b$, l'inégalité devient une égalité triviale ($0 = 0$).
Conclusion : Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^n$, $p > 1$,

$$\left(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b\right) \cdot (a - b) \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si $a = b$. □

1.4.2 Bornitude

Définition 1.16. Soient $(V, \|\cdot\|), (V', \|\cdot\|_*)$ deux espaces de Banach et $A : V \to V'$ un opérateur. On dit que A est un opérateur borné si l'image d'un borné dans V est borné dans V'. Autrement dit, pour tout $\rho > 0$, il existe $R > 0$ tel que :

$$\forall u \in V : \|u\| \leq \rho \Rightarrow \|Au\|_* \leq R.$$

1.4.3 Hémicontinuité

Définition 1.17. Soient $A : V \to V'$ un opérateur, (u_n) une suite de V et $u \in V$. On dit que A est continu si $u_n \to u$ dans V implique $Au_n \to Au$ dans V' lorsque $n \to \infty$. Autrement dit :

$$\text{si } \|u_n - u\| \to 0 \text{ alors } \|Au_n - Au\| \to 0.$$

Définition 1.18. Soit $A : V \to V'$ un opérateur. On dit que A est hémicontinu si :

$$\forall u, v, w \in V, \text{ la fonction } \lambda \mapsto \langle A(u + \lambda v), w\rangle$$

est continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Remarque 1.7. Si A est continu alors A est hémicontinu.

1.4.4 Coercivité

Définition 1.19. Soit $A : V \to V'$ un opérateur. On dit que A est coercif si et seulement si $\exists \zeta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = +\infty$ et $\langle A(u), u\rangle \geq \zeta(\|u\|)\|u\|$. Autrement dit :

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|} = +\infty.$$

1.5 Différentiabilité au sens de Gateaux

Définition 1.20. (Dérivée directionnelle) Soient w une partie de V et $J : w \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Si $u \in w$ et $v \in V$ sont tels que pour $t > 0$ assez petit on a $u + tv \in w$, on dit que J admet (au point u) une dérivée dans la direction v si

$$\lim_{t\to0^+} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t}$$

existe. On notera cette limite par J'_u.

Définition 1.21 (Différentiabilité au sens de Gateaux). Soit $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que J est différentiable au sens de Gateaux (G-différentiable) s'il existe une application linéaire et continue :

$$v \mapsto J'(u) \cdot v \quad \text{de } V \to \mathbb{R}$$

telle que

$$\lim_{t\to0^+} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \langle J'(u), v\rangle.$$

L'application J' est appelée la différentielle de J au sens de Gateaux.

Définition 1.22. Soit $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. On dit que f est convexe si $\forall (x, y) \in V^2$, $x \neq y$, $\forall \lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

Proposition 1.12. Soit la fonctionnelle :

$$J : V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto J(v) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i v|^p dx.$$

Si $v \mapsto J(v)$ est une fonctionnelle différentiable au sens de Gateaux sur V et convexe, alors l'application

$$J' : V \longrightarrow V', \quad u \mapsto J'(u),$$

est monotone et hémicontinue.

Démonstration. D'après la convexité de J :

$$J((1 - \Theta)u + \Theta v) \leq (1 - \Theta)J(u) + \Theta J(v), \quad \forall \Theta \in]0, 1[.$$

Donc :

$$\frac{1}{\Theta}(J(u + \Theta(v - u)) - J(u)) \leq J(v) - J(u).$$

$$\lim_{\Theta \to 0} \frac{J(u + \Theta(v - u)) - J(u)}{\Theta} \leq J(v) - J(u),$$

donc :

$$J'(u)(v - u) \leq J(v) - J(u).$$

En échangeant les rôles de u et v, et en ajoutant, on trouve :

$$(J'(u) - J'(v))(u - v) \geq 0. \quad \square$$

$\square$

Remarque 1.8. On a une propriété réciproque : si J est différentiable au sens de Gateaux et si $u \mapsto J'(u)$ est monotone, hémicontinue de $V \to V'$, alors J est convexe.

Chapitre 2

Problème parabolique non-linéaire avec des données régulières

On va étudier une équation parabolique non linéaire faisant intervenir lopérateur p-laplacien. Soient Ω un ouvert borné et régulier dans $\mathbb{R}^N, N > 1$, $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère le problème suivant Trouver $u : (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}$ qui satisfait

$$(P) \begin{cases} \partial_t u - \Delta_p u = f(u) & \text{dans } Q_T, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ u(0,x) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Dans létude de ce problème, on suppose les hypothèses suivantes

(H1) f est continue et appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$.

(H2) $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

On donne maintenant une définition de la solution faible de (P).

Définition 2.1. Une solution faible du problème (P) est une fonction $u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C([0,T];L^2(\Omega))$ avec $\partial_t u \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ qui satisfait

$$\int_{Q_T} \partial_t u \varphi dx dt + \int_{Q_T} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx dt = \int_{Q_T} f(u) \varphi dx dt, \tag{2.1}$$

pour tout $\varphi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$.

Notre but dans ce chapitre est détudier lexistence d'une solution faible du problème (P) en montrant le résultat suivant

Théorème 2.1. Sous les hypothèses **(H1)**, **(H2)**, le problème (P) admet une solution faible au sens de la définition 2.1.

Pour la démonstration de ce théorème, on utilise la méthode de Rothe. On considère la subdivision uniforme suivante : $0 = t^0 < t^1 < t^2 < \cdots < t^N = T$, $h = \frac{T}{N} > 0, t^n = nh$ pour tout $n \in \{0, 1, 2, \cdots, N\}$. On considère le schéma suivant

$$(P_n) \begin{cases} \frac{u^n - u^{n-1}}{h} - \Delta_p u^n = f(u^{n-1}) & \text{dans } \Omega, \\ u^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u^0 = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

On définit les fonctions suivantes pour $n \in \{1, 2, \cdots, N\}$, pour tout $t \in [t^{n-1}, t^n]$

$$\begin{cases} \tilde{u}_h(t) = \frac{u^n - u^{n-1}}{h}(t - t^{n-1}) + u^{n-1} \\ u_h(t) = u^n \end{cases}$$

Alors, il est facile de vérifier que $\tilde{u}_h$ et u_h satisfaisant

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u}_h - \Delta_p u_h = f(u_h(\cdot, -h)) & \text{dans } \Omega \times]h, T], \\ \tilde{u}_h = u_h = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ \tilde{u}_h(0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.1 Existence de la solution du problème (P_n) : Méthode de minimisation d'une fonctionnelle

Le problème (P_n) est un problème elliptique non linéaire avec des conditions aux limites homogènes. Pour montrer lexistence de la solution u^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on raisonne par récurrence. On sait déjà que $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ (daprès lhypothèse H2). On suppose alors que $u^{n-1} \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, et on montre que u^n existe et appartient à $L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour cela, il est convenable décrire le problème (P_n) sous la forme suivante

$$(P_h) \begin{cases} u - h\Delta_p u = g(x) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $g(x) = hf(u^{n-1}) + u^{n-1} \in L^\infty(\Omega)$ par lhypothèse de récurrence. Il est claire que

$$(P_h) \iff (P_n).$$

Tout dabord, on définit la solution faible du problème (P_h).

Définition 2.2. Une solution faible du problème (P_h) est une fonction $u \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ qui satisfait

$$\int_\Omega u\varphi dx + h \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega g(x)\varphi dx, \tag{2.3}$$

pour tout $\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section

Théorème 2.2. Le problème (P_h) admet une unique solution faible au sens de la définition 2.2.

