Republique Algerienne Democratique et Populaire
Ministere de l'Enseignement Superieur et de la Recherche Scientifique
Universite Dr. Yahia Fares de Medea
Faculte des Sciences
Departement des Mathematiques et de l'Informatique



MEMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHEMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématiques et Applications

par

MAACHE ZINEB

LES SUITES RECURRENTES K-PERIODIQUES

Soutenu publiquement le 09-07-2019 devant le jury composé de

Président du jury	G. GUETTAI	*M.A.A*	*U.Y.F.M*
Examinateur	M. KRIMI	*M.A.A*	*U.Y.F.M*
Examinatrice	N. AZROU	*M.A.A*	*U.Y.F.M*
Promotrice	N.R. AIT AMRANE	*M.A.A*	*U.Y.F.M*

ANNEE UNIVERSITAIRE : 2018-2019

REMERCIEMENT

Je tiens à remercier `Allah` *le tout puissant, qui m'a donné la force et la patience pour l'accomplissement de ce travail.*

Je remercie infiniment mes parents pour tout ce qu'ils ont fait et ce qu'ils font encore pour moi.

Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu voir le jour sans l'aide et l'encadrement de madame `AIT AMRANE Nacima Rosa`*.*

Je la remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant la préparation de ce mémoire.

Mes remerciements s'adressent aussi aux membres de jury qui on accepté d'examiner mon travail.

A tous les enseignants et les membres du département de mathématiques de l'université `Dr. Yahia Fares de Médéa`*.*

Un profond remerciement à toutes les personnes qui m'ont aidée et m'ont soutenue de près ou de loin.

Merci .

DEDICACES

Je dédie ce modeste travail à :

A mes chers parents,

que nulle dédicace ne peut exprimer mes sincères sentiments, pour leur patience illimitée, leur encouragement contenu, leur aide, en témoignage de mon profond amour et respect pour ses grands sacrifices, que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

A mes très chèrs frères,

Rachid, Mokhtar, Merzek et Abd elnour.

A mes très chères soeurs,

Naima, Zohra, Zouina et Nour elhouda.

A ma très chère Lila, qui m'a beaucoup aidé .

A ma promotrice Madame Ait Amrane Nacima Rosa.

A touts mes amés Ratiba, Hayet, Amina, Houria .

A touts les membres de ma promotion 2018/2019.

Table des matières

Résumé **V**

Introduction **VI**

1 Suites récurrentes linéaires **1**

1.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre m 2

1.1.1 Fonction génératrice 2

1.1.2 Formule de Binet 4

1.1.3 L'écriture matricielle 5

1.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 6

1.2.1 Quelques propriétés 6

1.2.2 Expression en fonction de n 6

1.3 Suite des nombres de Fibonacci 7

1.3.1 Formule de Binet 8

1.3.2 Quelques identités des suites de Fibonacci 9

1.3.3 Extension aux indices négatifs 12

1.3.4 Extension aux indices complexes 13

2 Généralisation de la suite de Fibonacci et de Lucas k-périodique **15**

2.1 La suite de Fibonacci k-périodique 16

2.1.1 La Relation de Récurrence 17

2.1.2 Fonction génératrice 20

2.1.3 Formule de Binet 21

2.1.4 La limite du quotient de deux termes successifs 23

2.2 La suite de Lucas k-périodique 25

2.2.1 La Relation de Récurrence 25

2.2.2 Fonction génératrice 25

2.2.3 Formule de Binet 25

2.2.4 La limite du quotient de deux termes successifs 26

3 Applications **27**

3.1 La suite de Fibonacci 3-périodique 27

3.1.1 Relation de récurrence 27

3.1.2 Fonction génératrice 27

3.1.3 La Formule de Binet 28

3.1.4 La limite du quotient de deux termes successifs 29

3.2 La suite de Lucas 3-périodique 29

3.3 La suite de Fibonacci 4-périodique 31

3.3.1 Relation de récurrence 31

3.3.2 Fonction génératrice 32

3.3.3 La Formule de Binet 33

3.3.4 La limite du quotient de deux termes successifs 33

3.4 La suite de Lucas 4-périodique 34

Conclusion **37**

Bibliographie **38**

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons aux suites récurrentes k-périodiques. Dans la première partie, nous rappelons quelques propriétés des suites récurrentes linéaires homogènes à coefficients constants d'ordre m puis d'ordre 2, et nous donnons des outils permettant de trouver le terme général de ces suites comme la formule de Binet et la fonction génératrice.

Dans la deuxième partie, nous consacrons notre étude à la généralisation de la suite de Fibonacci et de Lucas k-périodique, en donnant le terme générale de ces deux suites par la formule de Binet et la fonction génératrice .

Dans la troisième partie, nous terminons notre étude par une application à la suite de Fibonacci et Lucas 3-périodique puis 4-périodique .

Introduction

Une des plus célèbres et sans doute la plus ancienne suite récurrente linéaire est la suite (1,1,2,3,5,8,13...) qui « compte » le nombre de couples de lapins enfermés dans un enclos et qui figure dans le Liber Abaci (1202) de Léonard de Pise (dit Fibonacci). On trouvera ensuite les suites récurrentes linéaires chez des mathématiciens de la fin du XVI^e siècle jusqu'à nos jours. C'est à Édouard Lucas au XIX^e siècle, qu'on doit le nom donné à cette suite « suite de Fibonacci » ainsi que sa popularisation.
Les suites récurrentes linéaires revêtent une grande importance et apportent des contributions dans plusieurs domaines, notamment celui de la communication et des technologies de l'information, où elles interviennent dans divers domaines théoriques et appliqués, c'est un outil fondamental de la théorie de la programmation mécanique [11].
Pendant longtemps les mathématiciens se sont intéressés à l'étude de ces suites. En 2009, Edson et Yayenie [5] ont introduit les suites bi-périodiques et depuis, plusieurs chercheurs se sont intéressés au domaine.
En 2010, Edson, Lewis et Yaynie [4] ont généralisé ces suites aux suites k-périodiques. Dans le présent travail, nous développerons quelques propriétés analytiques des suites récurrentes k-périodiques. Pour cela, nous allons diviser notre travail en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à l'étude de quelques propriétés analytiques des suites récurrentes linéaires à coefficients constants d'ordre m et d'ordre 2, et leurs formes explicites en utilisant la formule de Binet et la fonction génératrice. Nous allons aussi donner quelques propriétés de la suite de Fibonacci .

Le deuxième chapitre est une généralisation des suites de Fibonacci et de Lucas k-périodiques, et de quelques de leurs propriétés.

Le troisième chapitre est consacré à l'application de la suite de Fibonacci et Lucas 3-périodique, et 4-périodique.

Chapitre 1

Suites récurrentes linéaires

Dans ce chapitre nous étudierons quelque propriétés des suites récurrentes linéaires d'ordre m puis le cas particulier d'ordre 2 et donnons la forme explicite par deux manières, la première par la forme de Binet et l'autre par la fonction génératrice, et nous terminons par présenter quelques propriétés de suite de Fibonacci.

Suite

Définition 1.0.1. *Une suite de nombres réels* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une fonction de l'ensemble des entiers* $\mathbb{N}$ *dans l'ensemble des réels* $\mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longrightarrow u(n) = u_n \end{aligned}$$

on dit que $\mathbb{N}$ *est l'ensemble des indices .*

Exemple 1. $1, 2, 3, 4, 5, ...$ *est la suite des nombres entiers strictement positives, chaque nombre est un terme de la suite*

Suites récurrentes

Définition 1.0.2. *Une suite récurrente est une suite que l'on construit terme à terme, chaque terme étant calculé à l'aide des précédents. Pour construire une telle suite, il faut :*

1. *une série de valeurs de départ suffisamment pour initialiser la suite ; appelées conditions initiales*

2. *une relation permettant de calculer chaque terme en fonction des précédents ; appelée relation de récurrence de la suite .*

Formellement, on écrit :

$$u_n : \begin{cases} u_0, u_1, ... \\ u_{n+1} = f(u_n, u_{n-1}, ...) \end{cases}$$

Exemple 2. *Soit la suite* (u_n) *définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$u_1 = 2u_0 + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5$

$u_2 = 2u_1 + 3 = 2 \times 5 + 3 = 13$

$u_3 = 2u_2 + 3 = 2 \times 13 + 3 = 26$

$\vdots$

1.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre m

Définition 1.1.1. *On appelle suite récurrente linéaire d'ordre* m*, toute suite à valeurs dans un corps commutatif* $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$)*, définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, par une relation de récurrence linéaire de la forme suivante :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall m \leq n \quad u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + ... + a_m u_{n-m} \tag{1.1}$$

avec les conditions initiales $u_0 = r_0,\ u_1 = r_1, ..., \ u_{m-1} = r_{m-1}$ *, et* $a_1, a_2, ..., a_m$ *sont scalaires de* $\mathbb{K}$ *.*

Remarque 1.1.2. *Les suites récurrentes linéaires d'ordre 1 sont les* ***suites géométriques*** *définies par :*

$$\begin{cases} u_0 = r_0 \\ u_{n+1} = au_n, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

1.1.1 Fonction génératrice

Les fonctions génératrices dites aussi séries génératrices, sont des outils algébriques utilisées pour résoudre une relation de récurrence linéaire homogène à coefficients constants. En 1718 le mathématicien français Abraham De Moivre (1667-1754) posa les fonctions génératrices afin de résoudre la relation de récurrence de Fibonacci [2].

