REPUBLIQUE ALGERIENNE
DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
UNIVERCITE DE DR. YAHIA FARES DE
MEDEA

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUE ET INFORMATIQUE

Spécialité: Analyse Mathématique et Applications (AMA).

Projet de fin d'Etude de Master, sous le titre de:

Stabilisation et Estimation de l'état des Systèmes Dynamiques non Linéaires et Application

Présenté par:
ABBAD Mustapha

Date de Soutenance: 23/06/2022.

Devant les membres de jurées:

Président :	KRIMI MOHAMED	Maitre de Assistant A	UYFM
Examinateur :	MEKDACHE NOUREDDINE	Maitre de Assistant A	UYFM
Encadreur :	BIBI Hamza	Maitre de Conférences B	UYFM
Co-Encadreur :	BENTERKI ABDESSALEM	Maitre de Conférences B	UYFM

Année Universitaire : 2021-2022

Remerciement

Nous tenons d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force et la patience pour accomplir ce modeste travail.

En second lieu, je tiens à remercier mon encadreur Ms.BIBI Hamza et Ms. BENTERKI ABDESSALEM Pour leurs précieux conseils et leur aide durant toute la période de réalisation de ce travail. Je voudrais également les témoigner mon gratitude pour leur patience et leur soutien afin de mener mon projet de fin d'étude à bon port.

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à tous les professeurs qui nous ont enseigné et qui par leurs compétences nous ont soutenu dans la poursuite de nos études.

A ma famille et mes amis qui par leurs prières et leurs encouragements, j'ai pu surmonter tous les obstacles.

Enfin, je remercie tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail.

Dédicace

C’est avec un très grand honneur que je dédie mon travail :
A mes très chers parents qui m’ont guidé durant les moments les plus pénibles de ce long chemin, ma mère qui avait été à mes côtés et m’avait soutenir durant toute ma vie, et mon père qui avait sacrifié toute sa vie afin de me voir devenir ce qui je suis, merci mes parents.
A mes très chers frères et sœurs qui ont m’encourager, ils sont la seul raison qui m’avait ramener ici aujourd’hui.
A toute ma famille.
A tous mes amis, et tous mes collègues de promotion.

Notations:

- G : Semi groupe.
- $G*$: Semi groupe adjoint.
- $L^2(0,T,V)$: L'espace des (classes) de fonction f de $]0,T[$ a valeur V.
- V : L'espace de Hilbert.
- V' : Le duel de V.
- $L(0,T,V)$: Application linéaire.
- $\mathbb{R}^n$: L'espace Vectoriel de dimension n.
- $\mathbb{R}^m$: L'espace Vectoriel de dimension m.
- H^+ : La duel de H.
- A" : L'adjoint de A.
- $C^1(\mathbb{R}^n)$: Ensemble des fonctions continûment différentiables.
- rg ou $rang$: Rang.
- $\bigoplus$: La somme direct.
- x^T : Transposé de x.
- $L_f h$: La dérivée de lie de h dans la direction de h.
- ∇h : Le produit scalaire du gradient ∇h de h.
- $y^{(k)}$: La dérivée k^{ime} de y.
- $\lambda_{min}(P)$: Valeur propre minimale de P.
- $\lambda_{max}(P)$: Valeur propre maximale de P.
- $\|.\|$: La norme sur $\mathbb{R}^n$.
- $x = [x_1, \cdots, x_n] \in \mathbb{R}^n$: Vecteur d'état.
- $\dot{v}(t) = \dfrac{dn}{dx}$: Dérivée temporelle.
- $\grave{A}, \grave{B}, \grave{C}$: Les matrices.

Table Des Matières

Table Des Matières **6**

Liste des Figures **7**

Introduction **9**

1 Contrôlabilité et observabilité **11**
1.1 Contrôlabilité linéaire 11
1.1.1 Exacte et faible contrôlabilité 11
1.1.2 Caractérisations: 12
1.2 Observabilité linéaire 14
1.2.1 Exacte et faible observabilité: 14
1.2.2 Caractérisation: 15
1.3 CONTROLABILITE NON LINEAIRE : 18
1.4 OBSERVABILITE NON LINEAIRE 19

2 NOTION DE STABILITE **21**
2.1 Stabilisation: 21
2.1.1 Conditions nécessaires de Brockett: 21
2.2 Boucle fermé: 22
2.3 Les types de stabilité: 23
2.3.1 Stabilité des solutions: 23
2.3.2 Stabilité d'équilibre: 24
2.3.3 Stabilité globale et stabilité locale: 24
2.4 Inégalités linéaires matricielles: 29
2.4.1 Définition et intérets des LMIs: 29
2.4.2 Lemmes utiles pour les LMIs: 30

3 Observabilité et estimation de l'état des systèmes non linéaires **33**
3.1 L'observabilité: 33
3.1.1 Observabilité des systèmes linéaires: 34
3.1.2 Observabilité des systèmes non linéaires 35
3.2 Observateurs des systèmes linéaires: 37
3.2.1 Observateur de Luenberger: 37
3.2.2 Filtre de Kalman: 38
3.2.3 Observateur à entrée inconnue: 39
3.2.4 Stabilisation d'un système linéaire par retour d'état dynamique: 40

3.2.5 Application à la stabilisation locale d'un système non linéaire par retour dynamique de sortie: 41
3.3 Observateurs des systèmes non linéaires: 41
3.3.1 Observateur de Luenberger étendu: 41
3.3.2 Filtre de Kalman Etendu (EKF): 42
3.3.3 Observateurs à grand gain: 42

Bibliography **47**

Liste des Figures

2.1 Boucle Fermée. 23

3.1 Schéma d'un observateur. 34
3.2 Schéma de principe d'un observateur. 34
3.3 Schéma structurel de l'observateur de Luenberger. 38

Introduction

La théorie mathématique du contrôle est orientée vers l'étude des systèmes dynamiques. Contrôler un système c'est influencer son comportement en vu d'atteindre un objectif donné. Durant les dernières décennies cette théorie a gagneé une grande importance chez les ingénieurs, les mathématiciens, les scientifiques et autres chercheurs. Les exemples de problèmes de contrôle sont très nombreux et touchent un grand champ d'applications comme par exemple le suivi d'un véhicule dans l'espace, le contrôle de l'économie d'une nation, la fabrication de robots, le contrôle d'une épidémie ou d'une culture biologique, etc...

La dynamique d'un système est en général modélisée par une équation différentielle (système en temps continu) ou par une équation aux différences (système en temps discret).

Les systèmes en temps continu occupent une large place dans la littérature. Les systèmes discrets sont quant à eux d'un intérêt plus récent mais de plus en plus croissant. Ils ont une grande importance pratique. D'une part ils sont utilisés en tant que modèle approché pour l'étude des systèmes continus (échantillonnage et utilisation de calculateurs...)

Parmis les thèmes de la théorie du contrôle on trouve les problèmes de commandabilité, d'observabilité, de stabilisation, d'estimation de l'état.

Dans cette thèse on s'intéresse aux problèmes de la stabilité et de stabilisation par retour d'état, de certains systèmes dynamiques non linéaires en temps discret et continu.

Dans le cas des systèmes linéaires ces problèmes ont été largement étudiés, et une théorie complète est maintenant disponible dans la littérature. Quand des non linéarités dans le système sont évoquées, le problème est considérablement plus difficile et les questions sont loin d'être complètement résolues.

Dans tout ce qui suit le point d'équilibre sera l'origine de $\mathbb{R}^n$ et les systèmes considérés seront définis sur $\mathbb{R}^n$ ou sur un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{R}^n$.

CHAPITRE 1

Contrôlabilité et observabilité

PARTIE I: CONTROLABILITE ET OBSERVABILITE LINEAIRES

Systèmes considérés : [2]

On considère les systèmes décrits par l'équation différentielle opérationnelle:

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + Bu(t) & 0 < t < T \\ z(0) = z_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

Augmentés de l'équation de sortie:

$$Y = Cz \tag{1.2}$$

On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées :
- E, ν , et O sont des espaces de Hilbert séparables qui représentent respectivement les espaces, d'état, de contrôle et d'observation.
- B $\in$ L (E, O) et u $\in L^2$ (0, T; ν)
- A auto adjoint à résolvante compacte et engendre un semi groupe $(G(t))_{t\leq 0}$ de classe C^0 sur E. Avec ces hypothèses le système **1.1** admet une solution faible unique sur [0,T], donné par: $z(t) = G(t)z_0 + \int_0^t G(t-s)Bu(s)ds$

On suppose momentanément que $z_0 = 0$
Notons par H, l'opérateur linéaire borné défini par :

$$H : L^2(0,T;\nu) \to E$$
$$H(u) = \int_0^T G(T-s)Bu(s)ds$$

1.1 Contrôlabilité linéaire

1.1.1 Exacte et faible contrôlabilité

Définition 1.1 *Le système (1.1) est dit exactement contrôlable sur [0,T] si :*

$$\forall z_d \in E, \quad \exists u \in L^2(0,T,\nu) \quad tel\ que : \quad z(t) = z_d$$

Remarque 1.1 *La définition ci- dessus est équivalente à:*

$$ImH = E$$

Définition 1.2 *Soit $F \subset E$ un sous-espace de E, Le système **1.1** est dit exactement contrôlable dans F si:*

$$\forall z_d \in F, \quad \exists u \in L^2(0,T,\nu) \quad tel\ que: \quad z(T) = z_d$$

Remarque 1.2 *La définition précédente est équivalente à :*

$$F \subset ImH$$

Les éléments de E ne sont pas tous atteignables en général, On est conduit à définir une autre notion de contrôlabilité.

Définition 1.3 *Contrôlabilité faible Le système **1.1** est dit faiblement contrôlable sur [0,T] si pour tout z_d dans E:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u \in L^2(0,T;\nu) \quad tel\ que: \|z(T) - z_d\| \leqslant \varepsilon$$

1.1.2 Caractérisations:

a) Controlabilité exacte:

Le système (1.1) est exactement controlable sur [0, T] si:

$$\exists \gamma > 0 \ \ telque: \|z^*\|_{E^*} \leqslant \gamma \|B^*G^*(.)z^*\|_{L^2} \ \ pour\ tout \ \ z^* \in E^*$$

Cette caractérisation ramène donc le problème d'exacte controlabilité à celui d'expliciter une inégalité plus facile.

Proposition 1.1 *Soit H_t l'opérateur: $L^2(0,T;\nu) \to E$ défini par:*

$$H_t(u) = \int_0^t G(t-s)Bu(s)ds$$

Si pour tout $t \leqslant 0$, H_t est compact alors le système (1.1) n'est pas exactement contrôlable.