Pour résoudre le problème (P_h), on applique la méthode de minimisation dune fonctionnelle. La fonctionnelle associée au problème (P_h) est la suivante

$$F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx + \frac{h}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega g(x)u dx, \tag{2.4}$$

F est bien défini sur lespace $E = L^2(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. On va montrer que F est différentiable et sa différentielle est donnée par

$$\langle DF(u), v\rangle = \int_\Omega uv dx + h\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx - \int_\Omega g(x)v dx, \ \forall v \in E. \tag{2.5}$$

Par conséquent tout point critique est évidemment une solution faible de (P_h), et le travail se simplifie à la recherche dun point critique de F. Le résultat suivant danalyse convexe nous donne un critère pour montrer que F admet un point critique

Théorème 2.3. Soient X un espace de Banach réflexif, $J : X \to \mathbb{R}$ une application satisfait

1. J est coercive i.e. $\lim_{\|u\|_X \to +\infty} J(u) = +\infty$.
2. J est faiblement semi continue inférieurement i.e. Pour tout suite $u_n \rightharpoonup u$ dans X, il existe une sous-suite $(u_{n_k})_k$ telle que

$$J(u) \leq \lim_{k\to+\infty} \inf J(u_{n_k}).$$

Alors J atteint son minimum sur X.

On commence par démontrer le résultat suivant

Proposition 2.1. L'espace $E = L^2(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} + \|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ est réflexif.

Démonstration. Comme les espaces $L^2(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$ sont réflexifs, alors lespace $X = L^2(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} + \|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ est aussi. On définit lopérateur suivant

$$\begin{aligned} T : \ & E \longrightarrow X \\ & u \longmapsto T(u) = (u, u) \end{aligned}$$

Il est claire que $\|T(u)\|_X = \|u\|_E$, doù T est une isométrie. Dautre part, $T(E)$ est un fermé dans X. En effet. Soit (u_n) une suite de E telle que $T(u_n) \to w := (u, v)$ dans X. Comme

$T(u_n) = (u_n, u_n)$, alors

$$T(u_n) \to w \iff \begin{cases} u_n \to u & \text{dans } L^2(\Omega), \\ u_n \to v & \text{dans } W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \implies \begin{cases} u_n \to u & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u_n \to v & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \nabla u_n \to \nabla v & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases}$$

Doù, par unicité de la limite, $w = (u, u) = T(u) \in T(E)$. Doù $T(E)$ est un sous espace fermé de X. Comme X est réflexif, alors $T(E)$ est aussi, et par conséquent E est aussi réflexif. □

Proposition 2.2. La fonctionnelle F est différentiable sur E est sa différentielle est donnée par

$$\langle DF(u), v\rangle = \int_\Omega uvdx + h\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v dx - \int_\Omega g(x)vdx, \ \forall u, v \in E. \tag{2.6}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} F: \ & E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & u \longmapsto F(u) = \tfrac{1}{2}\textstyle\int_\Omega u^2dx + \frac{h}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega g(x)udx \end{aligned}$$

Commençons par le premier terme. Soit $v \in E$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u+v)^2dx - \frac{1}{2}\int_\Omega u^2dx = \int_\Omega uvdx + \frac{1}{2}\int_\Omega v^2dx$$

On montre que $\frac{1}{2}\int_\Omega v^2dx = o(\|v\|_E)$. On a

$$\frac{\int_\Omega v^2dx}{\|v\|_E} = \frac{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \leq \frac{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} = \|v\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ lorsque } \|v\|_E \to 0.$$

Concernant le troisième terme $\int_\Omega g(x)udx$, il est linéaire, donc il suffit de montrer la continuité. On a $g \in L^\infty(\Omega)$, doù

$$\left|\int_\Omega g(x)udx\right| \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_E \leq C\|u\|_E.$$

Pour le deuxième terme $F_2(u) = \frac{h}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx$, on montre dabord que F_2 est G-différentiable. Cest à dire

$$\lim_{t\to 0}\frac{F_2(u+tv) - F_2(u)}{t} = \langle F_2'(u), v\rangle_{E'\times E} \tag{2.7}$$

$F_2'(u) \in E'$ est la différentielle de Gâteaux. On sait que lapplication $X \mapsto |X|^p$ définie de $\mathbb{R}^N$ sur $\mathbb{R}_+$ est différentiable et donc G-différentiable pour tout $p > 1$, et on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{|X+tY|^p - |X|^p}{t} = p|X|^{p-2}X \cdot Y, \ \forall X, Y \in \mathbb{R}^N$$

(avec $|X|^{p-2}X = 0$ pour $X = 0$). Par conséquent, on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} = p|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) \cdot \nabla v(x), \ \text{p.p. } x \in \Omega \text{ et} \forall u, v \in E. \tag{2.8}$$

On considère lapplication suivante

$$\begin{aligned} \psi : \ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \longmapsto |X+tY|^p, \ X, Y \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

avec $p > 1$. Cette application est dérivable sur $\mathbb{R}$ et satisfait daprès le théorème des accroissements finis

$$\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} = \frac{|X+tY|^p - |X|^p}{t} = p|X+\theta Y|^{p-2}(X+\theta Y) \cdot Y,$$

pour $0 < |\theta| < |t|$. Supposons que $|t| \leq 1$ et appliquons cette inégalité

$$\begin{cases} |a+b|^q \leq 2^{q-1}(|a|^q + |b|^q) & \text{si } q \geq 1, \\ |a+b|^q \leq |a|^q + |b|^q & \text{si } 0 < q < 1, \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \left|\frac{|X+tY|^p - |X|^p}{t}\right| & \leq p|X+\theta Y|^{p-1}\,|Y| \\ & \leq C(|X|^{p-1}\,|Y| + |Y|^p) \end{aligned}$$

Doù, on a p.p. $x \in \Omega$:

$$\left|\frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t}\right| \leq C(|\nabla u(x)|^{p-1}\,|\nabla v(x)| + |\nabla v(x)|^p) = h(x) \tag{2.9}$$

Par linégalité de Hölder, on a $h \in L^1(\Omega)$. Daprès (2.7) et (2.8), on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient (2.6). On en déduit que F_2 est G-différentiable sur E et

$$\langle F_2'(u), v\rangle_{E'\times E} = p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) \cdot \nabla v(x)dx.$$

(Il est facile de montrer que $F_2'(u)$ appartient à E'). Pour conclure la différentiabilité de F_2, il suffit de montrer la continuité de $F_2' : E \to E'$. En effet. Soit $A \subset E$ un ensemble

borné, i.e.

$$\|u\|_E \leq M,\ \forall u \in A.$$

On a pour $u, v \in A$

$$\begin{aligned} \|F_2'(u) - F_2'(v)\|_{E'} &\leq \sup_{\|w\|=1} \langle F_2'(u) - F_2'(v), w\rangle_{E'\times E} \\ &\leq \sup_{\|w\|=1} \int_\Omega |(\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) - \nabla v(x)|^{p-2}\nabla v(x)) \cdot \nabla w(x) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \leq \sup_{\|w\|=1} \int_\Omega |(\nabla u(x)|^{p-2} + \nabla v(x)|^{p-2})(|\nabla u(x) - \nabla v(x)|) \cdot |\nabla w(x)| dx & \text{si } p \geq 2, \\ \leq \sup_{\|w\|=1} \int_\Omega |\nabla u(x) - \nabla v(x)|^{p-1} \cdot |\nabla w(x)|\, dx & \text{si } 1 < p < 2, \end{cases}$$

Doù, par linégalité de Hölder, on obtient

$$\|F_2'(u) - F_2'(v)\|_{E'} \begin{cases} \leq 2Mc_p \|\nabla u - \nabla v\|_{L^p(\Omega)} & \text{si } p \geq 2, \\ \leq Mc_p \|\nabla u - \nabla v\|_{L^p(\Omega)} & \text{si } 1 < p < 2, \end{cases} \leq C \|\nabla u - \nabla v\|_E$$

Doù F_2' est uniformément continue sur E. Par conséquent F est différentiable et $DF(u)$ donné par

$$\langle DF(u), v\rangle = \int_\Omega uv dx + h\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx - \int_\Omega g(x) v dx,\ \forall u, v \in E.$$

Ce qui finit la preuve. □

Proposition 2.3. La fonctionnelle F définie sur E est coercive et faiblement semi continue inférieurement.

