République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DE MEDEA

Faculté de Technologie

Département de Génie des Procédés et Environnement

MEMOIRE DE FIN D'ETUDES

En vue de l'obtention du Diplôme de Master en Génie des Procédés

Option : Procédés pharmaceutiques

Thème

Contribution à la modélisation et la simulation d'un écoulement diphasique gaz/liquide

Réalisé par

Mr. HADJERSI Merouane

Proposé et dirigé par

Dr. RAHAL Soufiane

2016/2017

Remerciements

*Le plus grand merci revient à **ALLAH** qui nous a guidé dans le bon sens durant notre vie qui nous aide à réaliser ce travail.*

*Ce travail a été réalisé sous la direction de Monsieur **Soufiane RAHAL,** MCB à l'Université de Yahia Farés de Médéa, qu'il trouve ainsi l'expression de notre profonde reconnaissance pour ses compétences, ses encouragements et ses précieux conseils durant le déroulement de ce travail qui ont éclairé mon chemin vers la réussite de la concrétisation de mon mémoire.*

*Nos remerciements vont aussi au Dr. N. **HADIDI** et au Dr. Y. **KERCHICH**, pour avoir accepté de juger ce travail.*

Mes remerciements vont également à l'ensemble du corps enseignants du département de génie des procédés et environnement.

Nos remerciements vont aussi au A. BOUREK, M. HENTABLI, M. BELKACEM, M. BELKACEM, A. CHARFAOUI (golaba).

En fin nous remercions tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'achèvement de ce travail.

Dédicaces

Je dédie cet événement marquant de ma vie

A *toute ma famille en commençant par mes chers parents, plus particulièrement*

A *ma mère qui a partagé avec moi ma peine et ma fatigue*

A *mon père qui n'a jamais cessé de chercher le meilleur pour chacun de ses enfants*

A *mes soeurs et mon* ***frère*** *pour leur soutien sans faille et son affection*

Je ne manquerais pas de dédier ce travail

A *tous mes amis, ADEM, BALKACEM, BOUREK, IBRIR, BILAL, HENTABLI, Boukhorchof.*

A *mes amis sans exception et groupe 22*

A mes enseignants de tous les cycle.

KHLIFI, MEGENI, FAROUK, Dr. BANKERTBI, Dr. BACHEN, Dr. BELHADJE, Dr BENKAYARE, Dr. AMMI, Dr. HADIDI, Dr. RAHAL, Dr. KOUADIK

Et Recteur ***Dr. ZAGHDAR Ahmed***

A *tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin.*

Merwane*.*

الملخص

العمل الحالي يهدف إلى دراسة تدفق الغاز / السائل في الأنابيب الشعرية. الغرض الوحيد لفهم أفضل لتدفق هيدروديناميكية فقاعة الغاز في الأنابيب الشعرية تنطوي على دراسة المتغيرات المختلفة بما في ذلك سرعة الفقاعات، وحجمها وانخفاض ضغط إضافي. اقترحنا نموذجا جديدا مع معامل الارتباط "R=0.8895"، ومؤشر انحراف " RMSE ="5.9591KPa/m".

كما استخدمنا برنامج ANSYS لمحاكاة تدفق الغاز / السائل في الشعريات باستعمال كرية ثابتة.نلاحظ أن الضغط مرتفع جدا فقط قبل الكرة، ونشاهد انخفاض في الضغط بعد الكرة. سرعة تتناقص فقط بجوار الكرة، وتزيد بعد تجاوز الكرة.

كلمات البحث: تدفق مرحلتين، فقدان الحِمل، السرعة، الأنابيب الشعرية

Résumé

Le présent travail a pour objectif l'étude de l'écoulement gaz/liquide dans un tube capillaire. Ceci dans le seul but de mieux comprendre l'hydrodynamique de l'écoulement d'une bulle de gaz dans une canalisation capillaire l'étude fait intervenir des différentes variables notamment la vitesse des bulles, leur taille et la perte de charge additionnelle. Nous avons proposé un nouveau modèle avec un coefficient de corrélation « R = 0.8895», et une erreur « RMSE = 5.9591KPa/m».

Nous avons utilisé aussi le logiciel ANSYS pour faire la simulation de l'écoulement gaz/liquide dans les capillaires par une boule fix. Nous remarquons que la pression est très élevée juste avant la boule et après la boule ont vu une chute de pression. La vitesse diminue juste à côté de la boule et elle augmente après dépasser la boule.

Mots clés : écoulement diphasique, perte de charges, vitesses, canalisation capillaire

Abstract

The aim of this work is to study the gas / liquid flow in a capillary tube. In order to better understand the hydrodynamics of the flow of a gas bubble in a capillary channel, the study involves various variables including bubble velocity, their size and the additional pressure drop. We proposed a new model with a correlation coefficient « R =0.8895 », and an error « RMSE =5.9591KPa/m ».

We also used the ANSYS software to simulate the gas / liquid flow in the capillaries by a fixed ball. We notice that the pressure is very high just before the ball and after the ball saw a drop in pressure. The speed decreases just next to the ball and increases after passing the ball.

Keywords : diphasic flow, loss of charges, velocities, capillary channel

Résumé.
Table des matières.
Liste des tableaux.
Liste des figures.
Introduction générale 1

Chapitre I Eléments de bibliographie sur les écoulements diphasiques.

I.1 Introduction 2
I.2 Classification Des Ecoulements Diphasiques 2
I.3 Les Régimes D'écoulements Dans Un Puits Horizontal 5
I.3.1 Les Ecoulements Stratifiés 5
I.3.2 Les Ecoulements Mixtes (intermittent) 6
I.3.3 Les Ecoulements Annulaires 6
I.3.4 Les Ecoulements à Bulles Dispersées 6
I.4 Les Régimes D'écoulements Dans Un Ecoulement Vertical 6
I.4.1 Ecoulement à Bulles 7
I.4.2 Ecoulement Slug 7
I.4.3 Ecoulement Churn 8
I.4.4 Ecoulement Annulaire 8
I.5 L'effet des propriétés du fluide 8
I.6 Les frontières des régimes d'écoulements 9
I.7 Equations De L'hydrodynamique En Diphasique 10
I.7.1 Forces subies par un fluide 10
I.7.2 Force de volume : force de pesanteur 10
I.7.3 Forces de surface : force de pression et force de frottement 11
I.7.4 La force de pression : force normale 11
I.7.5 Les frottements : force tangentielle 12
I.7.6 Forces s'exerçant sur une bulle isolée 13
I.8 Dynamique de bulles 13
I.8.1 Équations de base d'un écoulement diphasique 18
I.8.2 Variables de l'écoulement gaz-liquide 18
I.8.3 Différents modèles de l'écoulement gaz-liquide 19
I.8.5 Description du modèle « twofluid » 20
I.9 Conclusion 21

Chapitre II Modélisation
Parti 1 22
II.1 Dynamique des fluides visqueux incompressibles : Équation de Navier Stokes..... 22
II.1.1 Forces de surface Tenseur des contraintes 22
II.1.2 Principe fondamental de la dynamique 25
Partie 2..... 26
II.2.1 Fluide newtonien et équation de Navier-Stokes..... 26
II.2.2 Conditions aux limites..... 28
II.2.2.a Cas d'une paroi solide..... 28
II.2.2.b Cas d'une surface de contact entre deux fluides..... 29
Partie 3 29
II.3 Modèle physique 29
II.3.1 Estimation des profils de perte de charge..... 32
II.3.2 Les analyse statistique de modèle 35

Chapitre III Simulation De L'écoulement Gaz Liquide Dans Les Capillaires

III Simulation numérique 37
III.1 Introduction 37
III.2 Calcul numérique..... 37
III.3 La simulation par le logiciel 37
III.3.1 Présentation Du Code De Calcul 37
III.3.2 Description du modèle 39
III.3.3 Maillage..... 39
III.4 Résultats et discussion..... 42
Conclusion générale 43
Bibliographie

Chapitre I

Figure (I.1) : Schéma des régimes d'écoulement dans des pipes horizontaux. 5
Figure (I.2) : Schéma des régimes d'écoulement dans des pipes verticaux 6
Figure (I.3) : Schéma des régimes d'écoulement vers le haut dans l'annulaire 7
Figure (I.4) : Diagramme expérimental des régimes d'écoulement 8

Chapitre II

Figure (II.1) Profils de perte de charge calculée comparé avec l'expérimentale a une vitesse de liquide v_l=0.08 m/s pour une canalisation en PDMS. 32
Figure (II.2) Profils de perte de charge calculée comparé avec l'expérimentale a une vitesse de liquide v_l=0.08 m/s pour une canalisation en verre modifier. 33
Figure (II.3) Profils de perte de charge calculée comparé avec l'expérimentale a une vitesse de liquide v_l=0.08 m/s pour une canalisation en verre. 34
Figure (II.4) Profils de perte de charge calculée comparé avec les résultats expérimentaux des trois canaux a une vitesse de liquide v_l =0.12 m/s. 34
Figure II.5 Corrélation linéaire entre les valeurs prédite et les valeurs de l'expérience pour la canal 2 35
Figure II.6 Corrélation linéaire entre les valeurs prédite et les valeurs de l'expérience pour la canal 4 36
Figure II.6 Corrélation linéaire entre les valeurs prédite et les valeurs de l'expérience pour la canal 5 36

Chapitre III

Figure III.1 Schéma de modèle physique étudié 39
Figure III.2 Représentation 2D du maillage. 40
Figure III.3 Distribution des maillages 41
Figure III.4 Courbes de convergence 41
Figure III.5 Profils de vitesse et de pression pour D=1.8mm et différentes stations. 42
Figure III.6 Profils de pression pour différents diamètres et différentes stations. 43
Figure III.7 Profils de pression pour différents diamètres et différentes stations. 44
Figure III.8 Contours de pression et de vitesse pour D=1.8mm. 44
Figure III.9 Contours de pression et de vitesse pour D=1.4mm. 45
Figure III.10 Contours de pression et de vitesse pour D=1.0mm. 45
Figure III.11 Contours de pression et de vitesse pour D=0.5mm. 45
Figure III.12 Modèle physique 46
FigureIII.13 Profils de vitesse et de pression pour plusieurs obstacles à différentes stations. .46
FigureIII.14 Contours de pression et de vitesse pour plusieurs obstacles. 47

Chapitre I

Tableau I.1 Classification des écoulements diphasiques basée sur la distribution..... 4

Chapitre II

Tableau III.1 Les analyse statistique 36

Introduction générale

Dans la vie quotidienne en faisant bouillir de Léau, on peut observer les créations et le mouvement de bulles de gaz dans un liquide. C'est un phénomène assez complexe sur lequel de nombreux chercheurs se sont penchés au cours des cinquante dernières années. On le rencontre dans l'industrie pétrolière ou du gaz est injecté dans les gisements pour réduire le gradient de pression hydrostatique et favoriser l'extension des hydrocarbures, ainsi que dans l'industrie chimique en passant par domaine biomédical, et même l'industrie nucléaire.

Nombreux chercheur proposé différentes modèles pour exprimer les caractéristiques de diphasique pression dans le micro-canal, en générale, ces modèles peuvent être classifié on deux groupes.

Le problème est consisté à provoquer des mal fonctionnement pour les pompes pour cela on fait des études pour cet écoulement et proposé des modèles physiques pour suivi le phénomène.

L'objectif de cette étude est de faire une modélisation de l'écoulement d'une bulle de gaz dans un conduit très fin ou les forces de frottement sont négligeables devant les forces de surface, puis une simulation de l'écoulement d'un liquide à travers une bulle d'air a différentes diamètre avec une hypothèse ou la bulle supposé fixe.La taille des bulles est importante mais leur vitesse de glissement est très faible.

Ce mémoire est composé de trois parties :

- Une première partie théorique présente l'écoulement choisi en insistant sur les forces hydrodynamiques agissant sur une bille isolée.
- La seconde partie expose un modèle théorique pour la prédiction de perte de charge.
- La troisième partie nous avons fait une simulation d'un écoulement à travers un obstacle.

Chapitre I

Eléments de bibliographie sur les écoulements diphasiques

I.1 Introduction

D'une manière générale, le présent chapitre vise à développer une certaine compréhension physique du problème de l'écoulement gaz-liquide. La description des caractéristiques physiques de l'écoulement dans les tubes circulaire incluant les différents régimes d'écoulement permettra de cerner les forces dominantes et ouvrira la voie à l'élaboration d'une représentation mathématique de l'écoulement. Pour être en mesure de quantifier les phénomènes observés, des mesures sur le modèle devront être réalisées. En plus de permettre de décrire les tendances de l'écoulement dans un tube capillaire en fonction de divers paramètres, ces mesures pourront être utilisées pour valider le modèle mathématique de l'écoulement un tube cailla

I.2 Classification Des Ecoulements Diphasiques

Il y a une variété d'écoulements diphasiques selon des combinaisons de deux phases aussi bien que sur des structures d'écoulement. Des mélanges diphasiques sont caractérisés par l'existence d'une ou plusieurs interfaces.

Il est plutôt facile de classifier les mélanges diphasiques selon les combinaisons des deux phases, puisque dans des conditions standard nous avons seulement trois états de la matière : solide, liquide et phases gazeuses.

Alors nous avons les combinaisons suivantes :

- Mélange gaz-solide
- Mélange gazeux liquide
- Mélange Liquide-solide
- Mélange deux liquides non-miscibles

Ici il est évident que le quatrième groupe ne soit pas un écoulement diphasique, toutefois pour tout but pratique il peut être traité comme mélange biphasé.

Pendant que des écoulements monophasiques peuvent être classifiés selon la géométrie de l'écoulement en écoulement laminaire, transitoire et turbulent, l'écoulement diphasique selon Zuber (1971), d'Ishii (1971) et de Kocamustafaogullari (1971). Peut-être classifié selon la géométrie des interfaces en trois classes : écoulements à phases continues, écoulements mixtes et écoulements à phase dispersé qui sont montrés dans le Tableau (2-1).

Dépendant du type de l'interface, la classe des écoulements à phases continues peut-être divisée en écoulements plats et écoulements quasi-axisymétrique dont chacun peut être subdivisé en deux régimes. Ainsi, l'écoulement plat inclut le film et les écoulements stratifiés, tandis que l'écoulement quasi-axisymétrique comprend les régimes annulaires et l'écoulement jet (jet

flow). Les divers arrangements, c.-à-d., configurations des deux phases et des liquides non-miscibles, sont montrés dans le Tableau (I.1).

La classe des écoulements à phase dispersée peut également être divisée en plusieurs types. Ainsi, dépendant de la géométrie de l'interface. On peut considérer les particules sphériques, elliptiques, granulaires, etc.

Cependant, il est plus commode de subdiviser la classe des écoulements à phase dispersée en considérant la phase de la dispersion. En conséquence, nous pouvons distinguer trois régimes :

- Ecoulement à bulles ;
- Ecoulement à gouttelettes (ou brume) ;
- Ecoulement de particules solides.

Dans chaque régime la géométrie de la dispersion peut être sphérique, sphéroïdal, elliptique, etc.

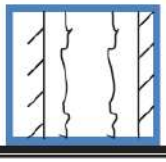
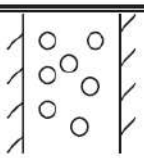
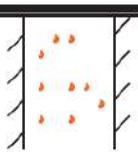
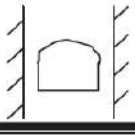
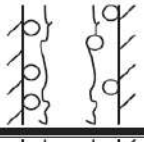
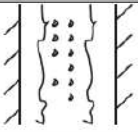
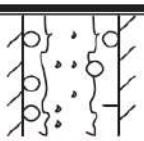
La troisième classe qui est caractérisée par la présence des écoulements à phase continue et à phase dispersée. Ceci s'appelle la classe des écoulements mixtes.

Ici aussi, il est plus commode de subdiviser la classe des écoulements mixtes selon la phase de la dispersion. En conséquence, nous pouvons distinguer quatre régimes :

- Les écoulements à bouchons ;
- Les écoulements à bulles ;
- Les écoulements annulaires dispersés ;
- Les écoulements annulaires dispersés à bulles.

Les diverses configurations entre les phases et les composants du mélange sont montrés dans le Tableau (I.1).

Tableau (I.1) : Classification des écoulements diphasiques basée sur la distribution

Classes	Régimes	Géométries	Configurations
Ecoulements A Phases Continues Separated flows	Ecoulements A Film Film flow		- Film liquide dans un gaz - Film gazeux dans un liquide
	Ecoulements Annulaires Annular flow		- Coeur liquide et Film gazeux - Coeur gazeux et Film liquide
	Jets Jet flow		- Jet liquide dans un gaz - Jet gazeux dans un liquide
Ecoulements A Phase dispersée Dispersed flows	Ecoulements A Bulles Bubbly flow		- Bulles de Gaz dans un liquide
	Ecoulements àGouttelettes Droplet flow		- Gouttelettes liquide dans un gaz
	Ecoulements de particules solides Particulate flow		- Particules Solide dans un liquide ou un gaz
Ecoulements Mixtes Mixed or Transitional flows (intermittent)	Ecoulements A Bouchons Slug or plug flow		- Poche de gaz dans un liquide
	Ecoulements Annulaires A bulles Bubbly annular flow		- Bulles de gaz dans un film liquide, coeur de gaz
	Ecoulements Annulaires dispersés Droplet annular flow		- Gouttelettes liquides dans un Coeur Gazeux, film liquide à la paroi
	Ecoulements annulaires dispersés A Bulles. Bubbly droplet annular flow		- Gouttelettes de liquides dans un Coeur gazeux, Bulles de gaz dans le film liquide

I.3 Les Régimes D'écoulements Dans Un Puits Horizontal

Les régimes d'écoulements observés dans un puits horizontal, sont illustrés schématiquement dans la figure (I.1) :

II.3.1 Les Ecoulements Stratifiés

Dans l'écoulement stratifié, le gaz et le liquide s'écoulent séparément, et la phase liquide s'écouledans la partie basse du trou.