Définition 1.1.3. *La fonction génératrice correspondant à la récurrence linéaire homogène de la forme générale*

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + ... + a_m u_{n-m}, \quad pour \quad n \geq m$$

est donné par :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

Proposition 1.1.4. *La fonction génératrice d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être exprimée comme un quotient de deux polynômes, si et seulement si, la suite est une suite récurrente linéaire c'est à dire :*

$$G(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$$

où

$$\begin{aligned} U(x) &= P_{m-1}(x) - a_1 x P_{m-2}(x) - .... - a_{m-1} x^{m-1} P_0(x) \\ V(x) &= 1 - a_1 x - a_2 x^2 - .... - a_m x^m \\ P_i(x) &= u_0 + u_1 x + ... + u_i x^i \quad , (i = 0, ..., m-1) \end{aligned}$$

Preuve 1. *Soit la suite récurrente linéaire donné par (1.1) ,en multipliant cette suite par x^n pour $n \geq m$:*

$$\begin{aligned} u_n x^n &= a_1 u_{n-1} x^n + a_2 u_{n-2} x^n + ... + a_m u_{n-m} x^n \\ &= a_1 x u_{n-1} x^{n-1} + a_2 x^2 u_{n-2} x^{n-2} + ... + a_m x^m u_{n-m} x^{n-m} \end{aligned}$$

en sommant sur $n \geq m$:

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq m} u_n x^n &= a_1 x \sum_{n\geq m} u_{n-1} x^{n-1} + a_2 x^2 \sum_{n\geq m} u_{n-2} x^{n-2} + ... + a_m x^m \sum_{n\geq m} u_{n-m} x^{n-m} \\ &= a_1 x \sum_{n\geq m-1} u_n x^n + a_2 x^2 \sum_{n\geq m-2} u_n x^n + ... + a_m x^m \sum_{n\geq 0} u_n x^n \end{aligned}$$

en posant

$$P_i(x) = u_0 + u_1 x + ... + u_i x^i \quad , (i = 0, ..., m-1)$$

on obtient :

$$\sum_{n\geq 0} u_n x^n - P_{m-1}(x) = a_1 x(\sum_{n\geq 0} u_n x^n - P_{m-2}) + ... + a_{m-1} x^{m-1}(\sum_{n\geq 0} u_n x_n - P_0) + a_m x^m \sum_{n\geq 0} u_n x^n$$

$$G(x) - P_{m-1}(x) = a_1 x(G(x) - P_{m-2}) + ... + a_{m-1} x^{m-1}(G(x) - P_0) + a_m x^m G(x)$$

$$G(x) = \frac{P_{m-1}(x) - a_1 x P_{m-2}(x) - .... - a_{m-1} x^{m-1} P_0(x)}{(1 - a_x - a_2 x^2 - ... - a_m x^m)}$$

d'où

$$G(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$$

■

1.1.2 Formule de Binet

La forme explicite d'une suite récurrente linéaire, a été établie la première fois en 1718 par le mathématicien français Abraham De Moivre en utilisant les fonctions génératrices. En 1843 le mathématicien français Jacques-Phillipe-Marie Binet (1786-1856) a établi la formule dite de Binet, qui n'est autre que la forme explicite en fonction des racines du polynôme caractéristique de la suite récurrente [2].

Nous nous intéressons maintenant au cas des suites définies par une relation de récurrence du type :

$$u_{n+m} = a_{m-1}u_{n+m-1} + a_{m-2}u_{n+m-2} + ... + a_0u_n, \quad pour \quad n \geq m \tag{1.2}$$

Définition 1.1.5. *Le polynôme caractéristique associé à une suite vérifiant la relation de récurrence* (1.2) *est donné par :*

$$P(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + ... + a_1x + a_0 \tag{1.3}$$

son degré est ainsi égale à l'ordre de la relation de récurrence .

Proposition 1.1.6. *Si le polynôme caractéristique* (1.3) *admet m racines distinctes $\lambda_i, ...\lambda_m$. Alors, les suites qui vérifient la relation de récurrence* (1.2) *sont les suites définies par :*

$$u_n = c_1\lambda_1^n + ... + c_m\lambda_m^n$$

dite ***formule de Binet*** *.*

où les coefficients inconnus $c_1, ..., c_m$ sont déterminés par les m premières valeurs $u_0, ..., u_{m-1}$ de la suite, tel que :

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_m = u_0 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + ... + c_m\lambda_m = u_1 \\ \qquad\qquad \vdots \\ c_1\lambda_1^{m-1} + c_2\lambda_2^{m-1} + ... + c_m\lambda_m^{m-1} = u_{m-1} \end{cases}$$

1.1.3 L'écriture matricielle

La relation (1.2) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$U_{n+1} = AU_n, \quad pour \quad n \geq 0$$

où $U_n \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$,Tel que :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{m-1} \end{pmatrix} \quad et \quad U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+m-1} \end{pmatrix}$$

la matrice A s'appelle **La matrice compagnon**.

d'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n = A^n U_0$$

où

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{m-1} \end{pmatrix}$$

le calcule de puissance de matrice est facile si la matrice est diagonalisable .

Lemme 1. *Une matrice carré A est dite diagonalisable s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :*

$$A = PDP^{-1}$$

avec

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ *sont les racines de polynôme caractéristique* (1.3).

ainsi par récurrence

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

on obtient

$$U_n = A^nU_0 = PD^nP^{-1}U_0$$

c'est exactement la formule de Binet par la méthode matricielle.

1.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 1.2.1. *On dit qu'une suite (u_n) est récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe deux réels $a, b \in \mathbb{R}^*$ tels que :*

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ u_n = au_{n-1} + bu_{n-2} \qquad n \geqslant 2 \end{cases} \tag{1.4}$$

1.2.1 Quelques propriétés

Étant donné un couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$ notons $\mathbb{U}$ l'ensemble des suites (u_n) vérifiant la relation (1.4)

1. $\mathbb{U}$ n'est pas vide. Car la suite de Fibonacci appartient à $\mathbb{U}$
2. La donnée des deux premiers termes u_o et u_1 d'une suite (u_n) de $\mathbb{U}$.
3. $\mathbb{U}$ est stable par combinaisons linéaire :

$$\forall\,(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad (u_n, v_n) \in \mathbb{U} \Longrightarrow \alpha u_n + \beta v_n \in \mathbb{U}$$

4. Une suite géométrique de raison q (non nulle) appartient à $\mathbb{U}$, si est seulement si, q est solution de l'équation $x^2 = ax + b$.

Définition 1.2.2. *Soit (u_n) une suite qui vérifie la relation (1.4). On appelle* ***polynôme caractéristique*** *de (u_n) l'équation définie par :*

$$x^2 - ax - b = 0 \tag{1.5}$$

1.2.2 Expression en fonction de n

Le terme général d'une suite (u_n), dépend des racines de son polynôme caractéristique .

Théorème 1.2.3. *Soit $\Delta = a^2 + 4b$ le discriminant de l'équation (1.5), on a*

1. *Si* $\Delta > 0$, *l'équation* (1.5) *admet deux solutions réelles* x_1 *et* x_2. *alors :*

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{K} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda (x_1)^n + \mu (x_2)^n \quad .$$

2. *Si* $\Delta = 0$, *l'équation* (1.5) *admet une racine double* x. *alors :*

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{K} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda n + \mu) x^n \quad .$$

3. *Si* $\Delta < 0$, *l'équation* (1.5) *admet deux solutions complexes conjuguées* ω *et* $\bar{\omega}$. *alors :*

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{K} \ / \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda p^n \cos(n\theta) + \mu p^n \sin(n\theta)$$

où $p = |\omega|$ *et* $\theta = arg(\omega)$

dans tous les cas, les constantes λ *et* μ *sont déterminées à partir des conditions initiales* u_0 *et* u_1.

Exemple 3. *Soit la suite récurrente linéaire définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 3 \\ u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n \qquad n \geqslant 2 \end{cases}$$

son polynôme caractéristique est $x^2 + x - 2 = 0$, *comme* $\Delta = 9 > 0$, *il admet deux racines réelles* $x_1 = 1$ *et* $x_2 = -2$.

d'après le théorème (1.2.2) on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda + \mu (-2)^n$$

avec $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ *on a*

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - 2\mu = 3 \end{cases}$$

donc $\lambda = 1$ *et* $\mu = -1$

conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 1 - (-2)^n \quad .$$

1.3 Suite des nombres de Fibonacci

La suite de Fibonacci (F_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad n \geq 2 \end{cases} \tag{1.6}$$

Les premières valeurs de la suite de Fibonacci sont :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...$$

Elle est caractérisée par le fait que chaque nombre à partir du troisième est la somme des deux précédents.

L'interprétation matricielle de la relation de récurrence (1.6) est donnée par :

$$C^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}, \quad avec \;\; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

où $F_0 = 0$ $F_1 = 1$ donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

En prenant la trace de la matrice C^n , pour $n \geq 0$, on retrouve la suite de Lucas $(L_n)_{n\geq 0}$ définie par la récurrence

$$\begin{cases} L_0 = 2, L_1 = 1 \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases} \tag{1.8}$$

Pour plus de détails voir [7]

1.3.1 Formule de Binet

Le calcul des nombres de Fibonacci par la formule de Binet, qui en donne une expression explicites des suites en fonction de l'indice n et les racines de son polynôme caractéristique, peut être fait en diagonalisant une matrice.

La formule de Binet est obtenue en diagonalisant la matrice C qui définie par (1.7) c'est *à* dire :

$$X_{n+1} = CX_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

où

$$X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

par récurrence on obtient :

$$X_n = C^n X_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Le calcul de C^n deviendra facile si nous diagonalisons la matrice C, les valeurs propres de C sont les racines de polynôme caractéristique $x^2 - x - 1$ associée à (1.6)

Donc les valeurs propres sont α et β tel que :

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

donc $C = PDP^{-1}$ avec D est la matrice diagonale et P la matrice de passage .

où

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

on obtient donc

$$\begin{aligned} C^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha} \begin{pmatrix} \beta^{n-1} - \alpha^{n-1} & \beta^n - \alpha^n \\ \beta^n - \alpha^n & \beta^{n-1} - \alpha^{n-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme $X_n = C^n X_0$, on obtient la formule de Binet pour la suite de Fibonacci

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

Formule de Binet de la suite du Lucas

La suite de Lucas définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} L_0 = 2, L_1 = 1 \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

son polynôme caractéristique associé est $x^2 - x - 1$, ses racines sont

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

d'après le théorème (1.2.3), on obtient la formule de Binet pour la suite de Lucas

$$L_n = \alpha^n + \beta^n$$

1.3.2 Quelques identités des suites de Fibonacci

La suite de Fibonacci représente de remarquables identités. Nous donnons également quelques identités liant la suite de Fibonacci à celle de Lucas .