Démonstration. Pour la coercivité, on a lorsque $\|u\| \to \infty$, alors $\|u\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$ ou $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to \infty$. On a, en utilisant le fait que $g \in L^\infty(\Omega)$,

$$\left|\int_\Omega g(x) u dx\right| \leq C \int_\Omega |u| dx$$

En utilisant linégalité de Young : $|ab| \leq \epsilon |a|^p + c(\epsilon)|b|^p\ \forall \epsilon > 0$. avec linégalité de Poincaré, on obtient

$$\left|\int_\Omega g(x) u dx\right| \leq \epsilon C \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + c(\epsilon).$$

Choisissons $\epsilon C = \frac{\lambda}{2p}$ et remplaçons dans lexpression de F , on obtient

$$F(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C' \to +\infty$$

lorsque $\|u\|_E \to +\infty$.
Montrons maintenant que F est faiblement semi-continue inférieurement. Soit (u_n) une

suite de E faiblement convergente vers u. Doù (u_n) converge faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme ces deux derniers espaces sont uniformément convexe alors

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Et on a

$$\int_\Omega g(x)udx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g(x)u_n dx.$$

Donc

$$F(u) \leq \lim_{n\to\infty} \inf F(u_n).$$

□

2.1.1 Démonstration du théorème 2.2

Grâce aux propositions 2.1 et 2.3, on peut appliquer le théorème 2.3 sur l'opérateur F. D'où F admet un minimum global $u \in E$ et grâce à la proposition 2.6, ce minimum est une solution faible du problème (P_h).

Pour l'unicité, on suppose qu'il y a deux solutions $u, v \in E$ et on pose $w = u - v$. Alors $w \in E$ est une solution faible du problème

$$u - v - \lambda(\Delta_p u - \Delta_p v) = 0 \text{ dans } \Omega, \quad u - v = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

On multiplie l'équation par $u - v$ et on intègre par parties, on obtient

$$\int_\Omega (u-v)^2 dx + \lambda \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) \cdot (\nabla u - \nabla v)dx = 0$$

On a

$$\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) \cdot (\nabla u - \nabla v) \geq 0.$$

D'où $\int_\Omega (u-v)^2 dx \leq 0$. Ce qui implique que $u - v = 0$ sur Ω et par conséquent, on a l'unicité de la solution.

Il reste pour conclure, de démontrer que la solution $u \in L^\infty(\Omega)$. Comme $g \in L^\infty(\Omega)$, on pose $M = \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$. On a

$$(u - M) - (\Delta_p u - \Delta_p M) = g - M \leq 0.$$

D'autre part, on a $(u-M)^+ := \max\{u-M,0\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. On multiplie l'équation par $(u-M)^+$ et on intègre par parties, on obtient

$$\int_\Omega (u-M)^{+2} dx + \lambda \int_{\Omega^+} |\nabla u|^p dx \leq 0$$

où $\Omega^+ := \{u > M\}$. Ce qui implique que $\int_\Omega (u-M)^{+2} dx = 0$, d'où $(u-M)^+ = 0$ p.p. sur Ω. Par conséquent $u \leq M$ p.p. sur Ω. De la même manière, on montre que $u \geq -M$ p.p. sur Ω. Donc $u \in L^\infty(\Omega)$. Ce qui termine la preuve du théorème 2.2.

Corollaire 2.1. Le problème (P_n) admet pour tout entier $n \geq 1$ une solution faible unique u_n appartenant à $L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

2.2 Estimations a priori

Pour passer à la limite, on propose de démontrer quelques estimations sur $\{u_h\}$ et $\{\tilde{u}_h\}$ uniformes en h. Les estimations sont données par les propositions suivantes :

Proposition 2.4. $\{u_h\}_h$ et $\{\tilde{u}_h\}_h$ sont bornées dans $L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$ uniformément en h.

Démonstration. On multiplie l'EDP de (P_n) par hu^n, on intègre par parties sur Ω et on fait la somme de $n=1$ jusqu'à N, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \int_\Omega (u^n - u^{n-1}) u^n dx + h \sum_{n=1}^{N} \|\nabla u^n\|^p_{L^p(\Omega)} = h \sum_{n=1}^{m} \int_\Omega f(u^{n-1}) u^n dx.$$

Et on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \int_\Omega (u^n - u^{n-1}) u^n dx &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega (u^n - u^{n-1})^2 dx + \frac{1}{2} \int_\Omega (u^N)^2 dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_\Omega (u^0)^2 dx \geq \frac{1}{2} \int_\Omega (u^N)^2 dx - \frac{1}{2} \int_\Omega (u^0)^2 dx\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}h \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega f(u^{n-1}) u^n dx &\leq C(\varepsilon) h \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega |f(u^{n-1})|^{p'} dx + \varepsilon h \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega |u^n|^p dx \\ &\leq C'(\varepsilon) + \varepsilon h \sum_{n=1}^{N} \|u_h\|^p_{L^p(\Omega)} dx\end{aligned}$$

(par inégalité de Poincaré)

On substitue ces dernières estimations, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u^N)^2 dx + h\sum_{n=1}^{N} \|u^n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\int_\Omega (u^0)^2 dx + C + \varepsilon h \sum_{n=1}^{N} \|u_h\|^p_{L^p(\Omega)}$$
$$\leq C_1 + C\varepsilon h \sum_{n=1}^{N} \|u_h\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} dx$$

(car $u^0 = u_0 \in L^\infty(\Omega)$).

On choisit $\varepsilon = 1/2C$ et en observant que $h\sum_{n=1}^{N} \|u_h\|^p_{L^p(\Omega)} dx = \|u_h\|^p_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}$, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u^N)^2 dx + \frac{1}{2}\|u_h\|^p_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \leq C_1.$$

Ce qui implique que la suite $\{u_h\}_h$ est bornée dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ uniformément en h.

D'autre part, on a pour $t \in (t^{n-1}, t^n)$

$$|\tilde{u}_h(t)| \leq |u^n| + 2|u^{n-1}|$$

D'où

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla \tilde{u}_h|^p dxdt \leq Ch \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega \left(|\nabla u^n|^p + |u^{n-1}|^p\right) dx \leq 2C\|u_h\|^p_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + C'$$

Comme $\|u_h\|^p_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}$ est bornée, alors $\|\tilde{u}_h\|^p_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}$ est bornée uniformément en h. Ce qui finit la preuve. □

Proposition 2.5. $\{u_h\}_h$ est bornée dans $L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, et $\{\partial_t \tilde{u}_h\}_h$ est bornée dans $L^2(Q)$ uniformément en h.