Conséquences:

1. Si G(t) est compact pour tout $t > 0$, alors le système (1.1) n'est pas exactement contrôlable.

2. Si B est compact alors le système (1.1) n'est pas exactement contrôlable.

b) Contrôlabilité faible :

On a l'équivalence entre:

1. Le système (1.1) est faiblement contrôlable sur [0,T].
2. $\overline{ImH} = E$.
3. $Ker(H^*) = Ker[H^*\ H) = 0$.
4. $z, G(s)Bu = 0 \quad , \forall s \in [0,T]\ et\ \forall u \in \nu \Rightarrow z = 0$.
5. Si le semi groupe $(G(t))_{t>0}$ est analytique alors on a:

$$\bigcup_{n \in N} \overline{Im(A^n G(s)B)} = E, \ \ \forall s \in [0,T]$$

Preuve 1.1 $1 \Leftrightarrow 2\ \ Et\ \ 1 \Leftrightarrow 3$ *immédiat.*
$3 \Leftrightarrow 4$

$$ker(H^*) = 0 \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (B^*G^*(s)\ z,\ u\ =\ 0 \\ \forall\ s\ \in\ [0,T]\ et\ \forall\ u\ \in\ \nu \end{cases} \quad \Rightarrow\ z\ =\ 0$$

D'où:

$$ker(H^*) = 0 \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (z,\ G(s)\ Bu) =\ 0 \\ \forall\ s\ \in\ [0,T]\ et\ \forall\ u\ \in\ \nu \end{cases} \quad \Rightarrow\ z\ =\ 0$$

$4 \Rightarrow 5$
Si non,

$$\exists z \neq 0, \exists s \in]0,T[\quad tel\ que :$$

$$<\ z, A^n\ G(s)\ Bu\ >=\ 0\ \ \forall n \in N\ et\ \forall u \in \nu$$

mais

$$<\ z, A^n\ G(s)\ Bu\ >=\ \frac{d^n}{ds^n} <\ z,\ G(s)\ Bu\ >, \forall n \in N$$

De l'analyticité on déduit que:

$$<\ z, G(s)\ Bu\ >=\ 0,\ \forall u \in \nu\ et\ \forall\ t \in [0,T]$$

$5 \Rightarrow 4$ ***si non,*** $\exists z \neq 0\ tel\ que$

$$<\ z, G(s)\ Bu\ >=\ 0,\ \forall\ s\ \in [0,T]\ et\ \forall u \in \nu$$

$$\frac{d^n}{ds^n} <\ z,\ G(s)\ Bu\ >=<\ z, A^n\ G(s)\ Bu\ >=\ 0$$

Et donc $\bigcup_n A^n\ G(s)\ Bu$ ***; n'est pas partout dense dans E.***

1.2 Observabilité linéaire

Souvent l'état d'un système distribué ne peut pas être directement mesuré, la question qui se pose est celle de pouvoir reconstruire un tel état à partir des mesures effectuées, c'est le problème de l'observabilité mais, connaissant la dynamique du système et la commande il suffit de reconstruire l'état initial z (0).
Il est nécessaire de connaître l'état initial pour démarrer tout algorithme de contrôle sur le système, habituellement on laisse le système en évolution libre pendant un certain intervalle de temps $[0, T_m]$ pendant lequel ou effectue des mesures par l'intermédiaire de capteurs.
Ensuite on utilise ces mesures pour la reconstruction de z (0) si les informations sur le système sont fournies alors on a:

$$Y(t) = CG(t)z(0) = K(t)z(0)$$

Donc le problème de l'observabilité est celui de l'existence d'un opérateur P;

$$P : \ L^2(0,T;O) \to E \ tel \ que$$
$$PY = \ z(0)$$

L'opérateur:

$$K(t) : E \to L^2 \ (0, T_m; O)$$

Est linéaire borné:

$$K^* : L^2 \ (0, Tm; O) \to E^*$$

Et défini par:

$$K^*z = \int_0^{T_m} C^*G^*z(t)dt$$

Comme l'état initial n'est pas toujours observable et qu'on peut observer des états aussi proche de z_0 que l'on veut. On est amener à définir une observabilité plus faible que l'exacte observabilité.

1.2.1 Exacte et faible observabilité:

Définition 1.4 ***(Observabilité exacte)***
Le système (1.1) augmenté de l'équation (1.2) est dit exactement observable sur $[0, T_m]$ *si :*

$$E^* \subset Im(K^*)$$

Définition 1.5 ***(Observabilité faible)***
Le système (1.1) augmenté de l'équation (1.2) est dit faiblement observable sur $[0, T_m]$ *si:*

$$ker(K) \ = \ 0$$

1.2.2 Caractérisation:

Caractérisation de l'exacte observabilité:

Le système (1.1) augmenté de l'équation (1.2) est exactement observable sur $[0, T_m]$ si:

$$\exists \gamma > 0 \; tel \; que : \; |z_0|_E < \gamma \|Kz_0\|_{L^2(0,Tm,O)} \; pour \; tout \; z_0 \in E$$

Caractérisation de l'observabilitéfaible :

On a l'équivalence entre:

1. (1.1), (1.2) faiblement observable.
2. $\overline{Im(K^*} = \overline{Im(K^*K)} = E^*$
3. $$\bigcup_{0 \leqslant t \leqslant T} \overline{Im(G^*(t)C^*} = E^*$$

Preuve 1.2 $(1) \Leftrightarrow (2)$ $immdiat \; car$:

$$\overline{Im(K^*)} = Ker(K)^{\perp}$$

$(1) \Leftrightarrow (3)$

$$Ker(K) = \{z \in E / C \; G(t) \; z = 0, \;\; 0 \leqslant t \leqslant T_m\} = 0$$

Mais:

$$C \; G(t) \; z = 0 \Rightarrow Pour \; tout \; z^* \in E^*$$
$$< z^*, C \; G(t) \; z > = < G^*(t) C^* z^*, z > = 0$$
$$\forall \, t \; \in [0, T_m], \;\; G^*(t) \; C^* z^* \in \; Ker(K)^{\perp}$$

Donc:

$$G^*(t) \; C^* z^* \; \in E^*$$

On considère l'opérateur auto adjoint:

$$N \; = \; K^* K : \;\; E \; \rightarrow \; E^*$$

Alors on a la propriété suivante:

Reconstruction de l'état initial:

Le système (1.1) augmenté de l'équation (1.2) est exactement (respectivement faiblement) observable sur $[0, T_m]$ si l'opérateur N est défini positif (resp. positif).

Preuve 1.3 *Soit $N = K^*K$ défini positif alors:*

$$\exists \; k > 0 \; tel \; que : \; (N \; z, z) \; \geqslant \; k \|z\|^2 \; pour \; tout \; z \; de \; E$$

$$\Leftrightarrow (\int_0^{T_m} \; G^*(t) C^* C G(t) \; Z dt, \; Z) \geqslant \; k \|Z\|^2$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{T_m} \; (CG(t) \; z, CG(t) \; z) dt \; \geqslant \; k \; Z^2$$

$\Leftrightarrow \int_0^{T_m} \|K(t)z\|_0^2\, dt = \|K\, z\|^2_{L^2(0,T_m,O)} \geqslant k\|z\|^2$

Le système est exactement observable d'après la propriété de caractérisation;

- *Dans le cas ou N est positif:*

$$(N\, z,\, z) \geqslant 0,\ \forall\, z \in E\ et\ (N\, z,\, z) = 0 \ \Rightarrow\ z = 0$$

Si K z(0) alors:

$$\int_0^{T_m} \|k(t)\, z(0)\|^2\, dt = \int_0^{T_m} (CG(t)\, z(0), CG(t)\, z(0))dt = 0$$

Soit: $(N\, z(0), z(0)) = 0\ et\ donc\ z(0) = 0$
C'est-à-dire le système est faiblement observable d'après la propriété de caractérisation.

Dans les deux cas l'opérateur N^{-1} existe et on peut alors déterminer l'état z(0) : $z(0) = (K^*K)^{-1}K^*y$
Soit encore:

$$z(0) = (\int_0^{T_m} G^*(t)C^*CG(t)\, dt)^{-1} \int_0^{T_m} G^*(t)C^*Y(t)dt$$

Et donc l'opérateur de reconstruction n'est autre que:

$$P = (K^*K)^{-1}K^* = K^+$$

Ou K^+ est appelé pseudo inverse de K.

Proposition 1.2 *Si le système (1.1) augmenté de (1.2) est exactement observable sur* $[0, T_m]$ *alors:*

$$P : L^2(0, T_m, O) \to E$$
$$Y \to z(0)$$

Est continue.

Preuve 1.4 *(1.1), (1.2) exactement observable;*

$$\Leftrightarrow \exists k > 0\ tel\ que\ : (K^*Kz, z) \geqslant k\|z\|^2\ pour\ tout\ z \in E$$

On sait que T est inversible et d'inverse continu si et seulement si:

$$\exists m > 0\ tel\ que :\ m\|z\| \leqslant \|Tz\|$$

Or: $\|K^*Kz\|.\|z\| \geqslant (K^*Kz, z) \geqslant k\|z\|^2$
D'où: $\|K^*Kz\| \geqslant k\|z\|$

La proposition précédente montre que pour un système exactement observable la détermination de z (0) à partir de la formule:

$$z(0) = (K^*K)^{-1}K^*Y$$

Est satisfaisante puisque z (0) dépend continûment des mesures effectuées. Une mesure affectée d'une faible erreur ne conduit pas à un état initial erroné.

PARTIE II : CONTROLABILITE ET OBSERVABILITE NON LINEAIRES

Introduction:

Dans les problèmes réels, souvent les modèles sont non linéaires. L'étude des notions de Contrôlabilité et d'observabilité de tels systèmes est beaucoup plus délicate s'il faut tenir compte des effets de la non linéarité.
Ces deux notions n'ont plus qu'un caractère local et le contrôle qui permet d'atteindre un état désiré n'est plus explicite.

L'idée ici pour analyser ces systèmes et d'essayer de joindre les résultats de la théorie linéaire à certains théorèmes du point fixe. [2]

Considérons donc un modèle de base de la forme:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,u,t) \\ x(0) = x_0 \\ y = h(x,u,t) \end{cases} \tag{1}$$

L'approche est la suivante:
On choisit dans les deux cas un contrôle $\overline{u}$ et un état initial $\overline{x_0}$ pour résoudre le système et obtenir les solutions $\overline{x}$ et $\overline{y}$.
Posons:

$$\begin{gathered} x_0 = \overline{x_0} + z_0 \\ x = \overline{x} + z \\ u = \overline{u} + \hat{u} \\ y = \overline{y} + \hat{y} \end{gathered}$$

En linéarisant autour de $(\overline{x}, \overline{u}, \overline{y})$ on a:

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt}(t) = A(t)z(t) \ + \ B(t)\hat{u}(t) \ + \ N\left(z(t), \hat{u}(t), t\right) \\ z(0) = z_0 \\ \hat{y}(t) = C(t)z(t) \ + \ D(t)\hat{u}(t) \ + \ M\left(z(t), \hat{u}(t), t\right) \end{cases} \tag{2}$$

Où A, B, C et D sont des opérateurs linéaires on suppose pour simplifier que A et B sont indépendants de t et qu'on a les hypothèses suivantes:

(H_1) : E, ν, O Sont des espaces de Hilbert séparables désignant l'espace d'état, de contrôle et d'observation.

(H_2) : $u \in L^2(0,T;E), \ \ B \in L(\nu, E), \ \ C \in L(E,O)$

(H_3) : A, engendre un semi groupe fortement continu $(G(t))_{t \geqslant 0}$ sur E.

1.3 CONTROLABILITE NON LINEAIRE :

Il faut rappeler que le but est d'amener l'état du système de x_0 à x_d.

Dans ce cas $\overline{x_0}$ est supposé égal à x_0 et $\overline{u}$ est une première tentative de contrôle pour amener le système à x_d.