1) L'identité de Catalan

L'identité de Catalan pour les nombres de Fibonacci a été trouvée en 1879 par Eugène Charles Catalan, un mathématicien Belge, qui a travaillé pour l'académie belge "La Science" dans le domaine de la théorie des nombres [3].

Théorème 1.3.1. *[8] Pour tous $m, r \in \mathbb{N}$, la suite de Fibonacci vérifie l'identité de Catalan qui est donnée par : $m \geqslant r$*

$$F_{m+r}F_{m-r} - F_m^2 = (-1)^{m-r+1}F_r^2$$

Preuve 2.

$$\begin{aligned}
F_{m+r}F_{m-r} - F_m^2 &= \left(\frac{\alpha^{m+r} - \beta^{m+r}}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{m-r} - \beta^{m-r}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\Big(\alpha^2 + \beta^{2m} - \big(\alpha\beta\big)^m\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^r - \big(\alpha\beta\big)^n\Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^r - \alpha^{2m} - \beta^{2m} + 2\big(\alpha\beta\big)^m\Big) \\
&= \frac{-1}{(\alpha-\beta)^2}\big(\alpha\beta\big)^m\left(\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^r + \Big(\frac{\beta}{\alpha}\Big)^r - 2\right) \\
&= -\big(\alpha\beta\big)^m F_r^2 \\
&= \big(-1\big)^{m-r+1}F_r^2
\end{aligned}$$

■

2) L'identité de Cassini

C'est une des identités les plus anciennes, impliquant les nombres de Fibonacci. elle est découverte en 1680 par Jean-Dominique Cassini un astronome français [3].

Le calcul du déterminant de la matrice $C.$ définie par (1.7) donne la formule de Cassini [7]

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Théorème 1.3.2. *[8] Pour tout entier n , La suite de Fibonacci vérifie l'identité de Cassini*

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

Preuve 3. *L'identité de Cassini est ainsi le cas particulier de celle de Catalan pour $r = 1$, donc en fait la même démonstration .*

3) L'identité de d'Ocagne

Théorème 1.3.3. *[8] Pour tout entiers n et m tel que $m > n$ on a, la suite de Fibonacci vérifie l'identité d'Ocagne est donnée par :*

$$F_m F_{n+1} - F_n F_{m+1} = (\alpha\beta)^n F_{m-n}$$

Où α et β sont les racines du polynôme caractéristique associé à la suite de Fibonacci.

Preuve 4.

$$\begin{aligned} F_m F_{n+1} - F_n F_{m+1} &= \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}\right)\left(\frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta}\right) \\ &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\Big(- \alpha^m\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta^m + \alpha^{m+1}\beta^n + \alpha^m\beta^{m+1}\Big) \\ &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\big(\alpha\beta\big)^n\Big(\beta^{m-n}\big(\beta-\alpha\big)\alpha^{m-n}\big(\alpha-\beta\big)\Big) \\ &= \big(\alpha\beta\big)^n\left(\frac{\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}}{\alpha - \beta}\right) \\ &= \big(-1\big)^n F_{m-n} \end{aligned}$$

■

Quelques relations entre la suite de Fibonacci et la suite de Lucas

1. $F_{n-1} + F_{n+1} = L_n$
2. $L_n + F_n = 2F_{n+1}$
3. $L_n - F_n = 2F_{n-1}$
4. $L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$
5. $L_{n-1} + F_{n+1} = L_{n+1} - F_{n-1} = 3F_n$

Corolaire 1.3.4. *Soient F_n la suite de Fibonacci et $n, r \in \mathbb{N}$. Alors*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{F_{n+r}}{F_n} = \alpha^r$$

Preuve 5. *Soient $n, r \in N$, en utilisant la formule de Binet on a :*

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{F_{n+r}}{F_n} &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\left(\frac{\alpha^{n+r}-\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\right)}{\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)}\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\alpha^{n+r}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+r}\right)}{\alpha^{n}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}\right)}\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{\alpha^{r}\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+r}\right)}{\left(1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n}\right)}\end{aligned}$$

comme $|\beta| < \alpha$ donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n} = 0$$

d'où

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{F_{n+r}}{F_n} = \alpha^{r}$$

■

1.3.3 Extension aux indices négatifs

Théorème 1.3.5. *Une suite récurrente se prolonge aux indices négatifs d'une façon naturelle par sa relation de récurrence. Pour les nombres des Fibonacci et les nombres de Lucas on a respectivement les formules [7]*

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$$

et

$$L_{-n} = (-1)^{n}L_n$$

Preuve 6. *1. En utilisant la formule de Binet de la suite de Fibonacci on a :*

$$\begin{aligned}F_{-n} &= \frac{\alpha^{-n}-\beta^{-n}}{\alpha-\beta}\\ &= \frac{\frac{1}{\alpha^{n}}-\frac{1}{\beta^{n}}}{\alpha-\beta}\\ &= \frac{(-1)}{(\alpha\beta)^{n}}\left(\frac{\alpha^{n}-\beta^{n}}{\alpha-\beta}\right)\\ &= (-1)^{n+1}F_n\end{aligned}$$

■

2. En utilisant la formule de Binet de la suite de Lucas on a :

$$\begin{aligned} L_{-n} &= \alpha^{-n} + \beta^{-n} \\ &= \frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n} \\ &= \frac{1}{(\alpha\beta)^n}(\alpha^n + \beta^n) \\ &= (-1)^n L_n \end{aligned}$$

■

1.3.4 Extension aux indices complexes

En 1966, Whitney a étudié les généralisations analytiques des nombres de Fibonacci et de Lucas, en étendant les formules de Binet au plan complexe [2]

$$F(z) = \frac{\alpha^z - \beta^z}{\alpha - \beta}$$

et

$$L(z) = \alpha^z + \beta^z$$

où z est une variable complexe arbitraire, $F(z)$ est la fonction de Fibonacci complexe et $L(z)$ est la fonction de Lucas complexe.

Périodicité De α^z et β^z

1. α^z est périodique et de période $\quad p = \dfrac{2\pi i}{\ln \alpha}$

   En effet :

   soit p le période de α^z, donc $\alpha^{z+p} = \alpha^z$, alors $\alpha^z = 1 = e^{2\pi i}$

   d'où $p = \dfrac{2\pi i}{\ln \alpha}$.

2. β^z est périodique et de période $\quad q = \dfrac{2\pi(\pi - i\ln\alpha)}{\ln^2 \alpha + \pi^2}$

   En effet :

   soit q le période de β^z, donc $\beta^{z+q} = \alpha^z$, alors $\beta^z = 1 = e^{2\pi i}$

   comme $\quad \beta < 0$, on a $\quad \beta = e^{\pi i}(-\beta)$, donc $\quad e^{q\pi i}(-\beta) = e^{2\pi i}, \quad (-\beta)^q = e^{\pi(2-q)i}$

   on a $(-\beta) = \alpha$, donc $\quad (-\alpha)^q = e^{\pi(2-q)i}$, $\quad q\ln\alpha = \pi(2-q)i$

d'où

$$\begin{aligned} q &= \frac{2\pi i}{\pi i - \ln \alpha} \\ &= \frac{2\pi(\pi - i \ln \alpha)}{\ln^2 \alpha + \pi^2} \end{aligned} \quad .$$

Quelque identités de la suite de Fibonacci et Lucas complexes

1. $F(z+2) = F(z+1) + F(z)$
2. $L(z+2) = L(z+1) + L(z)$
3. $F(z-1)F(z+1) - F^2(z) = e^{\pi z i}$
4. $L^2(z) - 5F^2(z) = 4e^{\pi z i}$
5. $F(-z) = -F(z)e^{\pi z i}$
6. $L(-z) = L(z)e^{\pi z i}$
7. $F(2z) = F(z)L(z)$
8. $F(z+w) = F(z)F(w+1) + F(z-1)F(w)$, tel que $w = x + iy$
9. $F(3z) = F^3(z+1) + F^3(z) - F^3(z-1)$

Pour les lecteurs intéressés voir [2] .

Chapitre 2

Généralisation de la suite de Fibonacci et de Lucas k-périodique

La suite de Fibonacci est une suite d'entiers dans laquelle chaque terme suivant est la somme des deux qui précèdent en commençant par 0 et 1, définie par la relation de récurrence linéaire de seconde ordre $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Les nombre de Fibonacci sont apparus dans la solution d'un problème de Leonardo Pisano, dans son livre Liber Abaci (1202), concernant les schémas de reproduction des lapins. La suite de Fibonacci a été généralisée de plusieurs façons, certaines en conservant les conditions initiales d'autres en conservant la relation de récurrence .

En 2009, dans [5], Edson et Yayenie ont défini un autre type de suite de Fibonacci généralisé, appelé **la suite de Fibonacci bi-périodique**, qui est définie récursivement par :

$$F_0^{(a,b)} = 0, \quad F_1^{(x_1,x_2)} = 1, \quad F_n^{(x_1,x_2)} = \begin{cases} x_1 F_{n-1}^{(x_1,x_2)} + F_{n-2}^{(x_1,x_2)}, & si \quad n \equiv 0(mod\ 2) \\ x_2 F_{n-1}^{(x_1,x_2)} + F_{n-2}^{(x_1,x_2)}, & si \quad n \equiv 1(mod\ 2) \end{cases}$$

où x_1 et x_2 deux réels différents non nuls.

Dans ce chapitre, Nous nous intéressons à une nouvelle généralisation de la suite de Fibonacci appelée **la suite de Fibonacci k-périodique**, qu'a défini Edson, Lewis et Yayenie dans [4] en 2010.

2.1 La suite de Fibonacci k-périodique

La suite de Fibonacci k-périodique est une extension de la suite de Fibonacci bi-périodique, définie par la relation de récurrence linéaire à coefficients non constants, qui dépend de k paramètres réels [4].