Démonstration. Soit $t \in (0,T)$ et soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $t^{m-1} \leq t < t^m$. On multiplie l'EDP de (P_n) par $(u^n - u^{n-1})$, on intègre par parties sur Ω et on fait la somme de $n = 1$ jusqu'à m, on obtient

$$h\sum_{n=1}^{m} \int_\Omega \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{h}\right)^2 dx + \sum_{n=1}^{m} \int_\Omega |\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n \cdot (\nabla u^n - \nabla u^{n-1}) dx$$
$$= \sum_{n=1}^{m} \int_\Omega f(u^{n-1}) \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{h}\right) dx. \tag{2.10}$$

On a

$$h\sum_{n=1}^{m} \int_\Omega \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{h}\right)^2 dx = \int_0^{t^m} \int_\Omega |\partial_t \tilde{u}_h|^2 dxdt.$$

On a d'après l'inégalité de convexité

$$\sum_{n=1}^{m}\int_\Omega |\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n\cdot(\nabla u^n-\nabla u^{n-1})dx \geq \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla u^m|^p dx-\int_\Omega |\nabla u_0|^p dx\right)$$
$$=\frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla u_h(t)|^p dx-\int_\Omega |\nabla u_0|^p dx\right).$$

Finalement on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le fait que $f\in L^\infty(\Omega)$

$$\sum_{n=1}^{m}\int_\Omega f(u^{n-1})\left(\frac{u^n-u^{n-1}}{h}\right)dx \leq C+\frac{1}{2}\int_0^{t^m}\int_\Omega |\partial_t\tilde{u}_h|^2 dxdt.$$

En remplaçant ces trois dernières estimations dans (2.10), on obtient

$$\frac{1}{2}\int_0^{t^m}\int_\Omega |\partial_t\tilde{u}_h|^2 dxdt+\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_h(t)|^p dx\leq C'.$$

En prenant le sup sur $(0,T)$, on obtient que les suites $\{\partial_t\tilde{u}_h\}$, $\{u_h\}$ sont bornées respectivement dans $L^2(Q)$ et $L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, uniformément en h. □

Proposition 2.6. $\{u_h\}_h$ et $\{\tilde{u}_h\}_h$ sont bornées dans $L^\infty(Q)$ uniformément en h.

Démonstration. On définit la fonction suivante

$$v(t)=\|f\|_{L^\infty(\Omega)}t+\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ pour } t\in[0,T].$$

On a v satisfait

$$\begin{cases}\partial_t v-\Delta_p v &= \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ dans } Q\\ v(0) &= \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ sur } \Omega.\end{cases}$$

On montre par récurrence que $u^n\leq v^n$ sur Ω. En multipliant l'équation par $(u^n-v^n)^+\in W_0^{1,p}(\Omega)$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_\Omega (u^n-v^n)^{+2}dx\leq 0$$

d'où $u^n\leq v^n$ sur Ω. De la même manière, on montre que $u_h\geq -v$ sur Q. Comme $v\in L^\infty(Q)$, alors $u_h,\tilde{u}_h$ appartiennent à $L^\infty(Q)$ et sont bornés par une constante indépendante de h. □

Proposition 2.7. Il existe une constante $c>0$, telle que

$$\|u_h-\tilde{u}_h\|_{L^2(Q)}\leq ch.$$

Démonstration. On a pour tout $t \in (t^{n-1}, t^n)$

$$|\tilde{u}_h(t) - u_h(t)| \leq 2h|\partial_t \tilde{u}_h(t)|$$

D'où

$$\|\tilde{u}_h - u_h\|_{L^2(Q)} \leq 2h\|\partial_t \tilde{u}_h\|_{L^2(Q)} \leq Ch$$

car $\|\partial_t \tilde{u}_h\|_{L^2(Q)}$ est bornée indépendamment de h.

□

2.3 Passage à la limite : Existence de la solution faible

Les estimations obtenues permettent de passer à la limite et démontrer que la limite u de la suite u_h est la solution faible du problème (P).

Proposition 2.8. Il existe $u \in L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$ telle que : Après extraction éventuelle d'une sous-suite, on a

$$\tilde{u}_h, u_h \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ dans } L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$$

$$\partial_t \tilde{u}_h \rightharpoonup \partial_t u \text{ dans } L^2(Q)$$

quand $h \to 0$.

Remarque 2.1. Notons que cette convergence faible-$\star$ implique la convergence faible dans $L^p\big(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)\big)$.

Démonstration. D'après la proposition 2.5, les deux suites $\{\tilde{u}_h\}$ et $\{u_h\}$ sont bornées dans $L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$. Alors, après extraction éventuelle d'une sous-suite, on a

$$u_h \overset{\star}{\rightharpoonup} u \text{ dans } L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \text{ lorsque } h \to 0.$$

$$\tilde{u}_h \overset{\star}{\rightharpoonup} \tilde{u} \text{ dans } L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \text{ lorsque } h \to 0.$$

Pour terminer la preuve, montrons que $u = \tilde{u}$ p.p. sur Q. Comme $L^\infty(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \hookrightarrow L^p(0,T; L^p(\Omega)) \equiv L^p(Q)$, alors

$$\tilde{u}_h \rightharpoonup \tilde{u}, \quad u_h \rightharpoonup u, \text{ dans } L^p(Q)$$

quand $h \to 0$. Par conséquent

$$\tilde{u}_h \longrightarrow \tilde{u}, \quad u_h \longrightarrow u, \text{ dans } \mathcal{D}'(Q).$$

D'autre part, d'après la proposition 2.7

$$\|\tilde{u}_h - u_h\|_{L^2(Q)} \leq Ch \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Ce qui implique que $\tilde{u}_h - u_h \to 0$ dans $\mathcal{D}'(Q)$. Par unicité de la limite, on déduit que $u = \tilde{u}$ p.p. sur Q. D'autre part, comme $\{\partial_t \tilde{u}_h\}$ est bornée dans $L^2(Q)$, alors il existe une sous-suite notée encore $\{\partial_t \tilde{u}_h\}$ et $w \in L^2(Q)$ telle que

$$\partial_t \tilde{u}_h \overset{\star}{\rightharpoonup} w \text{ dans } L^2(Q).$$

Comme $\tilde{u}_h \longrightarrow u$ dans $\mathcal{D}'(Q)$, alors $\partial_t \tilde{u}_h \longrightarrow \partial_t u$ dans $\mathcal{D}'(Q)$. D'où $w = \partial_t u$ p.p. sur Q. □

Proposition 2.9. Après extraction éventuelle d'une sous-suite, on a

$$\tilde{u}_h, u_h \longrightarrow u \text{ dans } \mathcal{C}([0,T]; L^r(\Omega)) \text{ quand } h \to 0, \forall r \geq 1.$$