Supposons donc que les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) : sont vérifiées et que $z_0 = 0$ et on s'intéresse à déterminer û tel que:

$$z(t) = z_{\hat{u}}(T) = x(T) - x_d = z_d$$

La première équation dans (2) est considérée au sens faible c'est-à-dire (3) :
$z(t) = \int_0^t G(t-\tau)\, B\hat{u}(\tau)d\tau \; + \; \int_0^t G(t-\tau)\, N\,(z(\tau), \hat{u}(\tau), \tau)d\tau$
si: $z(T) = z_d$ alors:
$z_d = \int_0^T G(T-\tau)\, B\hat{u}(\tau)d\tau \; + \; \int_0^T G(T-\tau)\, N\,(z(\tau), \hat{u}(\tau), \tau)d\tau$

On consideré de nouveau l'opérateur H definit par:

$$H : L^2(0, T, IR^P) \to E$$
$$\hat{u} \to H\hat{u} = \int_0^T G(T-\tau)\, B\hat{u}(\tau)d\tau$$

Et son pseudo inverse H^+
Si: $z_d - \int_0^T G(T-\tau)\, N\,(z(\tau), \hat{u}(\tau), \tau)d\tau \; \in \; Im(H)$

On peut définir implicitement un contrôle u^* par:

$$u^* = H^+(z_d - \int_0^T G(T-\tau)\, N\,(z(\tau), u^*(\tau), \tau)d\tau)$$

Et l'équation (3) devient (4):

$$z(t) = \int_0^t G(t-\tau)Bu^*(\tau)d\tau + \int_0^t G(t-\tau)N\,(z(\tau), u^*(\tau), \tau)d\tau$$

Si le couple (z, u^*) existe alors $z(T) = z_d$. Le problème de la contrôlabilité est donc ramené à celui de la détermination d'un point fixe pour (3) et (4) il faut tenir compte de certaines considérations techniques liées à ce problème:

- Il faut choisir l'espace auquel appartient (z, u^*) , on le prendra égal à: $C(0, T; E) \times L^2(0, T; \nu)$
- Il faut définir une topologie sur $Im(H)$ pour laquelle cet espace est de Banach qu'on notera E alors: $H^+ \in L(E', L^2(0, T; \nu))$
  On supposera aussi que:
  $z_d - \int_0^T G(T-\tau)\, N\,(z(\tau), u^*(\tau), \tau)d\tau) \in E'$
- En dimension infinie, la non linéarité N peut ne pas appliquer

$$C(0, T; E) \times L^2(0, T; \nu) \times [0, T] \; dans \; C(0, T; E)$$

Alors on supposera que N est à valeurs dans:
$L^r(0,T;E'')\ avec\ r \geqslant 1\ et\ E \subset E''$
On supposera aussi que le semi- groupe $(G(t))_{t\geqslant 0}$ vérifie :
$\int_0^t\ G(t-\tau)\hat{z}(\tau)d\tau \in C(0,T;E)\ pour\ tout\ \hat{z}\ dans\ L^r(0,T;E'')$

- B n'est pas nécessairement borné. Avec ces précisions on peut appliquer certains théorèmes du point fixe.

Théorème 1.1 *Supposons qu'il existe des constantes, α, β, γ telles que:*

a) $\| \int_0^t G(t-\tau)\ Bu(\tau)d\tau\|_{C(0,T;E)}\ \leqslant\ \alpha\|u\|_{L^2(0,T;\nu)}$

b) $\| \int_0^T G(T-\tau)\ z(\tau)d\tau\|_E\ \leqslant\ \beta\|z\|_{L^r(0,T;E'')}$

c) $\| \int_0^t G(t-\tau)\ z(\tau)d\tau\|_{C(0,T;E)}\ \leqslant\ \gamma\|z\|_{L^r(0,T;E'')}$

d) L'application:
$C(0,T;E) \times L^2(0,T;\nu) \times [0,T] \to L^r(0,T;E'')$
$(z(.),u(.),.) \to N\ (z(.),u(.),.)$

Est une contraction au voisinage de l'origine alors il existe un réel d tel que pour tout $z_d : \|z_d\| < d$
(3) et (4) admettent un point fixe.

Pour la preuve du théorème, il faut utiliser le théorème du point fixe de Banach.

1.4 OBSERVABILITE NON LINEAIRE

L'observabilité consiste à déterminer l'état $x(t)$ du système à partir des entrées – sorties, l'approche est la suivante:

Dans ce cas et avec les mêmes notations précédentes, On pose $\overline{u} = u$ c'est-à-dire $\hat{u} = 0$ et on se fixe $\overline{x}_0$, alors $\overline{x}$ sera en fait une première estimation de l'état x à déterminer.
On suppose que les hypothèses (H_1), (H_2), (H_3) : sont vérifiées, On s'intéresse à la construction de l'état z(t) :

$$z(t) = \int_0^t G(t-\tau)\ \beta\hat{u}(\tau)d\tau\ +\ \int_0^t G(t-\tau)\ N\ (z(\tau),\hat{u}(\tau),\tau)d\tau\ +\ G(t)z_0$$

si $\hat{u} = 0$ *alors le système (2) devient:*

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dt}(t) = A(t)z(t)\ +\ N(z(t),t) \\ z(0) = z_0 \\ \hat{y}(t) = C(t)z(t)\ +\ M\ (z(t),t) \end{cases}$$

Sa solution vérifie :

$$z(t) = G(t)z_0\ +\ \int_0^t G(t-\tau)\ N\ (z(t),\tau)d\tau$$

On va supposer que la partie linéaire (A, C) est exactement observable ce qui revient à dire (d'après la théorie linéaire) que $\exists\alpha > 0$ tel que pour tout x_0 dans E:

$$\begin{cases} \|Kx_0\|_y \geqslant \alpha\|x_0\|_E \\ [(Kx_0)(t) = CG(t)x_0] \end{cases} \qquad (*)$$

Si la condition est trop forte on peut agrandir l'espace d'observation ($\overline{y} \supset y$) l'état peut alors être mis sous la forme suivante:

$$z(t) = G(t)K^+[\hat{y}(.) - M(z(.),.) - C\int_0^. G(.-\tau)\ N\ (z(\tau),\tau)d\tau] + \int_0^t G(t-\tau)\ N\ (z(\tau),\tau)d\tau \qquad (5)$$

$$K^+ = (K^*K)^{-1}K^*$$

Désigne le pseudo- inverse de K nous avons le résultat suivant:

Théorème 1.2 *Supposons qu'il existe α, β, γ telles que :*

a) *La relation (*) précédente est vérifiée (i.e) la partie linéaire est exactement observable.*

b) $\|C\int_0^. G(.-\tau)\ \hat{z}(\tau)d\tau\| \ \leqslant\ \beta\|\hat{z}\|_{L^r(0,T;E'')}$

c) $\|\int_0^. G(.-\tau)\ \hat{z}(\tau)d\tau\|_{C(0,T;E')} \ \leqslant\ \gamma\|\hat{z}\|_{L^r(0,T;E'')}$

d) *Les applications:*

$$C(0,T;E)\times[0,T] \to L^r(0,T;E'')$$
$$(z(.),.) \to N\ (z(.),.)$$
et
$$C(0,T;E)\times[0,T] \to Y$$
$$(z(.),.) \to M\ (z(.),.)$$

Sont contractantes au voisinage de l'origine alors il existe un réel d tel que pour tout $\hat{y}$ vérifiant: $\|\hat{y}\|_{\overline{Y}} < d$
(5) admet un point fixe unique solution de (2)

CHAPITRE 2

NOTION DE STABILITE

2.1 Stabilisation:

Revenons au système contrôlé: [6]

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x,u) \\ x \in U, u \in \mathcal{U} \end{cases} \tag{2.1}$$

Où U est un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$, $u \subset \mathbb{R}^m$ et $X : U \times \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 (resp. C^∞, C^w) tel que X(0, 0) = 0.

Définition 2.1 *On dira que (2.1) est stabilisable s'il existe un feedback $u = u(x)$ tel que le champ $X(x, u(x))$ est au moins continu et le système bouclé:*

$$\dot{x} = X(x, u(x))$$

Admette l'origine comme point d'équilibre asymptotiquement stable.

Rappelons que le problème de stabilisation est complètement résolu pour les systèmes linéaires $(X(x,u) = Ax + Bu)$ mais c'est loin d'être le cas pour les sustèmes bilinéaires.

$$\dot{x} = Ax + uBx$$

On va rappeler les principaux résultats (essentiellement ceux qu'on utilisera par la suite) qui datent des quinze dernières années.

2.1.1 Conditions nécessaires de Brockett:

Le théorème suivant dù à Brockett donne des conditions nécessaires de stabilisation.

Si le système (2.1) admet un feedback stabilisateur de classe C^1 dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$ alors:

- Le système linéarisé n'admet pas de modes incontrôlable associés à des valeures propres strictement positives.

- Il existe un voisinage N de (0, 0) tel que pour tout $\xi \in N$, il existe un contrôle $u_\xi(.)$ défini sur $[0, +\infty[$ qui ramène le système de l'état $x = \xi$ en $t = 0$ à l'état $x = 0$ en $t = \infty$. En d'autres termes, si $x(t)$ est une solution de $\dot{x} = X(x, u_\xi)$ vérifiant $x(0) = \xi$ alors:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0$$

- L'application:

$$\gamma : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$
$$(x, u) \mapsto X(x, u)$$

est surjective sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^n$.

2.2 Boucle fermé:

L'automaticien, lui, cherche un contrôle (ou commande) impose une loi de commande (c'est en ce sens qu'il est actif) pour réinjecter la sortie dans le système: C'est la boucle fermée.

On considère toujours un système donné par son équation d'état et un ensemble de contrôles. On applique le contrôle au système.

L'équation d'état retourne une fonction d'état (contrôlée). On introduit alors une loi de commande qui permet d'exprimer la fonction de contrôle précisément en fonction de cet état.

L'état du système est pris en compte à chaque instant pour déterminer « en temps réel » la commande [4].

Le contrôle est alors appelé contrôle feedback. Cette stratégie est schématisée par la figure suivante:

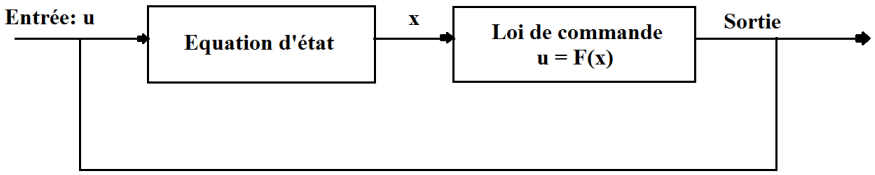


Figure 2.1: Boucle Fermée.

2.3 Les types de stabilité:

2.3.1 Stabilité des solutions:

Considérons le cas général d'un système d'équations différentielles autonomes:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Où : $x \in \mathbb{R}^n, F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; notons que le problème (2.2) est un problème aux valeures initiales, la solution qui passe par x_0 ; au temps t_0 s'écrit donc $x(t; x_0; t_0)$ avec $x(t_0; x_0; t_0) = x_0$ cette solution étant déterministe à cause des théorèmes d'existence et d'unicité. L'équation (2.2) modélise un très grand nombre de phénomènes dans des domaines très varié. Physiquement parlant, une solution est dite stable, si déplacée de sa position d'équilibre, elle tend à y revenir, en revanche, elle est dite instable si elle tend à s'en écarter d'avantage; cette définition qui est claire pour la majorité des systèmes physiques, apparait grossière d'un point de vue mathématique et pose une question importante: comment juger les solutions qui sont à limite de la stabilité? Pour répondre à cette question, nous allons introduire la définition exacte de la stabilité selon Lyapunov, en considérant que $\tilde{x}_0$ est une perturbation de $x_0, x(t, \tilde{x}_0)$ étant par conséquent la solution perturbée.

Définition 2.2 *(Stabilité au sens de Lyapunov)*

La solution $x(t; x_0)$ de (2.2) est stable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il éxiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\|\tilde{x}_\varepsilon - x_0\| < \delta \longrightarrow \|x(t; x_0) - x(t; \tilde{x}_0)\| < \varepsilon, \ \forall t \in \mathbb{R}^+$.