Définition 2.1.1. *Soit $k \in \mathbb{N}$ et $(x_1, x_2, ..., x_k) \in \mathbb{Z}^k$, la suite de Fibonacci k-périodique notée $\left(F_n^{(x_1,.....,x_k)}\right)_{n=0}^{\infty}$ est définie par la relation suivante :*

$$\begin{cases} F_0^{(x_1,.....,x_k)} = 0, \quad F_1^{(x_1,.....,x_k)} = 1 \\ F_{n+1}^{(x_1,.....,x_k)} = x_n F_n^{(x_1,.....,x_k)} + F_{n-1}^{(x_1,.....,x_k)} \qquad (n \geq 2) \end{cases}$$

où $x_n = x_i$, $\quad si\ n \equiv i(mod\ k), \quad pour\ 1 \leq i \leq k$

On dénote $\left(F_n^{(x_1,.....,x_k)}\right)$ par (q_n) et donnons une nouvelle définition pour la suite $\{q_n\}$

Définition 2.1.2. *La suite (q_n) est définie par la relation suivante :*

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_n = \begin{cases} x_1 q_{n-1} + q_{n-2} \quad si \quad n \equiv 2(mod\ k) \\ x_2 q_{n-1} + q_{n-2} \quad si \quad n \equiv 3(mod\ k) \\ \qquad \vdots \\ x_{k-1} q_{n-1} + q_{n-2}\ si \quad n \equiv 0(mod\ k) \\ x_k q_{n-1} + q_{n-2} \quad si \quad n \equiv 1(mod\ k) \end{cases} \tag{2.1}$$

Cas particuliers :

1. Pour $x_1 = x_2 = ... = x_k = 1$, on obtient la suite de Fibonacci classique

$$\begin{cases} F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

2. Pour $x_1 = x_2 = ... = x_k = 2$, on obtient la suite de Pell

$$\begin{cases} P_0 = 0, \quad P_1 = 1 \\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2} \end{cases}$$

3. Pour $x_1 = x_2 = ... = x_k = r$, on obtient la suite r-Fibonacci

$$\begin{cases} F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \\ F_n = rF_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

pour r un entier positif.

2.1.1 La Relation de Récurrence

Pour obtenir la fonction génératrice, nous montrons d'abord que la suite (q_n) satisfait à une relation de récurrence modulo k. Donc pour une constante A la suite (q_n) définie par (2.1) vérifie la relation de récurrence suivante :

$$pour \quad m \geq 2k, \quad 0 \leq j \leq k-1, \quad q_{mk+j} = Aq_{(m-1)k+j} + (-1)^{k-1} q_{(m-2)k+j} \tag{2.2}$$

Afin de réaliser cette relation , nous présentons un ensemble de suites liées à q_n. [4]

Définition 2.1.3. *Pour tout j , tel que $0 \leq j \leq k-1$, on définit la suite (q_n^j) :*
pour $n = km + r$, avec $0 \leq r \leq k-1$

$$\begin{cases} q_0^j = 0, \ q_1^j = 1 \\ q_n^j = q_{mk+r}^j = x_{j-r+1} q_{mk+r-1}^j + q_{mk+r-2}^j, \qquad pour \quad n = mk + r \geq 2 \end{cases} \tag{2.3}$$

tel que $x_{j-r+1} = x_i$, si $(j - r + 1) \equiv i \ (mod\ k)$, pour $1 \leq i \leq k$

Lemme 2. *Pour $0 \leq j \leq k-1$ on a :*

$$q_{k+j} = q_{k+j}^j$$

Preuve 7.

$$\begin{aligned} q_{k+j} &= x_{j-1} q_{k+j-1} + q_{k+j-2} \\ &= q_2^j q_{k+j-1} + q_1^j q_{k+j-2} \\ &= q_2^j (x_{j-2} q_{k+j-2} + q_{k+j-3}) + q_1^j q_{k+j-2} \\ &= (x_{j-2} q_2^j + q_1^j) q_{k+j-2} + q_2^j q_{k+j-3} \\ &= q_3^j q_{k+j-2} + q_2^j q_{k+j-3} \end{aligned}$$

donc

$$q_{k+j} = q_{i+1}^j q_{k+j-i} + q_i^j q_{k+j-(i+1)}$$

pour $0 \leq i \leq k + j - 1$

par conséquent,

$$\begin{aligned} q_{k+j} &= q_{k+j}^j q_{k+j-(k+j-1)} + q_{k+j-1}^j q_{k+j-(k+j)} \\ &= q_{k+j}^j q_1 + q_{k+j-1}^j q_0 \\ &= q_{k+j}^j \end{aligned}$$

de même, on obtient l'identité $q_j = q_j^j$ ■

Lemme 3. *pour tout $n \geq 2$ et $0 \leq j \leq k-1$ on a :*

$$q_n^j = x_{j-1}q_{n-1}^{j-1} + q_{n-2}^{j-2} = q_2^j q_{n-1}^{j-1} + q_{n-2}^{j-2} \tag{2.4}$$

Preuve 8. *Par récurrence :*

pour n=2

$$q_2^j = x_{j-1}q_1^j + q_0^j = x_{j-1} = q_2^j = q_1^{j-1}q_2^j + q_0^j$$

supposons la relation (2.4) vraie pour tout $n \leq t$, et montrons que $q_{t+1}^j = q_2^j q_t^{j-1} + q_{t-1}^{j-2}$

on pose $t = mk + r$, pour $0 \leq r \leq k-1$ on obtient :

$$\begin{aligned}
q_{t+1}^j &= q_{mk+r+1}^j \\
&= x_{j-r}q_{mk+r}^j + q_{mk+r-1}^j \\
&= x_{j-r}(q_{mk+r-1}^{j-1}q_2^j + q_{mk+r-2}^{j-2}) + (q_{mk+r-2}^{j-1}q_2^j + q_{mk+r-3}^{j-2}) \\
&= q_2^j q_{mk+r}^{j-1} + q_{mk+r-1}^{j-2} \\
&= q_2^j q_t^{j-1} + q_{t-1}^{j-2}
\end{aligned}$$

■

Lemme 4. *Pour tout entier j ; $0 \leq j \leq k-1$ on a :*

$$q_{k+1}^0 = q_{k+1}^j - q_{k-1} + q_{k-1}^{j-1}$$

Preuve 9. *En utilisant le lemme (3) on obtient :*

$$\begin{aligned}
q_{k+1}^0 + q_{k-1} &= q_{k+1}^0 + q_{k-1}^{k-1} \\
&= q_k^{k-1}x_{k-1} + q_{k-1}^{k-2} + q_{k-1}^{k-1} \\
&= q_{k+1}^{k-1} + q_{k-1}^{k-2} \\
&= q_k^{k-2}x_{k-2} + q_{k-1}^{k-3} + q_{k-1}^{k-2} \\
&= q_{k+1}^{k-2}q_{k-1}^{k-3}
\end{aligned}$$

donc

$$q_{k+1}^0 + q_{k-1} = q_{k+1}^j + q_{k-1}^{j-1}$$

■

Lemme 5. *Pour tout $0 \leq j \leq k-1$, $m \geq 2$ et $2 \leq t \leq km + j$ on a :*

$$q_{km+j} = q_t^j q_{km+j-t+1} + q_{t-1}^j q_{km+j-t}$$

Preuve 10. *En utilisant* (2.3) *et le lemme (3) on obtient :*

$$\begin{aligned} q_{km+j} &= x_{j-1}q_{km+j-1} + q_{km+j-2} \\ &= q_2^j q_{km+j-1} + q_1^j q_{km+j-2} \end{aligned}$$

d'où

$$q_{km+j} = q_t^j q_{km+j-t+1} + q_{t-1}^j q_{km+j-t}$$

■

Lemme 6. *Pour* $0 \leq j \leq k-1$ *et* $k, m \geq 2$ *, si* $0 \leq i \leq k-1$ *on obtient :*

$$q_{km+j} = Aq_{k(m-1)+j} + (q_k^j q_i^{j-1} - q_{k-1}^{j-1} q_{i+1}^j)q_{k(m-1)+j-1} + (q_k^j q_{i-1}^{j-1} - q_{k-1}^{j-1} q_i^j)q_{k(m-1)+j-(i+1)}$$

Preuve 11. *Par les lemmes (4) et (5), quand* $t = k+1$*, on a*

$$\begin{aligned} q_{km+j} &= q_{k+1}^j q_{km+j-k} + q_k^j q_{km+j-k-1} \\ &= (q_{k+1}^0 + q_{k-1} - q_{k-1}^{j-1})q_{k(m-1)+j} + q_k^j q_{k(m-1)+j-1} \end{aligned}$$

on pose $A = q_{k+1}^0 + q_{k-1}$

$$\begin{aligned} q_{km+j} &= Aq_{k(m-1)+j} + (-q_{k-1}^{j-1})q_{k(m-1)+j} + q_k^j q_{k(m-1)+j-1} \\ &= Aq_{k(m-1)+j} + (q_k^j q_i^{j-1} - q_{k-1}^{j-1} q_{i+1}^j)q_{k(m-1)+j-1} + (q_k^j q_{i-1}^{j-1} - q_{k-1}^{j-1} q_i^j)q_{k(m-1)+j-i+1} \end{aligned}$$

■

Lemme 7. *Pour tout entiers* $0 \leq j \leq k-1$*, et tout* $k \geq 2$ *:*

$$q_k^j q_{k-2}^{j-1} - q_{k-1}^{j-1} q_{k-1}^j = (-1)^{k-1}$$

Preuve 12.

$$\begin{aligned} q_k^j q_{k-2}^{j-1} - q_{k-1}^{j-1} q_{k-1}^j &= (x_{j+1}q_{k-1}^j + q_{k-2}^j)q_{k-2}^{j-1} - q_{k-1}^{j-1} q_{k-1}^j \\ &= -q_{k-3}^{j-1} q_{k-1}^j + q_{k-2}^j q_{k-2}^{j-1} \\ &= q_{k-4}^{j-1} q_{k-2}^j + q_{k-3}^j q_{k-3}^{j-1} \end{aligned}$$

donc

$$q_k^j q_{k-2}^{j-1} - q_{k-1}^{j-1} q_{k-1}^j = (-1)^{k-2} q_2^j q_0^{j-1} - (-1)^{k-2} q_1^j q_1^{j-1} = (-1)^{k-1}$$

■

Théorème 2.1.4. *Pour tout entier* $0 \leq j \leq k-1$ *et* $m \geq 2$ *:*

$$q_{mk+j} = Aq_{(m-1)k+j} + (-1)^{k-1} q_{(m-2)k+j}$$

Cela découle directement des lemmes (6) et (7)

2.1.2 Fonction génératrice

Les fonctions génératrices fournissent une technique puissante pour la résolution des relations de récurrences linéaires homogènes à coefficients constants, nous utiliserons Les fonctions génératrices pour les relations de récurrence linéaire avec des coefficients non constants. Dans cette section, nous considérons les fonctions génératrices pour les suites de Fibonacci k-périodiques.