Le régime d'écoulement stratifié est subdivisé en un régime :

- **Stratifié lisse** : Ce régime a une interface liquide gaz lisse et prend place lorsqu'on appliqué des débits faibles de liquide et de gaz.
- **Ecoulement stratifié onduleux :** Quand le taux de gaz augmente, la surface du liquiddevient instable ce qui résulte à un écoulement stratifié onduleux.

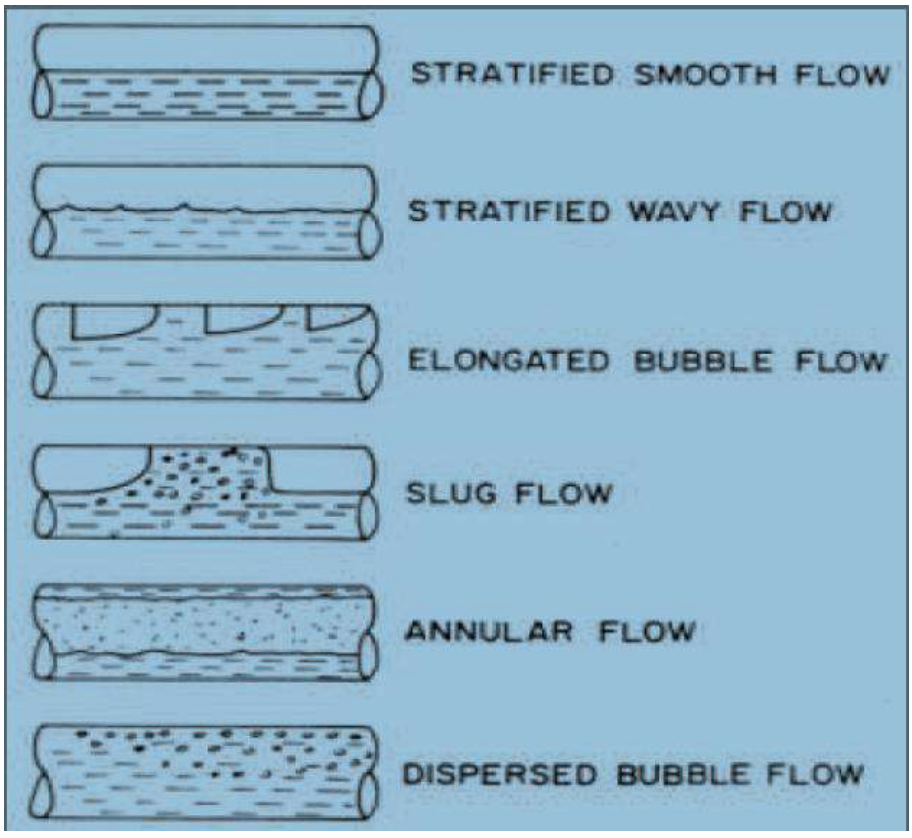


Figure (I.1) : Schéma des régimes d'écoulement dans des pipes horizontaux (Shoham20,1982).

I.3.2 Les Ecoulements Mixtes (intermittent)

Sont caractérisés par l'apparition en alternance des slugs et bulles de gaz. La différence majeureentre « l'elongatedbubble flow » et l'écoulement slug est que l'écoulement « elongatedbubble» n'a pas de bulles de gaz entraînées dans le slug liquide.

I.3.3 Les Ecoulements Annulaires

La géométrie de ce régime est composée d'un film liquide qui entoure les parois du trou et d'uncorps de gaz au milieu. Dans ce régime d'écoulement, il faut que le taux de gaz soit suffisammentgrand pour plaquer le film liquide sur la paroi et ne laisse pas tombé et se mélanger avec le gaz.

On peut subdiviser les écoulements annulaires en :

- **Ecoulement Annulaire-Mist :** Le corps de gaz de ce régime d'écoulement contient quelquesgouttelettes entraînées de liquides.
- **Ecoulement Annulaire :** Le corps de gaz de ce régime d'écoulement ne contient pas degouttelettes de liquides.

I.3.4 Les Ecoulements à Bulles Dispersées

À la différence de l'écoulement annulaire-mist, l'écoulement à bulles dispersées se produit Habituellement à des débits d'écoulements du liquide très élevés. La phase liquide est continue tandisque la phase gazeuse est distribuée comme des bulles discrètes.

I.4Les Régimes D'écoulements Dans Un Ecoulement Vertical6

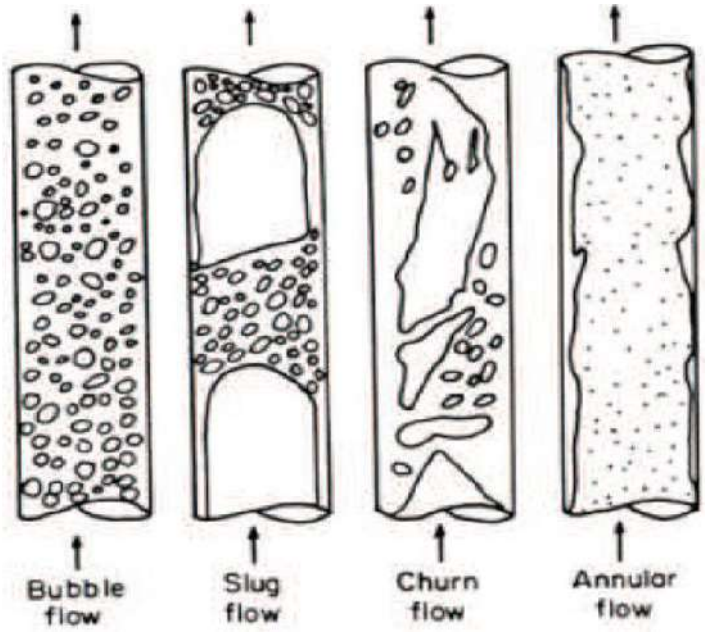


Figure (I.2): Schéma des régimes d'écoulement dans des pipes verticaux (Shoham20, 1982).

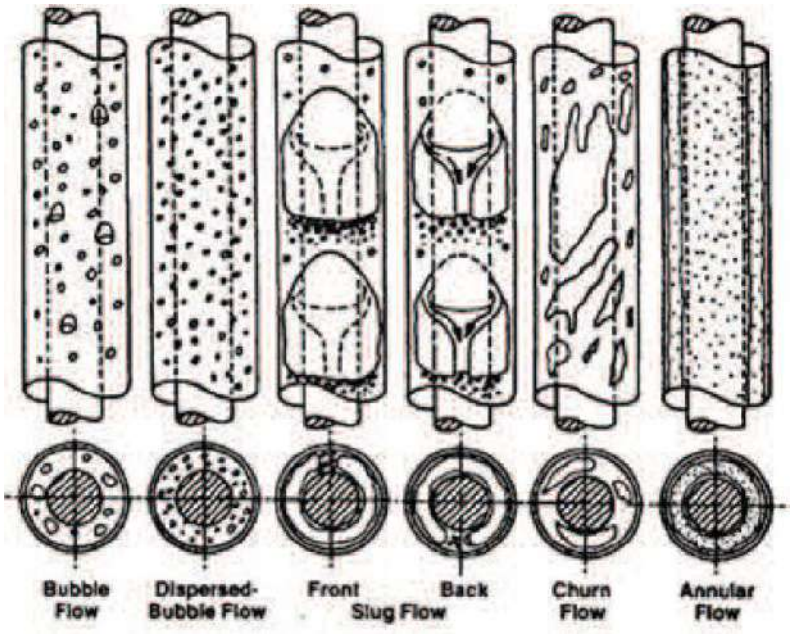


Figure (I.3) : Schéma des régimes d'écoulement vers le haut dans l'annulaire (Brill &Mukherjee21).

I.4.1 Ecoulement à Bulles

Dans les vitesses de liquide très basses, le gaz est dispersé en tant que bulles discrètes. Ce régimed'écoulement est appelé écoulement à bulles. À mesure que le débit liquide augmente, les bullespeuvent augmenter dans la taille par l'intermédiaire de la coalescence. D'une façon générale, la phasegazeuse est dispersée en tant que bulles discrètes dans le liquide continu. La distinction entre **l'écoulement à bulles** et **l'écoulement à bulles dispersées** n'est pas clairement évident (Barnea22,1987). On observe le régime d'écoulement à bulles seulement dans un écoulement vertical, tandis quel'écoulement à bulles dispersées se trouve dans toutes les gammes d'inclinaisons du trou.

I.4.2 Ecoulement Slug

De l'écoulement à bulles, avec un accroissement plus ultérieur de débit de gaz, certaines bullescoalescent pour former de plus grandes bulles, plus longues, (chapeau bulle). Ces grandes bulles senomment : les bulles de Taylor. L'écoulement slug se compose des bulles de Taylor séparées par desrégions d'écoulement à bulles appelé les slugs. Un film liquide mince coule en bas autour des bullesde Taylor. La distribution des bulles de Taylor dans l'écoulement vertical est symétrique.

I.4.3 Ecoulement Churn

Dans l'écoulement Churn, les bulles et les slugs deviennent fortement tordu et semble sefusionner dans le cas des débits élevés de gaz. Une autre différence entre l'écoulement slug etl'écoulement churn est que le film liquide entourant le bouchon de gaz ne peut pas être observé dansl'écoulement churn.

I.4.4 Ecoulement Annulaire

Semblable à l'écoulement d'annulaire-mist dans un trou horizontal, l'écoulement annulaire ici estcaractérisé par un liquide s'écoulant comme un film liquide autour de la paroi du trou, entourant unnoyau de gaz s'écoulant en grande vitesse, qui peut contenir des gouttelettes entraînées de liquides.

L'écoulement ascendant du film liquide contre la pesanteur résulte des forces exercées par le noyaude gaz mobile qui a une vitesse très grande (rapide).

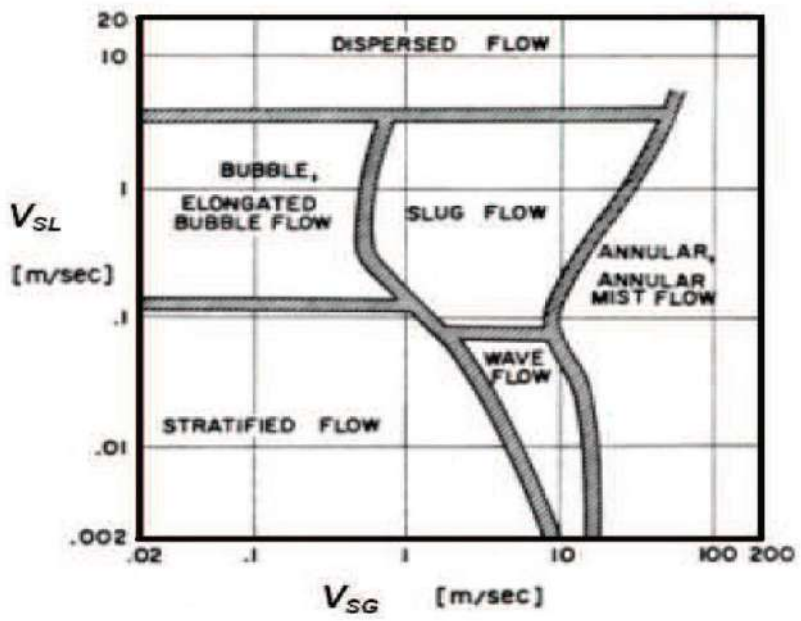


Figure (I.4): Diagramme expérimental des régimes d'écoulement(Mandhane23. (1974), air-water system, pipe horizontal).

I.5 L'effet des proprietes du fluide

On sait que les régimes d'écoulement dépendent de l'inclinaison du puits ainsi les propriétés dufluide qui a eu une moindre importance d'étude par rapport à la première. L'étude de la transition desrégimes d'écoulement pour différentes propriétés du fluide est un support important pour unecompréhension profonde du mécanisme physique de la transition. Les résultats obtenus par Weisman& autres24 (1979), pour un puits horizontal ont montré que la viscosité a un effet important sur latransition des régimes d'écoulements et aussi sur les pertes

de charges dues aux frottements, tandisque, la densité a une influence minimale sur les pertes de charges et généralement pas d'impact surles régimes d'écoulements.

I.6 Les frontieres des regimes d'ecoulements

Selon les modèles proposés, les frontières du régime d'écoulement transitoire pour l'écoulement horizontal peuvent être déterminées par les étapes suivantes :

- Estimé le niveau liquide d'équilibre (h_L).
- Vérification de la frontière de transition du régime stratifié vers le régime non-stratifié.
- Si l'écoulement n'est pas stratifié, vérifier la transition vers l'écoulement annulaire.
- Si l'écoulement n'est pas annulaire, vérifier la frontière de transition du régime slug vers le régime bulle dispersée.

En introduisant un terme qui est le diamètre équivalent, on peut estimer les régimes d'écoulementet aussi les pertes de charges dues aux frottements à l'intérieure dans une section annulaire d'undrain horizontal.

La géométrie de la conduite a une grande influence la transition des régimes d'écoulement.

Quand le diamètre intérieur des tiges est très proche à celui du trou provoque des changements importants sur les régimes d'écoulement.

I.7 Equations de l'hydrodynamique en diphasique

Le milieu diphasique est constitué d'un milieu continu, dans lequel se meuvent des bulles d'air. Il existe une interaction forte entre l'eau et l'air ou l'huile. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement doivent donc prendre en compte ce couplage.

L'approche utilisée est une approche eulérienne-eulérienne. En tout point du domaine qui nous intéresse, on souhaite connaître les champs de pression, de vitesse. Alors, on ne s'est pas intéressé à suivre la trajectoire d'une particule d'air (approche eulérienne-lagrangienne).

Pour pouvoir écrire les équations en diphasique, on doit tout d'abord recenser les nouvelles forces mises en jeu.

I.7.1 Forces subies par un fluide

L'un des buts de la mécanique étant de définir la **position** ou le **mouvement des particules matérielles** sous l'action des forces qui les sollicitent, il faut donc définir le genre de forces que nous aurons à considérer en mécanique des fluides.

I.7.2 Force de volume : force de pesanteur

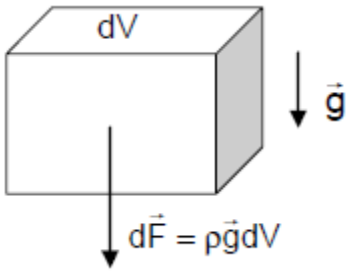
Les champs de force (de pesanteur, magnétique, électrique, etc.) exercent sur les particules fluides des actions à distance qui sont proportionnelles aux volumes des particules. Ce sont les **forces de volume**.

Considérons un petit volume élémentaire dV et soit dF la force élémentaire qui s'exerce sur dV. On désigne par **force volumique** f (ou densité de force par unité de volume) la limite, si elle existe, de la quantité :

$$\overrightarrow{dF} = dm\vec{g} = \rho\vec{g}\, dv \tag{I.3}$$

La densité des forces exercées par la gravité sur un milieu continu est l'un des exemples les plus classiques. C'est celle qui interviendra dans nos problèmes3 :

$$\overrightarrow{dF} = dm\vec{g} = \rho\vec{g}\, dv$$



Par conséquent, la **densité volumique de force** à laquelle est soumis le fluide est f = ρ g.

I.7.3 Forces de surface : force de pression et force de frottement

Imaginons une surface S fictive qui, au sein du fluide, sépare le fluide en deux domaines D1 et D2. Les particules qui se trouvent du côté de D2, mais contiguës à S, agissent sur les particules de D1 qui le touchent. Ce sont des actions à courte distance proportionnelles à l'aire de contact et on les appelle forces de surface.

I.7.4 La force de pression : force normale

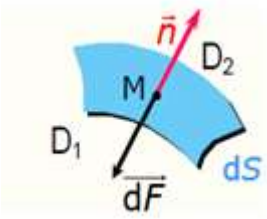
La **pression p est une grandeur scalaire** (positive) définie en tout point du fluide.

L'unité de pression dans le système international est le pascal (Pa = N/m2). Cette unité étant faible (un pascal représente environ la pression exercée par un confetti posé sur votre main), on exprime les pressions en hectopascals (hPa), kilopascals (kPa) ou mégapascals (MPa).

Autres unités4 : 1 bar = 105 Pa ; 1 atm = 760 mm de Hg = 760 torr = 10,33 m d'eau = 1,013 105 Pa.

On se souvient des expériences élémentaires qui consistent à percer un petit trou dans un récipient rempli de liquide. On constate que, quelle que soit la forme du récipient et la

position de l'orifice, le liquide jaillit toujours perpendiculairement à la paroi. On admet que ce qui a lieu sur la frontière du récipient se produit encore à l'intérieur. En d'autres termes, si S est une surface non matérielle, qui sépare un domaine D de fluide en deux sous-domaines D1 et D2, alors le fluide dans D2 exerce sur D1 une force normale à S en tout point M de S, et vice versa, le fluide dans D1 exerce sur D2 une force égale et opposée, donc normale elle aussi à S (principe de l'action et de la réaction). Pour exprimer la force exercée par D2 sur D1 on introduit le vecteur unitaire nr orienté vers le milieu qui agit (ici D2) et on écrit, pour un élément dS tracé sur S et entourant un point M de S.