Puisque la solution à tout instant dépend d'une manière continue des condition initiales, cette définition suggère que, avec une perturbation suffisamment petite, les solutions restent proches dans tout le futur. Cette définition a un aspect local et s'interesse au comportement au voisinage de l'équilibre sans prédire à priori de quel ordre de grandeur δ peut étre choisi. Si de plus, la solution perturbée converge vers la solution non perturbée, de manière qu'elles deviennent confondues quand le temps tend vers l'infini, on parle d'une notion de stabilité plus forte.

Définition 2.3 *(Stabilité asymptotique)*

La Solution $x(t; x_0)$ de (2.2) est asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe $r(x_0) > 0$ tel que $\|\tilde{x}_0 - x_0\| < r(x_0) \longrightarrow \lim \|x(t; x_0) - x(t; \tilde{x}_0\| = 0$ quand $t \to \infty$

Il est claire que cette définition a aussi un aspect local, du fait que le choix de r ne peut se faire que localement. Notons que la notion de stabilité ou d'instabilité d'un système n'est pas adéquate, on parle alors de la stabilité de solutions, en raison du fait que des solutions stables et/ou instables peuvent exister simultanément pour un système donné.

2.3.2 Stabilité d'équilibre:

On s'interesse le plus souvent à l'étude de la stabilité de solutions particulières appelées positions d'équilibre. Ce sont des solutions constantes $x(t; x_{eq}) = x_{eq}$, vérifiant $F(x_{eq}) = 0$; les définitions précédentes de la stabilité sont valables, dans ce cas, avec des perturbations proches de l'équilibre. un système non linéaire quelconque peut avoir plusieurs positions d'équilibre qui peuvent étre stables ou instables. Dans certaines situations, on exige la stabilité exponontielle de l'équilibre qui est plus forte que la stabilité asymtotique et est définie comme suit:

Définition 2.4 *Le point d'équilibre x_{eq} est dit exponentiellement stable s'il existe des constantes α, γ, r telles que $\|x_0 - x_{eq}\| < r \longrightarrow \|x(t, x_0) - x_{eq}\| \leq \gamma e^{-\alpha} t \|x_0 - x_{eq}\|$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Dans ce cas, on s'interesse le plus souvent à la détermination de α; un exemple simple de la stabilité exponentielle est donné par un système linéaire possédant des valeurs propres à parties réelles strictement négatives; l'équilibre est asymptotiquement stable et, de plus, il est exponentiellement stable.*

Remarque 2.1 *Dans le cas scalaire, si une solution issue d'une perturbation proche de x_{eq} reste au voisinage de x_{eq} quand $t \longrightarrow +\infty$; l'équilibre est alors asymptotiquement stable, la mention "Stable" dans la définition de la stabilité asymptotique n'est pas donc nécessaire car elle est vérifiée automatiquement; par contre dans le cas vectoriel, il est indispensables d'exiger la stabilité du point d'équilibre pour qu'il soit asymptotiquement stable. Cela est dù au fait qu'il existe des champs de vecteurs dont les solutions s'approchent de l'équilibre quand $t \longrightarrow +\infty$; Alors que l'équilibre est instable.*

2.3.3 Stabilité globale et stabilité locale:

Si on compare les comportements possibles dans le cas des systèmes linéaire et non linéaire, on s'aperçoit que les comportements dynamiques des systèmes non linéaires sont beaucoup plus compliqués, avec un éventail beaucoup plus grand. Par exemple, parler de la stabilité de l'équilibre ou de la stabilité du système revient au mème dans le cas linéaire, puisque l'on peut confondre la stabilité locale et la stabilité globale. Par contre, dans le cas d'un système non linéaire l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre sous la forme la plus complète consiste non seulement à déterminer la nature du point d'équilibre ou sa stabilité asymptotique mais aussi à determiner le domaine d'attraction, c'est-à-dire l'ensemble des conditions initiales dont les solutions convergent vers l'équilibre. Ainsi, on parle de la stabilité locale ou globale, la stabilité locale signifiant la convergence des solutions avec des conditions initiales proches tandis que l'instabilité globale signifie la divergence de solutions en dehors de toute limite.

Théorème 2.1 (stabilité de Lyapunov) *[7]*
Avec les notations qui précèdent, si les valeurs propres de A sont des partis réelle strictement négatives ($\sigma c(A) \subset \mathbb{R}^{-*} - i\mathbb{R}$), alors:

- *0 est un point attractif du système linéarisé.*
- *u est un point attractif de (E).*
- *Et si y_0 est assez voisin de u alors $y(t)$ tends exponentiellement vite vers u quand $t \to +\infty$.*

Démonstration:
Régularité de e^{tA} On montre le résultat suivant dans le cas d'une application linéaire a sans s'encombrer du formalisme matriciel.

Lemme 2.1 *Soit $a \in L(E)$ un opérateur continu sur le R-espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|.\|)$. On note λ_i pour $1 \leq i \leq r$ les valeurs propres distinctes de a.*
Alors il existe $P \in R[X]$ tel que:

$$\|e^{ta}\| \leq |t|) \sum_{i=1}^{r} e^{tRe\lambda_i}$$

(où $|||.|||$ est la norme subordonnée à $\|.\|$, on utilisera seulement que c'est une norme d'opérateurs sous-multiplicative).

Notons $X_a(X) = \prod_{i=1}^{r}(X - \lambda_i)^{m_i}$ le polynome caractéristique de a (qui est scindé dans C comme tous les polynomes bien élevés). Par lemme des noyaux, on obtient la décomposition suivante:

$$E \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \ker(a - \lambda_i id)^{m_i} = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$$

On notera alors $p_i : E \to E_i$ et $q_i : E_i \to E$ la projection et respectivement l'inclusion canonique. On a les propriétés suivantes:

- $p_i q_i = id_{E_i}$
- $p_j q_i = 0$ *pour* $i \neq j$ a.
- $\sum_i q_i p_i = id_E$

Ainsi en notant $a_i = p_i a q_i$, on a $\sum_i q_i a_i p_i = a$ et on montre alors que cette décomposition est stable: $a^n = \sum_i q_i a_i^n p_i$ et donc $\exp(ta) = \sum_i q_i \exp(ta_i) p_i$.

Or $e^{ta_i} = e^{t\lambda_i} \exp(t(a - \lambda_i id_{E_i}))$ et l'on sait par construction que l'endomorphisme $a - \lambda_i id_{E_i}$ est nilpotent d'indice m_i. Donc:

$$|||e^{ta_i}||| \leq |e^{t\lambda_i}| \sum_{k=0}^{m_i} \frac{|t|^k}{k!} |||a - \lambda_i id_{E_i}|||^k$$

En regroupant:

$$|||e^{ta}||| \leq \sum_{i=1}^{r} |||e^{ta_i}||| \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{k=0}^{m_i} \frac{|t|^k}{k!} |||a - \lambda_i id_{E_i}|||^k \right)}_{P(|t|)} \sum_{i=1}^{r} exp(tRe\lambda_i)$$

D'où le résultat: .....

Il résulte immédiatement du lemme que la solution z du système linéarisé, qui est de la forme $z(t) = e^{tA} z(0)$ tend exponentiellement vite vers 0 pourvu que les valeurs propres de A soient

toute de partie réelle strictement négative.

Fonction de Lyapunov: Posons, pour $x, x' \in R^d$,

$$b(x, x') = \int_{R^+} (e^{tA}x, e^{tA}x')dt$$

Cette intégrale xiste sous les hypothèses précédentes sur le spectre de A et ilest facile de montrer que b est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur R^d et don que $q : x \mapsto b(x, x)$ est une norme.

De plus on a:

$$Dq(x)Ax = 2b(x, Ax) = \int_{R^+} 2\langle e^{tA}x, e^{tA}Ax\rangle dt = \int_{R^+} \frac{d}{dt}(\langle e^{tA}x, e^{tA}x\rangle)dt = -\|x\|^2$$

Notons alors $r(y) = f(y) - A(y-u)$ pour y solution de (E). Alors $\frac{d}{dt}(q(y(t)-u)) = Dq(y-u)f(y) = Dq(y-u)A(y-u) - Dq(y-u)(A(y-u)-f(y)) = -\|y-u\|^2 + 2b(y-u, r(y))$.

La différentiabilité de f en u s'écrit alors à l'aide de la norme q: il existe $\varepsilon : R^d \to R^d$ tel que $\varepsilon(y-u) \to 0$ quand $y \to u$ et tel que:

$$f(y) = f(u) + Df(u)(y-u) + \sqrt{q(y-u)}\varepsilon(y-u)$$

Ainsi $r(y) = \sqrt{q(y-u)}\varepsilon(y-u)$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit scalaire b, on obtien:
$c(y-u, r(y)) \leq \sqrt{q(y-u)}\sqrt{q(y-u)}\sqrt{q(\varepsilon(y-u))} = q(y-u)\sqrt{q(\varepsilon(y-u))}$
De plus l'équivalence des normes nous donne $-\|y-u\|^2 \leq -2\beta q(y-u)$

Ainsi pour y suffisamment proche de u, on peut avoir $\sqrt{q(\varepsilon(y-u))} \leq \beta/2$ et en regroupant:

$$-\|y-u\|^2 + 2b(y-u, r(y)) \leq -\beta q(y-u)$$

En résumé, on a montré:

Proposition 2.1 *Il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que si $q(y-u) \leq \alpha$*
alors: $\frac{d}{dt}(q(y-u)) \leq -\beta q(y-u) \leq 0$

conclusion: supposons désormais $q(y_0-u) < \alpha$, et y solution maximale de (E). Alors pour tout t du domaine de définition, $q(y-u) \leq q(y_0-u) < \alpha$ (ce qui entraine entre-autre que la solution est global car maximale et bornée).

En effet s'il existe t_1 tel que $q(y(t_1)-u) \geq \alpha$, par théorème des valeurs intermédiaires, il va exister un premier $t_2 < t_1$ tel que $q(y(t_2)-u) = \alpha$, et l'inégalité recherchée et vraie sur $[0, t_2]$. Alors pour $\varepsilon > 0$, on a:

$$q(y(t_2)-u) = q(y(t_2-\varepsilon)-u) + \int_{t_2-\varepsilon}^{t_2} q(y-u)'dt \leq \alpha - \beta\alpha\varepsilon < \alpha$$

D'où la contradiction.

Enfin en regroupant, d'après le résultat précédent, on a si on note $g(t) = q(y(t)-u)$: $\forall t > 0, g' \leq -\beta g$ et donc $g(t) \leq e^{-\beta t}g(0) \leq e^{-\beta t}\alpha$. D'où le théorème.

Définition 2.5 *Stabilité exponentielle*

Le point d'équilibre $x_e = 0$ est exponentiellement stable s'il existe deux scalaires strictement positifs k et α tels que:

$$\forall t \geq 0, \|x(t)\|x_0\| \exp^{-\alpha t}$$

dans une boule B(r) autour l'origine. Exemple: *Considérons le système décrit par: $\dot{x} = -(1 + \sin(x^2(s))x$ Il est clair que $x_e = 0$ est un point d'équilibre.*
La solution du système est donnée par:

$$x(t) = x(0)exp \int_0^t -(1 + \sin(x^2(s)))ds$$

On a $\forall t \geq 0, |x(t)| < k|(0)| \exp^{-t}$. D'où la stabilité exponentielle du système en question.