Théorème 2.1.5. *La fonction génératrice de la suite de Fibonacci k-périodique* (q_n) *est :*

$$G(x) = \frac{\sum_{r=0}^{k-1} q_r x^r + \sum_{r=0}^{k-1} (q_{k+r} - Aq_r)\, x^{k+r}}{1 - Ax^k + (-1)^k x^{2k}}$$

Preuve 13.

$$G(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + ... + q_n x^n + ... = \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m$$

on pose $m = jk + r$

$$G(x) = \sum_{r=0}^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{\infty} q_{kj+r} x^{kj+r} \right)$$

on pose

$$G_r(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_{kj+r} x^{kj+r}$$

pour $0 \leq r < k$ *on obtient :*

$$\begin{aligned} G_r(x) &= q_r x^r + q_{k+r} x^{k+r} + q_{2k+r} x^{2k+r} + ... + q_{jk+r} x^{jk+r} + ... \\ &= q_r x^r + q_{k+r} x^{k+r} + \sum_{j=2}^{\infty} q_{kj+r} x^{kj+r} \end{aligned}$$

d'aprés la relation de récurrence donnée par (2.2) *on a :*

$$\begin{aligned} G_r(x) &= q_r x^r + q_{k+r} x^{k+r} + \sum_{j=2}^{\infty} [A q_{(j-1)k+r} - (-1)^k q_{(j-2)k+r}] x^{jk+r} \\ &= q_r x^r + q_{k+r} x^{k+r} + Ax^k \sum_{j=2}^{\infty} q_{(j-1)k+r} x^{(j-1)k+r} - (-1)^k x^{2k} \sum_{j=2}^{\infty} q_{(j-2)k+r} x^{(j-2)k+r} \\ &= q_r x^r + q_{k+r} x^{k+r} + Ax^k \sum_{j=1}^{\infty} q_{jk+r} x^{jk+r} - (-1)^k x^{2k} \sum_{j=0}^{\infty} q_{jk+r} x^{jk+r} \\ &= q_r x^r + q_{k+r} x^{k+r} + Ax^k [G_r(x) - q_r x^r] - (-1)^k x^{2k} G_r(x) \\ &= q_r x^r + (q_{k+r} - Aq_r) x^{k+r} + [Ax^k - (-1)^k x^{2k}] G_r(x) \end{aligned}$$

donc

$$G_r(x) = \frac{q_r x^r + (q_{k+r} - Aq_r)\, x^{k+r}}{1 - Ax^k + (-1)^k x^{2k}}$$

et comme

$$G(x) = G_0(x) + G_1(x) + G_2(x) + ... + G_{k-1}(x)$$

donc

$$G(x) = \frac{q_0 + (q_k - Aq_0)x^k}{1 - Ax^k + (-1)^k x^{2k}} + \frac{q_1 x + (q_{k+1} - Aq_1)x^{k+1}}{1 - Ax^k + (-1)^k x^{2k}} + ... + \frac{q_{k-1}x^{k-1} + (q_{2k-1} - Aq_{k-1})x^{2k-1}}{1 - Ax^k + (-1)^k x^{2k}}$$

d'où

$$G(x) = \frac{\sum_{r=0}^{k-1} q_r x^r + \sum_{r=0}^{k-1} (q_{k+r} - Aq_r)\, x^{k+r}}{1 - Ax^k + (-1)^k x^{2k}}$$

■

2.1.3 Formule de Binet

Dans cette section, nous énoncerons et prouverons une extension de la formule de Binet pour la suite de Fibonacci k-périodique.

On considère l'équation homogène d'ordre $2k$ à coefficient A

$$q_n - Aq_{n-k} + (-1)^k q_{n-2k} = 0 \qquad n \geqslant 2k \tag{2.5}$$

avec les conditions initiales $q_0, q_1, q_2, ..., q_{2k-1}$

Définition 2.1.6. *[6] Dans $\mathbb{K}[x]$, le polynôme caractéristique associé à (2.5)est défini par :*

$$P_k(X) = X^{2k} - AX^k + (-1)^k \tag{2.6}$$

on pose $X^k = z$ dans le polynôme caractéristique associé à (2.6) , Nous obtenons le polynôme

$$P(z) = z^2 - (-1)^k Az + (-1)^k \tag{2.7}$$

Le polynôme (2.7) admet deux racines distincts α et β tel que

$$\alpha = \frac{(-1)^k A + \sqrt{A^2 - (-1)^k 4}}{2} \quad et \quad \beta = \frac{(-1)^k A - \sqrt{A^2 - (-1)^k 4}}{2}$$

Proposition 2.1.7. *Soient α et β les racines de polynôme (2.7) alors :*

1. $\alpha + \beta = (-1)^k A, \quad \alpha - \beta = \sqrt{A^2 - (-1)^k 4}, \quad \alpha\beta = (-1)^k$
2. $\alpha^{m+1}\beta\alpha^m = (-1)^k A\alpha^m$

3. $\beta^{m+1}\alpha\beta^m = (-1)^k A\beta^m$

4. $$\frac{1}{1-Ax^k+(-1)^k x^{2k}} = \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\frac{\alpha}{1-(-1)^k\alpha x^k} - \frac{\beta}{1-(-1)^k\beta x^k}\right]$$

Théorème 2.1.8. *Le terme général de la suite de Fibonacci k-périodique* (q_n) *est donné par :*

$$q_{km+r} = (-1)^{k(m+1)}\left[\left(\frac{\alpha^m-\beta^m}{\alpha-\beta}\right)q_{k+r} - \left(\frac{\alpha^{m-1}-\beta^{m-1}}{\alpha-\beta}\right)q_r\right] \tag{2.8}$$

où α *et* β *sont les racines de polynôme* (2.7) .

Preuve 14. *En utilisant la fonction génératrice de la suite de Fibonacci k-périodique pour démontrer cette théorème [4].*

Nous pouvons utiliser des méthodes matricielles pour obtenir la formule de Binet pour la suite de Fibonacci k-périodique.
Donc la relation (2.5) s'écrit sous forme matricielle suivante :

$$Q_{n+1} = CQ_n$$

où $Q_n \in \mathcal{M}_{2k,1}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{2k,2k}(\mathbb{K})$, tel que :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ (-1)^k & 0 & 0 & \dots & A & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad et \quad Q_n = \begin{pmatrix} q_n \\ q_{n+1} \\ q_{n+2} \\ \vdots \\ q_{n+k} \\ \vdots \\ q_{n+2k-1} \end{pmatrix}$$

C est la matrice compagnon du polynôme (2.6).
D'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$

$$Q_n = C^n Q_0$$

. Supposons que le polynôme (2.6) n'a pas de racines multiples, donc les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{2k}$ de la matrice C sont toutes distinctes.

Dans ce cas C peut être diagonalisé à l'aide de la matrice de Vandermonde

$$V(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{2k}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{2k-1} & \lambda_{2k} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_{2k-1}^2 & \lambda_{2k}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{2k-1} & \lambda_2^{2k-1} & \dots & \lambda_{2k-1}^{2k-1} & \lambda_{2k}^{2k-1} \end{pmatrix}$$

Théorème 2.1.9. *La formule de Binet de la suite de fibonacci k-périodique (q_n) donnée par*

$$q_n = \sum_{i=1}^{2k} \frac{\lambda_i^n}{P'_k(\lambda_i)} \tag{2.9}$$

où P'_k est dérivé de P_k .

Preuve 15. *La démonstration de ce théorème est en détail dans [10] .*

2.1.4 La limite du quotient de deux termes successifs

Théorème 2.1.10. *[12] Pour tout entier positif m on a :*

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \frac{q_{(m+1)k+r}}{q_{mk+r}} = \eta$$

où

$$\eta = \frac{A + sgn(A)\sqrt{A^2 - 4(-1)^k}}{2}$$

tel que $sgn(A) = \frac{|A|}{A}$ est le signe de A, si $|A| > 2$

Preuve 16. *On notera d'abord que lorsque k est pair, $|\frac{\beta}{\alpha}| < 1$ et quand k est impaire $|\frac{\alpha}{\beta}| < 1$. Donc en utilisant la formule (2.8)*

$$\frac{q_{(m+1)k+r}}{q_{mk+r}} = \frac{(-1)^{k(m+2)}\left[\left(\frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta}\right)q_{k+r} - \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}\right)q_r\right]}{(-1)^{k(m+1)}\left[\left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}\right)q_{k+r} - \left(\frac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{\alpha - \beta}\right)q_r\right]}$$

$$= (-1)^k \frac{(\alpha^{m+1} - \beta^{m+1})q_{k+r} - (\alpha^m - \beta^m)q_r}{(\alpha^m - \beta^m)q_{k+r} - (\alpha^{m-1} - \beta^{m-1})q_r}$$

si $|\frac{\beta}{\alpha}| < 1$, on obtient

$$\frac{q_{(m+1)k+r}}{q_{mk+r}} = (-1)^k \alpha \frac{\left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{m+1}\right)q_{k+r} - \frac{1}{\alpha}\left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m\right)q_r}{\left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^m\right)q_{k+r} - \frac{1}{\alpha}\left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{m-1}\right)q_r}$$

donc

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty}\frac{q_{(m+1)k+r}}{q_{mk+r}}=(-1)^k\alpha$$

si $|\frac{\alpha}{\beta}|<1$, *on obtient*

$$\frac{q_{(m+1)k+r}}{q_{mk+r}}=(-1)^k\beta\frac{\Big(\big(\frac{\alpha}{\beta}\big)^{m+1}-1\Big)q_{k+r}-\frac{1}{\beta}\Big(\big(\frac{\alpha}{\beta}\big)^{m}-1\Big)q_r}{\Big(\big(\frac{\alpha}{\beta}\big)^{m}-1\Big)q_{k+r}-\frac{1}{\beta}\Big(\big(\frac{\alpha}{\beta}\big)^{m-1}-1\Big)q_r}$$

donc

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty}\frac{q_{(m+1)k+r}}{q_{mk+r}}=(-1)^k\beta$$

donc

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty}\frac{q_{(m+1)k+r}}{q_{mk+r}}=\frac{A+sgn(A)\sqrt{A^2-4(-1)^k}}{2}$$