$\overrightarrow{dF} = -p\vec{n}\, ds$

$\overrightarrow{dF}$ est la force exercise sour les element de surface ds.

P est la pression régnant au pointe M.

Par conséquent D2 exerce sur D1, par l'intermédiaire de S, une **densité surfacique de force** (force par unité de surface) pn r

La force de pression agit toujours vers l'intérieur du volume délimité par l'élément de surface.

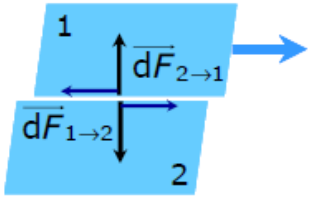
La pression est indépendante de la surface et de l'orientation de cette surface. Si on fait passer une. Autre surface S'par le point M, on obtient la même pression p. La notion de pression, totalement indépendante de la frontière du fluide (récipient), décrit les efforts exercés à l'intérieur du fluide par une partie D2 sur son complémentaire D1. On dit que l'on a donné une description des **efforts intérieurs** (que les particules exercent les unes sur les autres).

I.7.5 Les frottements : force tangentielle

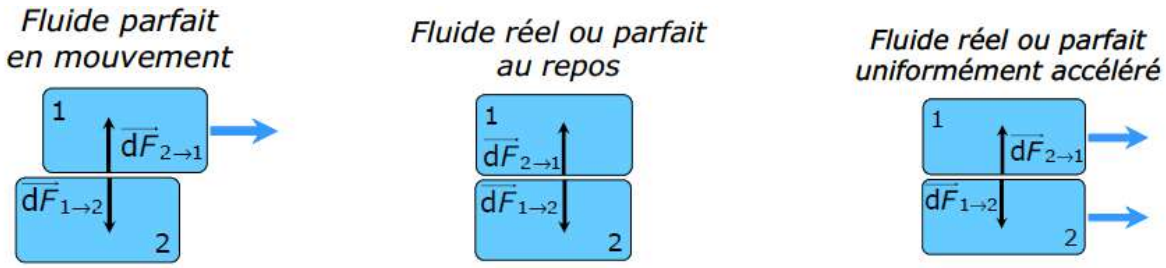
Il n'existe de **contraintes5 tangentielles** que si le fluide est visqueux (fluide réel) et en mouvement non uniformément accéléré. L'existence de contraintes tangentielles se manifeste par une résistance à l'écoulement.

Cette force de frottement s'annule avec la vitesse. Pour un fluide au repos, la statique des fluides réels se confond avec la statique des fluides parfaits (non visqueux). Cette distinction n'apparaîtra qu'en dynamique des fluides.

En résumé, il existe des forces de surface normales et tangentielles dans le cas suivant :



Les forces de surfaces sont normales dans les cas suivants :



I.7.6 Forces s'exerçant sur une bulle isolée

L'ensemble des forces qui s'exercent sur une bulle isolée sont donc :

- **Son poids**
- **La poussée d'Archimède : Cette** force, dirigée verticalement vers le haut, résulte du non uniformité du champ de pression hydrostatique autour de l'interface air/eau.
- **La force de traînée : Si la** bulle possède une vitesse différente de celle de l'eau, une force de traînée **FD** se créée, assimilable à une résistance au déplacement. Elle résulte du non uniformité du champ de contraintes de frottement autour de l'interface et est donc l'intégration du frottement interfacial. Elle dépend du coefficient n de traînée **CD** qui lui-même dépend du nombre de Reynolds de l'écoulement. Plusieurs définitions Ne ce coefficient existent, avec chacune leur domaine de validité.
- **La force de partance :** L'origine de cette force, due au gradient de vitesse de la phase continue, est la même que pour la force de traînée. Le non uniformité du champ de contraintes autour de l'interface induit une force résultante avec une composante parallèle à l'écoulement (la traînée) et une composante perpendiculaire à l'écoulement (la portance).
- **La force de masse ajoutée : Elle naît** du fait de l'accélération relative de la phase air par rapport à la phase eau. Pendant leur accélération, les particules d'air peuvent être ralenties par l'inertie du fluide porteur et subir ainsi une force dite de masse virtuelle. On dit que le conflit entre l'inertie de la masse de l'eau et l'accélération des bulles exerce une masse virtuelle sur les bulles.

- **La force de Basset (histoire) : Dans** le cas d'un écoulement infini non stationnaire et à faible nombre de Reynolds, 1force de traînée subit une augmentation matérialisée par la force de Basset.

I.8 Dynamique de bulles

Une bulle isolée dans un écoulement est soumise à plusieurs forces dont les origines sont diverses. La nature des fluides en présence, celle de l'écoulement, les variations temporelles ou encore la présence de forces volumiques sont autant de causes possibles du mouvement d'une bulle. Cette section est donc consacrée à la présentation de différentes forces pouvant être à l'origine du mouvement d'une bulle en milieu infini.

Soit donc un écoulement d'un fluide de viscosité cinématique y et de masse volumique *p* dont le champ de vitesse est *U,* et une bulle de masse volumique *f y,* et de rayon R dont la vitesse est *V.* On peut alors définir la vitesse de glissement $V - U$ comme la vitesse relative de la bulle par rapport à l'écoulement, ainsi qu'un nombre de Reynolds, base sur cette échelle de vitesse.

$$Re = \frac{2R|\vec{V} - \vec{U}|}{v} \tag{I.1}$$

Lorsque la bulle et la phase fluide sont soumises à l'action d'un champ de gravité g, la force de flottabilité, égale au poids moins la poussée d'Archimède qui s'exerce sur la bulle est :

$$\overrightarrow{F_g} = (\rho_b - \rho)\vec{g}\, R^3 \frac{4\pi}{3} \tag{I.2}$$

En présence d'un écoulement de la phase fluide, la force de traînée visqueuse s'oppose au mouvement relatif de la bulle :

$$\overrightarrow{F_D} = \rho c_D |\vec{v} - \vec{u}|(\vec{v} - \vec{u}) R^2 \frac{\pi}{2} \tag{I.3}$$

Une expression du coefficient de traînée, en fonction du nombre de Reynolds, est donnée pour une bulle sphérique propre en milieu infini par Mei et al. [11].

$$c_D = \frac{16}{Re}[1 + [\frac{8}{Re} + 0.5(1 + \frac{3.315}{R^{0.5}})]^{\wedge} - 1] \tag{I.4}$$

Cette relation est valable dans une large gamme de nombre de Reynolds,$1 \leq R_e \leq 300$ et elle tend bien vers les résultats connus C_D pour une bulle sphérique propre.

$$C_D \xrightarrow[R_e \to 0]{} \frac{16}{R_e} et\, C_D \xrightarrow[R_e \to \infty]{} \frac{48}{R_e} \tag{I.5}$$

Une bulle déformée voit son coefficient de traînée modifié [12] et se rapprocher de celui d'une sphère solide [13] qui est plus important. Une corrélation de CD en fonction de Re pour une telle sphère est donnée par Clifi et al. [14]:

$$c_D = \frac{24}{Re}(1 + 0.15Re^{0.687}) \tag{I.6}$$

Considérons que le mouvement du fluide n'est pas perturbé par la présence de la bulle. Alors la force exercée par cet écoulement non-perturbé sur un volume sphérique fluide équivalent à celui de la bulle serait :

$$\overrightarrow{F_T} = \rho R^3 \frac{4\pi}{3} \frac{d\vec{u}}{dt} \tag{I.7}$$

Où

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u}\nabla\vec{u} \tag{I.8}$$

Cette équation donne la dérivée particulaire, calculée au centre de la sphère. C'est la force de Tchen qui s'exerce sur la bulle et qui représente la force de pression que subirait le même volume de fluide en l'absence de la particule. La dérivée particulaire est alors calculée au centre de la bulle pour un écoulement considéré en son absence.

Lorsqu'un corps se déplace, il met en mouvement autour de lui un certain volume de fluide. Lorsque le mouvement de la bulle est instationnaire, une force dite de masse ajoutée résulte de l'accélération transmise à ce volume de fluide. Une certaine masse de fluide est accélérée avec celle de la particule. L'écoulement du fluide supposé uniforme et stationnaire est alors perturbé. Cette force d'inertie s'écrit après introduction du coefficient de masse ajoutée C_M :

$$\overrightarrow{F_I} = \rho R^3 \frac{4\pi}{3} c_M \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{I.9}$$

Lorsque l'écoulement du fluide est irrotationnel, non visqueux, non uniforme et in stationnaire, la force de masse ajoutée qui résulte de l'accélération transmise à ce volume s'écrit [15] [16] :

$$\overrightarrow{F_M} = \rho R^3 \frac{4\pi}{3} c_M \left(\frac{d\vec{u}}{dt} - \frac{d\vec{v}}{dt}\right) \tag{I.10}$$

Finalement dans le cas d'un écoulement stationnaire irrotationnel, la force d'inertie totale qui s'exerce sur la bulle est

$$\overrightarrow{F_I} = \rho R^3 \frac{4\pi}{3} [(1 - c_M)\vec{u}\nabla\vec{u} - c_M \frac{d\vec{v}}{dt}] \tag{I.11}$$

L'expression de cette force reste valable dans le cas des écoulements visqueux, comme l'ont montré les simulations numériques de Magnaudet et al. [17] ou les expériences de Naciri [12]. Par ailleurs dans le cas de bulles sphériques, le coefficient de masse ajouté prend la valeur CM = 0:5. Cependant, CM varie avec l'excentricité e de la bulle et la proximité d'uneparoi Ainsi, l'effet de cette déformation sur le coefficient de masse ajoutée varie de façon disymétrique selon que l'on s'intéresse au bilan dynamique orthogonalement (1.12) ouparallèlement (1.16) aux lignes de courants de l'écoulement

$$c_M = \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} \quad \text{I.13)}$$

$$c_M = \frac{\gamma_0}{2-\gamma_0} \quad \text{(I.14)}$$

Avec

$$\alpha_0 = (\varepsilon^2 + 1)\cos^{-1}(\varepsilon - \varepsilon^2) \quad \text{(I.15)}$$

$$\alpha_0 = 2(\varepsilon^2 + 1)(1 - \varepsilon\cos^{-1}(\varepsilon)) \quad \text{(I.16)}$$

$$\alpha_0 = 2(\varepsilon^2 + 1)(1 - \varepsilon\, cot^{-1}\varepsilon) \quad \text{(I.17)}$$

$$\varepsilon = (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}\,(x \geq 1) \quad \text{(I.18)}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \quad \text{(I.19)}$$

Où a et c sont respectivement le demi axe principal et secondaire d'une bulle ellipsoïdale.

Lorsque a = c, l'excentricité e est nulle, $\alpha_0 = \gamma_0 = 2/3$ et CM = 0,5. La figure suivante représente la variation du coefficient de masse ajoutée CM en fonction de la déformation de la bulle, *x*=a/c.

En présence d'un écoulement rotationnel, lorsque la verticité $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{U}$est non nulle, la non uniformité de l'écoulement est la cause d'une force de migration de type inertiel. Cette force dite de portance s'écrit sous sa forme générale donnée par Auton [16] :

$$\overrightarrow{F_I} = \rho R^3 \frac{4\pi}{3}(\vec{u} - \vec{v}) \wedge \vec{\boldsymbol{\Omega}} \quad \text{(I.20)}$$

Dans ce cas le coefficient de portance prend la valeur CL = 0.5.

Cependant, à grand nombre de Reynolds, pour des particules dont la viscosité est faible devant celle du fluide, le coefficient de portance varie faiblement avec l'intensité du cisaillement et n'est fonction que du nombre de Reynolds. Legendre &Magnaudet [18] montrent que pour $R_e \geq 50$:

$$C_L^{Re \geq 50} = \frac{1}{2}\left(\frac{1+16Re^{-1}}{21+29Re^{-1}}\right) \quad \text{(I.21)}$$

Avec une valeur asymptotique de 0.5 quand le nombre de Reynolds devient très grand (Auton) [16].

Lorsque le nombre de Reynolds de bulle est inférieur à l'unité, Legendre &Magnaudet [19] ont montré que l'on pouvait utiliser la relation suivante :

$$c_l^{Re\leq 1} = \frac{6}{\pi^2}\frac{2.255}{(Re\ Sr)^{0.5}(1+0.2\frac{Re}{Sr})^{1.5}} \quad \text{(I.22)}$$

Ou $S_r = 4RA/\left|\vec{U}-\vec{V}\right|$ représenté la verticité adimensionnelle de l'écoulement a l'échelle de la bulle.

Dans le cas intermédiaire où1 R_e 50, on peut utiliser la relation suivante de Legendre &Magnaudet (1998) :

$$C_L = [(C_L^{Re\leq 1}) + (C_L^{Re\geq 50})^2]^{1/2} \quad \text{(I.23)}$$

Cependant, lorsque le mouvement relatif entre le fluide et la bulle est instationnaire, les effets d'inertie ne sont pas les seuls à devoir être pris en compte, des effets visqueux interviennent aussi. Cette force est appelée force d'histoire $F_{R_}$ et s'écrit au moyen d'une intégrale caractéristique de l'évolution temporelle des accélérations relatives entre la bulle et le fluide. Cette force a tout d'abord été étudiée par Boussinesq en 1885 puis Basset en 1888 qui ont calculé son expression pour une sphère solide. L'expression du noyau *K (t* r) pour une particule fluide a été exprimée analytiquement par Yang & Leal (1991), [20] dans le plan de Fourier.

$$\overrightarrow{F_H}=6\pi\rho\nu R\int_0^t k\,(t-\tau)(\frac{d\vec{u}}{d\tau}-\frac{d\vec{v}}{d\tau})d\tau \quad \text{(I.24)}$$

Avec pour une bulle de gaz dans un liquide

$$k(t-\tau) = \frac{4}{3}\exp\left(\frac{9\nu(t-\tau)}{R^2}\right) erfc(\sqrt{\frac{9\nu(t-\tau)}{R^2}} \quad \text{(I.25)}$$

Terme $\frac{\partial\,\vec{U}}{\partial\,\vec{\tau}}$ peut être remplacé par $\frac{\partial\,\vec{U}}{\partial\,\vec{\tau}} + \vec{V}.\nabla\vec{U}$ qui est la dérivée de la vitesse du fluide $\vec{U}$ en suivant la bulle [20].

Enfin Magnaudet et al. [17] ont montré que dans une large gamme de nombre de Reynolds, les effets visqueux de la force d'histoire *F,* pouvaient être négligés pour des bulles sphériques de volume constant dans le cas d'accélérations modérées.

En définitive la résultante des forces *F* agissant sur une bulle s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{F_G} + \vec{F_D} + \vec{F_I} + \vec{F_L} + \vec{F_H} \quad \text{(I.26)}$$

Ce bilan théorique étant posé, ce sont les coefficients de traînée de masse ajoutée et de portance dans différents régimes de nombre de Reynolds qui restent les principales inconnues dans des situations réelles particulières. Notamment, l'interaction des parois avec les bulles sera discutée plus loin. Dans le cas d'un écoulement potentiel, ce problème se ramène à celui de l'interaction de deux bulles ayant des vitesses symétriques par rapport à la paroi. Les modifications induites sur les expressions des forces, dans la limite des petits nombres de Reynolds, ont notamment été étudiées récemment par Magnaudet et al. [21].

I.8.1 Équations de base d'un écoulement diphasique

Dans l'étude des écoulements diphasiques, les équations fondamentales reposent sur les équations de bilans. Ces bilans peuvent être écrits soit de façon simplifiée (globale) soit de façon locale.

I.8.2 Variables de l'écoulement gaz-liquide

Les différentes descriptions mathématiques de l'écoulement gaz-liquide de même que les mesures expérimentales nécessitent l'introduction de certains paramètres propres à ce type de problèmes [7].

Supposant l'écoulement co-courant d'un gaz et d'un liquide dans une conduite quelconque et, sans spécifier le régime de l'écoulement, certains paramètres peuvent être définis. La fraction volumique du gaz se définit de la façon suivante :

Où $\delta\forall$ représente le volume total considéré qui tend vers $\delta\forall'$, un volume très petit respectant l'hypothèse d'un milieu continu. La fraction volumique du gaz, aussi appelée fraction du vide est un paramètres très important d'un écoulement gaz-liquide. Pour une position dans l'espace et un temps donné, a_g prendra une valeur de zéro ou un selon que le point définit appartient à la phase liquide ou gaz à ce moment. Le plus souvent, c'est l'intégration de cette quantité soit dans l'espace, comme lorsqu'on exprime la fraction de gaz instantanée dans la conduite, ou dans le temps, lorsqu'on s'intéresse à la distribution spatiale de la fraction de gaz qui sera la plus utile [7].