Théorème de stabilité locale: [1]

Le premier théorème en relation avec la fonction de Lyapunov est le résultat de stabilité local autour du point d'équilibre. Nous énonçons ce théorème:

Théorème 2.2 ***(Lyapunov, 1892)***

Soit $x_e = 0$ un point d'équilibre du système:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Avec: $f \in C^1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Et D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, contenant x_0
soit $V : D \mapsto \mathbb{R}$ une continùment differentiable telle que:

- *$V(0) = 0$ et $V(x) > 0$ dans $D - \{0\}$.*
- *$\dot{V}(x) \leq 0$ dans D, alors $x_0 = 0$ est stable.*
- *Si de plus on a: $\dot{V} < 0$ dans $D - \{0\}$ alors $x_0 = 0$ est asymptotiquement stable.*

Théorème de stabilité globale: [1]

Nous avons vu que la stabilité local signifie la stabilité pour toute condition initiale x_0 dans un voisinage D du point d'équilibre, et la stabilité globale celle pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$. La question est de savoir s'il suffit de remplacer D par $\mathbb{R}^n$, et vérifier les hypothèses du théorème de Lyapunov afin de conclure sur la stabilité globale du système. La réponse est non par conséquent il faut une condition supplémentaire.
Pour que l'on puisse garantir que le théorème de Lyapunov conclut sur la stabilité globale d'un système, il faut d'une part que toutes les hypothèses de ce théorème soient satisfaites, et d'autre part il faut également que la condition de bornitude radiale existe, c'est-à-dire:

$$V(x) \to \infty \; lorsque \; \|x\| \to \infty.$$

Dans ce cas, on dit que V est radialement non-bornée. Le théorème suivant, récapitule ces conditions:

Théorème 2.3 *Soit x = 0 un point d'équilibre pour le système (2.3). Soit* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1 *vérifiant:*

$$V(x) > 0 \ \ \forall x \neq 0, V(0) = 0.$$
$$\dot{V}(x) < 0 \ \ \forall x \neq 0,$$
$$\|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty \tag{2.4}$$

alors $x = 0$ *est globalement asymptotiquement stable.*

Exemple 2.1 *considérons le système:*

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -h(x_1) - ax_2$$

Où $a > 0$, $h(.)$ *est localement lipschitz,* $h(0) = 0$, *et* $yh(y) > 0$ *pour tout* $y \neq 0$. *La fonction de Lyapunov*

$$V(x) = \frac{\delta}{2} x^T \begin{bmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{bmatrix} x + \delta \int_0^{x_1} h(y)dy$$

est définie positive pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, *et radialement non bornée, sa dérivée*

$$\dot{V}(x) = -a\delta(1-k)x_2^2 - a\delta k x_1 h(x_1)$$

est définie négative sur $\mathbb{R}^2$ *pour tout* $k \in (0, 1)$. *On conclut, gràce au théorème précédent, que l'origine est globalement asymptotiquement stable.*

Remarque 2.2 *Soit le système linéaire décrit par la représentation d'état suivante:*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad x(t) \in \mathbb{R}^n \tag{2.5}$$

Rappelons que le système (2.5) est asymptotiquement stable (le point d'équilibre étant à l'origine) ssi toutes les valeurs propres de A sont à partie réelle strictement négatives :

$$Re(\lambda_i(A)) < 0 \quad i = 1, ..., n.$$

Dans ce cas, la matrice A est dite de Hurwitz. Pour les systèmes linéaires, la stabilité est équivalente à la stabilité au sens de Lyapunov. Plus précisement, on considère une fonction de Lyapunov quadratique.

$$V(x) = x^T P x.$$

La dérivée de V le long des trajectoires du système est donnée par:

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P - PA)x$$

Alors:

Le système linéaire est asymptotiquement stable (où les valeurs propres de A sont à partie réelles négatives). Si et seulement si, pour toute matrice symétrique définie positive Q, il existe une unique matrice P définie positive (symétrique) satisfaisant l'équation de Lyapunov

$$A^T P + PA + Q = 0. \tag{2.6}$$

Notons que l'unique solution de l'équation (2.6) est donnée par:

$$P = \int_0^{+\infty} exp(A^T t) Q \exp(At) dt.$$

2.4 Inégalités linéaires matricielles:

Une grande quantité de problèmes d'automatique concernant les performances et la robustesse peuvent se traduire sous la forme d'une optimisation convexe avec des contraintes inégalités. Auparavant, on faisait appel à la résolution d'équations de Riccati basées sur des contraintes égalités. Toutefois, le retour vers les LMI, qui généralisent les problèmes d'automatique, a permis de résoudre des problèmes plus généraux. [1]

2.4.1 Définition et intérets des LMIs:

Définition 2.6 ***(Contraintes LMI).*** *Une contrainte LMI sur un vecteur réel $x \in \mathbb{R}^m$ est une expression de la forme:*

$$F(x) = F_0 + x_1F_1 + \ldots + x_mF_m < 0 \tag{2.7}$$

Où $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont des variables réelles, dites aussi variables de décision de la LMI; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de décision (ses composantes sont des variables de décision), et $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n\times n}, i = 0, 1, \ldots, m$ sont des matrices symétriques données.

Il existe des situations où les variables sont des matrices, comme par exemple l'inégalité matricielle de Lyapunov.

$$F(x) = A^TX + XA + Q < 0$$

Où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont deux matrices constantes données, et la variable $X = X^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est la matrices inconnue. Nous allons expliquer dans ce qui suit comment se ramener de cette inégalité matricielle à une LMI de la forme (2.7).

Soit $E_1, E_2, \ldots, E_m$ une base de $S^n(\mathbb{R}) = \{N \in \mathbb{R}^{n\times n}, N = N^T\}$ l'ensemble des matrices d'ordre n. Pour tout $X \in S^n(\mathbb{R})$, il existe $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ tels que:

$$X = \sum_{i=1}^{m} x_iE_i$$

L'inégalité de Lyapunov devient:

$$F(X) = F\Big(\sum_{i=1}^{m} x_iE_i\Big) = A^T\Big(\sum_{i=1}^{m} x_iE_i\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{m} x_iE_i\Big)A + Q$$

$$= Q + x_1(A^TE_1 + E_1A) + \ldots + x_m(A^TE_m + E_m < 0$$

Qui n'est rien d'autre qu'une LMI particulière. Une autre LMI souvent rencontrée en commande est l'inégalité de Riccati:

$$A^TP + PA + PBR^{-1}B^TP + Q < 0$$

Où $R > 0, Q > 0, R = R^T, P = P^T$. Cette dernière s'exprime comme une LMI en P. La notation suivante $F < 0$ (ou $F \leq 0$) signifie que la matrice F est définie négative (respectivement F semi définie négative). La contrainte $F(x) < 0$ est une contrainte convexe en x, c'est-à-dire que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^m, F(x) < 0\}$ est convexe. On dit que la LMI (2.7) est faisable si et seulement s'il existe au moins un vecteur $x \in \mathbb{R}^m$ tel que l'inégalité matricielle (2.7) est vérifiée.

Pour des fonctions affine $F, G : \mathbb{R}^m \to S^n(\mathbb{R})$, les contrainte $F(x) > 0$ et $F(x) < G(x)$ sont des LMIs car elle peuvent s'écrire sous la forme:

$$-F(x) < 0$$

$$F(x) - G(x) < 0.$$

Intérèts des LMIs:

L'intérèt des LMIs est résumé dans les quatre points décrits ci-dessous.

1. Convexité: La LMI (2.7) définit une contrainte convexe en x.
   En effet, $\forall x, y \in \mathbb{E}, \mathbb{E} := \{x | F(x) > 0\}$, alors:

   $$F(\alpha x + (1 - \alpha y)) \leq \alpha F(x) + (1 - \alpha F(y)) \ \ \forall \alpha \in]0, 1[\tag{2.8}$$

   Où $F(x)$ est donnée par (2.7).

2. Concaténation: Des LMIs multiples peuvent se ramener en une seule. En effet, résoudre les deux LMIs $F_1(x) > 0$ et $F_2(x) > 0$ est équivalent à résoudre $\tilde{F}(x) > 0$ avec $\tilde{F} = diag(F_1, F_2)$.

3. Algorithmes: Les algorithmes utilisés pour résoudre les contraintes LMI sont efficaces : une bonne initialisation garantit la convergence de l'algorithme.

4. Applications: De nombreuses conditions classiques en automatique peuvent se formuler sous la forme de problème LMI. De plus, il est possible de convertir certaines inégalités non linéaires (notamment de Riccati) en LMI par l'utilisation de lemme de Schur.

2.4.2 Lemmes utiles pour les LMIs:

Définition 2.7 ***(Complément de Schur)*** *Pour une matrice A inversible, le complément de Schur de A, dans la matrice M donnée par :*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

est la matrice $D - CA^{-1}B$.

Lemme 2.2 ***(Lemme de Schur).*** *Soit Q_1, Q_2 et Q_3 trois matrices de dimensions appropriées telles que $Q_1 = Q_1^T$ et $Q_3 = Q_3^T$. Alors,*

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2^T & Q_3^T \end{bmatrix} < 0 \tag{2.9}$$

Si et seulement si : $Q_3 < 0, \ et \ Q_1 - Q_2 Q_3^{-1} Q_2^T < 0$
Ou de manière équivalente : $Q_1 < 0, \ et \ Q_3 - Q_2^T Q_1^{-1} Q_2 < 0$

Lemme 2.3 ***(S-procédure).*** *Soit $T_0, \ldots, T_p$ des matrices symétriques dans $\mathbb{R}^{n \times n}$. Nous considérons les conditions suivantes sur $T_0, \ldots, T_p$:*

$$\zeta^T T_0 \zeta > 0 \forall \zeta \neq 0 \ tels \ que \ \zeta^T T_i \zeta \geq 0, i = 1, \ldots, p. \tag{2.10}$$

Il est evident que si

$$il\ existe\ \tau_1 \geq 0, \ldots \tau_p \geq 0,\ tels\ que\ T_0 - \sum_{i=1}^{p} \tau_i T_i > 0 \tag{2.11}$$

Alors, l'inégalité (2.10) est vérifiée.

Définition 2.8 ***(Valeur singulière).*** *Les valeurs singulières d'une matrice complexe M sont les racines carrées des valeurs propres de $M^H M$ où M^H est le hermitien (transpose conjuguée) de M. On les note $\sigma_i(M)$.*

Définition 2.9 ***(Matrice hyperbolique).*** *On dit qu'une matrice est hyperbolique s'il ne possède pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.*

Définition 2.10 ***(Matrice hamiltonienne).*** *Une matrice hamiltonienne (ou de Hamilton) H est une matrice réelle $2n\times 2n$ satisfaisant la condition que le produit JH soit symétrique, J étant la matrice antisymétrique:*

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$$

et I_n étant la matrice identité $n\times n$. En d'autres termes, H est hamiltonienne si et seulement si:

$$JH - H^T J^T = JH + H^T J = 0.$$

Propriété. Soit H une matrice par bloc $2n\times 2n$ donnée par:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

C D A B , Où A, B, C, D sont des matrices $n\times n$. Alors H est une matrice hamiltonienne à condition que B, C soient symétriques et que $A + D^T = 0$

- La transposée d'une matrice hamiltonienne est hamiltonienne.
- La trace d'une matrice hamiltonienne est nulle.
- Les valeurs propres de H sont symétriques par rapport à l'axe imaginaire.