Démonstration. On applique le théorème d'Aubin-Simon. D'après les propositions 2.4 et 2.5, les suites $\{\tilde{u}_h\}$ et $\{\partial_t \tilde{u}_h\}$ sont bornées dans $L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$ et $L^2(Q) \equiv L^2(0,T; L^2(\Omega))$ respectivement. D'où, d'après l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega)$ $\{\tilde{u}_h\}$ est bornée dans $W_0^{1,q}(0,T; L^q(\Omega))$ avec $q = \min\{2,p\} < p*$. D'où, on peut appliquer le théorème d'Aubin-Simon avec $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ et $E = F = L^q(\Omega)$ et on en déduit que

$$\tilde{u}_h, u_h \longrightarrow u \text{ dans } \mathcal{C}([0,T]; L^q(\Omega)) \text{ quand } h \to 0.$$

Pour terminer la preuve, on montre que cette convergence est vraie pour tout $q > 1$. En effet, on a $\{\tilde{u}_h\}$ est bornée dans $L^\infty(Q)$ d'après la proposition 2.6. D'où on applique l'inégalité d'interpolation 1.2, on obtient

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{u}_h(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega)} \leq \sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{u}_h(t) - u(t)\|_{L^q(\Omega)} \times \|\tilde{u}_h - u\|_{L^\infty(Q)}$$

pour tout $r \geq q$. Comme le deuxième terme tend vers 0 et le troisième terme est borné, on en déduit que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{u}_h(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quand } h \to 0.$$

Concernant la suite $\{u_h\}$, on a pour tout $r \geq 2$

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_h(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega)} \leq \sup_{t\in[0,T]} \left(\|u_h(t) - \tilde{u}_h(t)\|_{L^r(\Omega)} + \|\tilde{u}_h(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega)}\right)$$

$$\leq \sup_{t\in[0,T]} \|u_h(t) - \tilde{u}_h(t)\|_{L^2(\Omega)} \times \|u_h(t) - \tilde{u}_h(t)\|_{L^\infty(Q)} + \sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{u}_h(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega)}$$

Passons à la limite quand $h \longrightarrow 0$, on obtient

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_h(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Ce qui termine la preuve. ■ □

Proposition 2.10. Après extraction éventuelle d'une sous-suite, on a

$$\tilde{u}_h, u_h \longrightarrow u \text{ dans } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \text{ quand } h \to 0.$$

Démonstration. Voir ([10] Remark 8.11) □

Preuve du théorème 2.1

Il reste maintenant de passer à la limite dans l'équation satisfaite par $\{u_h\}$ et $\{\tilde{u}_h\}$, pour déduire l'existence de la solution faible du problème (P). Rappelons l'équation approchée (2.2) :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u}_h - \Delta_p u_h = f(u_h(\cdot,-h)) & \text{dans } \Omega\times]h,T], \\ \tilde{u}_h = u_h = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ \tilde{u}_h(0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

La formulation faible associée est :

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t \tilde{u}_h v dt dx + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_h|^{p-2}\nabla u_h \cdot \nabla v dt dx = \int_0^T \int_\Omega f(u_h(-h)) v dt dx \tag{2.11}$$

pour tout $v \in \mathcal{D}(Q)$. D'après la proposition (2.8), on a

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t \tilde{u}_h v dt dx \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega \partial_t u v dt dx. \tag{2.12}$$

Concernant le deuxième terme, on a

— pour $1 < p \leq 2$

$$\int_0^T \int_\Omega \left||\nabla u_h|^{p-2}\nabla u_h - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{p'} \leq C \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_h - \nabla u|^p dt dx$$

— Pour $p > 2$

$$\int_0^T \int_\Omega \left||\nabla u_h|^{p-2}\nabla u_h - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{p'} \leq C \int_0^T \int_\Omega \left(|\nabla u_h|^{(p-2)p'} + |\nabla u|^{(p-2)p'}\right)$$

$$\times |\nabla u_h - \nabla u|^{p'} dtdx$$
$$\leq C \left(\int_0^T \int_\Omega (|\nabla u_h|^p + |\nabla u|^p) dtdx \right)^{(p-2)/(p-1)}$$
$$\times \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_h - \nabla u|^p dtdx \right)^{1/(p-1)}$$

En tenant en compte la proposition (2.10), on en déduit que

$$|\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h \longrightarrow |\nabla u|^{p-2} \nabla u \text{ dans } L^{p'}(Q).$$

D'où, on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h \cdot \nabla v dtdx \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dtdx \tag{2.13}$$

D'autre part, d'après le théorème de Lebesgue inverse et d'après la proposition (2.9), on a

$$u_h(\cdot, -h) \longrightarrow u \ p.p. \text{ sur } Q.$$

Comme f est continue, alors

$$f(u_h(\cdot, -h)) \longrightarrow f(u) \ p.p. \text{ sur } Q.$$

Comme f est bornée, on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega f(u_h(\cdot - h)) v dtdx \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega f(u) v dtdx \tag{2.14}$$

En substituant (2.12), (2.13) et (2.14) dans (2.11), on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t u v dtdx + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v dtdx = \int_0^T \int_\Omega f(u) v dtdx$$

D'où u est une solution faible du problème (P). Ce qui termine la preuve du théorème principal de ce chapitre.

Chapitre 3

Problème parabolique non linéaire avec conditions aux limites mixtes

Dans ce chapitre, nous allons considérer un problème parabolique non linéaire avec conditions aux limites mixtes (Dirichlet-Neumann). Après avoir donné la formulation variationnelle, nous allons démontrer l'existence et l'unicité d'une solution faible en se basant sur les techniques de Faedo-Galerkin combinées avec la méthode de monotonie.

3.1 Position du problème

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière Γ assez régulière, on désigne par u un vecteur $u = (u_1, \ldots, u_N)$. Soit $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ une partition de Γ, i.e. :

$$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$

On désigne par $Q = \Omega\times]0,T[$ le cylindre de $\mathbb{R}^N_x \times \mathbb{R}_t$, T fini et par Σ la frontière latérale de Q :

$$\Sigma = \Gamma\times]0,T[.$$

On suppose que mes $\Gamma_1 > 0$, et on pose $\Sigma_1 = \Gamma_1\times]0,T[$ et $\Sigma_2 = \Gamma_2\times]0,T[$.
Le problème traité dans ce chapitre consiste à trouver une fonction $u : Q = \Omega\times]0,T[\longrightarrow \mathbb{R}^N$ vérifiant :

$$(P)\begin{cases} \partial_t u + Au = f & \text{dans } Q_T, \quad (Eq) \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma_1, \quad (C1) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta_A} = \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\eta_A = h & \text{sur } \Sigma_2, \quad (C2) \\ u(0,x) = u_0 & \text{dans } \Omega. \quad (C3) \end{cases}$$

Où A est lopérateur défini par

$$Au = -\Delta_p u = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

Dans létude de ce problème, on suppose les hypothèses suivantes

(H1) $f \in L^{p'}(0, T, V')$.

(H2) $u_0 \in L^2(\Omega)$.

(H3) $h \in L^{p'}(\Sigma_2)$.

3.2 Formulation Variationnelle

Dans ce paragraphe, on démontre que le problème (P) est équivalent à un problème variationnel (PV).