La fraction volumique du liquide s'exprimera de façon similaire à la fraction volumique de gaz et la somme de ces deux quantités sera évidemment égale à l'unité [7] :

Pour un conduit donné, les vitesses superficielles du gaz et du liquide seront décrites par les expressions suivantes, respectivement :

Où Q est le débit volumique de chaque phase en m^3/s, alors que A est la surface à travers laquelle passe l'écoulement. La vitesse moyenne de chaque phase peut être exprimée à l'aide des deux quantités définies précédemment :

I.8.3 Différents modèles de l'écoulement gaz-liquide

Différentes approches peuvent être adoptées pour décrire un écoulement gaz-liquide. Le choix d'un modèle est fait en fonction des caractéristiques de l'écoulement ainsi que des moyens disponibles. Deux grands types de modèles mathématiques de l'écoulement gaz liquide sont distingués, les modèles d'écoulement quasi homogène et les modèles d'écoulement séparé. Les modèles d'écoulements quasi homogènes sont parfois aussi appelés modèles de mélange. Il s'agit du type de modèle le plus simple où l'on suppose que les phases sont si bien mélangées qu'elles se comportent approximativement comme un écoulement à une seule phase. Ces modèles sont donc similaires aux modèles de l'écoulement d'un seul fluide excepté que les propriétés de ce fluide sont une moyenne des propriétés des phases en présence. Toutes les phases partagent ainsi les mêmes champs de vitesse et de température, les taux de transfert de chaleur et de quantité de mouvement entre les phases sont supposés infinis [7].

I.8.4 Description du modèle « twofluid »

Les modèles d'écoulements séparés sont plus complexes que les précédents puisque chaque fluide possède son propre champ de vitesse et de température. Il est donc nécessaire de considérer l'interaction des phases en présence à travers l'interface les séparant. Parmi les modèles d'écoulements séparés, deux grands types sont distingués. Certains modèles quis'appliquent au cas de particules (gouttelettes, bulles ou solides) dispersées dans un fluide porteur, traitent les interactions entre les phases de façon discrète. Les particules de la phase dispersée sont alors décrites d'un point de vue Lagrangien alors que le fluide porteur l'est d'un point de vue Eulérien. C'est pourquoi ces modèles sont appelés Euler

Lagrange ou encore "Particletracking". D'autres modèles traitent les deux fluides de la même façon, d'un point de vue Eulérien. Ces modèles considèrent alors les deux fluides comme des continuums interpénétrant. Le modèle appelé "two-fluid " est un modèle Euler-Euler qui constitue la façon la plus générale, mais également la plus complexe de décrire un écoule ent à plusieurs phases [7].

I.8.5 Description du modèle "twofluid"

Le modèle "two-fluid" est qualifié de modèle d'écoulement séparé, c'est-à-dire que deux systèmes d'équations aux dérivées partielles distincts sont utilisés pour décrire

l'écoulement. Ce modèle est le plus complexe et il est typiquement utilisé dans le cas où l'écoulement à l'étude ne peut être correctement représenté par un modèle de type mélange ou un modèle séparé de type Euler-Lagrange. Le modèle repose sur six équations de conservation, c'est-à-dire des équations pour la masse, la quantité de mouvement et l'énergie de chaque phase. Ces équations sont similaires à celles pour le cas à une seule phase, mais il y a présence de deux systèmes, chacun valide à l'intérieur d'une phase. Ces équations sont appelées les équations de phase locales instantanées. Le modèle doit inclure trois équations supplémentaires qui s'appliqueront aux interfaces entre les phases, ces équations sont appelées conditions de couplage. Le modèle "twofluid" repose ainsi sur neuf équations locales instantanées [7].

L'utilisation directe des équations locales instantanées soulèverait de très nombreuses difficultés. En effet, l'application des termes de transfert entre les phases et des conditions limites demanderait de connaître en tout temps la position de chaque interface entre les phases et d'être en mesure de prédire toutes les déformations possibles de ces interfaces. Pour la plupart des systèmes réels, un tel calcul est absolument impossible. Une solution utilisée consiste à effectuer une moyenne d'ensemble des équations locales instantanées. Il est ainsi possible d'obtenir un système d'équations qui décrit la dynamique moyenne de chaque phase sans décrire les interactions microscopiques à l'interface. Ce processus de passage à la moyenne a pour effet une certaine perte d'information. Cette information doit être récupérée par l'introduction de lois constitutives qui considèrent l'effet des fluctuations microscopiques sur le mouvement moyen. Cette situation est similaire à l'application de la moyenne aux équations de Navier-Stokes dans le cas à une seule phase qui fait apparaître les contraintes de Reynolds. Les contraintes de Reynolds représentent ainsi l'effet des fluctuations de vitesses sur le mouvement moyen. Le système constitué par les équations moyennes de conservation de masse et de quantité de mouvement ainsi que des conditions de saut contient un nombre d'inconnues beaucoup plus grand que le nombre d'équations. Le système doit être fermé par l'introduction des équations d'états, des conditions limites de même que des lois constitutives. Ces dernières sont très importantes dans tous les écoulements. Dans le cas d'écoulement à une seule phase, les équations constitutives permettent de décrire les interactions entre les éléments de fluide à l'intérieur de la phase tel qu'exprimé par le tenseur des contraintes visqueuses et le tenseur des contraintes de Reynolds. Dans le cas gaz-liquide, ces équations devront en plus décrire les interactions entre les phases [7].

Le développement de ces lois constitutives est le principal défi impliqué dans l'utilisation du modèle "twofluid". Ainsi, tout processus de modélisation mathématique d'un écoulement gaz-liquide requiert certaines connaissances préalables sur cet écoulement. La seule manière

d'obtenir ces connaissances reste le plus souvent l'expérimentation. En raison des nombreuses possibilités de distribution de l'interface, la plupart des modèles mathématiques sont adaptés à un régime d'écoulement particulier. Il est donc nécessaire de connaitre ce régime d'écoulement pour des conditions données avant de choisir le modèle mathématique qui pourra représenter la situation [7].

I.9 Conclusion

L'analyse de données de la littérature permet de constater que de nombreuses caractéristiques semblent communes aux écoulements diphasiques. Tout d'abord, les régimes d'écoulement observés sont toujours similaires peu importe le cas étudié. Bien que la définition des régimes diffère légèrement selon les études, il y a toujours un régime où les bulles sont dispersées (ou régime homogène) lorsque la vitesse du gaz superficielle est faible et un régime où les bulles interagissent fortement (régime bulles coalescées ou hétérogène) lorsque cette vitesse superficielle est plus élevée. La vitesse superficielle de gaz nécessaire à la transition sera fonction de la géométrie du tube ou colonne. Il est cependant important de tenir compte du fait que la définition de chacun des régimes d'écoulement est plutôt qualitative, lors de la comparaison entre les études. Pour des vitesses superficielles de gaz relativement élevées, l'écoulement hétérogène se transforme en en écoulement de type turbulent ou encore slygging.

Chapitre II

Modélisation de l'écoulement gaz/liquide dans les capillaires

Dans ce chapitre nous possédons trois parti la première démontre la manière d'accéder l'équation fondamentale de la dynamique qui possède une signification physique .la deuxième partie nous mène à l'équation de Navier Stokes et à la Fin en se basant sources données nous avons essayé de développer un modale phasique qui relie la perte de charge à la vitesse de la boule d'air formée dans un fluide en mouvement.

Parti 1

II.1 Dynamique des fluides visqueux incompressibles : Équation de Navier Stokes

II.1.1 Forces de surface Tenseur des contraintes

Nous considérons ici les forces qui s'exercent au sein d'un fluide avec pour objectif de développer une analyse des forces qui interviennent au « second membre » de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. [8]

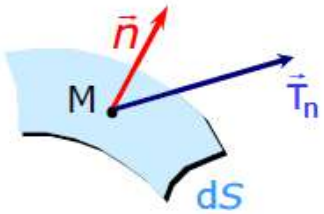
Deux types de forces agissent sur le fluide contenu dans un volume matériel V(t) limité par la surface S(t) :

- Les forces de volume que l'on peut exprimer sous la forme : $\iiint \rho \vec{g} \mathrm{dV}$
- Les forces de surface qui agissent par l'intermédiaire de la surface S(t) : $\iint d\,\vec{F}$

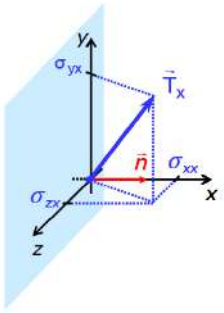
Les forces s'exerçant sur le volume sont facilement prises en compte. Une étude plus détaillée est nécessaire pour comprendre la nature des forces de surface.

Pour un fluide réel (visqueux) en mouvement, les forces de surface ne sont plus seulement normales à la surface : il existe des contraintes tangentiellesdues à la viscosité (frottements).

En un point M d'une surface ds, la force de surface s'exprime comme :$d\vec{F} = \vec{T}_n ds$



Où $\vec{T}_n$est le vecteur contraint qui s'exerce sur la surface de normale $\vec{n}$:



Considérons une surface perpendiculaire à l'axe x. La normale à cette surface est :$\vec{n} = \vec{e}_x$. La contrainte exercée sur cette surface est alors notée $\vec{T}_x$ et peut se décomposer comme :

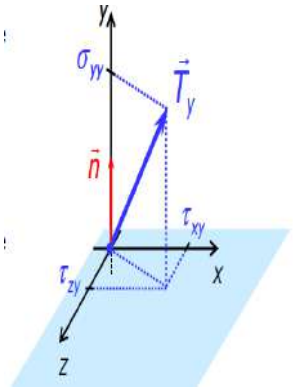
$$\vec{T}_x = \sigma_{xx}\vec{e}_x + \sigma_{yx}\vec{e}_y + \sigma_{zx}\vec{e}_z \quad \text{(II.1.1)}$$

On remarque que les composantes σ_{yx} et σ_{zx} sont des composantes tangentielles : on les notera plutôt τ_{yx} et τ_{zx} pour les distinguer de la composante normale e_x.

On peut de même considérer la surface perpendiculaire à l'axe y.On a ainsi la contrainte :

$$\vec{T}_y = \tau_{xy}\vec{e}_x + \tau_{yy}\vec{e}_y + \tau_{zy}\vec{e}_z \quad \text{(II.1.2)}$$

Et pour la surface perpendiculaire à l'axe z, la contrainte s'exprime par :



$$\vec{T}_z = \tau_{xz}\vec{e}_x + \tau_{yz}\vec{e}_y + \tau_{zz}\vec{e}_z \quad \text{(II.1.3)}$$

Considérons maintenant une surface dont l'orientation est quelconque. Dans le repère cartésien, sa normale peut se décomposer en :

$$\vec{n} = n_x\vec{e}_x + n_y\vec{e}_y + n_z\vec{e}_z \quad \text{(II.1.4)}$$

Dans ce cas, la contrainte s'exerçant sur cette surface s'exprime comme :

$$\vec{T}_n = n_x\vec{T}_x + n_y\vec{T}_y + n_z\vec{T}_z \quad \text{(II.1.5)}$$

$$= n_x\left(\sigma_{xx}\vec{e}_x + \tau_{yx}\vec{e}_y + \tau_{zy}\vec{e}_z\right) + n_y\left(\tau_{xy}\vec{e}_x + \sigma_{yy}\vec{e}_y + \tau_{zy}\vec{e}_z\right) + n_z(\tau_{xy}\vec{e}_x + \tau_{yz}\vec{e}_y + \sigma_{zz}\vec{e}_z) \quad \text{(II.1.6)}$$

$$= \left(n_x\sigma_{xx} + n_y\tau_{xy} + n_z\tau_{xz}\right)\vec{e}_x + \left(n_x\tau_{yx} + n_y\sigma_{yy} + n_z\tau_{yz}\right)\vec{e}_y + \left(\tau_x\tau_{zx} + n_y\tau_{zy} + n_z\sigma_{zz}\right)\vec{e}_z \quad \text{(II.1.7)}$$

Soit finalement :

$$\vec{T}_n = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zx} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \rightarrow \vec{T}_n = \bar{\bar{T}}.\vec{n} \quad \text{(II.1.8)}$$

Tenseur des contraintes

La force élémentaire est $d\vec{F} = \vec{T}_n dS = \bar{\bar{T}}.\vec{n}dS$ (II.1.9)

Le tenseur des contraintes peut alors se décomposer en la somme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur de trace nulle :

$$\bar{\bar{T}} = \alpha\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{T}}' \quad \text{(II.1.10)}$$

Ou $\alpha\bar{\bar{I}} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\bar{\bar{T}}' = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix}$ (II.1.11)

Tenseur des contraintes de viscosité

Ainsi :

$$\vec{T}_n = \bar{\bar{T}}.\vec{n} = \alpha\bar{\bar{I}}.\vec{n} + \bar{\bar{T}}'.\vec{n} = \alpha\vec{n} + \bar{\bar{T}}'.\vec{n} \quad \text{(II.1.12)}$$

$$d\vec{F} = \bar{\bar{T}}.\vec{n}dS = \alpha\,\vec{n}\,dS + \bar{\bar{T}}'.\vec{n}dS \quad \text{(II.1.13)}$$

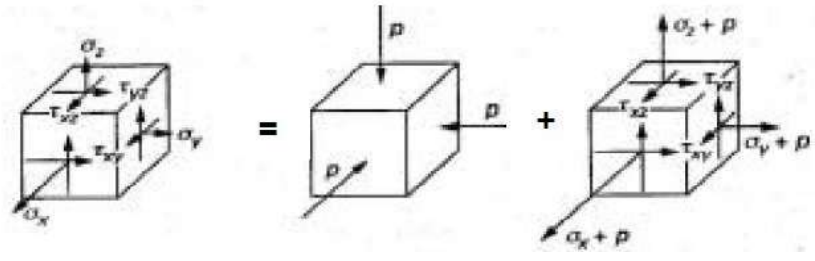
Le premier terme du membre de droite, $\alpha\,\vec{n}\,dS$ est une force normale à la surface ; c'est donc la force de pression hydrostatique : α = −p

La force s'exerçant sur la surface élémentaire dS s'exprime donc par :

$$d\vec{F} = -p\vec{n}dS + \bar{\bar{T}}'.\vec{n}dS \quad \text{(II.1.14)}$$

Et le tenseur des contraintes par :

$$\bar{\bar{T}} = -p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{T}} \quad \text{(II.1.15)}$$



Ses composantes sont : δ

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad \text{(II.1.16)}$$

Cette décomposition du tenseur des contraintes peut encore s'écrire, avec les notations du schéma ci-dessus :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}}_{\text{Tenseur isotrope}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_x + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z + p \end{pmatrix}}_{\text{Tenseur de viscosité (Nul lorsque les contraintes tangentielles le sont ; } \sigma_x = \sigma_y = - - - \sigma_z = -p)} \quad \text{(II.1.17)}$$

La pression agit de façon isotrope et sa valeur ne dépend que de l'état thermodynamique du fluide. Les contraintes visqueuses sont au contraire essentiellement liées à l'état de déformation du fluide. [9]

II.1.2 Principe fondamental de la dynamique

La quantité de mouvement contenu dans un volume matériel V(t) est :

$$\int_{V(t)} \rho \vec{v} dV \quad \text{(II.1.18)}$$

Rappelons que le principe fondamental de la dynamique indique que la variation de quantité de Mouvement d'un système matériel est égale à la somme de toutes les forces extérieures qui lui sont Appliquées :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \vec{F} \quad \text{(II.1.19)}$$

Soit, en décomposant $\overrightarrow{F}$ en forces de volume et forces de surface :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \vec{v} dV = \int_{S(t)} \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n} dS + \int_{V(t)} \rho \vec{g} dV \quad \text{(II.1.20)}$$

Et à transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume à l'aide du théorème d'Ostrogradski :

$$\int_{S(t)} \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n} dS = \int_{V(t)} \overrightarrow{div} \overline{\overline{T}} dV \quad \text{(II.1.21)}$$

Il vient alors l'expression locale du bilan de quantité de mouvement :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \overrightarrow{div} \overline{\overline{T}} + \rho \vec{g} \quad \text{(II.1.22)}$$

Dans laquelle

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overline{\overline{grad}}\vec{v} \tag{II.1.23}$$

On peut faire apparaître les deux parties du tenseur des contraintes (tenseur des contraintes associées à la pression + tenseur des contraintes visqueuses) :

$$\bar{\bar{T}} = \bar{\bar{T}}' - p\bar{\bar{I}} \tag{II.1.24}$$

D'où :

$$\overrightarrow{div}\overline{\overline{T}} = -\overrightarrow{div}p\,\overline{\overline{I}} + \overrightarrow{div}\overline{\overline{T'}} = -\overrightarrow{grad}p + \overrightarrow{div}\overline{\overline{T'}} \tag{II.1.25}$$

Soit finalement l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{grad}p + \overrightarrow{div}\overline{\overline{T'}} + \rho\vec{g} \tag{II.1.26}$$

La signification physique de cette équation apparaît clairement :

$$\left\{\begin{matrix}\text{quantité d'accélération}\\ \text{par unité de volume}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\text{forces associées}\\ \text{à la pression}\\ \text{par unité de volume}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{contraintes}\\ \text{visqueuses}\\ \text{par unité de volume}\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}\text{forces de volume}\\ \text{par unité de volume}\end{matrix}\right\}$$

C'est une équation locale, valable à chaque instant en tout point du fluide, dont les différents termes Sont des forces par unité de volume qui s'expriment en N/m3. [9]

Partie 2 :

II.2.1 Fluide newtonien et équation de Navier-Stokes

D'une façon générale, la viscosité intervient dès qu'il y a déformation, c'est-à-dire dès que :

$$\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{grad}}\vec{v} + \overline{\overline{grad}}^{t}\vec{v}\right) \neq \overline{\overline{0}} \tag{II.2.1}$$

Par définition, les fluides newtoniens sont ceux pour lesquels les composantes du tenseur des contraintes de viscosité $\bar{\bar{T}}$ dépendent linéairement des composantes du tenseur des taux de Déformation pure $\bar{\bar{D}}$.