Définition 2.11 ***(Equation algébrique de Riccati).*** *Les équations de Riccati, de noms des mathématiciens italiens Jacopo Francesco Riccati (1676 – 1754) et de Vincenzo Riccati (1708 – 1775), sont généralement utilisées en physique quantique (Erwin Rudolf Schrodinger), dans le calcul de la matrice de gains d'une commande par retour d'état. De manière générique, elles peuvent se traduire à l'aide d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, quadratique dans sa fonction inconnue :*

$$\dot{y}(x) = q_0(x) + q_1(x)y(x) + q_2(x)y^2(x)$$

Où $q_0, q_1 et q_2$; sont des fonctions à valeurs réelles ou complexes telles que : $q_0(x) \neq 0$, $q_2(x) \neq 0$.

Si $q_2(x) \neq 0$., l'équation de Riccati devient une équation différentielle ordinaire linéaire.

Lemme 2.4 ***(Lemme de Gronwall, forme différentielle).*** *Soit* $u : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^+$*, une fonction continue, derivable sur* $[t_0, t_1]$*. Soit* $v : [t_0, t_1] \mapsto \mathbb{R}^+$ *continue telle que:* $u'(t) \leq v(t)u(t), \ \forall t \in [t_0, t_1]$*, alors:*

$$u(t) \leq u(t_0)exp(\int_{t_0}^{t} v(s)ds).$$

CHAPITRE 3

Observabilité et estimation de l'état des systèmes non linéaires

3.1 L'observabilité:

L'observabilité d'un système dynamique est un concept très important dans le domaine d'estimation de l'état. En effet, pour reconstruire les états inaccessibles d'un système, il faut savoir, a priori, si les variables d'état sont observables ou non.

L'observabilité d'un système est la propriété qui permet de dire si l'état peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des signaux d'entrées et de sorties.

En général, pour des raisons de réalisation technique, de coût, etc. ..., la dimension du vecteur de sortie est inférieure à celle de l'état. Ceci entraîne qu'à l'instant donné t, l'état $x(t)$ ne peut pas être déduit algébriquement de la sortie $y(t)$ à cet instant. Par contre, sous des conditions d'observabilité qui seront explicitées plus loin, cet état peut être déduit de la connaissance des entrées et sorties sur un intervalle de temps passé: $u([0,t], y[0,t])$. [5]

Définition 3.1 *On appelle observateur (ou reconstructeur d'état) d'un système dynamique* (S)*:*

$$(S) : \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x(t)) \end{cases} \tag{3.1}$$

Un système dynamique auxiliaire O dont les entrées sont constituées des vecteurs d'entrée et de sortie du système à observer et dont le vecteur de sortie $x(t)$ *est l'état estimé :*

$$(O) : \begin{cases} z(t) = \hat{f}(z(t), u(t), y(t)) \\ \hat{x}(t) = \hat{h}(z(t), u(t), y(t)) \end{cases} \tag{3.2}$$

Telle que l'erreur entre le vecteur d'état $x(t)$ *et* $\hat{x} = t$ *tend asymptotiquement vers zéro.*

$$\|e(t)\| = \|x(t) - \hat{x}(t)\| \to 0 \; quand \; t \to \infty$$

Le schéma d'un tel observateur est donné sur la figure (3.1). L'observateur est constitué de deux parties:

- Un simulateur (estimateur) du système réel caractérisé par les matrices $(\grave{A}, \grave{B}, \grave{C})$, ayant comme entrées u et y et comme sortie $\hat{y}$.

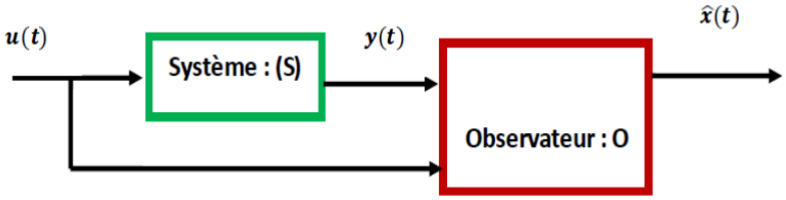


Figure 3.1: Schéma d'un observateur.

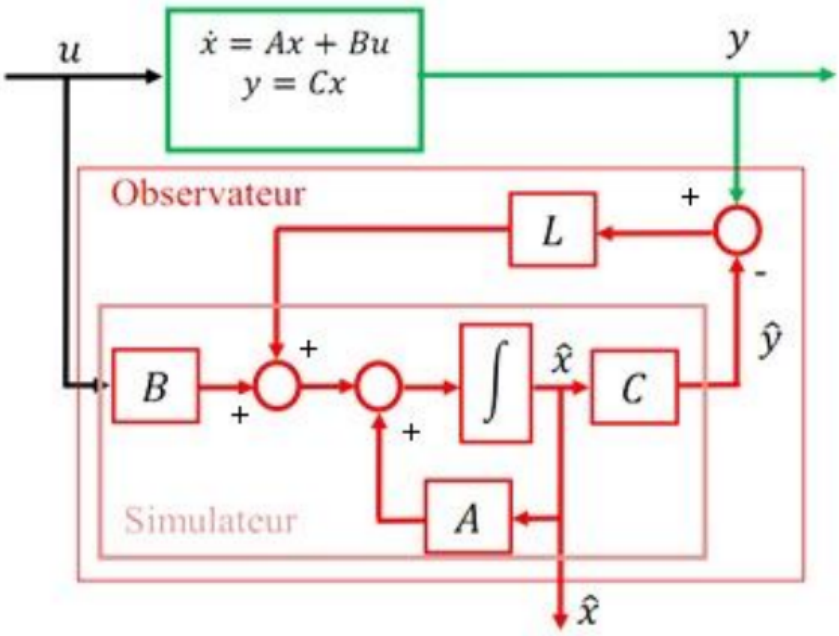


Figure 3.2: Schéma de principe d'un observateur.

- Un correcteur réalisant une contre-réaction fonction de l'écart entre la sortie y et son estimée y. Ce correcteur permet d'assurer la convergence de l'estimation de l'état x vers l'état $\hat{x}$, L est appelé le gain de l'observateur.

L'observabilité caractérise la propriété de pouvoir récupérer par une combinaison des mesures et de leurs dérivées toutes les grandeurs d'un système.

3.1.1 Observabilité des systèmes linéaires:

Soit un système continu décrit par l'équation d'état suivante:

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \grave{A}x(t) + \grave{B}u(t) \\ y(t) = \grave{C}x(t) \end{cases} \tag{3.3}$$

Ou les vecteurs $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m$ et $y(t) \in R^p$ représentent respectivement l'état, la commande et la sortie du système. Les matrices $\grave{A}, \grave{B}$ *et* $\grave{C}$ sont des matrices constantes de

dimensions appropriées. L'observabilité du système linéaire (3.3) est garantie si et seulement si:

$$rang(O) = rang\left(\begin{bmatrix} \grave{C} \\ \grave{C}\grave{A} \\ \grave{C}\grave{A}^2 \\ : \\ : \\ \grave{C}\grave{A}^{n-1} \end{bmatrix}\right) = n \tag{3.4}$$

Par conséquent le système linéaire (3.3) est observable, si le rang de la matrice d'observabilité O est égal à la dimension n de ce système. Dans le cas où le rang de la matrice O est inférieur à n on parle alors, d'observabilité partielle.

3.1.2 Observabilité des systèmes non linéaires

Pour les systèmes non linéaires, étant donné l'espace de l'état $x \in R_n$ et l'ensemble U des entrées, la notion d'observabilité est basée sur la possibilité de différencier deux conditions initiales distinctes. On parlera ainsi de la distinguabilité d'un couple de conditions initiales.

On considère le système non linéaire donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \tag{3.5}$$

Ou les vecteurs $x(t) \in R^n, u(t) \in R^n$ sont respectivement le vecteur d'état et de commande.

Définition 3.2 ***(Distinguabilité)*** *Deux états initiaux $x_0^1, x_0^2 \in X$ tel que $x_0^1 \neq x_0^2$ sont dits distinguables dans $X si \exists t \geq 0$ et entrée admissible $u : [0,t] \rightarrow U$ telle que les trajectoires des sorties $y(t, x_0^1, u(t))$ et $y(t, x_0^2, u(t))$. Issues, respectivement de x_0^1 et x_0^2, restent dans X. $[0,t]$ et vérifient $y(t, x_0^1, u(t)) \neq y(t, x_0^2, u(t))$. Dans ce cas, on dira que u distingue x_0^1, x_0^2 dans X.*

Définition 3.3 ***(Observabilité et observabilité locale faible)*** *Un système est observable en $x_0^1 \in X$, si tout autre état $x_0^1 \neq x_0^2$ est distinguable de x_0^1 dans X.*

Un système est globalement observable s'il est distinguable en tous points de X. Un système est localement faiblement observable en $x_0^1 \in X$, s'il existe un voisinage $X'(x_0) \subset X$ contenant x_0^1, tel que pour tout voisinage $X'' \subset X'(x_0^1)$ x_0^1, pour tout point $x_0^2 \in X''(x_0^2)$, les couples (x_0^1, x_0^2) sont distinguables et les trajectoires $y(t, x_0^1, u(t))$ et $y(t, x_0^2, u(t))$ évoluent a l'intérieur de $X''(x_0^1)$.

Dans la pratique, ces notions sont relativement difficiles à vérifier et souvent on fait recours à la linéarisation du système au tour d'un point d'équilibre pour s'affranchir de l'observabilité du système au voisinage de ce point d'équilibre.

Définition 3.4 ***(Observabilité au sens du rang)*** *Rappelons qu'un champ de vecteurs f peut être interprété selon les besoins de deux manières:*
1^{er}. Comme une application qui à tout point x assigne un vecteur $f(x)$. Dans ce cas on l'écrit

dans la base canonique sous la forme suivante:

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

On dit que les f_i sont ses composantes. Sous cette forme on dit aussi qu'il régit un système d'équations différentielles, dont les courbes tangentes (t) vérifient :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t)) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{3.7}$$

On dit que $x(t)$ est une courbe intégrale de f.
2^{me}. Comme une dérivation qu'il faudra écrire sous la forme suivante:

$$f = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{3.8}$$

Sous cette forme il s'applique a une fonction réelle $h(x)$ comme suit :

$$L_f h = f_1 \frac{\partial h}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial h}{\partial x_2} + \cdots + f_n \frac{\partial h}{\partial x_n} \tag{3.9}$$

Cette nouvelle fonction $L_f h$ s'appelle la dérivée de Lie de h dans la direction de f. Si $f = \frac{\partial h}{\partial x_i}$, alors $L_f h = \frac{\partial h}{\partial x_i}$ et on reconnait les dérivations partielles. Il est facile de voir que :

$$L_f h = dh(f) = \nabla h.f = \frac{\partial y}{\partial t} := y \tag{3.10}$$

Où dh est la différentielles de h, et $\nabla h.f$ est le produit scalaire du gradient ∇h de h avec.

