République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITÉ YAHIA FARÈS DE MÉDÉA

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et d'Informatique



MÉMOIRE DE MASTER

En Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Étude des alliances globales et les alliances globales fortes dans certaines classes de graphes

Présenté
par

Cheriet Fatma Zohra

Devant le jury composé de :

TABLENNEHAS Kamel	M.C.B	U.Y.F-Médéa	Président
ZAMIME Mohamed	M.C.A	U.Y.F-Médéa	Examinateur
OMAR Abd Elhak	M.A.B	U.Y.F-Médéa	Examinateur
BOUZEFRANE Mohamed	M.C.B	U.Y.F-Médéa	Promoteur

Médéa, Juin 2026

Remerciements

Ce mémoire marque la fin d'un parcours d'études difficile, mais il est surtout le fruit de plusieurs mois de travail, d'efforts et de patience.

En premier lieu, je remercie Allah Tout-Puissant de m'avoir guidée, et de m'avoir donné la force, la patience et la persévérance tout au long de ce parcours.

En second lieu, je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur,**Monsieur Bouzefrane**, pour ses orientations précieuses, sa rigueur scientifique et sa bienveillance tout au long de ce travail. Ses conseils éclairés, son soutien constant et ses remarques constructives ont été d'une valeur inestimable pour la réussite de ce projet.

Merci à tous les membres du jury qui me font l'honneur d'évaluer mon travail.

Merci également à tous les enseignants du département de Mathématiques et Informatique pour leurs efforts durant ces cinq années.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail et ma profonde gratitude à tous ceux qui se sont sacrifiés pour m'offrir les conditions propices à ma réussite :

À ma chère mère.

Ma reine, ma guerrière silencieuse. Celle qui priait en cachette pendant que je pleurais mes échecs. Celle qui m'a portée dans ses bras quand je n'avais plus la force de me porter moi-même. Si aujourd'hui je suis debout, c'est parce que tu as tenu le monde pour deux.

À mon cher père.

L'homme de peu de mots mais de grands gestes. Tes sacrifices n'ont jamais eu besoin de discours, ils parlaient d'eux-mêmes. Tu m'as appris la dignité dans l'effort, et la fierté dans le silence. Merci d'avoir cru en moi sans le dire, mais en le prouvant.

À mes frères Islam et Taher.

Mon véritable soutien dans cette vie, et ceux dont je suis fier d'avoir à mes côtés à chaque étape.

À ma chère famille.

Mon refuge chaleureux, ma source de force et mon inspiration de toujours.
Et particulièrement à ma belle cousine Nafissa, que j'aime énormément pour la bonté de son cœur.

À tous mes chers amis que j'ai rencontrés à l'université.

Résumé

Le but de ce mémoire est l'étude des alliances globales et les alliances globales fortes dans les graphes. Soit $G = (V, E)$ un graphe simple, d'ensemble de sommets V et d'ensemble d'arêtes E. Un sous-ensemble S de V est un dominant de G si tout sommet de $V - S$ est adjacent à au moins un sommet de S. Le nombre de domination $\gamma(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant de G.

Un ensemble dominant S est une *alliance défensive globale* si pour tout sommet $v \in S$, $|N[u] \cap S| \geq |N[u] \cap (V \setminus S)|$. Le nombre d'alliance défensive globale $\gamma_a(G)$ est le cardinal minimum d'une telle alliance. Si de plus pour tout sommet $v \in S$, $|N[v] \cap S > |N[u] \cap (V \setminus S)|$, alors S est une *forte alliance défensive globale*, de nombre $\gamma_{\hat{a}}(G)$.

Un ensemble dominant S est une *alliance offensive globale* si pour tout sommet $v \in V \setminus S$,$|N[u] \cap S| \geq |N[u] \cap (V \setminus S)|$. Le nombre d'alliance offensive globale $\gamma_o(G)$ est le cardinal minimum d'une telle alliance. Si de plus pour tout sommet $v \in V \setminus S$, $|N[v] \cap S| > |N[u] \cap (V \setminus S)|$, alors S est une *forte alliance offensive globale*, de nombre $\gamma_{\hat{o}}(G)$.

Un ensemble dominant S est une alliance puissante globale si pour chaque sommet $v \in N[S]$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$ .Le nombre d'alliance puissante globale $\gamma_{ap}(G)$ est le cardinal minimum d une alliance puissante globale de G.

Dans ce mémoire, Nous étudions les graphes grilles et établissons des résultats permettant de déterminer les nombres d'alliances correspondants. Nous obtenons des formules et des caractérisations générales pour cette famille de graphes, ainsi que plusieurs résultats particuliers qui conduisent à une meilleure compréhension de ces paramètres.

Enfin, nous nous intéressons aux arbres, où nous mettons en évidence une relation entre les paramètres $\gamma_{\hat{a}}$ et $\gamma_{\hat{o}}$

Abstract

The aim of this thesis is to study *global alliances* and *global strong alliances* in graphs.