Considérons les éléments tensoriels de $\bar{\bar{D}}$:

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \tag{II.2.2}$$

On rappelle que ce tenseur est symétrique car $d_{ji} = d_{ji}$

On admettra alors que, pour un fluide isotrope, les éléments tensoriels de $\bar{\bar{T}}'$ et $\bar{\bar{D}}$ sont liés par la relation suivante :

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} + \mu'\left(d_{11} + d_{22} + d_{33}\right)\delta_{ij} \quad \text{(II.2.3)}$$

viscosité dynamique ; viscosité de dilatation ; symbole de Kronecker

On remarque que :

$$\left(d_{11} + d_{22} + d_{33}\right) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \mathrm{div}\vec{v} \quad \text{(II.2.4)}$$

Donc, si le fluide est incompressible, on a div dv = 0 et dans ce cas :

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij} \Rightarrow \boxed{\overline{\overline{T'}} = 2\mu\overline{\overline{D}}} \quad \text{(II.2.5)}$$

Puisque $\overline{\overline{D}}$ est symétrique, le tenseur des contraintes est également symétrique :

$$\tau_{ij} = \tau_{ji}$$

Reprenons l'équation fondamentale de la dynamique :

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}p} + \overrightarrow{\mathrm{div}}\overline{\overline{T'}} + \rho\vec{g} \quad \text{(II.2.6)}$$

Pour un fluide incompressible newtonien, cette équation devient donc :

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}p} + 2\mu\overrightarrow{\mathrm{div}}\overline{\overline{D}} + \rho\vec{g} \quad \text{(II.2.7)}$$

Or

$$\overrightarrow{\mathrm{div}}\overline{\overline{D}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{div}}\left(\overline{\overline{\mathrm{grad}\vec{v}}} + \overline{\overline{\mathrm{grad}\,\vec{v}}}^{t}\right) = \frac{1}{2}\nabla^2\vec{v} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\mathrm{div}\vec{v}\right) = \frac{1}{2}\nabla^2\vec{v} \quad \text{(II.2.8)}$$

Ce qui conduit à l'**équation fondamentale de la dynamique pour un fluide newtonien (**$\overline{\overline{T}}' = 2\mu\overline{\overline{D}}$)

Incompressible(div(v) = 0), appelée **équation de Navier-Stokes** :

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}p} + \mu\nabla^2\vec{v} + \rho\vec{g} \quad \text{(II.2.9)}$$

Pour résoudre l'équation de Navier-Stokes et l'équation de continuité, des conditions aux limites et des Conditions initiales appropriées doivent être utilisées.

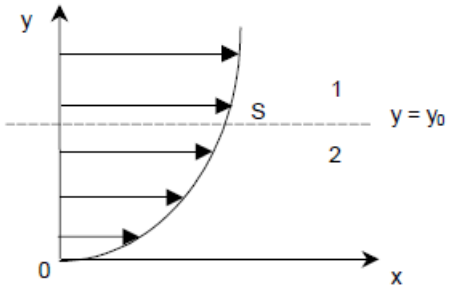
II.2.2 Conditions aux limites

II.2.2.a Cas d'une paroi solide

Reprenons un écoulement plan qui s'effectue suivant l'axe des x dans le plan xOy. La loi de frottement visqueux s'écrit :

$$\tau_{xy} = \mu \frac{dv_x}{dy} \qquad \text{(II.2.10)}$$

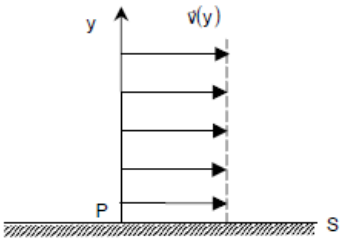
L'action de 1 (y > y0) sur 2 (y < y0) a pour expression :



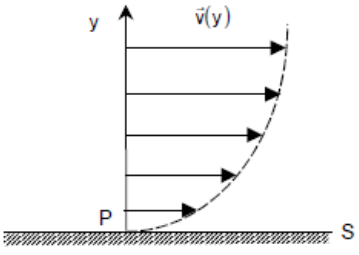
$$\vec{T}_y = -p\vec{e}_y + \tau_{xy}\vec{e}_x \qquad \text{(II.2.10)}$$

En conclusion, les filets fluides « rapides » entraînent les « lents », et les « lents » freinent les « Rapides ». Lorsqu'il y a une discontinuité de vitesse tangentielle, $\frac{dv}{dy} = \infty$ et là force d'entraînement$e_x\tau_{xy} = \infty$ de sorte que la discontinuité de vitesse ne peut se maintenir. C'est ce qui explique la condition aux limites à écrire sur une paroi pour un écoulement de fluide visqueux, encore appelée condition d'adhérence :

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_{paroi} \quad \forall P \in \text{paroi}$$



Impossible en fluide visqueux, pour une paroi immobile.
Seul un fluide parfait en contact avec une surface « glisse » sur cette surface.



Adhérence du fluide sur la paroi.

Si la paroi S est immobile, la vitesse du fluide à la paroi est nulle :

$$\vec{v}(P) = \vec{0} \quad \forall P \in S, \text{ paroi immobile}$$

Le Lapalucien du vecteur $\overrightarrow{v}$a pour coordonnées le Laplacien des composantes du vecteur $\vec{v}$ seulement en coordonnées cartésiennes. Sinon il faut se souvenir que :

$$\nabla^2\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\vec{A}\right) - \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}\right) \quad \text{(II.2.12)}$$

Comme par ailleurs les coordonnées du rotationnel en cylindrique ou sphérique ne sont pas évidentes, il vaut mieux utiliser des formulaires.

II.2.2.b Cas d'une surface de contact entre deux fluides

La composante normale de la vitesse relative de chacun des milieux par rapport à S est nulle ; cela signifie qu'aucun fluide ne traverse S. On admet, en outre, que le vecteur contrainte $\vec{T}_n$est continu à la traversée de S, d'après le théorème de l'action et de la réaction. Dans le cas particulier d'une surface en contact avec l'atmosphère (surface libre), on a donc continuité de la pression, P= Pa et nullité de la contrainte visqueuse,$\tau = 0$ Cette dernière condition est une condition de non frottement sur une surface libre qui, si la surface est horizontale,

Partie 3

II.3 Modèle physique

Dans l'analyse précédente, la force de gravité est considérée comme seule force de volume agissant sur le fluide. Dans la démonstration qui suit, nous admettrons qu'il existe deux forces de volume ayant un effet significatif sur le fluide en mouvement : la force de gravité et la force pompe.

D'où un changement de la valeur de l'accélération

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} \text{ devient } \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} + \frac{\vec{f}}{\boldsymbol{m}} \quad \text{(II.3.1)}$$

($\vec{f}$Représenter la force de volume)

Nous avons commencé par équation locale suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\iiint \rho\, \vec{v}\, dV\right) = \iiint \rho \frac{d\vec{v}}{dt}\, dV \quad \text{(II.3.2)}$$

Ensuite on transformer l'intégrale de surface en intégrale de volume à l'aide du théorème d'Ostrogradski

$$\iint \bar{\bar{T}}\, \vec{n}\, ds = \iiint \overrightarrow{div}\bar{\bar{T}}\, dV \quad \text{(II.3.3)}$$

Nous avons obtenu expression suivent :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \overrightarrow{div}\bar{\bar{T}} + \rho\left(\vec{g} + \frac{\vec{f}}{\boldsymbol{m}}\right) \quad \text{(II.3.4)}$$

Soit finalement l'équation fondamentale de la dynamique qui on a développé :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{grad}\, p + \overrightarrow{div}\bar{\bar{T}} + \rho\vec{g} + \boldsymbol{\rho}\frac{\vec{f}}{\boldsymbol{m}} \quad \text{(II.3.5)}$$

Lorsqu'on a un fluide newtonien **:**

$$\bar{\bar{D}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{grad}}\,\vec{v} + \overline{\overline{grad}}^{T}\vec{v}\right) \neq \bar{\bar{0}} \qquad \text{(II.3.6)}$$

Nous allons passer par les mêmes étapes citées dans la partie précédente pour aboutira l'équation fondamentale de la dynamique pour un fluide newtonien Incompressible.

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,p + \mu\,\nabla^2\vec{v} + \rho\vec{g} + \rho\frac{\vec{f}}{m} \qquad \text{(II.3.7)}$$

Nous obtenons l'équation de Navier stokes additionnée d'un terme nouveau représentant la force de pompe.

$$\rho\left(\frac{dv}{dt} + v\nabla v\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,p + \mu\,\nabla^2\vec{v} + \rho\vec{g} + \rho\frac{\vec{f}}{m} \qquad \text{(II.3.8)}$$

On fait la projection sur l'axe (OX)

$$\rho\left(\frac{dv_x}{dt} + v_x\frac{dv_x}{dx} + v_y\frac{dv_x}{dy} + v_z\frac{dv_x}{dz}\right) = -\frac{dp}{dx} + \rho\vec{g} + \rho\frac{\vec{f}}{m} + \mu\left(\frac{d^2v_x}{dx^2} + \frac{d^2v_x}{dy^2} + \frac{d^2v_x}{dz^2}\right) \text{(II.3.9)}$$

On fait la projection sur l'axe (OY)

$$\rho\left(\frac{dv_y}{dt} + v_x\frac{dv_y}{dx} + v_y\frac{dv_y}{dy} + v_z\frac{dv_y}{dz}\right) = -\frac{dp}{dy} + \rho\vec{g} + \rho\frac{\vec{f}}{m} + \mu\left(\frac{d^2v_y}{dx^2} + \frac{d^2v_y}{dy^2} + \frac{d^2v_y}{dz^2}\right) \quad \text{(II.3.10)}$$

On fait la projection sur l'axe (OZ)

$$\rho\left(\frac{dv_z}{dt} + v_x\frac{dv_z}{dx} + v_y\frac{dv_z}{dy} + v_z\frac{dv_z}{dz}\right) = -\frac{dp}{dz} + \rho\vec{g} + \rho\frac{\vec{f}}{m} + \mu\left(\frac{d^2v_z}{dx^2} + \frac{d^2v_z}{dy^2} + \frac{d^2v_z}{dz^2}\right) \quad \text{(II.3.11)}$$

On a le régime est permanent et ρ est constante et l'écoulement est horizontal alors ont obtenu :

$$\text{Suer l'axe (ox)} \ (1) \rightarrow -\frac{dp}{dx} + \rho\frac{f}{m} + \mu\left(\frac{d^2v_x}{dy^2} + \frac{d^2v_x}{dz^2}\right) = 0 \qquad \text{(II.3.12)}$$

$$\text{Suer l'axe (oy)} (2) \rightarrow -\frac{dp}{dy} + \rho g = 0 \qquad \text{(II.3.13)}$$

$$\text{Suer l'axe (oz)} \ (3) \rightarrow -\frac{dp}{dz} = 0 \qquad \text{(II.3.14)}$$

Donc on a par la première

$$-\frac{dp}{dx} + \mu\left(\frac{d^2v_x}{dy^2} + \frac{d^2v_x}{dz^2}\right) + \rho\frac{f}{m} = 0 \qquad \text{(II.3.15)}$$

On mécanique de fluide le champ de la force volumique est :

$$\vec{F} = \rho\vec{f} \qquad \text{(II.3.16)}$$

Alors

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{\rho} \qquad \text{(II.3.17)}$$

Et on a

$$\frac{F}{S} = p \qquad \text{(II.3.18)}$$

Et

$$V= dx \times s \tag{II.3.19}$$

Donc

$$\rho \frac{f}{m} = \frac{f}{V} = \frac{1}{\rho}\frac{F}{V} = \frac{1}{\rho}\frac{F}{LS} = \frac{1}{\rho}\frac{\Delta p}{L} \tag{II.3.20}$$

Retour à l'équation et nous compensons

Alors ont obtenu :

$$\frac{\Delta p}{L}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\times\frac{1}{\mu} = \frac{d^2V_x}{dy^2} + \frac{d^2V_x}{dz^2} = Cst \tag{II.3.21}$$

On met que

$$\frac{\Delta p}{L}\left(1-\frac{1}{\rho}\right)\times\frac{1}{\mu} = A \tag{II.3.22}$$

Nous avons obtenu

$$\frac{d^2V_x}{dy^2} + \frac{d^2V_x}{dz^2} = A \tag{II.3.23}$$

On utilise la transformation de fourrier ont obtenu une solution pour l'équation différentielle

$$U(y,z) = \frac{2}{\pi}\tan^{-1}\frac{y}{z} + \frac{A}{4}(y^2+z^2) + C_1(y+z) + C_2 \tag{II.3.24}$$

Pour déterminer les constants C_1et C_2 , on doit utiliser les conditions aux limites :

$$V\left(0,\frac{d}{2}\right) = V\left(\frac{w}{2},0\right) = 0 \tag{II.3.25}$$

Et

$$V = \left(\frac{w}{2},\frac{d}{2}\right) = 0 \tag{II.3.26}$$

On trouve que

$$\frac{C_1}{2} = -\frac{1}{(w-d)} - \frac{A}{16}(w+d) \tag{II.3.27}$$

Et

$$C_2 = -\frac{2}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{w}{d}\right) - \frac{A}{16}(w^2+d^2) + \frac{w+d}{w-d} + \frac{A}{16}(w+d)^2 \tag{II.3.28}$$

Pour calculer la vitesse moyenne nous avons

$$V_M = \frac{1}{wd}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\left(\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} V(y,z)dz\right)dy = \frac{1}{wd}\int_0^w\left(\int_0^d V(y,z)dz\right)dy \tag{II.3.29}$$

Après calcul cette intégral nous obtenue

$$V_M = \frac{A}{12}(w^2 + d^2) + \frac{C_1}{2}(w + d) + C_2 + \frac{2}{\pi}\tan^{-1}(\frac{w}{d}) - \frac{d}{\pi d}(ln(w^2 + d^2) - ln\, d^2) + \frac{w}{d\pi}(2w - 1) \quad \text{(II.3.30)}$$

Après la simplification on trouve que

$$V_M = A(w^2 + d^2)\frac{1}{48} - \frac{d}{\pi w}(ln\,(w^2 + d^2) - ln\, d^2) + \frac{w}{d\pi}(2w - 1) \quad \text{(II.3.31)}$$

On peut donc déduire de l'équation, l'expression de perte de charge additionnelle linéaire par rapport à la taille des bulles et sa vitesse.

$$\frac{\Delta p}{\Delta L} = \frac{48\mu}{(w^2+d^2)(1-\frac{1}{\rho})}V_M - \frac{48\mu}{(w^2+d^2)(1-\frac{1}{\rho})}(-\frac{d}{\pi w}(ln\,(w^2 + d^2) - ln\, d^2) + \frac{w}{d\pi}(2w - 1)) \quad \text{(II.3.29)}$$

II.3.1 Estimation des profils de perte de charge

En utilisant le modèle développé (Eq 3.29) pour le calcul des pertes de charge en fonction les vitesses des bulles à diffèrent tailles de canalisation de type micro-canaux rectangulaire ont coordonnée cartésienne, on détermine théoriquement les pertes de charge additionnelles induites par la présence de bulles de gaz dans l'écoulement pour une vitesse de liquide V_l=0.08m/s. Les résultats de calcul des profils de perte de charge dans différents canaux sont présentés respectivement dans les figures II.1-II4, Ces résultats seront comparés à ceux obtenus expérimentalement de la littérature [14] afin de démontrer la validité du modèle et proposer sa correction éventuelle.

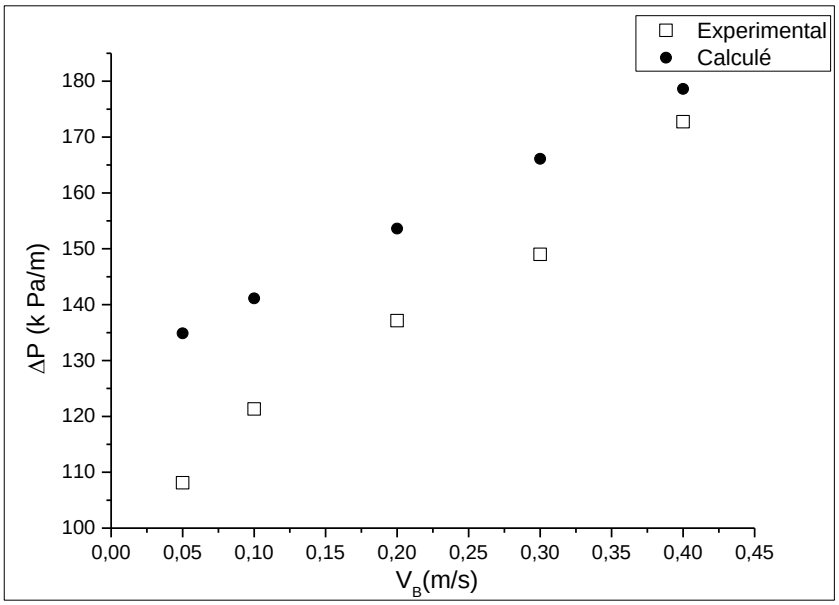


Figure (II.1) Profils de perte de charge calculée comparé avec l'expérimentale a une vitesse de liquide v_l=0.08 m/s pour une canalisation en PDMS.