■

Théorème 2.1.11. *[12] Pour tout entiers positif* m *et* $r=1,2,...,k-1$ *on a :*

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty}\frac{q_{mk+r}}{q_{mk+r-1}}=\eta_r$$

où

$$\eta_r=\begin{cases}\dfrac{q_{k+r}+(-1)^{k-1}\beta q_r}{q_{k+r-1}+(-1)^{k-1}\beta q_{k-1}},\ si & |\frac{\beta}{\alpha}|<1\\[2ex] \dfrac{q_{k+r}+(-1)^{k-1}\alpha q_r}{q_{k+r-1}+(-1)^{k-1}\alpha q_{k-1}},\ si & |\frac{\alpha}{\beta}|<1\end{cases}$$

Preuve 17. *En utilisant la formule* (2.8)

$$\frac{q_{mk+r}}{q_{mk+r-1}}=\frac{(\alpha^m-\beta^m)q_{k+r}-(\alpha^{m-1}-\beta^{m-1})q_r}{(\alpha^m-\beta^m)q_{k+r-1}-(\alpha^{m-1}-\beta^{m-1})q_{r-1}}$$

si $|\frac{\beta}{\alpha}|<1$, *on obtient*

$$\frac{q_{mk+r}}{q_{mk+r-1}}=\frac{\Big(1-\big(\frac{\beta}{\alpha}\big)^{m}\Big)q_{k+r}-\frac{1}{\alpha}\Big(1-\big(\frac{\beta}{\alpha}\big)^{m-1}\Big)q_r}{\Big(1-\big(\frac{\beta}{\alpha}\big)^{m}\Big)q_{k+r-1}-\frac{1}{\alpha}\Big(1-\big(\frac{\beta}{\alpha}\big)^{m-1}\Big)q_{r-1}}$$

d'aprés la proposition (2.1.12) on a $\alpha\beta=(-1)^k$ *on obtient*

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty}\frac{q_{mk+r}}{q_{mk+r-1}}=\frac{q_{k+r}+(-1)^{k-1}\beta q_r}{q_{k+r-1}+(-1)^{k-1}\beta q_{k-1}}$$

si $|\frac{\alpha}{\beta}|<1$, *on obtient*

$$\frac{q_{mk+r}}{q_{mk+r-1}}=\frac{\Big(\big(\frac{\alpha}{\beta}\big)^{m}-1\Big)q_{k+r}-\frac{1}{\beta}\Big(\big(\frac{\alpha}{\beta}\big)^{m-1}-1\Big)q_r}{\Big(\big(\frac{\alpha}{\beta}\big)^{m}-1\Big)q_{k+r}-\frac{1}{\beta}\Big(\big(\frac{\alpha}{\beta}\big)^{m-1}-1\Big)q_r}$$

d'aprés la proposition (2.1.12) on a $\alpha\beta = (-1)^k$ *on obtient*

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty} \frac{q_{mk+r}}{q_{mk+r-1}} = \frac{q_{k+r} + (-1)^{k-1}\alpha q_r}{q_{k+r-1} + (-1)^{k-1}\alpha q_{k-1}}$$

■

2.2 La suite de Lucas k-périodique

Définition 2.2.1. *la suite de Lucas k-périodique* (p_n) *est définie par la relation suivante :*

$$p_0 = 2, \quad p_1 = x_1, \quad p_n = \begin{cases} x_k p_{n-1} + p_{n-2} & si \quad n \equiv 2(mod\ k) \\ x_1 p_{n-1} + p_{n-2} & si \quad n \equiv 3(mod\ k) \\ \vdots & \\ x_{k-2} p_{n-1} + p_{n-2} & si \quad n \equiv 0(mod\ k) \\ x_{k-1} p_{n-1} + p_{n-2} & si \quad n \equiv 1(mod\ k) \end{cases} \tag{2.10}$$

2.2.1 La Relation de Récurrence

La suite de Lucas k-périodique vérifie la même relation de récurrence que la suite de Fibonacci k-périodique.

Pour une constante A la suite (p_n) vérifie la relation de récurrence suivante :

$$pour \quad m \geq 2k, \quad 0 \leq j \leq k-1, \quad p_{mk+j} = A p_{(m-1)k+j} + (-1)^{k-1} p_{(m-2)k+j} \tag{2.11}$$

2.2.2 Fonction génératrice

Théorème 2.2.2. *La fonction génératrice de la suite de Lucas k-périodique* (p_n) *est :*

$$G(x) = \frac{\sum_{r=0}^{k-1} p_r x^r + \sum_{r=0}^{k-1} (p_{k+r} - A p_r)\, x^{k+r}}{1 - A x^k + (-1)^k x^{2k}}$$

2.2.3 Formule de Binet

On considère l'équation homogène d'ordre $2k$ à coefficient A

$$p_n - A p_{n-k} + (-1)^k p_{n-2k} = 0 \qquad n \geqslant 2k \tag{2.12}$$

avec les conditions initiales $p_0, p_1, p_2, ..., p_{2k-1}$

Définition 2.2.3. *Dans* $\mathbb{K}[x]$*, le polynôme caractéristique associé à* (2.12)*est défini par :*

$$P_k(X) = X^{2k} - AX^k + (-1)^k \tag{2.13}$$

on pose $X^k = z$ *dans le polynôme caractéristique associé à* (2.13) *, Nous obtenons le polynôme*

$$P(z) = z^2 - (-1)^k Az + (-1)^k \tag{2.14}$$

Le polynôme (2.14) admet deux racines distincts α et β tel que

$$\alpha = \frac{(-1)^k A + \sqrt{A^2 - (-1)^k 4}}{2} \quad et \quad \beta = \frac{(-1)^k A - \sqrt{A^2 - (-1)^k 4}}{2}$$

Théorème 2.2.4. *Le terme général de la suite de Lucas k-périodique* (p_n) *est donné par :*

$$p_{km+r} = (-1)^{k(m+1)} \left[\left(\alpha^m + \beta^m\right) p_{k+r} - \left(\alpha^{m-1} + \beta^{m-1}\right) p_r \right] \tag{2.15}$$

où α *et* β *sont les racines de polynôme* (2.14) *.*

2.2.4 La limite du quotient de deux termes successifs

Théorème 2.2.5. *Pour tout entier positif* m *on a :*

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \frac{p_{(m+1)k+r}}{p_{mk+r}} = \eta$$

où

$$\eta = \frac{A + sgn(A)\sqrt{A^2 - 4(-1)^k}}{2}$$

tel que $sgn(A) = \frac{|A|}{A}$ *est le signe de* A*, si* $|A| > 2$

Théorème 2.2.6. *Pour tout entiers positif* m *et* $r = 1, 2, ..., k-1$ *on a :*

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \frac{p_{mk+r}}{p_{mk+r-1}} = \eta_r$$

où

$$\eta_r = \begin{cases} \dfrac{p_{k+r} + (-1)^{k-1}\beta p_r}{p_{k+r-1} + (-1)^{k-1}\beta p_{k-1}}, & si \quad |\frac{\beta}{\alpha}| < 1 \\ \\ \dfrac{p_{k+r} + (-1)^{k-1}\alpha p_r}{p_{k+r-1} + (-1)^{k-1}\alpha p_{k-1}}, & si \quad |\frac{\alpha}{\beta}| < 1 \end{cases}$$

Chapitre 3

Applications

3.1 La suite de Fibonacci 3-périodique

Définition 3.1.1. *La suite de Fibonacci 3-périodique est définie par :*

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_n = \begin{cases} x_1 q_{n-1} + q_{n-2}, & si \quad n \equiv 0 (mod\ 3) \\ x_2 q_{n-1} + q_{n-2}, & si \quad n \equiv 1 (mod\ 3) \\ x_3 q_{n-1} + q_{n-2}, & si \quad n \equiv 2 (mod\ 3) \end{cases} \tag{3.1}$$

3.1.1 Relation de récurrence

La suite (q_n) définie par (3.1) vérifie la relation de récurrence d'ordre 6

$$q_n = A q_{n-3} + q_{n-6}, \qquad n \geqslant 6 \tag{3.2}$$

où $\quad A = x_1 x_2 x_3 + x_1 + x_2 + x_3$

avec les conditions initiales q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 et q_5

Preuve 18. *(voir [9])*

3.1.2 Fonction génératrice

La fonction génératrice de la suite de Fibonacci 3-périodique est :

$$G(X) = \frac{X + x_3 X^2 + (x_1 x_3 + 1) X^3 + x_1 X^4 + X^5}{1 - (x_1 x_2 x_3 + x_1 + x_2 + x_3) X^3 - X^6}$$