Lemme 1. Sous les hypothèses (H.1) – (H.3), le problème (P) est équivalent au problème variationnel suivant :

$$\text{(PV)} \begin{cases} \text{Trouvez } u \in V, \\ (u', v) + a(u, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} h.v \, d\Gamma, \quad \forall v \in V, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{cases}$$

où :

$$V = \{u \in W^{1,p}(\Omega), \gamma_0 u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\},$$
$$a(u, v) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx.$$

Démonstration. Soit u une solution du problème (P). En multipliant l'équation (Eq) par $v \in W^{1,p}(\Omega)$, il vient :

$$(u', v) + (Au, v) = (f, v),$$

ou encore :

$$(u', v) - \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v \, dx = (f, v), \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega).$$

En utilisant la formule de Green, on obtient pour tout $v \in W^{1,p}(\Omega)$:

$$(u', v) + \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_\Gamma \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A v \, d\Gamma = (f, v).$$

En utilisant le fait que $\{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ est une partition de Γ, on en déduit :

$$\begin{aligned}(u', v) + \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_{\Gamma_1} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A v \, d\Gamma_1 \\ - \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A v \, d\Gamma_2 = (f, v).\end{aligned}$$

En posant $v = 0$ sur Σ_1, il en résulte :

$$(u', v) + \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta_A} v \, d\Gamma_2 = (f, v), \quad v \in V.$$

En prenant en considération la condition (C3) sur Γ_2, on obtient la formulation variationnelle :

$$(u', v) + \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx - \int_{\Gamma_2} h.v \, d\Gamma_2 = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

Reste à vérifier l'implication inverse : Soit u une solution variationnelle du problème (PV), on a :

$$(u', v) + a(u, v) = (f, v) + \int_{\Gamma_2} h.v \, \Gamma_2, \quad \forall v \in V.$$

En utilisant la formule de Green, il découle :

$$\begin{aligned}(u', v) - \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) v \, dx \\ + \int_\Gamma \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A v \, d\Gamma = (f, v) + \int_{\Gamma_2} h.v \, d\Gamma_2, \quad \forall v \in V.\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}(u', v) - \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v \, dx + \int_{\Gamma_1} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A v \, d\Gamma_1 \\ + \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A v \, d\Gamma_2 = (f, v) + \int_{\Gamma_2} h.v \, d\Gamma_2, \quad \forall v \in V. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

Comme $D(\Omega)$ est dense dans V, alors pour $v = \psi \in D(\Omega)$, on en conclut :

$$(u', \psi) - \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \psi \, dx = (f, \psi), \quad \forall \psi \in D(\Omega).$$

Ou encore sous forme :

$$(u', \psi) + (Au, \psi) = (f, \psi), \quad \forall \psi \in D(\Omega).$$

D'où l'équation :

$$u' + Au = f, \quad \text{p.p dans } Q.$$

Reste à vérifier les conditions (C2) – (C3) : Pour tout $v \in V$, on a $v = 0$ sur Γ_1. De plus, en remplaçant l'équation dans (3.1) :

$$\int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A v \, d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} h.v \, d\Gamma_2, \quad \forall v \in V.$$

En admettant que l'espace des traces sur Γ_2 est dense dans $L^p(\Gamma_2)$, on trouve :

$$\forall w \in L^p(\Gamma_2), \quad \int_{\Gamma_2} \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \eta_A w \, d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} h.v \, d\Gamma_2.$$

Ce qui donne :

$$\forall w \in L^p(\Gamma_2), \quad \int_{\Gamma_2} \frac{\partial u}{\partial \eta_A} w \, d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_2} h.v \, d\Gamma_2.$$

D'où il résulte que :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta_A} = h \quad \text{sur } \Gamma_2.$$

□

3.3 Existence et Unicité

3.3.1 Existence

Théorème 3.1. [Théorème d'existence] Sous hypothèses (H.1) – (H.3), le problème (P) admet au moins une solution u vérifiant :

$$\begin{aligned} u &\in L^p(0,T;V), \\ u &\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ \Delta_p u &\in L^{p'}(0,T;V'). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Remarque 3.1. L'expression $u(x,0) = u_o(x)$ a un sens. En effet, on doit utiliser l'équation (Eq), qui s'écrit :

$$u' = \frac{\partial u}{\partial t} = f + \Delta_p u. \tag{3.3}$$

Comme $u \mapsto \Delta_p u$ applique $V \longrightarrow V'$, on vérifie sans peine que :

$$\Delta_p u \in L^\infty(0,T;V').$$

On a $f \in L^{p'}(0,T;V')$ de sorte que l'équation (3.3) entraîne :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \in L^{p'}(0,T;V') + L^\infty(0,T;V').$$

D'où en particulier :

$$u' \in L^{p'}(0,T;V').$$

Ce qui montre grâce au Théorème 1.16, u est continue de $[0,T] \longrightarrow V'$ de sorte que u_o a un sens.

Démonstration de l'existence

La démonstration se fait en réalisant les trois étapes suivantes :

— **Étape 1 :** Construction des solutions ń approchées ż par la méthode de Faedo-Galerkin.

— **Étape 2 :** Établir, sur ces solutions approchées, des estimations a priori.

— **Étape 3 :** Passer à la limite, grâce aux propriétés de monotonie.

Étape 1 : Solution approchée

Comme l'espace d'étude est séparable, on utilise la méthode de Faedo-Galerkin, qui consiste à approcher l'espace V par une suite d'espaces de dimensions finies et donc approximer un problème par une suite de problèmes posés dans des espaces de dimensions finies.

D'après la proposition 1.6, il existe une suite ayant les propriétés suivantes :

- $w_i \in V, \forall i$,
- $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ une famille linéairement indépendante de V,
- $V_m = \langle\{w_1, \ldots, w_m\}\rangle$ espace engendré par la famille $\{w_1, \ldots, w_m\}$ est dense dans V i.e. $\overline{\bigcup_{m\geq 0} V_m} = V$, dim $V_m = m$.

On introduit $u_m(t)$ solution ń approchée ż du problème de la façon suivante : Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on cherche $u_m(t) = u_m$ dans V_m sous la forme :

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} K_{jm}(t) w_j, \tag{3.4}$$

vérifiant :

$$\left(\frac{d}{dt} u_m(t), w_i\right) + a(u_m(t), w_i) = (f(t), w_i) + (h(t), w_i)_{L^2(\Gamma_2)}. \tag{3.5}$$

Avec la condition :

$$u_m(0) = u_{om}, \quad u_{om} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{im}(t) w_i \longrightarrow u_o \text{ dans } L^2(\Omega), \text{ lorsque } m \longrightarrow \infty.$$

En utilisant les équations (3.4) et (3.5), il en résulte :

$$(P'_m) \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} K'_{jm}(t)(w_j, w_i) + a\left(\sum_{j=1}^{m} K_{jm}(t) w_j, w_i\right) = (f(t), w_i) + (h(t), w_i)_{L^2(\Gamma_2)}, & \forall t \in [0, T[. \\ K_{jm}(0) = \alpha_{j0}, & i, j = 1, \cdots, m. \end{cases}$$

Le système (P'_m) est un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires du premier ordre pour les fonctions réelles $t \mapsto K_{jm}(t)$ de $]0, T[$. On considère les fonctions :

$$K_m(t) = (K_{1m}(t), \ldots, K_{mm}(t)), \quad F(t) = ((f(t), w_1), \ldots, (f(t), w_m)),$$

$$H(t) = \left((h(t), w_1)_{L^2(\Gamma_2)}, \ldots, (h(t), w_m)_{L^2(\Gamma_2)}\right),$$

et les matrices

$$B = (w_j, w_i)_{1\leq i,j\leq m}, \quad A = (a(w_j, w_i))_{1\leq i,j\leq m}.$$

Comme la famille $\{w_1, \ldots, w_m\}$ est linéairement indépendante (i.e. $\det(w_j, w_i) \neq 0$), la matrice B est inversible, par conséquent le système (P'_m) est résoluble par rapport à $K_{jm}(t)$; alors $K_{jm}(t)$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}K_m(t) = -B^{-1}A(K_m(t)) + B^{-1}F(t) + B^{-1}H(t), & \forall t \in]0, T[. \\ K_{jm}(0) = \alpha_{j0}, & i, j = 1, \cdots, m. \end{cases}$$