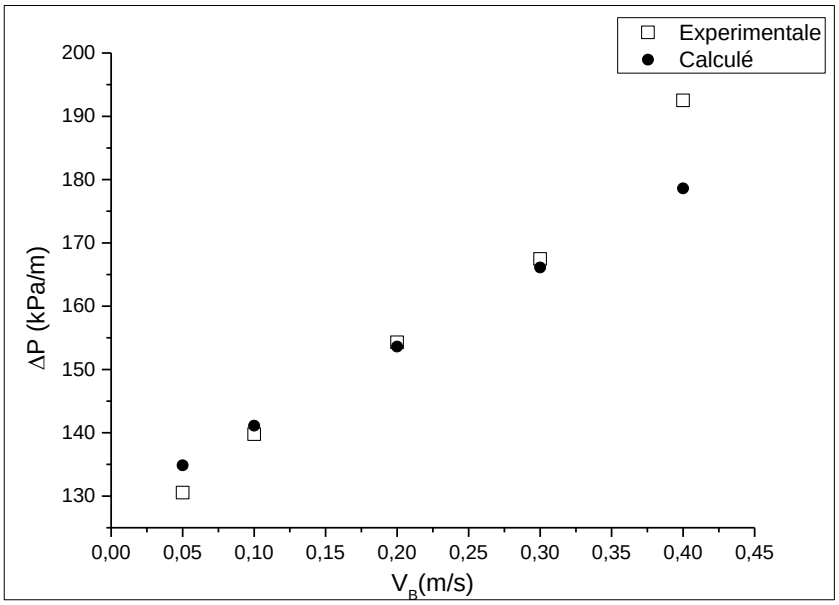


Figure (II.2) Profils de perte de charge calculée comparé avec l'expérimentale a une vitesse de liquide v_l=0.08 m/s pour une canalisation en verre modifier.

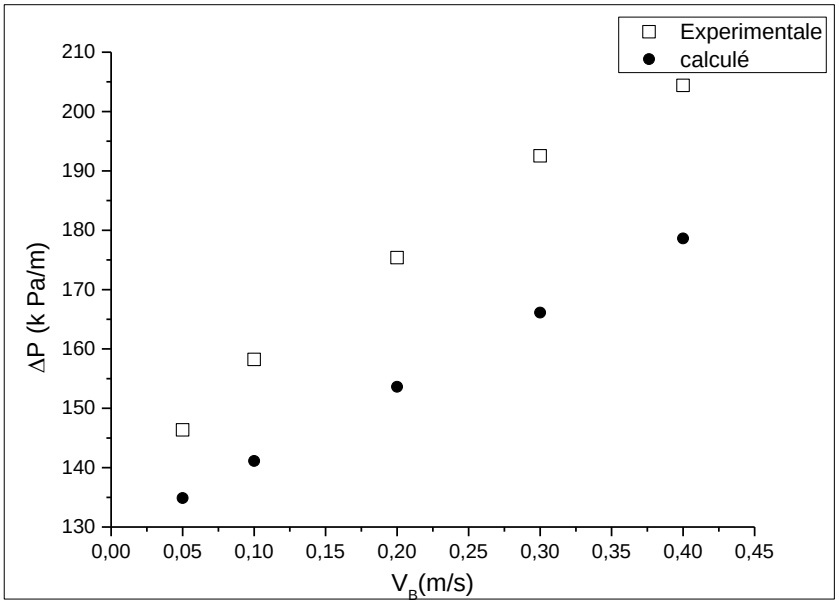


Figure (II.3) Profils de perte de charge calculée comparé avec l'expérimentale a une vitesse de liquide v_l=0.08 m/s pour une canalisation en verre.

La figure (II.1- II.3) montre l'évolution des profils de perte de charge estimée en fonction de la vitesse des bulles. On constate qu'il n'y a pas une grande différence entre les résultats expérimentalement et ceux déduits par application du modèle physique. Et que notre modèle donne des meilleurs résultats dans la canalisation en verre modifier.

La figure (II.4) montre l'évolution des profils de perte de charge estimée en fonction de la vitesse des bulles pour une vitesse de liquide V_l =0.12m/s.

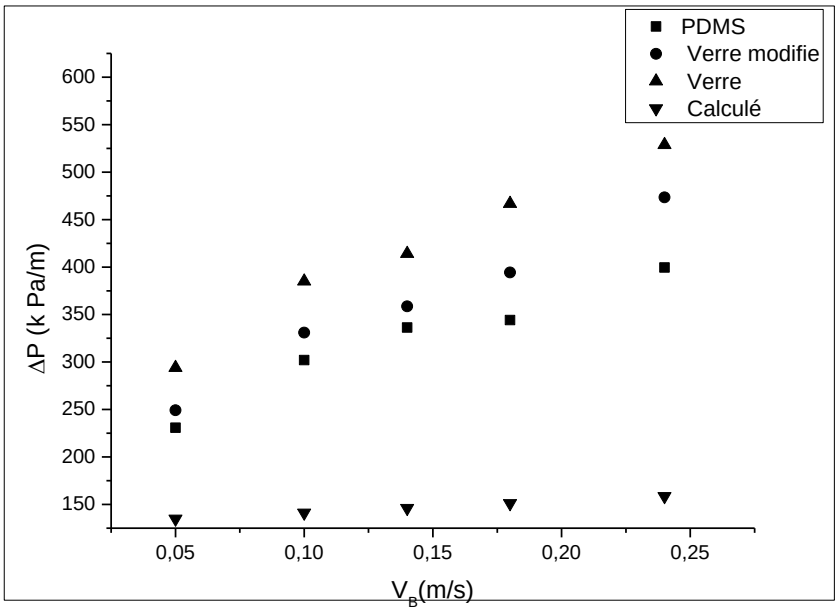


Figure (II.4) Profils de perte de charge calculée comparé avec les résultats expérimentaux des trois canaux a une vitesse de liquide v_l =0.12 m/s.

De la figure II.4, nous constatons qu'il existe une différence entre les résultats expérimentalement obtenus et ceux déduits par l'application du model physique.

En conclusion, d'après les résultats de perte de charge expérimentalement, nous déduisons que notre modèle ainsi instauré n'est valable que lorsque' il s'agit de petite vitesse de fluide et de toute évidence, le modèle perd son efficacité dans le cas de grande vitesse de fluide**.**

II.3.2 Les analyse statistique de modèle

L'analyse des résultats de prédiction de $\frac{\Delta P}{L}$ par le modèle est réalisée à travers le calcul des déviations communément utilisées suivantes:

Racine carrée de l'Erreur Quadratique Moyenne (Root Mean Squar Error) :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(y_{exp} - y_{cal}\right)^2} \quad \text{(III.1)}$$

Le coefficient de détermination R^2 :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_{cal} - y_{exp})^2}{\sum_{i=1}^{N}(y_{exp} - \bar{y}_{exp})^2} \quad \text{(III.2)}$$

Pour évaluer la capacité prédictive de model. Par conséquent le vecteur de régression linéaire des sorties calculées par le modèle et les sorties cibles (expérimentales) avec le tracé de cette régression ont été utilisés comme critère d'évaluation de la capacité prédictive du modèle. Ceux-ci sont obtenus facilement à l'aide de la fonction ***postreg*** de MATLAB®. La figure III.5 montre la courbe de régression linéaire de la $\frac{\Delta P}{L}$ calculée par modèle avec la $\frac{\Delta P}{L}$ expérimentale avec un vecteur de régression approchant l'idéal [α (pente), β (ordonnée à l'origine), R (coefficient de corrélation)] = [0.8223, 9.2644, 0.9961]. La figure III.6 montre le même calcul pour la deuxième sortie avec un vecteur de régression linéaire égal à [0.8008, 27.8259, 0.9921]. La figure III.7 montre le même calcul pour la deuxième sortie avec un vecteur de régression linéaire égal à [0.7822, 45.8125, 0.9939]

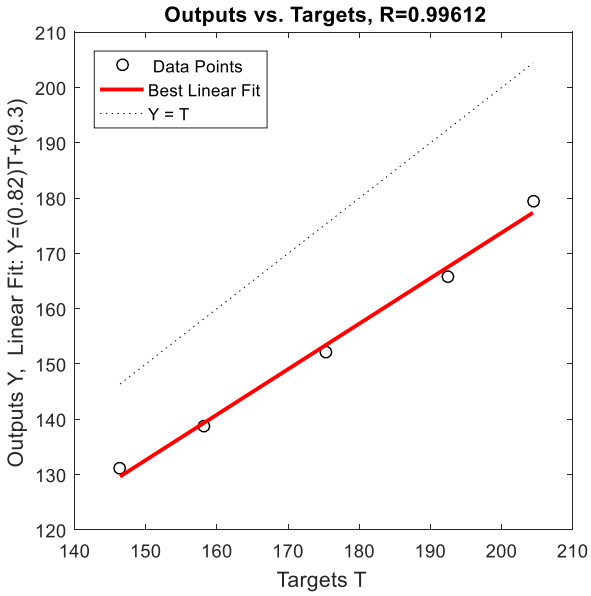


Figure III.5 Corrélation linéaire entre les valeurs prédite et les valeurs de l'expérience pour le verre

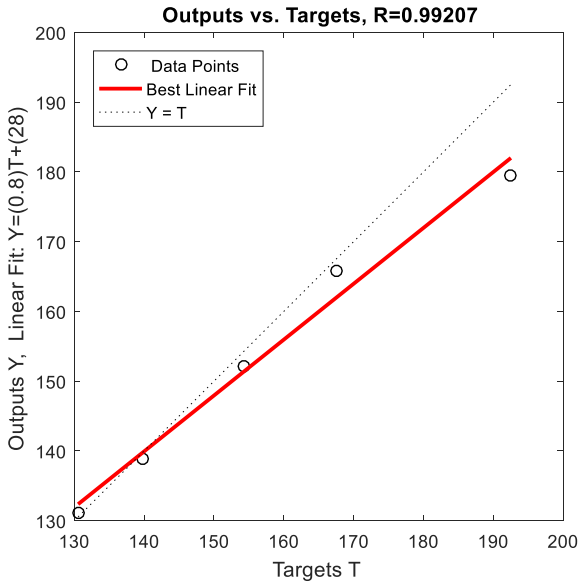


Figure III.6 Corrélation linéaire entre les valeurs prédite et les valeurs de l'expérience pour le verre modifier

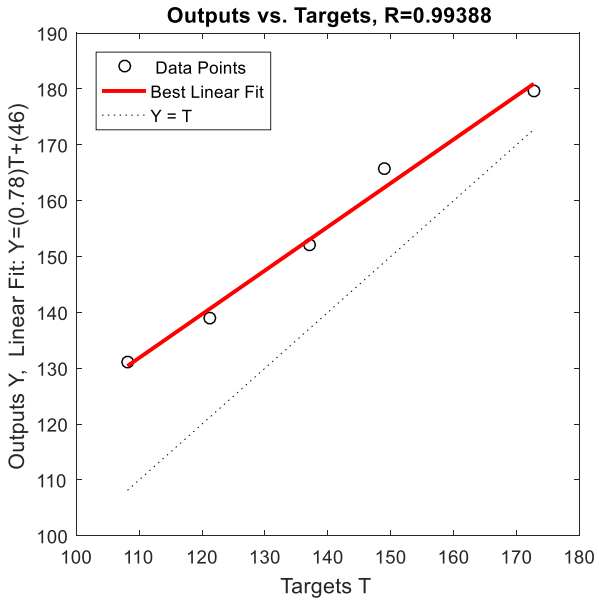


Figure III.6 Corrélation linéaire entre les valeurs prédite et les valeurs de l'expérience pour le PDMS

Le tableau (III.1) représente une comparaison entre les meilleures RMSE et R^2, obtenues par le modèle a défirent canal.

Tableau III.1 Les analyse statistique

Analyse statistique	Canal 2	Canal 4	PDMS
RMSE (kPa/m)	22.2717	5.9591	16.6680
R^2	0.3712	0.8895	0.5038

Chapitre III

Simulation De L'écoulement Gaz Liquide Dans Les Capillaires

III Simulation numérique

III.1 Introduction

La simulation numérique est l'un des outils qui permettent de simuler des phénomènes réels, appelée aussi simulation informatique, elle désigne un procédé selon lequel on exécute un programme informatique sur un ordinateur en vue de simuler par exemple un phénomène physique complexe. Les simulations numériques scientifiques reposent sur la mise en œuvre des modèles théoriques utilisant souvent la technique dite des éléments finis. Elles sont donc une adaptation aux moyens numériques de la modélisation mathématique, et servent à étudier le fonctionnement et les propriétés d'un système modélisé ainsi qu'à son évolution. On parle également de calcul numérique.

III.2 Calcul numérique

Les méthodes de discrétisation les plus connues sont :

- Méthodes des différences finis (MDF).
- Méthodes des éléments finis (MEF).
- Méthodes des spectrales (MS).
- Méthodes des volumes finis (MVF).

Comme tout calcul, le calcul numérique a des avantages comme il a des inconvénients, parmi ces avantages on peut citer la rapidité d'exécution, la possibilité de simuler des conditions réelles exceptionnelles et il peut nous donnera une solution numérique pour nombreux problèmes pratiques ayant un modèle mathématique.

L'inconvénient de ce calcul est sa difficulté pour sélectionner la bonne solution en cas de plusieurs solutions au problème mathématique [17].

III.3 La simulation par le logiciel

L'utilisation des logiciels pour la résolution de problèmes physiques est très fréquente. En effet, dans la plupart de ces problèmes, surtout la résolution de phénomènes (transfert de chaleur, rayonnement, changement de phase…) couplés à la mécanique des fluides n'est possible que sous certaines hypothèses simplificatrices qui ne permettent pas de faire une étude plus réelle des phénomènes physiques observés expérimentalement.

III.3.1 Présentation Du Code De Calcul

Pour réaliser nos simulations, nous avons choisi d'utiliser le code de calcul ANSYS que nous présentons dans cette partie.

ANSYS CFX-15.0 est un logiciel général de simulation numérique d'écoulements en mécanique des fluides, transfert thermique et massique. Ce logiciel permet de mettre en œuvre

une simulation numérique complète de la modélisation, de la création géométrique, et la visualisation des résultats, en passant par la création du maillage et le calcul. Le logiciel CFX, est divisé en quatre modules : **ICEM**, **CFX-Pre**, **CFX-solve**et**CFX-post**.

Le module **ICEM** permet d'établir la géométrie du système étudié. Il est utilisé comme un logiciel de **CAO** traditionnel : la géométrie est construite à ne partir de points, de courbes, de surfaces et de volume. C'est également ce module qui permet de générer un maillage s'appuyant sur la géométrie. L'utilisateur fixe alors les paramètres de maille qu'il souhaite obtenir sur les courbes, les surfaces et dans les volumes. Le module permet de générer des mailles tétraédriques, hexaédriques et prismatiques. Une fois le maillage effectué, **ICEM** créé un fichier portant l'extension « geo», qui regroupe les informations relatives au maillage, exploitable par **CFX-pre**.

Le module **CFX-pre** permet quant à lui de définir les conditions aux limites et initiales du système, ainsi que les équations à résoudre, le type de résolution (régime permanent ou transitoire), les paramètres du solveur, parmi lesquels : le pas de temps, le nombre d'itération, le critère de convergence ainsi que la nature des fluides (ou solides) en présence.

Les conditions aux limites sont de 5 types : Inlet, Outlet, Opening, Static pressure, Wall et Symmetry.

- Les conditions de type Inlet sont utilisées dans le cas d'un écoulement entrant à l'intérieur du domaine.
- Les conditions de type Outlet sont quant à elles utilisées dans le cas d'un écoulement sortant à l'extérieur du domaine.
- La condition Opening est utilisée dans le cas d'une méconnaissance de la nature entrante ou sortante de l'écoulement.
- La condition aux limites de type Wall est attribuée aux parois imperméables à l'écoulement.
- Enfin, si l'écoulement présente un plan de symétrie, il est possible d'attribuer la condition Symétrie à ce plan.

Une fois tous les paramètres définis, **CFX-pre** génère un fichier «def » qui contient toutes les informations relatives au maillage, aux conditions aux limites et initiales, ainsi que tous les autres paramètres introduit dans **CFX-pre**. C'est ce fichier qui va être à la base de travail du solver.

Le module **CFX-solve** est le module qui effectue les calculs. Il est basé sur l'intégration des équations de Navier Stockes dans chaque maille et dispose de modèles additionnels pour prendre en compte la turbulence, le rayonnement thermique.

Dans le cas d'une résolution en régime permanent, le calcul se poursuit jusqu'à ce que, soit le nombre maximal d'itération demandé par l'utilisateur est atteint, soit la solution satisfait au critère de convergence. Dans le cas d'une résolution en régime transitoire, le calcul prend fin lorsque la durée de résolution du phénomène étudiée est atteinte.

A la fin de son calcul, **CFX-solve** génère deux types de fichiers :

- Un fichier «.out » lisible par un éditeur de texte. Ce fichier résume le déroulement du calcul. Il contient, entre autres, les informations du «.def », ainsi que le bilan masse du système.
- Un fichier «res » qui contient l'ensemble des résultats. Ce fichier est directement exploitable par **CFX-post**.
- Le module **CFX-post** est un outil graphique permettant le traitement et la visualisation des résultats. Il permet d'appliquer des textures sur la géométrie, de visualiser des contours, des iso-surfaces, des lignes de courant, des champs de vitesses. Il permet également l'exportation des résultats sous forme numérique, comme par exemple la valeur des différentes variables sur chaque nœud, sous forme photographique et même sous forme d'animation.