Preuve 19. *D'aprés le théorème (2.1.4) la fonction génératrice de la suite de Fibonacci 3-périodique est :*

$$G(X) = \frac{\sum_{r=0}^{2} q_r X^r + \sum_{r=0}^{2} (q_{3+r} - Aq_r)\, x^{3+r}}{1 - AX^3 - X^6}$$

$$= \frac{q_0 + q_1 X + q_2 X^2 + (q_3 - Aq_0)X^3 + (q_4 - Aq_1)X^4 + (q_5 - Aq_2)X^5}{1 - AX^3 - X^6}$$

avec les conditions initiales q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 *et* q_5

$$\begin{cases} q_0 = 0 \\ q_1 = 1 \\ q_2 = x_3 \\ q_3 = x_1 x_3 + 1 \\ q_4 = x_1 x_2 x_3 + x_2 + x_3 \\ q_5 = x_1 x_2 x_3^2 + x_2 x_3 + x_3^2 + x_1 x_3 + 1 \end{cases}$$

donc

$$G(X) = \frac{X + x_3 X^2 + (x_1 x_3 + 1)X^3 + x_1 X^4 + X^5}{1 - (x_1 x_2 x_3 + x_1 + x_2 + x_3)X^3 - X^6}$$

3.1.3 La Formule de Binet

On considère l'équation homogène d'ordre 6 à coefficient A suivante :

$$q_n - Aq_{n-3} - q_{n-6} = 0, \qquad n \geqslant 6 \tag{3.3}$$

1. Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique associé à la suite de Fibonacci 3-périodique est

$$P(X) = X^6 - (x_1 x_2 x_3 + x_1 + x_2 + x_3)X^3 - 1$$

on pose $z = X^3$

$$P(z) = z^2 + (x_1 x_2 x_3 + x_1 + x_2 + x_3)z - 1$$

2. Les racines du polynôme caractéristique

Comme $\Delta = A^2 + 4 > 0$, alors le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes

$$\alpha = \frac{-A + \sqrt{A^2 + 4}}{2} \quad et \quad \beta = \frac{-A - \sqrt{A^2 + 4}}{2}$$

où $A = x_1x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3$

Les relations entre les deux racines α et β :

$$\alpha + \beta = -A, \quad \alpha - \beta = \sqrt{A^2 + 4} \quad et \quad \alpha\beta = -1$$

3.La formule de Binet

D'aprés le théorème (2.1.7), la formule de Binet de la suite de Fibonacci 3-périodique est donné par

$$q_{3m+r} = (-1)^{3(m+1)}\left[\left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}\right)q_{3+r} - \left(\frac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{\alpha - \beta}\right)q_r\right]$$

3.1.4 La limite du quotient de deux termes successifs

Comme k=3 est impaire, alors $|\frac{\alpha}{\beta}| < 1$. et d'aprés la théorème (2.1.9) on obtient

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \frac{q_{3(m+1)+r}}{q_{3m+r}} = -\beta$$

3.2 La suite de Lucas 3-périodique

Définition 3.2.1. *La suite de Lucas 3-périodique est définie par :*

$$p_0 = 2, \quad p_1 = x_1, \quad p_n = \begin{cases} x_3p_{n-1} + p_{n-2}, & si \quad n \equiv 0(mod\ 3) \\ x_1p_{n-1} + p_{n-2}, & si \quad n \equiv 1(mod\ 3) \\ x_2p_{n-1} + p_{n-2}, & si \quad n \equiv 2(mod\ 3) \end{cases} \tag{3.4}$$

3.2.1 Relation de récurrence

La suite (p_n) définie par (3.4) vérifie la relation de récurrence d'ordre 6

$$p_n = Ap_{n-3} + p_{n-6}, \qquad n \geqslant 6 \tag{3.5}$$

où $\quad A = x_1x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3$

avec les conditions initiales p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5

3.2.2 Fonction génératrice

La fonction génératrice de la suite de Lucas 3-périodique est :

$$G(x) = \frac{2 + x_1X + (x_1x_2 + 2)X^2 - (x_1x_2x_3 + x_1 - 2x_2)X^3 + (x_1x_3 + 2)X^4 - x_1X^5}{1 - (x_1x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3)X^3 - X^6}$$

Preuve 20. *D'aprés le théorème (2.2.2) la fonction génératrice de la suite de Lucas 3-périodique est :*

$$G(X) = \frac{\sum_{r=0}^{2} p_r X^r + \sum_{r=0}^{2} (p_{3+r} - Ap_r)\, x^{3+r}}{1 - AX^3 - X^6}$$

$$= \frac{p_0 + p_1X + p_2X^2 + (p_3 - Ap_0)X^3 + (p_4 - Ap_1)X^4 + (p_5 - Ap_2)X^5}{1 - AX^3 - X^6}$$

avec les conditions initiales p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 *et* p_5

$$\begin{cases} p_0 = 2 \\ p_1 = x_1 \\ p_2 = x_1x_2 + 2 \\ p_3 = x_1x_2x_3 + 2x_3 + x_1 \\ p_4 = x_1^2x_2x_3 + 2x_1x_3 + x_1x_2 + x_1^2 + 2 \\ p_5 = x_1^2x_2^2x_3 + 3x_1x_2x_3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + 2x_2 + 2x_3 + x_1 \end{cases}$$

donc

$$G(x) = \frac{2 + x_1X + (x_1x_2 + 2)X^2 - (x_1x_2x_3 + x_1 - 2x_2)X^3 + (x_1x_3 + 2)X^4 - x_1X^5}{1 - (x_1x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3)X^3 - X^6}$$

3.2.3 La formule de Binet

On considère l'équation homogène d'ordre 6 à coefficient A suivante :

$$p_n - Ap_{n-3} - p_{n-6} = 0, \qquad n \geqslant 6 \tag{3.6}$$

1. Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique associé à la suite de Lucas 3-périodique est

$$P(X) = X^6 - (x_1x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3)X^3 - 1$$

on pose $z = X^3$

$$P(z) = z^2 + (x_1x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3)z - 1$$

2. Les racines du polynôme caractéristique

Comme $\Delta = A^2 + 4 > 0$, alors le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes

$$\alpha = \frac{-A + \sqrt{A^2+4}}{2} \quad et \quad \beta = \frac{-A - \sqrt{A^2+4}}{2}$$

où $A = x_1x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3$

Les relations entre les deux racines α et β :

$$\alpha + \beta = -A, \quad \alpha - \beta = \sqrt{A^2+4} \quad et \quad \alpha\beta = -1$$

3.La formule de Binet

La formule de Binet de la suite e Lucas 3-périodique est

$$p_{3m+r} = (-1)^{3(m+1)}\Big[\big(\alpha^m + \beta^m\big)p_{3+r} - \big(\alpha^{m-1} + \beta^{m-1}\big)p_r\Big]$$

La limite du quotient de deux termes successifs

Comme k=3 est impaire, alors $|\frac{\alpha}{\beta}| < 1$. et d'aprés la théorème (2.2.5) on obtient

$$\lim_{m\longrightarrow+\infty} \frac{p_{3(m+1)+r}}{p_{3m+r}} = -\beta$$

3.3 La suite de Fibonacci 4-périodique

Définition 3.3.1. *La suite de Fibonacci 4-périodique est définie par :*

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_n = \begin{cases} x_1q_{n-1} + q_{n-2}, & si \quad n \equiv 0(mod\ 4) \\ x_2q_{n-1} + q_{n-2}, & si \quad n \equiv 1(mod\ 4) \\ x_3q_{n-1} + q_{n-2}, & si \quad n \equiv 2(mod\ 4) \\ x_4q_{n-1} + q_{n-2}, & si \quad n \equiv 3(mod\ 4) \end{cases} \tag{3.7}$$

3.3.1 Relation de récurrence

La suite (q_n) définie par (3.7) vérifie la relation de récurrence d'ordre 8

$$q_n = Aq_{n-4} + q_{n-8}, \qquad n \geqslant 8 \tag{3.8}$$

où $\quad A = x_1x_2x_3x_4 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_2$

avec les conditions initiales $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ et q_7

3.3.2 Fonction génératrice

La fonction génératrice de la suite de Fibonacci 4-périodique est :

$$G(X) = \frac{X + x_3X^2 + (x_3x_4 + 1)X^3 + (x_1x_3x_4 + x_1 + x_3)X^4}{1 - (x_1x_2x_3x_4 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_2)X^4 + X^8} + \frac{X^5 + (x_1 + 2x_3)X^6 + (1 + 2x_3x_4)X^7}{1 - (x_1x_2x_3x_4 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_2)X^4 + X^8}$$

Preuve 21. *D'aprés la théorème (2.1.4) la fonction génératrice de la suite de Fibonacci 4-périodique est :*

$$G(X) = \frac{\sum_{r=0}^{3} q_rX^r + \sum_{r=0}^{3} (q_{4+r} - Aq_r)\, x^{4+r}}{1 - AX^4 + X^8}$$

$$= \frac{q_0 + q_1X + q_2X^2 + q_3X^3 + (q_4 - Aq_0)X^4 + (q_5 - Aq_1)X^5}{1 - AX^4 + X^8}$$

$$+ \frac{(q_6 - Aq_2)X^6 + (q_7 - Aq_3)X^7}{1 - AX^4 + X^8}$$

avec les conditions initiales $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ *et* q_7

$$\begin{cases} q_0 = 0 \\ q_1 = 1 \\ q_2 = x_3 \\ q_3 = x_3x_4 + 1 \\ q_4 = x_1x_3x_4 + x_1 + x_3 \\ q_5 = x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + 1 \\ q_6 = x_1x_2x_3^2x_4 + x_1x_2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^2x_4 + x_3 + x_1x_3x_4 + x_1 + x_3 \\ q_7 = x_1x_2x_3^2x_4^2 + 2x_1x_2x_3x_4 + x_2x_3^2x_4 + x_3^2x_4^2 + 3x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4^2 + x_1x_4 + x_1x_2 + x_2x_3 + 1 \end{cases}$$

donc

$$G(X) = \frac{X + x_3X^2 + (x_3x - 4 + 1)X^3 + (x_1x_3x_4 + x_1 + x_3)X^4}{1 - (x_1x_2x_3x_4 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_2)X^4 + X^8} + \frac{X^5 + (x_1 + 2x_3)X^6 + (1 + 2x_3x_4)X^7}{1 - (x_1x_2x_3x_4 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_2)X^4 + X^8}$$