Définition 3.5 *Considérons le système dynamique de la forme (3.5). On dit que la paire (f, h) est observable au sens du rang si la différentielle de la sortie h avec les différentielles de ses dérivées de **Lie** successives dans la direction de f jusqu'à l'ordre $n-1$ sont indépendante (sur un voisinage de 0). C'est-a-dire que:*

$$Rang\{dh, dL_f, \cdots, dL_f^{n-1}h\}^T = n \tag{3.11}$$

Où l'écriture de $dL_f^k h$ ici est donnée par le co-vecteur:

$$dL_f^k h = \left(\frac{\partial dL_f^k h}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial y}{\partial x} \right) \tag{3.12}$$

On remarque que $dL_f^k h = y^{(k)}$ est la dérivée k^{ime} de la sortie y. Donc, sous la condition du rang(2.10) ci-dessus l'application suivante:

$$x \to (y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}) \tag{3.13}$$

Est un difféomorphisme local. Plus précisément, ce difféomorphisme est l'inverse de l'application suivante :

$$\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{(x-1)} h(x) \end{pmatrix} = \psi^{-1}(x) \tag{3.14}$$

C'est-à-dire l'état x s'écrit (localement) en fonction de la sortie y est de ses dérivés successives.

$$x \to \psi(y, \dot{y}, \cdots, y^{(n-1)}) \tag{3.15}$$

Une solution simple et optimale au problème de l'estimation de l'état des systèmes linéaires a été proposée par Luenberger dans le cadre déterministe, et par Kalman dans le cadre stochastique. Dans les deux cas, on considère le modèle dynamique du système linéaire défini par:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \grave{A}x(t) + \grave{B}u(t) + Lw(t) \\ y(t) = \grave{C}x(t) + v(t) \end{cases} \tag{3.16}$$

Où $x(t) \in R^n, u(t) \in R^m, y(t) \in R^p, w(t) \in R^r$ *et* $v(t) \in R^p$ sont deux bruits blancs gaussiens d'espérance nulle, de covariances respectives Q R. Ces bruits sont supposés non corrélés. Les matrices du système sont de dimensions appropriées, et les conditions initiales sont définies par $x(0) = x_0$.

3.2 Observateurs des systèmes linéaires:

3.2.1 Observateur de Luenberger:

La théorie de l'observation de Luenberger repose essentiellement sur des techniques de placement de pôles. On se place dans le cas déterministe, ou les bruits w et v sont nuls. Luenberger propose l'observateur suivant pour le système:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \grave{A}\hat{x}(t) + \grave{B}u(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = \grave{C}\hat{y}(t) \end{cases} \tag{3.17}$$

La dynamique de l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ a pour expression:

$$\dot{e}(t) = (\grave{A} - K\grave{C})e(t) \tag{3.18}$$

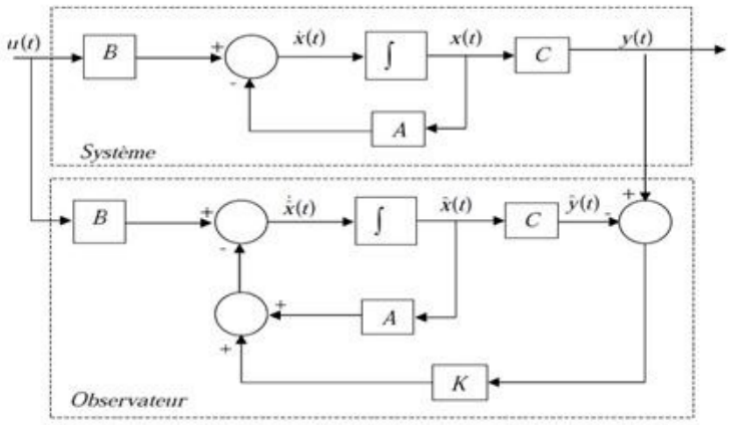


Figure 3.3: Schéma structurel de l'observateur de Luenberger.

En utilisant une technique de placement de pôles, il suffit a lors de choisir le gain K de l'observateur de telle sorte que les valeurs propres de la matrice $\grave{A} - K\grave{C}$ soit dans le demi-plan complexe gauche. Pour ce type d'observateur, une grande liberté est laissée au choix des valeurs propres, mais en pratique on choisit une dynamique d'erreur plus rapide que celle du procédé.

Cependant on ne peut les prendre infiniment grandes pour deux raisons essentielles : on ne peut utiliser que des gains réalisables et l'augmentation de la bande passante du reconstructeur ne permet plus de négliger les bruits qui deviennent prépondérants en hautes fréquences.

Il faut noter qu'en présence de bruits w, v la dynamique de l'erreur est régie par l'équation:

$$\dot{e} = (\grave{A} - K\grave{C})e(t) + w(t) - Kv(t) \tag{3.19}$$

Cette erreur est donc sensible aux bruits par l'intermédiaire des deux fonctions de transfert $(sI - \grave{A} + K\grave{C})^{-1}L$ et $(sI - \grave{A} + K\grave{C})^{-1}K$.
L'étude du gain fréquentiel permet de quantifier l'influence des bruits sur l'erreur d'observation.

3.2.2 Filtre de Kalman:

La théorie de l'observation de Kalman nécessite, quant à elle, la résolution d'une équation de Riccati. Kalman utilise les propriétés statistiques des bruite w et v et propose la structure d'observateur suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \grave{A}\hat{x}(t) + \grave{B}u(t) + K(y(t) - \hat{y}(t)) \tag{3.20}$$

En minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation $P = E[e(t)e(t)^T]$, on obtient l'expression du gain de l'observateur :

$$K = P\grave{C}^T R^{-1} \tag{3.21}$$

Ou P est solution de l'équation de Riccati :

$$\grave{A}P + P\grave{A} - P\grave{C}^T R^{-1}\grave{C}P + LQL^T = 0 \tag{3.22}$$

3.2.3 Observateur à entrée inconnue:

La théorie d'observateur à entrée inconnue est applicable à la classe des systèmes linéaires (3.3). Seulement cette fois, les entrées inconnues interviennent dans le modèle du système:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \grave{A}x(t) + \grave{B}u(t) + Ed(t) \\ y(t) = \grave{C}x(t) \end{cases} \tag{3.23}$$

Où $d(t) \in R$ est une entrée inconnue et E est une matrice de rang plein de dimension appropriée.

Pour le système (3.23) on dit qu'un observateur est à entrée inconnue si l'erreur d'estimation tend vers zéro en présence d'entrées inconnues. Sa structure est donnée par:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \grave{A}z(t) + T\grave{B}u(t) + Ky(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = z(t) + Hy(t) \end{cases} \tag{3.24}$$

Où $z(t) \in R^n$ est le vecteur d'état de l'observateur et $\hat{x}(t) \in R^n$ est le vecteur d'état estimé du système, les matrices F, T, K et H qui seront déterminées pour stabiliser l'observateur et découpler les entrées inconnues. En posant $K = K_1 + K_2$, la dérivée de l'erreur d'estimation par rapport au temps sera donnée par :

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) = (\grave{A} - H\grave{C}\grave{A} - K_1\grave{C})e - [F - (\grave{A} - H\grave{C}\grave{A} - K_1\grave{C})]z(t) - [T - (I - H\grave{C})]\grave{B}u(t) \\ -(I - H\grave{C})Ed(t) - [K_2 - H\grave{C}A - K_1\grave{C})H]y(t) \qquad (*) \end{aligned}$$

Ainsi les conditions permettant le découplage de l'entrée inconnue sont :

- $(H\grave{C} - I)E = 0$
- $T = I - H\grave{C}$
- $F = \grave{A} - H\grave{C}\grave{A} - K_1\grave{C}$
- $K_2 = FH$
- $K = K_1 + K_2$

Si ces conditions sont satisfaites alors l'erreur dynamique sera :

$$\dot{e}(t) = Fe(t) \tag{3.25}$$

Afin que l'erreur d'estimation tende asymptotiquement vers zéro, les valeurs propres de F doivent être à partie réelle négative. Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'un tel observateur pour un système décrit par l'équation (3.23) sont:

- $Rang(\grave{C}E) = Rang(E)$
- $(\grave{C}, \grave{A}_l)$ *est stable*, $\grave{A}_l = \grave{A} - E[(\grave{C}E)^T\grave{C}E]^{-1}(\grave{C}E)^T\grave{C}\grave{A}$

La première condition signifie que le nombre de lignes linéairement indépendantes de la matrice $\grave{C}$ ne doit pas être inférieur au nombre de colonnes linéairement indépendantes de la matrice E, c'est-à-dire, le nombre de mesures indépendantes doit être supérieur ou égal au nombre d'entrées inconnues à découpler.

3.2.4 Stabilisation d'un système linéaire par retour d'état dynamique:

On peut se demander si, étant donné un système contrôlable et observable $\dot{x} = \grave{A}x + \grave{B}u, y = \grave{C}x$, il existe un feedback $u = Ky$ stabilisant le système, i.e. si la matrice $\grave{A} + \grave{B}K\grave{C}$ est de Hurwitz. La réponse est non. Pour le voir, considérons les matrices: [3]

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \grave{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \grave{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système $\dot{x} = \grave{A}x + \grave{B}u, y = \grave{C}x$ est trivialement contrôlable et observable. Pourtant, pour toute matrice scalaire $K = (k)$, la matrice $\grave{A} + \grave{B}K\grave{C}$ n'est pas de Hurwitz.

En conclusion, un feedback par retour d'état statique (bouclage statique) ne suffit pas en général. c'est pourquoi, dans la suite on va voir comment construire un retour d'état dynamique (bouclage dynamique) via un observateur asymptotique.

On a vu comment construire :

- Un régulateur (feedback) pour un système contrôlable,
- Un observateur de Luenberger pour un système observable.
- Il semble naturel, pour un système contrôlable et observable, de construire un bouclage dynamique en fonction de l'observateur de l'état : c'est l'étape de synthèse régulateur-observateur.

Définition 3.6 *On appelle régulateur-observateur (ou feedback de sortie) du système:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \grave{A}x + \grave{B}u, \\ y = \grave{C}x \end{cases} \tag{3.26}$$

le bouclage dynamique $u = K\hat{x}$, où:

$$\dot{\hat{x}} = \grave{A}\hat{x} + \grave{B}u + L(\grave{C}\hat{x} - y)$$

Une solution du problème de stabilisation d'un système linéaire contrôlé-observé est apporté par le théorème ci-dessous :

Théorème 3.1 ***(Théorème de stabilisation par retour dynamique de sortie)***

Si le système$\dot{x} = \grave{A}x + \grave{B}u, y = \grave{C}x$, est contrôlable et observable, alors il est stabilisable par retour dynamique de sortie, i.e., il existe des matrices de gain $K \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ telles que les matrices $\grave{A} + \grave{B}K$ et $\grave{A} + L\grave{C}$ soient de Hurwitz, et alors le système bouclé:

$$\begin{cases} \dot{x} = \grave{A}x + \grave{B}K\hat{x} \\ \dot{\hat{x}} = \grave{A}\hat{x} + \grave{B}K\hat{x} + L(\grave{C}\hat{x} - y) \end{cases} \tag{3.27}$$

est asymptotiquement stable.

Démonstration. Le système (3.27) est équivalent à:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \grave{A} + \grave{B}K & \grave{B}K \\ 0 & \grave{A} + L\grave{C} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}$$

ce dernier étant asymptotiquement stable si et seulement si les matrices $\grave{A}+\grave{B}K$ et $\grave{A}+L\grave{C}$ sont de Hurwitz, ce qui est possible avec les propriétés de contrôlabilité et d'observabilité.

Les valeurs propres de $\grave{A}+\grave{B}K$ sont dites modes propres du régulateur, et les valeurs propres de $\grave{A}+L\grave{C}$ sont dites modes propres de l'observateur.