Alors ce système admet au moins une solution locale u_m dans $C^1(0, t_m; V_m)$. t_m dépend de m, l'étape qui suit montre que $t_m = T$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Étape 2 : Estimation a priori

En multipliant (3.5) par $K_{jm}(t)$ et en faisant la somme sur j, on obtient :

$$\left(\frac{d}{dt}u_m(t), u_m(t)\right) + (A(u_m(t)), u_m(t)) = (f(t), u_m(t)) + \int_{\Gamma_2} h.u_m \, d\Gamma_2. \tag{3.6}$$

Cela définit $u_m(t)$ dans un intervalle $[0, t_m]$, $t_m > 0$. Mais on note que

$$(A(u), u) \geq \alpha \|u\|^p, \quad \alpha > 0, \tag{3.7}$$

et

$$\left(\frac{d}{d\sigma}u_m(\sigma), u_m(\sigma)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\sigma}|u_m(\sigma)|^2.$$

Alors, on déduit de (3.6) que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_m|^2 + \alpha\|u_m\|^p \leq (f, u_m) + \int_{\Gamma_2} h.u_m \, d\Gamma_2.$$

En intégrant sur $(0, t)$, il en résulte :

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p \, d\sigma \leq \int_0^t (f(\sigma), u_m(\sigma)) \, d\sigma + \int_{\Sigma_2} h(\sigma).u_m(\sigma) \, d\Sigma_2 + \frac{1}{2}|u_{om}|^2.$$

En valeur absolue en utilisant l'inégalité de Hölder, il vient

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p \, d\sigma \leq \int_0^t \|f(\sigma)\|_* \|u_m(\sigma)\| \, d\sigma + \int_0^t \|h(\sigma)\|_{L^{p'}(\Gamma_2)} \|u_m(\sigma)\|_{L^p(\Gamma_2)} \, d\sigma + \frac{1}{2}|u_{om}|^2.$$

Comme $u_{om} \in L^2(\Omega)$, on obtient

$$|u_{om}|^2 \leq C_1.$$

Et par conséquent, on a

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2+\alpha\int_0^t\|u_m(\sigma)\|^p\,d\sigma\leq\int_0^t\|f(\sigma)\|_*\|u_m(\sigma)\|\,d\sigma+\int_0^t\|h(\sigma)\|_{L^{p'}(\Gamma_2)}\|u_m(\sigma)\|_{L^p(\Gamma_2)}\,d\sigma+C_1.$$

En tenant en compte la continuité de la fonction trace, il résulte

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2+\alpha\int_0^t\|u_m(\sigma)\|^p\,d\sigma\leq\int_0^t\|f(\sigma)\|_*\|u_m(\sigma)\|\,d\sigma+C_2\int_0^t\|h(\sigma)\|_{L^{p'}(\Gamma_2)}\|u_m(\sigma)\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,d\sigma+C_1.$$

Comme $V\hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$, donc $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}\leq\|\cdot\|$, et par conséquent

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2+\alpha\int_0^t\|u_m(\sigma)\|^p\,d\sigma\leq\int_0^t\|f(\sigma)\|_*\|u_m(\sigma)\|\,d\sigma+C_2\int_0^t\|h(\sigma)\|_{L^{p'}(\Gamma_2)}\|u_m(\sigma)\|\,d\sigma+C_1.$$

Remarquons que d'après l'inégalité de Young, il en résulte :

$$a.b=(\varepsilon a).\frac{b}{\varepsilon}\leq\frac{\varepsilon^p}{p}a^p+\frac{\varepsilon^{-q}}{q}b^q,\quad\forall\varepsilon>0.$$

On aura alors

$$\int_0^t(f(\sigma),u_m(\sigma))\,d\sigma\leq\frac{\varepsilon^{-q}}{q}\int_0^t\|f(\sigma)\|_*^q\,d\sigma+\frac{\varepsilon^p}{p}\int_0^t\|u_m(\sigma)\|^p\,d\sigma.$$

En choisissant ε de sorte que $\frac{(\varepsilon)^p}{p}=\frac{\alpha}{4}$, on a :

$$\int_0^t(f(\sigma),u_m(\sigma))\,d\sigma\leq C_3\int_0^t\|f(\sigma)\|_*^q\,d\sigma+\frac{\alpha}{4}\int_0^t\|u_m(\sigma)\|^p\,d\sigma,\tag{3.8}$$

et

$$C_2\int_0^t\|h(\sigma)\|_{L^{p'}(\Gamma_2)}\|u_m(\sigma)\|\,d\sigma\leq C_2\frac{(\varepsilon)^{-q}}{q}\int_0^t\|h(\sigma)\|_{L^{p'}(\Gamma_2)}^q\,d\sigma+C_2\frac{(\varepsilon)^p}{p}\int_0^t\|u_m(\sigma)\|^p\,d\sigma.$$

En choisissant ε de sorte que $C_2\frac{(\varepsilon)^p}{p}=\frac{\alpha}{4}$, on a :

$$C_2\int_0^t\|h(\sigma)\|_{L^{p'}(\Gamma_2)}\|u_m(\sigma)\|\,d\sigma\leq C_4\int_0^t\|h(\sigma)\|_{L^{p'}(\Gamma_2)}^q\,d\sigma+\frac{\alpha}{4}\int_0^t\|u_m(\sigma)\|^p\,d\sigma.\tag{3.9}$$

De (3.8) et (3.9), on déduit

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2+\alpha\int_0^t\|u_m(\sigma)\|^p\,d\sigma\leq C_3\int_0^t\|f(\sigma)\|_*^q\,d\sigma+\frac{\alpha}{2}\int_0^t\|u_m(\sigma)\|^p\,d\sigma+C_4\int_0^t\|h(\sigma)\|_{L^{p'}(\Gamma_2)}^q\,d\sigma+C_1.$$

En utilisant les hypothèses (H.1) et (H.3), on conclut que

$$\frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \alpha \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p \, d\sigma \leq C_1 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p \, d\sigma + C_5.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}|u_m(t)|^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p \, d\sigma \leq C_6.$$

Alors

$$|u_m(t)|^2 \leq C_7,$$

$$\int_0^t \|u_m(\sigma)\|^p \, d\sigma \leq C_7.$$

D'où, l'on déduit que $t_m = T$ et que : (u_m) demeure dans un borné de $L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^p(0,T;V)$.

Étape 3 : Passage à la limite

On peut extraire une sous-suite (u_μ) de (u_m) telle que

$$u_\mu \to u \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible-*}, \tag{3.10}$$

$$u_\mu \to u \text{ dans } L^p(0,T;V) \text{ faible}, \tag{3.11}$$

$$u_\mu(T) \to \xi \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible}, \tag{3.12}$$

$$A(u_\mu) \to \chi \text{ dans } L^{p'}(0,T;V') \text{ faible}. \tag{3.13}$$

car $\|A(u_m)\| \leq c\|u_m\|^{p-1}$ et donc $A(u_m)$ demeure dans un borné de $L^{p'}(0,T;V')$.