III.3.2 Description du modèle

Le domaine de calcul est entièrement laminaire à une vitesse entrant égale à 1m/s. L'axe *x* aligné le long de l'écoulement d'entrée et l'axe *z* perpendiculaire à l'axe de cylindre. Les dimensions du domaine du calcul sont pour les diamètres des obstacles 1.8, 1.4, 1 et 0.5 cm, les profils de vitesses et de pression sont pris justes au début de l'obstacle (Line 1), la fin de l'obstacle (Line 2), juste après la fin de l'obstacle (Line 3) et loin de l'obstacle (Line 4).

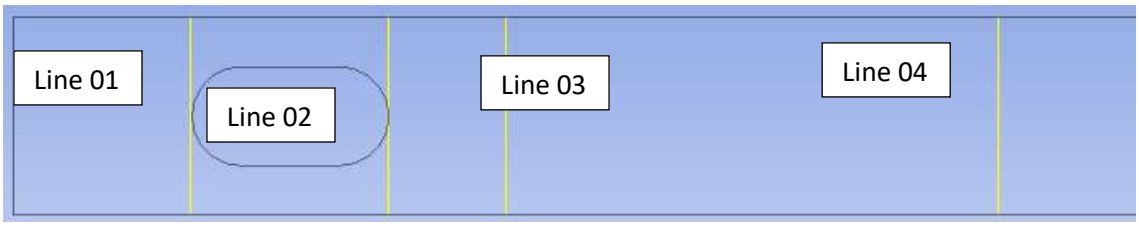


Figure III.1 schéma de modèle physique étudié

III.3.3 Maillage

La presque totalité des maillages crées pour cette étude sont fait d'éléments structurés uniformes puisqu'il est alors plus facile de contrôler la position des nœuds ainsi que les relations d'expansion entre les éléments voisins.

Lors du calcul de la résolution, le logiciel ANSYS CFX effectue la résolution des équations du problème par la méthode des volumes finis. Préalablement au calcul, le domaine physique continu doit être subdivisé en volume de contrôle discret par la création d'un maillage.

Le principe de base de la méthode des volumes finis implique l'intégration des équations sur chacun des éléments discrets définies par ce maillage.

Dans CFX, les nœuds de celui-ci définissent les points de calcul est c'est la que l'information sur la solution stockée. Les volumes finis essentielles à la méthode sont quant à eux construits autour des nœuds comme le présent la Figure III.2

En plus de critère de convergence, un facteur supplémentaire important à considérer est l'indépendance de maillage. En effet, la Figure III.2 illustre la discrétisation spatiale qui doit être faite pour diviser le domaine de calcul. Or, cette division de l'espace n'est encadrée par aucune règle particulière. Pour représenter parfaitement la physique réelle-qui est continue, un nombre infini de point de calcul serait idéal. Évidemment, des raisons pratiques obligent à utiliser un nombre fini d'éléments et leur nombre est souvent basé sur la puissance des processeurs disponibles, le temps disponible pour réaliser le calcul ou la précision recherchée. Toutefois, des résultats de calcul fiables doivent être indépendants de la discrétisation, c'est-à-dire qu'un raffinement du maillage ne doit pas altérer la physique calculée par le logiciel. L'indépendance de maillage n'annule par contre pas l'erreur implicite au critère de convergence mentionnée précédemment.

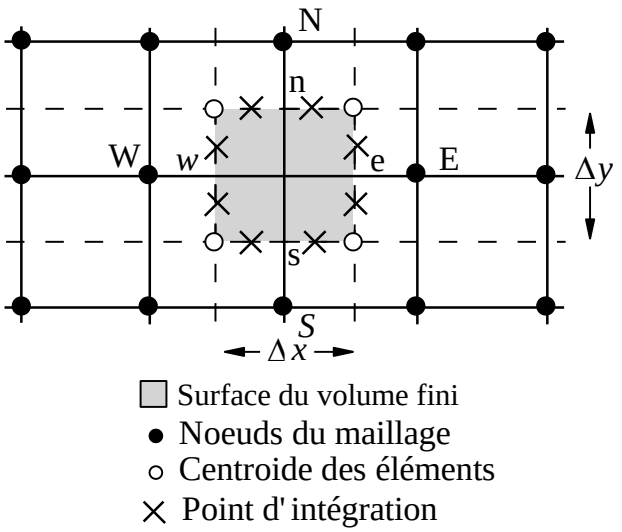


Figure III.2 Représentation 2D du maillage.

Le pre-precesseur ICEM associé a ANSYS 15.0 est utilisé pour la construction du domaine de calcul et de génération de maillage. Une attention particuliére à été accordée à la protection, en particulier le traitement à pres de la paroi. Parce que l'adaptation de la grille, il est une étape importante dans la validation du modèle pour la future analyse.

Un raffinement du maillage au voisinage des parois solides a été considéré pour une simulation précise des effets de parois. Pour démontrer la sensitivité de la solution à la taille du maillage.

La grille a été ajustée à plusieurs fois. Après le premier nœud près de la paroi, le maillage est raffiné pour capturer le gradient élevé de vitesse et de pression dans le voisinage de la paroi. Pour chaque modèle utilisée, une étude de l'indépendance de la grille a été réalisée pour chercher la maille qui permet un compromis entre la précision souhaitée et le cout de la solution dans le temps et la mémoire. Les trois mailles testées sont illustrées dans la Figure III.3

Pour être plus préludent et plus précis, on a choisi le maillage moyen pour les simulations. En outre raffinement de maillage ont été testés et ne se présente pas par souci de conclusion.

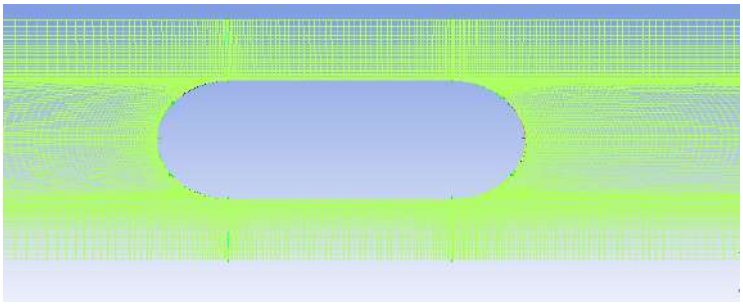


Figure III.3 Distribution des maillages

L'analyse des tests de convergence portant le maillage devait permettre d'identifier quelques situations peuvent nuire à la convergence des calculs d'écoulement autour d'un obstacle. Néanmoins, malgré les discrétisations désavantageuses, toutes les simulations onpu être amenées de façon très régulière à des résidus RMS de 1×10^{-8} pour toutes les différentes équations. Une courbe de convergence typique est montrée à la Figure III.4 pour que le lecteur puisse juger lui-même de la régularité de la convergence. Tous calculs sont effectués dans les conditions de régime permanent (steady state).

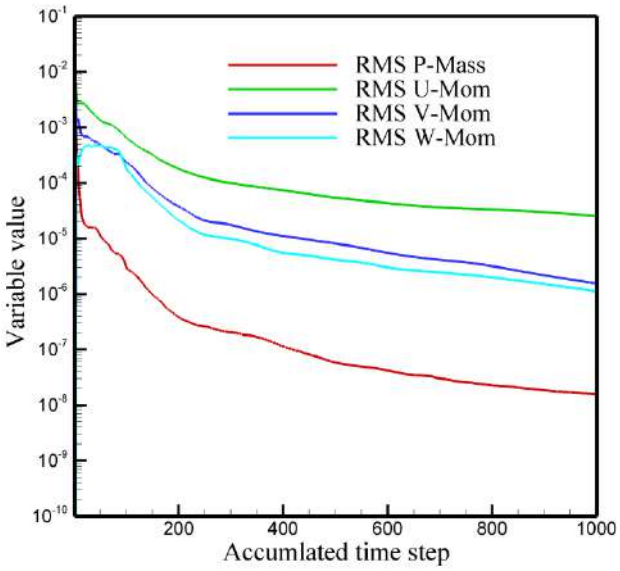


Figure III.4 Courbes de convergence

III.4 Résultats et discussion

Sur la figure III.5 sont représentés les profils de vitesses et de pression de l'écoulement d'un liquide à travers une bulle d'air considéré comme obstacle sans mouvement possédant 1.8 de diamètre. On remarque que la pression est très élevée juste au début la bulle suivi d'une chute de pression juste à la fin de la bulle, par contre les profils de vitesses sont nulle au début de la bille qui représente une zone stagnante puis augmente pour chaque station (line 1 au line 3), et on remarque aussi que lorsque l'écoulement est loin de l'obstacle on atteint l'écoulement de Poiseuille (line 4).

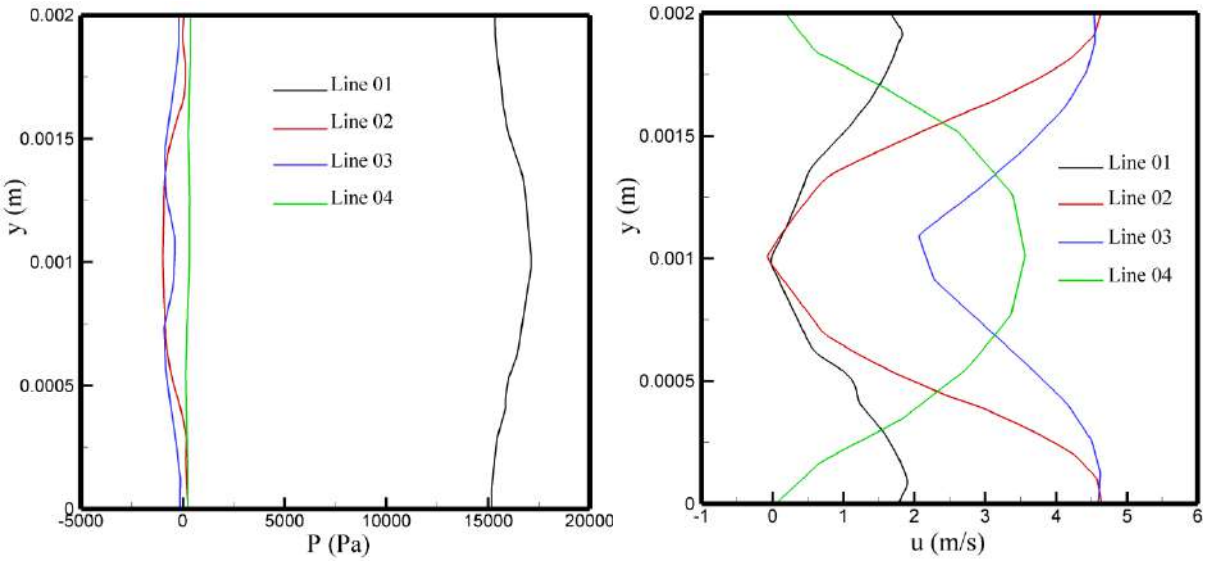


Figure III.5 Profils de vitesse et de pression pour D=1.8mm et différentes stations.

Afin d'étudier l'effet de diamètre de la bulle sur les profils de vitesses et de pression, une comparaison de ces profils sont illustré dans les figures III.6 et III.7 à différentes stations :

La figure III.6 représente les profils de pression à différente station et pour diamètre de bulle varie entre 0,5 à 1,8 cm. On remarque la pression est très élevées pour une bulle de 1,8 mm et une faible pression pour une bulle de 1cmde diamètre à la première station. Dans la deuxième station la pression pour une bulle de 1.8 cm de diamètre démunie pour des valeurs inferieur à zéro et possède un profil parabolique, pour des bulles de diamètre de 1,4 et 1 cm les valeurs de pression est autour de Zéro, les pour la troisième station la bulle de 1,8 cm de diamètre possède le profil de la deuxième station avec un petit changement, les bulles de diamètres de 1et 0,5 cm les valeurs de pression est autour de Zéro.

Est les valeurs les plus élevées sont enregistré pour la bulle de diamètre 1,4cm. Pour la quatrième station les valeurs les élevées sont enregistré pour la bulle de diamètre 0,5 cm et des valeurs proche de zéro pour la bulle de diamètre de 1 cm.

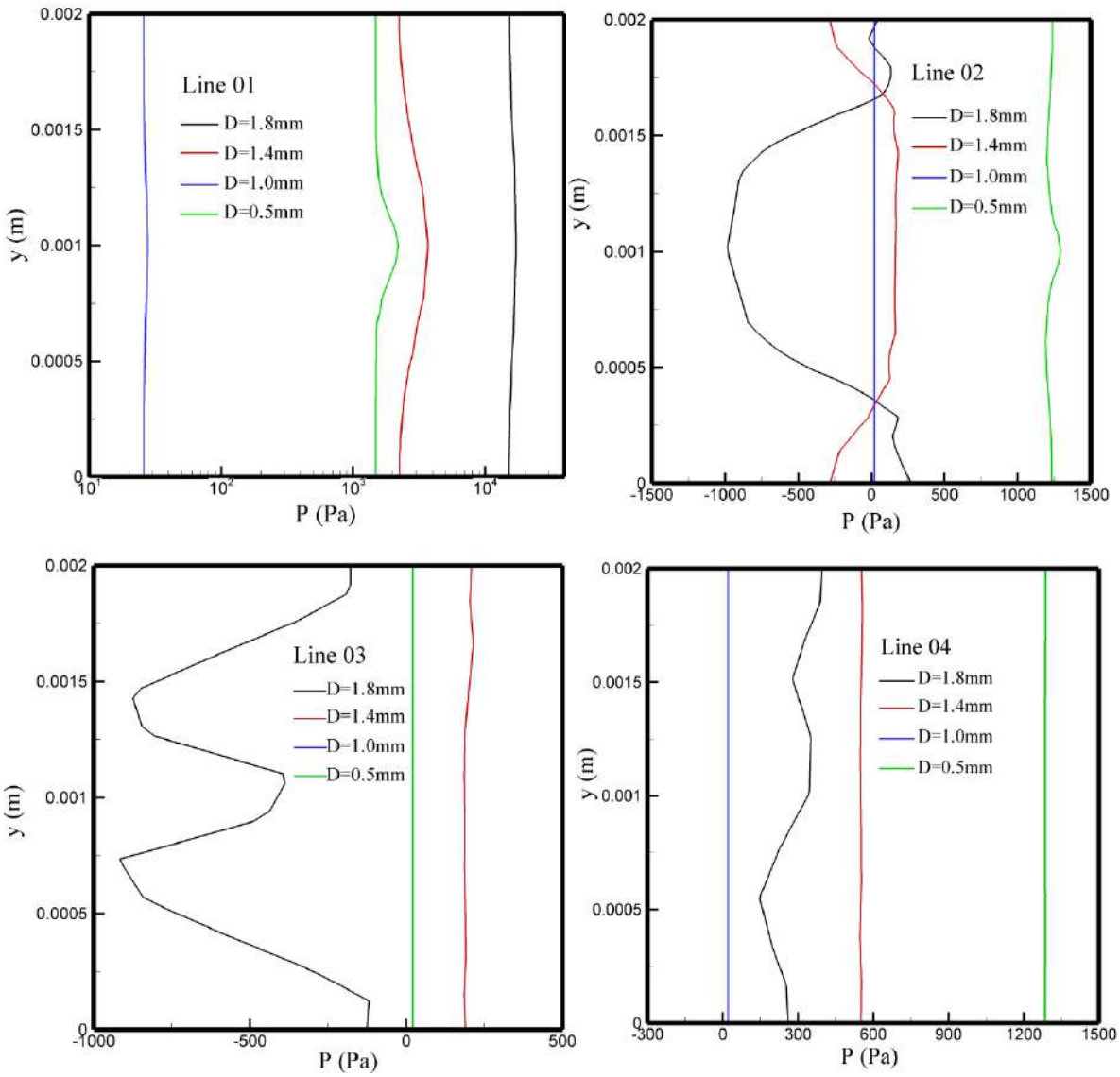


Figure III.6 Profils de pression pour différents diamètres et différentes stations.

La figure III.7 représente les profils de vitesses pour différents diamètres à différentes stations de l'écoulement, de la première station on remarque pratiquement les mêmes profils de vitesses avec un petit changement selon la taille des bulles, dans la deuxième station on constate que la bulle de diamètre de 1,8 cm possède le profil de vitesse de la première station, et les profils de vitesses change pour les bulles de tailles varient entre 0,5 et 1,4 mm de diamètre.