3.2.5 Application à la stabilisation locale d'un système non linéaire par retour dynamique de sortie:

Considérons le système non linéaire:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t))$$

$$y(t) = g(x(t)).$$

Soit (x_e, u_e) un point d'équilibre, i.e. $f(x_e, u_e) = 0$. Le système linéarisé en (x_e, u_e) s'écrit :

$$\delta\dot{x}(t) = \grave{A}\delta x(t) + \grave{B}\delta u(t)$$

$$\delta y(t) = \grave{C}\delta x(t)$$

avec :

$$\grave{A} = \frac{\delta f}{\delta x}(x_e, u_e), \grave{B} = \frac{\delta f}{\delta u}(x_e, u_e), \grave{C} = \frac{\delta f}{\delta x}(x_e).$$

D'après le théorème de linéarisation, on obtient :

Théorème 3.2 *Si le système linéarisé est contrôlable et observable, alors il existe des matrices de gains K et L telles que les matrices $\grave{A}+\grave{B}K$ et $\grave{A}+L\grave{C}$ soient de Hurwitz, et alors le contrôle $u = u_e + K\delta\hat{x}$, où:*

$$\delta\dot{\hat{x}} = (\grave{A} + \grave{B}K + L\grave{C})\delta\hat{x} - L(y - g(x_e)),$$

stabilise localement le système au voisinage du point d'équilibre.

3.3 Observateurs des systèmes non linéaires:

3.3.1 Observateur de Luenberger étendu:

L'observateur de Luenberger étendu intervient, soit au niveau du système original avec un gain constant, soit par le biais d'un changement de coordonnées avec un gain dépendant de l'état à estimer. Dans le premier cas, un modèle linéarité est nécessaire, et le gain de l'observateur est calculé par placement de pôles. Ce type d'observateur ne peut être utilisé que lorsqu'on est sûr que l'état restera au voisinage de l'état d'équilibre. Pour cette raison, l'utilisation de cet observateur peut être compromise par les instabilités qui peuvent se révéler si l'on s'éloigne du point de fonctionnement.

Dans le deuxième cas, les méthodes de changement de coordonnées ne concernent qu'une classe restreinte de systèmes non linéaires. En effet, beaucoup d'approches utilisant les changements de coordonnées nécessitent l'intégration d'un ensemble d'équations aux dérivées partielles non linéaires, ce qui est souvent très délicat à réaliser. De ce fait, l'utilisation n de solution ns approchées est envisageable.

3.3.2 Filtre de Kalman Etendu (EKF):

Le filtre de Kalman étendu est l'une des techniques d'estimation les plus populaires et largement étudiées dans le domaine d'estimation d'état des systèmes dynamiques non linéaires. Ce filtre étendu consiste à utiliser les équations du filtre de Kalman standard au modèle non linéaire linéarisé par la formule de Taylor au premier ordre.

Ce filtre étendu a été appliqué avec succès sur différents types de procédés non linéaires.

Malheureusement, les preuves de stabilité et de convergence établies dans le cas des systèmes linéaires, ne peuvent être étendues de manière générale au cas des systèmes non linéaires.

3.3.3 Observateurs à grand gain:

Les techniques dites à grand gain peuvent être appliquées sans transformation du système initial. Dans ce cas, la conception de l'observateur se fait directement à partir de la structure du système. Cette technique utilise la théorie de stabilité de Lyapunov pour adapter les techniques développées dans le cas linéaire. Des méthodes sont développées donnent des conditions suffisantes de convergence de l'état estimé vers l'état réel du système, pour la classe des systèmes non linéaires décrits par le modèle suivant:

$$\begin{cases} x(t) = \grave{A}x(t) + f(u(t), x(t)) \\ \hat{y} = \grave{C}\hat{x}(t) \end{cases} \tag{3.28}$$

La dynamique de l'état comporte une partie linéaire non commandée et une partie non linéaire commandée, vérifiant en général la condition de Lipschitz par rapport à x.

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\| \tag{3.29}$$

L'observateur à grand gain possède la structure suivante :

$$\dot{\hat{x}}(t) = \grave{A}\hat{x}(t) + f(\hat{x}(t), u(t)) - K(y(t) - \grave{C}\hat{x}(t)) \tag{3.30}$$

L'appellation grand gain provient de la structure de l'observateur : lorsque la fonction non linéaire possède une grande constante de Lipschitz, la moindre erreur entre l'état réel et l'état estimé va se répercuter et croître. Par conséquent, le gain K de l'observateur (3.30) doit être important pour compenser cette amplification de l'erreur.

La dynamique de l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ se déduit de (3.28) et (3.30):

$$\dot{e}(t) = (\grave{A} - L\grave{C})e(t) + f(x(t), u(t)) - f(\hat{x}(t), u(t)) \tag{3.31}$$

Il a été démontré dans, que si le gain K est choisi telle que :

$$k < \frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{max}(P)} \tag{3.32}$$

Où k est la constante de Lipchitz de $f(x(t), u(t)), \lambda_{min}(Q)\ et\ \lambda_{max}(P)$ sont les valeurs propres maximales et minimales.Q est une matrice symétrique définie positive et$P$ est une matrice définie positive,solution de l'équation de Lyapunov:

$$(\grave{A} - K\grave{C})^T P + (\grave{A} - K\grave{C}) = -Q \tag{3.33}$$

La synthèse de l'observateur consiste à ajuster les matrices $P, Q\ et\ K$ de façon à garantir l'égalité (3.33). Ensuite, on vérifie si la condition (3.32) est satisfaite. Ainsi, et malgré l'intérêt du résultat, cette méthode n'est pas constructive, elle ne donne aucune indication sur le choix d'un gain satisfaisant la condition (3.32). Cette approche a été étendue par plusieurs auteurs.

Pour simplifier le problème on peut remplacer la matrice Q par une matrice identité ; et celà revient à choisir un gain K qui satisfait :

$$k < \frac{1}{\lambda_{max}(P)} \tag{3.34}$$

Ces techniques dites à grand gain sont très répondues dans la littérature. Il s'agit principalement de techniques de vérification, qui permettent d'établir des conditions suffisantes de convergence de l'état estimé vers l'état réel. La structure de l'observateur non linéaire est une structure de Luenberger étendue au cas non linéaire.

Conclusion

Durant tout au long de ce mémoire, nous avons cité plusieurs problèmes de contrôle :
la contrôlabilité, la stabilisation, l'observabilité et l'estimation de l'état. Nous avons accordé une attention particulière aux problèmes de stabilisation et de l'estimation.

Le problème de stabilisation d'un système consiste à constuire un retour d'état, ou feedback (ou encore un régulateur), c'est-à-dire une fonction $x \to u(x)$ tel que le point que l'on cherche à atteindre (l'équilibre) soit asymptotiquement stable pour le système bouclé $\dot{x} = f(x, u(x))$.

La contrôlabilité est indispensable pour stabiliser un tel système, en effet, pour atteindre le point d'équilibre, le système doit être contrôlable. Un tel feedback est dit bouclage statique. Souvent on ne mesure pas tout l'état x, mais une partie y de x. On peut se demander si la connaissance partielle de cet état permet de reconstituer l'état complet. c'est le problème de l'observabilité. Dans ce cas, stabiliser le système entier revient à construire un feedback par retour de sortie dynamique, il s'agit donc de constuire une fonction $y \to u(y, \hat{x})$, où $\hat{x}$ est l'état estimé de x, telle que l'équilibre du système en boucle fermé soit asymptotiquement stable. Estimer x revient à construire un observateur asymptotique $\hat{x}$ de x, i.e. une fonction dynamique de l'observable y tel que $\hat{x}(t) - x(t) \underset{t\to\infty}{\to} 0$.

Le problème de construction d'un régulateur en fonction de l'observateur asymptotique de l'état pour un système contrôlable et observable s'appelle synthèse régulateurobservateur. Ce problème est loin d'être résolu dans le cas des systèmes non linéaires.

Les deux difficultés majeures du problème de stabilisation des systèmes non linéaires sont:

1. Comment constuire le regulateur ?

2. Une fois le régulateur construit comment analyser la stabililé asymptotique du système en boucle fermée, comme nous l'avons vu au chapitre 2, il n'existe pas de méthode "universelle" pour la construction de la fonction de Lyapunov.

De même, la synthèse d'observateur asymptotique est un problème d'actualité, largement inverti par les automaticiens.

Dans le cas des systèmes linéaires, les deux problèmes sont completement résolus.

L'analyse de la stabilité de Lyapunov joue un rôle primordial aussi dans les problèmes de stabilisation que dans les problèmes de la synthèse d'observateur. Nous avons consacré, à cet effet, le chapitre deux aux différentes méthodes de Lyapunov pour la stabilité des systèmes linéaires et non linéaires, autonomes et non autonomes.

Dans le chapitre trois, nous nous sommes intérressés à la contrôlabilité et la stabilisation des systèmes linéaires et non linéaires. Dans le cas non linéaire, nous avons présenté que des résultats locaux sur ces deux notions.

Nous avons présenté quelques observateurs les plus connus et utilisés pour les systèmes non linéaires. Un rappel sur la théorie de l'observation des systèmes linéaires, et non linéaires a tout d'abord été présenté.

Notre travail se termine par une synthèse d'observateur d'état pour une classe de systèmes non linéaires. Des conditions de synthèse en termes LMI ont été étudiées.

Notre application consiste à illuster par un exemple numérique la convergence exponenetielle de l'estimateur vers zéro. (programmé via le langage de programmation Matlab et Simulink).

Beaucoup de questions fondamentales n'ont pas été abordées dans ce mémoire. En particulier:

- Nous n'avons pas expliqué comment construire des feedbacks explicites asymptotiquement stabilisants. Ce problème fondamental a été bien sûr abordé par de nombreux auteurs et de nombreux livres ; voir [14] et [35].
- Souvent on ne mesure pas tout l'état x, mais une partie y de x. On ne peut donc pas utiliser des feedbacks dépendant de x : il faut se limiter à des feedbacks dépendant de y. Sur ce sujet il existe de nouveau une très vaste littérature. Mentionnons juste l'article [14], qui contient un des résultats les plus intéressants obtenus récemment sur ce sujet. Notons qu'il est utile de considérer des feedbacks instationnaires ; par exemple le système:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u, \\ y &= x^2 \end{aligned}$$

ne peut être stabiliser asymptotiquement à l'aide de feedbacks de la forme $u(y)$, bien qu'il puisse être stabilisé asymptotiquement à l'aide de feedbacks de la forme $u(x)$ (prendre, par exemple $u(x) = -x$). Mais il peut être stabilisé asymptotiquement à l'aide de feedbacks de la forme $u(y, t)$. Voir [14] pour plus d'informations.

Il est claire que notre étude est loin d'être complète. Il nous semble néanmoins avoir acquis les connaissances essentielles, lesquelles conjugées avec beaucoup de perseverances nous permetterons d'investir les situations, notament la conception d'observateurs pour les systèmes non linéaires.

Bibliography

[1] Souad Amrane. *Observateurs d'état pour les systèmes dynamiques non linéaires*. PhD thesis, UMMTO, 2015.

[2] A Ayadi. Méthode de décomposition et contrôlabilité d'un système non linéaire.

[3] Cherifa Bennani. *Stabilisation et estimation de l'état des systèmes dynamiques non linéaire et application.* PhD thesis, Université de Tizi Ouzou-Mouloud Mammeri, 2011.

[4] Maïtine Bergounioux. Mathématique et automatique: de la boucle ouverte à la boucle fermée. *J3eA*, 2:002, 2003.

[5] KAFI SYEF EDDINE. Observateur non linéaire: Application au diagnostic de pannes dans les robots manipulateurs. Master's thesis, UNIVERSITE KASDI MERBAH OUARGLA, 2015.

[6] Hamadi Jerbi. *Quelques résultats sur la stabilisation des systèmes non linéaires par estimation et retour d'état*. PhD thesis, Université Paul Verlaine-Metz, 1994.

[7] François Rouvière. *Petit guide de calcul différentiel: à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2009.