Vérification des conditions initiales Introduisons $\tilde{u}_m(t), \tilde{A}(u_m(t)), \tilde{f}(t)$ prolongement de $[0,T]$ à $\mathbb{R}$ de $u_m(t), A(u_m(t)), f(t)$ respectivement telle que :

$$\tilde{u}_m(t) = \begin{cases} u_m(t) & \text{si } t \in]0,T[\\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Signifiant que c'est une distribution, voir l'équation (1.4), désigné par $u_m(t)$ associée à une fonction discontinue et sa dérivée vaut

$$\frac{d}{dt}u_m(t), \quad \forall t \in]0,T[.$$

En utilisant la formule établie dans la proposition 1.5, on obtient au sens de distribution :

$$\frac{d}{dt}\tilde{u}_m(t) = \frac{du_m(t)}{dt} + (\lim_{t\to 0^+} u_m(t) - \lim_{t\to 0^-} u_m(t))\delta_0 + (\lim_{t\to T^+} u_m(t) - \lim_{t\to T^-} u_m(t))\delta_T.$$

$$= \frac{du_m(t)}{dt} + u_m(0)\delta_0 - u_m(T)\delta_T.$$

Alors (3.5) donne

$$\left(\frac{d}{dt}\tilde{u}_\mu(t), w_i\right) + (Au_\mu(t), w_i) = \left(\tilde{f}(t), w_i\right) + (u_\mu, w_i)\delta(t-0) - (u_\mu(T), w_i)\delta(t-T). \quad (3.14)$$

On peut maintenant passer à la limite dans (3.14) avec $m = \mu$ et i fixé, d'où l'on déduit

$$\left(\frac{d}{dt}u(t), w_i\right) + (\tilde{\chi}, w_i) = (f(t), w_i) + (u_o, w_i)\delta(t-0) - (\xi, w_i)\delta(t-T), \quad \forall i,$$

et par conséquent

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} + \tilde{\chi} = f + u_o\delta(t-0) - \xi\delta(t-T). \quad (3.15)$$

Restreignant (3.15) à $[0, T]$, on déduit que

$$u' + \chi = f. \quad (3.16)$$

Donc $u(0)$ et $u(T)$ ont un sens et comparant à (3.15) on en déduit que :

$$u(0) = u_o \quad \text{et} \quad u(T) = \xi.$$

Démonstration de l'existence On aura donc démontré l'existence d'une solution, si l'on montre que

$$\chi = A(u). \quad (3.17)$$

$\forall u \in V; \exists \chi \in V'$ tel que

$$\begin{cases} u_\mu \to u; & \sigma(V, V'), \\ A(u_\mu) \to \chi; & \sigma(V', V). \end{cases}$$

La monotonie de l'opérateur $-\Delta_p$, résulte que

$$X_\mu = \int_0^T (A(u_\mu(t)) - A(v(t)), u_\mu(t) - v(t))\, dt \geq 0, \quad \forall v \in L^p(0, T; V). \quad (3.18)$$

Or de (3.5) résulte que

$$\int_0^T (A(u_\mu), u_\mu)\, dt = \int_0^T (f, u_\mu)\, dt + \frac{1}{2}|u_{o\mu}|^2 - \frac{1}{2}|u_\mu(T)|^2.$$

Et donc

$$X_\mu = \int_0^T (f, u_\mu)\, dt + \frac{1}{2}|u_{o\mu}|^2 - \frac{1}{2}|u_\mu(T)|^2 - \int_0^T (A(u_\mu), v)\, dt - \int_0^T (A(v), u_\mu - v)\, dt.$$

D'après (3.10) - (3.13), on a

$$\int_0^T (f, u_\mu)\, dt \to \int_0^T (f, u)\, dt,$$
$$\int_0^T (A(u_\mu), v)\, dt \to \int_0^T (\chi, v)\, dt,$$
$$\int_0^T (A(v), u_\mu)\, dt \to \int_0^T (A(v), u)\, dt.$$

D'après la proposition 1.2, on a

$$\liminf |u_\mu(T)|^2 \geq |u(T)|^2.$$

Alors, en prenant la $\limsup X_\mu$, on trouve

$$\limsup X_\mu \leq \int_0^T (f, u)\, dt + \frac{1}{2}|u_o|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 - \int_0^T (\chi, v)\, dt - \int_0^T (A(v), u - v)\, dt. \quad (3.19)$$

Mais, en multipliant (3.16) on déduit par des intégrations par parties sur $[0, T]$ que

$$\int_0^T (f, u)\, dt + \frac{1}{2}|u_o|^2 - \frac{1}{2}|u(T)|^2 = \int_0^T (\chi, u)\, dt.$$

Ce qui, joint à (3.18) et (3.19), donne

$$\int_0^T (\chi - A(v), u - v)\, dt \geq 0. \quad (3.20)$$

On utilise maintenant l'hémicontinuité pour montrer que (3.20) entraîne (3.17). On prend $v = u - \lambda w, \lambda > 0$, $w \in L^p(0, T; V)$ quelconque, alors (3.19) donne

$$\lambda \int_0^T (\chi - A(u - \lambda w), w)\, dt \geq 0.$$

Donc

$$\int_0^T (\chi - A(u - \lambda w), w)\, dt \geq 0. \tag{3.21}$$

Faisant $\lambda \to 0$ dans (3.21), c'est loisible d'après le théorème de Lebesgue 1.2, on en déduit

$$\int_0^T (\chi - A(u), w)\, dt \geq 0, \quad \forall w. \tag{3.22}$$

De même pour $v = u + \lambda w$, on obtient

$$-\lambda \int_0^T (\chi - A(u + \lambda w), w)\, dt \geq 0. \tag{3.23}$$

Donc

$$\int_0^T (\chi - A(u), w)\, dt \leq 0. \tag{3.24}$$

De (3.22) et (3.24), on peut facilement obtenir

$$(\chi - A(u), w) = 0.$$

Alors

$$\chi = A(u).$$

Ce qui prouve l'existence d'une solution u du problème (P).

3.3.2 Unicité

Soient u_1 et u_2 deux solutions du problème. Alors $w = u_1 - u_2$ vérifie

$$w' + A(u_1) - A(u_2) = 0, \quad w(0) = 0,$$

d'où

$$(w', w) + (A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2) = 0,$$

et grâce à la monotonie :

$$w' = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq 0,$$

donc l'application $t \mapsto |w(t)|^2$ est décroissante. Comme elle est positive et $|w(0)|^2 = 0$ alors $|w(t)|^2 = 0$, d'où $w = 0$, ce qui prouve l'unicité de la solution du problème (P).

Bibliographie

[1] H. Brézis, Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[2] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Universitext, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[3] L. C. Evans, Partial differential equations, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[4] T. Gallouët, R. Herbin, Mesure, Intégration, Probabilités Polycopié de cours July 13, 2009

[5] J. L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. 1969.

[6] J. Droniou Intégration et espaces de Sobolev à valeurs vectorielles, 2001.

[7] H. Le Dret, H. Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, Springer, Heidelberg, 2013.

[8] DANIEL LI , Cours danalyse fonctionelle, Ellipses marketing, Paris 2013

[9] N.S Papageorgiou, V.D Radulescu and D.D.Repovs, Nonlinear Analysis : Theory and Methods.Springer Monographs in Mathematics.

[10] Tomàs, Roubivcek. Nonlinear Partial Differential Equations with Applications, Birkhäuser Verlag Basel . Boston . Berlin, 2013.