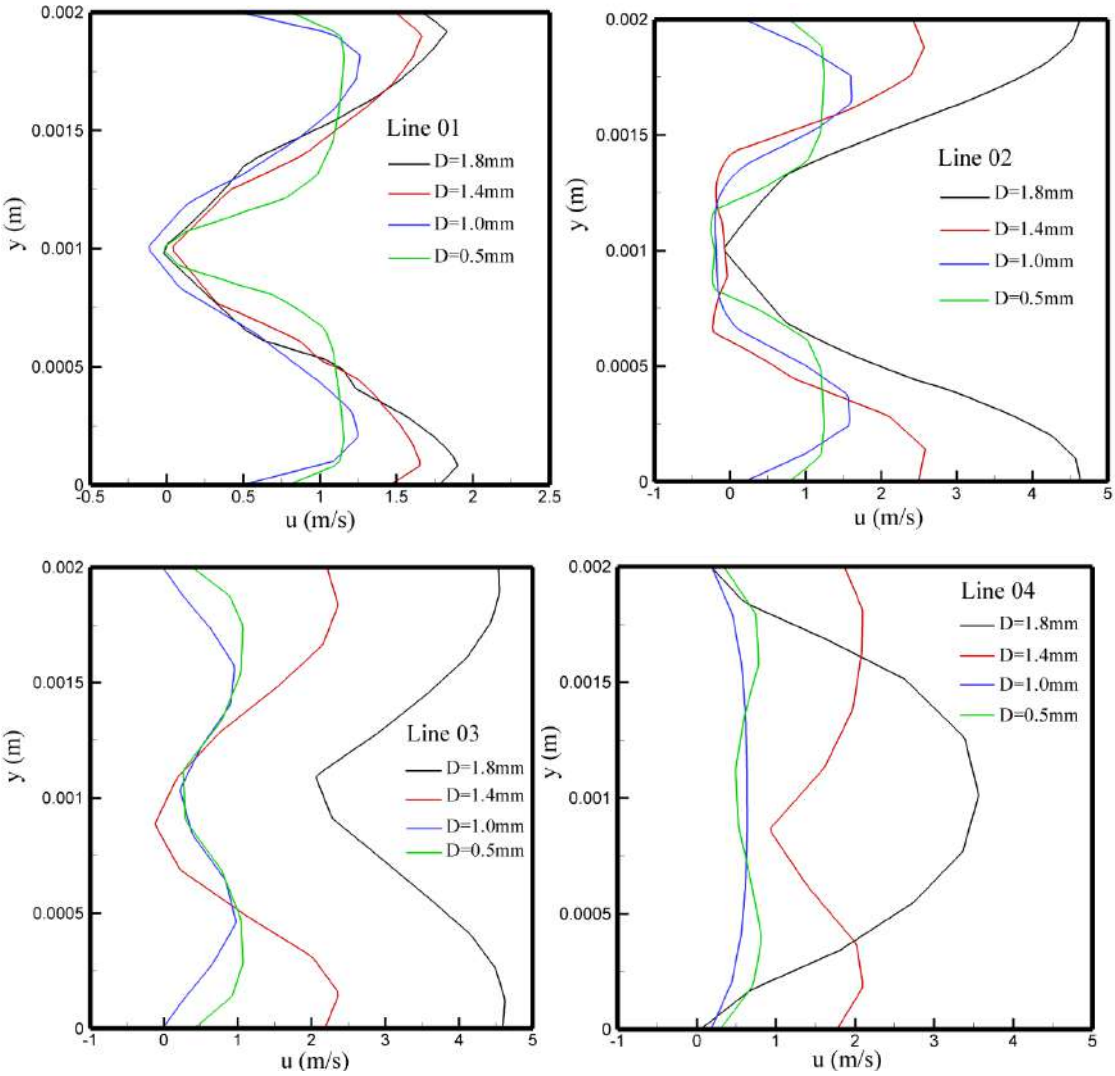


Figure III.7 Profils de pression pour différents diamètres et différentes stations.

Les figures présentent respectivement les résultats calculés pour les champs et les profils de pression mesurés dans les différents cas étudiés.

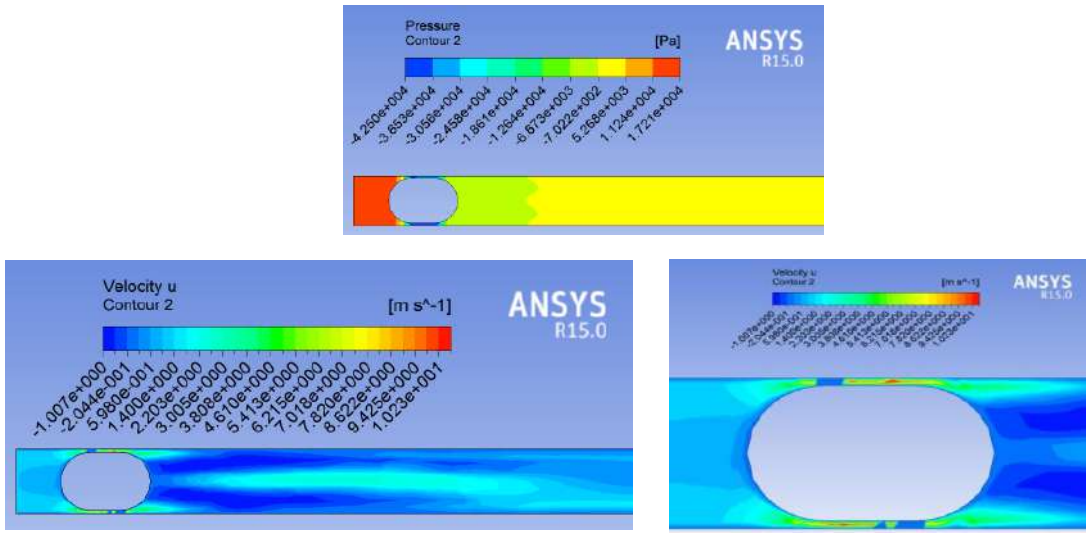


Figure III.8 Contours de pression et de vitesse pour D=1.8mm.

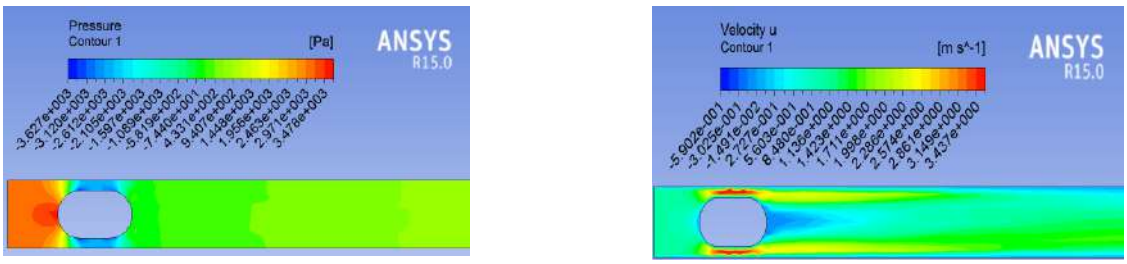


Figure III.9 Contours de pression et de vitesse pour D=1.4mm.

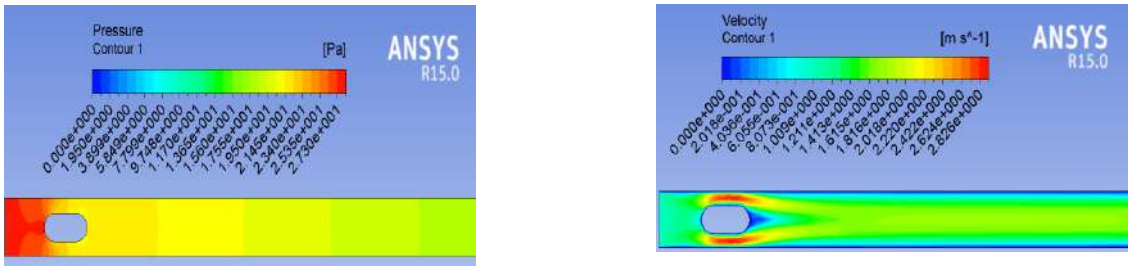


Figure III.10 Contours de pression et de vitesse pour D=1.0mm.

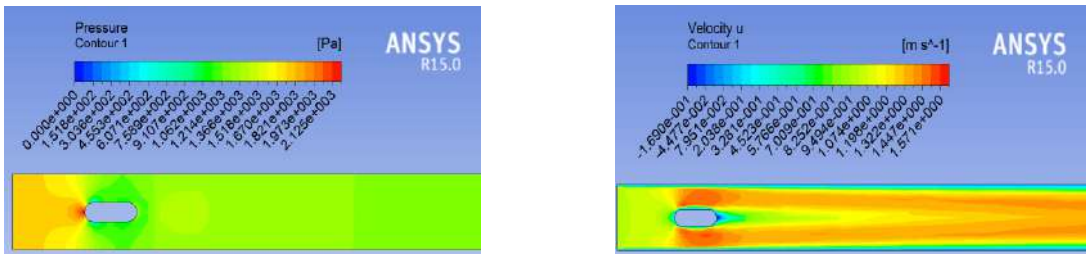


Figure III.11 Contours de pression et de vitesse pour D=0.5mm.

Des figures (III.7-III.11) On constate qu'amont de l'obstacle la pression augmente en fonction de différentes stations dans les différents cas de notre étude et elle est toujours minimale en aval des obstacles, donc on peut conclure que la présence des bulles dans les fluides à une grande influence sur la réduction de la pression l'écoulement.

Les figures (III.7-III.11) montrent les contours de la vitesse résultante pour les différents diamètres 1.8, 1.4, 1 et 0.5mm respectivement. On remarque que la vitesse reste uniforme depuis l'entrée de la conduite jusqu'au bord d'attaque de la bulle ou il y'a une diminution de la vitesse due au ralentissement de l'écoulement. En outre, les valeurs maximales des vitesses sont obtenues au-dessus de l'obstacle jusqu'à la paroi supérieure de la conduite. Cette augmentation est due au rétrécissement de la section de passage. On constate que cette région des vitesses élevés est diminuée proportionnellement avec la diminution de diamètre de l'obstacle. Des valeurs basses de la vitesse sont obtenues en aval de l'obstacle indiquant la zone de sillage, nous constatons que cette zone est diminuée avec l'augmentation de diamètre de la conduite.

Dans le but d'étudier l'effet de nombre de bulle sur les profils de vitesse et de pression, un nombre de six bulles équidistantes avec sept stations ont été placé avec un diamètre fixe d=1cm pour simuler le phénomène voire figure III.12.

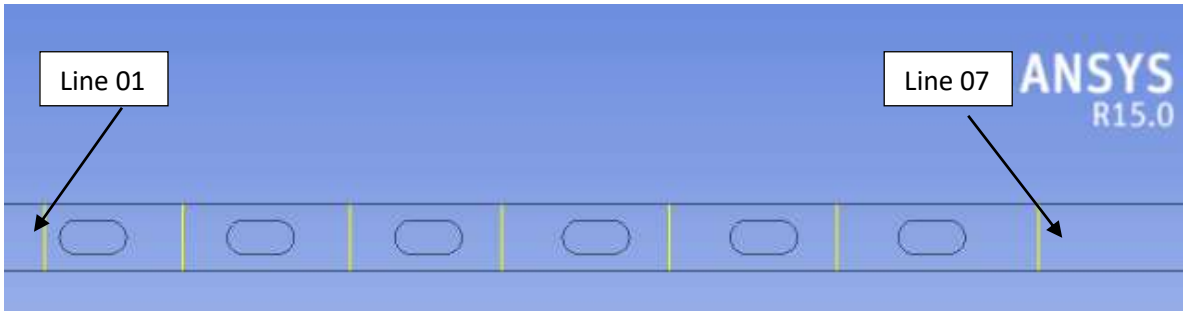
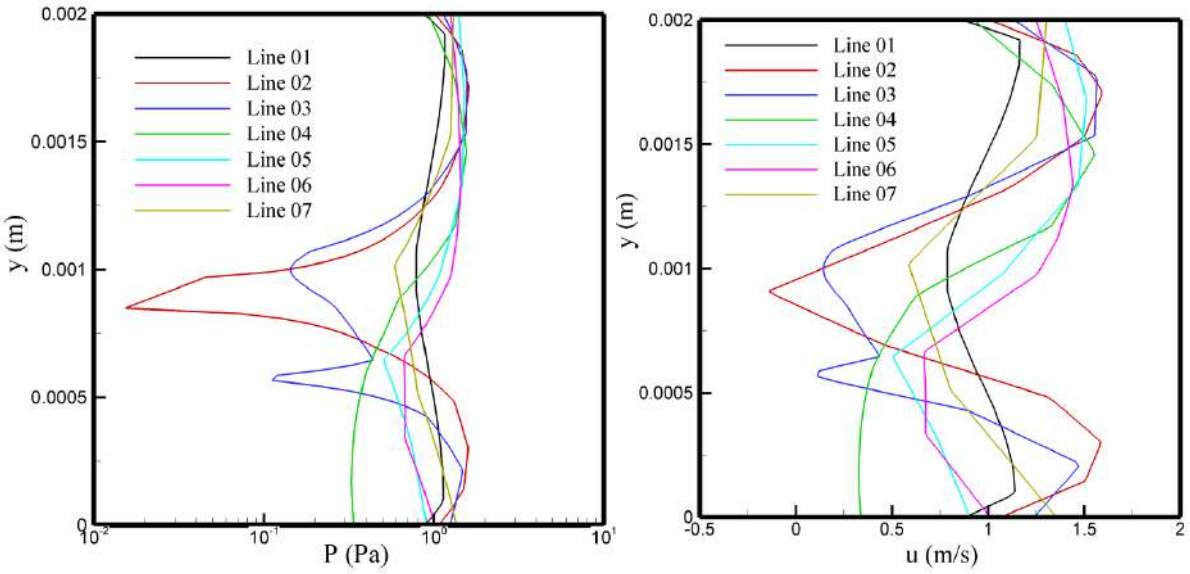


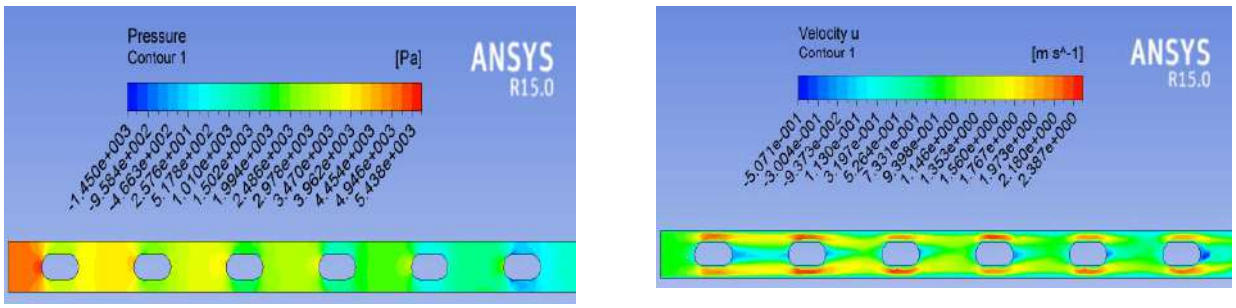
Figure III.12 Modèle physique

L'étude a montré que le profil de pression à l'entrée de la première station est constant toute au long du diamètre jusqu'au bord d'attaque. Au-delà de la première station une chute de pression est constatée sur la deuxième, troisième et la quatrième station qui est due principalement aux perturbations provoquées par les bulles. Une stabilisation de pression est établie à partir de la cinquième station.

En ce qui concerne les profils de vitesses, il a été montré une vitesse uniforme jusqu'au bord d'attaque puis une augmentation de vitesse est constatée en générale à la surface des différentes bulles et annulation des vitesses à proximité des parois et aux zones stagnantes, ce qui est confirmé par les contours schématisées sur la figure III.14



FigureIII.13 Profils de vitesse et de pression pour plusieurs obstacles à différentes stations.



FigureIII.14 Contours de pression et de vitesse pour plusieurs obstacles.

Conclusion générale

Dans ce présent travail de recherche, on s'est intéressé à la description fondamentale de l'écoulement gaz liquide dans une canalisation capillaire horizontal.

Au cours des études consacrées à l'écoulement diphasique eau/bulle d'air, nous avons essayé d'aborder différentes pistes avec une même philosophie. Nous avons étudié l'écoulement diphasique eau/bulle d'air dans un tube capillaire horizontal.

Les résultats des travaux effectués amènent une meilleure compréhension de cet écoulement et constituent la première étape de la modélisation mathématique du phénomène.

La dynamique de bulle dans un tube capillaire horizontal a été étudiée théoriquement et comparé avec l'expérimentation.

La première partie a été consacrée à l'étude analytique du problème ou cet écoulement a été présenté. Les expressions classiques des forces agissant sur les bulles ainsi que les principaux résultats théorique connus ont ensuite été rappelés afin d'établir l'expression analytique des bilans dynamiques des bulles dans cet écoulement.

Dans la deuxième partie, on a présenté un nouveau modèle unidirectionnel permettant de prédire la perte charge dans une canalisation capillaire qui a été développé à partir des résultats de la littérature. Ce modèle est basé sur des considérations physiques (la vitesse de bulle, la viscosité de gaz, leur masse volumique et les dimensions de canalisation), on déduit que ce paramètre a une grande influence sur la perte de charge. Nous constatons que le modèle développé valide parfaitement les résultats expérimentaux pour la canalisation en verre modifie et un écart remarquable est observé pour la canalisation en verre et PDMS qui due peut-être à la rugosité de surface de ces derniers.

Dans la troisième partie, on a présenté une simulation numérique de l'écoulement de bulle de gaz/liquide ou la bulle est supposé sans mouvement. Les résultats révèlent que le diamètre de bulle a une grande influence sur les profils de vitesses et de pression, Sans oublier de noter que ces dernies varient en fonction du nombre de bulles.

Ce modeste travail est loin d'être achevé. Les perspectives de recherche qui se dégagent de cette étude sont résumées dans ce qui suit :

- Redévelopper le modèle mathématique on introduit la tension de surface,
- Faire une simulation numérique ou la bulle d'air est on mouvement.
- Faire une étude expérimentale afin de valider la modélisation et la simulation.