3.3.3 La Formule de Binet

On considère l'équation homogène d'ordre 8 à coefficient A suivante :

$$q_n - Aq_{n-4} + q_{n-8} = 0, \qquad n \geqslant 8 \tag{3.9}$$

1. Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique associé à la suite de Fibonacci 4-périodique est

$$P(X) = X^8 - (x_1x_2x_3x_4 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_2)X^4 + 1$$

on pose $z = X^4$

$$P(z) = z^2 + (x_1x_2x_3x_4 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_2)z + 1 \tag{3.10}$$

2. Les racines du polynôme caractéristique

On prend $\Delta = A^2 - 4 > 0$, alors le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes

$$\alpha = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4}}{2} \quad et \quad \beta = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4}}{2}$$

où $A = x_1x_2x_3x_4 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_2$

La relation entre les deux racines

$$\alpha + \beta = A, \quad \alpha - \beta = \sqrt{A^2 + 4} \quad et \quad \alpha\beta = 1$$

3. La formule de Binet

D'aprés le théorème (2.1.7), la formule de Binet de la suite de Fibonacci 4-périodique est

$$q_{4m+r} = (-1)^{4(m+1)}\left[\left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}\right)q_{4+r} - \left(\frac{\alpha^{m-1} - \beta^{m-1}}{\alpha - \beta}\right)q_r\right]$$

3.3.4 La limite du quotient de deux termes successifs

Comme k=4 est paire, alors $|\frac{\beta}{\alpha}| < 1$. et d'aprés la théorème (2.1.9) on obtient

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \frac{q_{4(m+1)+r}}{q_{4m+r}} = \alpha$$

3.4 La suite de Lucas 4-périodique

Définition 3.4.1. *La suite de Lucas 4-périodique est définie par :*

$$p_0 = 2, \quad p_1 = x_1, \quad p_n = \begin{cases} x_4 p_{n-1} + p_{n-2}, & si \quad n \equiv 0 (mod\ 4) \\ x_1 p_{n-1} + p_{n-2}, & si \quad n \equiv 1 (mod\ 4) \\ x_2 p_{n-1} + p_{n-2}, & si \quad n \equiv 2 (mod\ 4) \\ x_3 p_{n-1} + p_{n-2}, & si \quad n \equiv 3 (mod\ 4) \end{cases} \tag{3.11}$$

3.4.1 Relation de récurrence

La suite (p_n) définie par (3.11) vérifie la relation de récurrence d'ordre 8

$$p_n = A p_{n-4} - p_{n-8}, \qquad n \geqslant 8 \tag{3.12}$$

où $\quad A = x_1x_2x_3x_4 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_2$

avec les conditions initiales $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ et p_7

3.4.2 Fonction génératrice

La fonction génératrice de la suite de Lucas 4-périodique est :

$$G(X) = \frac{2 + x_1X + (x_1x_2 + 2)X^2 + (x_1x_2x_3)X^3 - (x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2 - 2)X^4}{1 - (x_1x_2x_3x_4 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_2)X^4 + X^8}$$
$$+ \frac{(x_1x_2x_4 + 2x_3 + x_1 + 2)X^5 + (x_1x_4 + 2x_2 + 2)X^6 + (2x_1x_3 + 4x_3 + x_1 + 2)X^7}{1 - (x_1x_2x_3x_4 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_2)X^4 + X^8}$$

Preuve 22. *D'aprés le théorème (2.2.2) la fonction génératrice de la suite de Lucas 4-périodique est :*

$$G(X) = \frac{\sum_{r=0}^{3} p_r X^r + \sum_{r=0}^{3} (p_{4+r} - Ap_r)\, x^{4+r}}{1 - AX^4 + X^8}$$

$$= \frac{p_0 + p_1X + p_2X^2 + p_3X^3 + (p_4 - Ap_0)X^4 + (p_5 - Ap_1)X^5}{1 - AX^4 + X^8}$$

$$+ \frac{(p_6 - Ap_2)X^6 + (p_7 - Ap_3)X^7}{1 - AX^4 + X^8}$$

avec les conditions initiales $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$ *et* p_7

$$\begin{cases} p_0 &= 2 \\ p_1 &= x_1 \\ p_2 &= x_1x_2 + 2 \\ p_3 &= x_1x_2x_3 + 2x_3 + x_1 \\ p_4 &= x_1x_2x_3x_4 + 2x_3x_4 + x_1x_4 + x_1x_2 + 2 \\ p_5 &= x_1^2x_2x_3x_4 + 2x_1x_3x_4 + x_1^2x_4 + x_1^2x_2 + x_1x_2x_3 + 2x_3 + x_1 + 2 \\ p_6 &= x_1^2x_2^2x_3x_4 + 3x_1x_2x_3x_4 + x_1^2x_2x_4 + x_1^2x_2^2 + x_1x_2^2x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1x_2 + 2x_3x_4 \\ &\quad +x_1x_4 + 2x_2 + 2 \\ p_7 &= x_1^2x_2^2x_3^2x_4 + 3x_1x_2x_3^2x_4 + 2x_1^2x_2x_3x_4 + x_1^2x_2^2x_3 + 2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3^2 + 2x_3^2x_2 + 3x_1x_2x_3 \\ &\quad +2x_3^2x_4 + 3x_1x_3x_4 + x_1^2x_4 + x_1^2x_2 + 4x_3 + x_1 + 2 \end{cases}$$

donc

$$G(X) = \frac{2 + x_1X + (x_1x_2 + 2)X^2 + (x_1x_2x_3)X^3 - (x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2 - 2)X^4}{1 - (x_1x_2x_3x_4 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_2)X^4 + X^8}$$

$$+\frac{(x_1x_2x_4 + 2x_3 + x_1 + 2)X^5 + (x_1x_4 + 2x_2 + 2)X^6 + (2x_1x_3 + 4x_3 + x_1 + 2)X^7}{1 - (x_1x_2x_3x_4 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_2)X^4 + X^8}$$

3.4.3 La formule de Binet

On considère l'équation homogène d'ordre 8 à coefficient A suivante :

$$p_n - Ap_{n-4} + p_{n-8} = 0, \qquad n \geqslant 8 \tag{3.13}$$

1. Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique associé à la suite de Fibonacci 3-périodique est

2. Les racines du polynôme caractéristique

On prend $\Delta = A^2 - 4 > 0$, alors le polynôme caractéristique admet deux racines distinctes

$$\alpha = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4}}{2} \quad et \quad \beta = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4}}{2}$$

où $A = x_1x_2x_3x_4 + x_3x_4 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_1x_2$

Les relations entre les deux racines α et β :

$$\alpha + \beta = A, \quad \alpha - \beta = \sqrt{A^2 + 4} \quad et \quad \alpha\beta = 1$$

3.La formule de Binet

La formule de Binet de la suite e Lucas 4-périodique est

$$p_{4m+r} = (-1)^{4(m+1)}\Big[\big(\alpha^m + \beta^m\big)p_{4+r} - \big(\alpha^{m-1} + \beta^{m-1}\big)p_r\Big]$$

3.4.4 La limite du quotient de deux termes successifs

Comme k=4 est paire, alors $|\frac{\beta}{\alpha}| < 1$. et d'aprés la théorème (2.2.5) on obtient

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \frac{p_{4(m+1)+r}}{p_{4m+r}} = \alpha$$

Conclusion

L'étude des suites récurrentes linéaires à coefficients constants se ramène à un problème d'algèbre linéaire. L'expression du terme générale d'une suite récurrente linéaire en fonction de n et les racines de son polynôme caractéristique est dite formule de Binet. En peut aussi trouver le terme générale en utilisant les fonction génératrice .

La suite de Fibonacci est une suite récurrente linéaire d'ordre deux la plus célèbre très riche en propriétés. A cette suite est associé sa compagnon la suite de Lucas.

La suite de Fibonacci k-périodique est une généralisation de la suite de Fibonacci classique, d'autre part la suite de Lucas k-périodique est une généralisation de la suite de Lucas classique. Ces deux suites vérifient une relation de récurrence linéaire qui permet de trouver leurs forment explicites en utilisant les fonctions génératrices ou bien les formules de Binet. La limite du quotient de deux termes successifs des suites de Fibonacci et Lucas k-périodique est le plus grand racine de leur polynôme caractéristique.

Bibliographie

[1] Pierre-Emmanuel Chaput, *Algèbre linéaire 2*, Université de Lorraine, 2018.

[2] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas number with application*, Pure and Applied Mathematics, New York, 2001.

[3] A. Badawi, *Generalized Fibonacci Sequences and Its Properties*, Palestine Journal of Mathematics,3(1) (2014).

[4] M. Edson, S. Lewis, O. Yayenie, *The k-Periodic Fibonacci Sequence and an extended Binet's formula*, 2010.

[5] M. Edson, O. Yaynie, *A New Generalization of Fibonacci Sequence and Extended Binet's Formula*, Integers, 9 (2009)

[6] N. Irmak, L. Szalay , *On k-periodic binary recurrences*, Annales Mathematicae et Informaticae, 40 (2012) pp. 25–35

[7] A. Benmezai, *Le q-analogue des suites de Fibonacci et de Lucas*, Thèse de Doctorat. Université d'Oran, 2016.

[8] W. Zerroug, S. Attabi, *Nombre de Fibonacci*, Thèse de Master. université de M'sila.

[9] C. Cooper, *An Identity for Period k Second Order Linear Recurrence Systems*.

[10] M. Sahin, *The Binet-like formula of a family of the conditional sequences by matrix methods*, 2000 .

[11] A. Ait-mokhtar, *Endomorphismes d'algèbres de suite*, Thèse de doctora. Université de Limogine, 2008.

[12] E. Tan, A. Bulent , *On convergence properties of Fibonacci-like conditional sequences*, 2014 .