Let $G = (V, E)$ be a simple graph, where V is the vertex set and E is the edge set. A subset $S \subseteq V$ is called a *dominating set* of G if every vertex in $V \setminus S$ is adjacent to at least one vertex of S. The *domination number*, denoted by $\gamma(G)$, is the minimum cardinality of a dominating set.

A dominating set S is called a *global defensive alliance* if, for every vertex $v \in S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \setminus S|$. The *global defensive alliance number*, denoted by $\gamma_a(G)$, is the minimum cardinality of such an alliance. Moreover, if for every vertex $v \in S$, $|N[v] \cap S| > |N[v] \setminus S|$, then S is called a *global strong defensive alliance*, whose minimum cardinality is denoted by $\gamma_{\hat{a}}(G)$.

A dominating set S is called a *global offensive alliance* if, for every vertex $v \in V \setminus S$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \setminus S|$. The *global offensive alliance number*, denoted by $\gamma_o(G)$, is the minimum cardinality of such an alliance. Furthermore, if for every vertex $v \in V \setminus S$, $|N[v] \cap S| > |N[v] \setminus S|$, then S is called a *global strong offensive alliance*, whose minimum cardinality is denoted by $\gamma_{\hat{o}}(G)$.

A dominating set S is called a *global powerful alliance* if, for every vertex $v \in N[S]$, $|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|$ The *global powerful alliance number*, denoted by $\gamma_{ap}(G)$, is the minimum cardinality of a global powerful alliance of G.

In this thesis, We investigate grid graphs and establish several results that enable the determination of the corresponding alliance numbers. We derive general formulas and characterizations for this family of graphs, together with several particular results that provide a deeper understanding of these parameters.

Finally, we study trees and establish a relationship between the parameters $\gamma_{\hat{a}}$ and $\gamma_{\hat{o}}$

الملخص

يهدف هذا البحث إلى دراسة التحالفات العالمية والتحالفات العالمية القوية في الرسوم البيانية.

لتكن $G = (V, E)$ رسماً بيانياً بسيطاً، حيث تمثل V مجموعة الرؤوس و E مجموعة الحواف. تُسمى المجموعة الجزئية $S \subseteq V$ مجموعة مهيمنة إذا كان كل رأس في $V \setminus S$ مجاوراً لرأس واحد على الأقل من عناصر S. ويُسمى أصغر عدد لعناصر مجموعة مهيمنة في G بعدد الهيمنة، ويرمز له بـ $\gamma(G)$.
تُسمى المجموعة المهيمنة S **تحالفاً دفاعياً عالمياً** إذا تحقق لكل رأس $v \in S$ أن $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \setminus S|$. ويُسمى أصغر عدد لعناصر مثل هذا التحالف **بعدد التحالف الدفاعي العالمي**، ويرمز له بـ $\gamma a(G)$. وإذا تحقق بالإضافة إلى ذلك لكل رأس $v \in S$ أن $|N[v] \cap S| > |N[v] \setminus S|$، فإن S يُسمى **تحالفاً دفاعياً عالمياً قوياً**، ويرمز لأصغر عدد لعناصره بـ$\hat{\gamma}a(G)$.

وتُسمى المجموعة المهيمنة S **تحالفاً هجومياً عالمياً** إذا تحقق لكل رأس $v \in V \setminus S$ أن $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \setminus S|$. ويُسمى أصغر عدد لعناصر مثل هذا التحالف **بعدد التحالف الهجومي العالمي**، ويرمز له بـ $\gamma o(G)$. وإذا تحقق بالإضافة إلى ذلك لكل رأس $v \in V \setminus S$ أن $|N[v] \cap S| > |N[v] \setminus S|$، فإن S يُسمى **تحالفاً هجومياً عالمياً قوياً**، ويرمز لأصغر عدد لعناصره بـ $\hat{\gamma}o(G)$.

كما تُسمى المجموعة المهيمنة S **تحالفاً عالمياً قوياً** إذا تحقق لكل رأس $v \in V$ أن $|N[v] \cap S| \geq |N[v] \setminus S|$. ويُسمى أصغر عدد لعناصر هذا التحالف **بعدد التحالف العالمي القوي**، ويرمز له بـ $\gamma ap(G)$.

في هذه المذكرة، قمنا بتحديد المعلمات γa، و $\hat{\gamma}a$، و γo، و $\hat{\gamma}o$. كما درسنا الرسوم البيانية الشبكية، و أثبتنا عدة نتائج مكّنت من تحديد أعداد التحالفات الموافقة لها، و استنتجنا صيغاً عامة وتوصيفات لهذه الفئة من الرسوم البيانية، إضافة إلى نتائج خاصة ساهمت في فهم أعمق لهذه المعلمات.

وأخيراً، اهتممنا بدراسة الأشجار، حيث أبرزنا وجود علاقة بين المعلمتين $\hat{\gamma}a$ و $\hat{\gamma}o$.

Table des matières

1 Notions générales sur les graphes **12**
1.1 Introduction 12
1.2 Définitions et notations 12
1.2.1 Graphe 12
1.2.2 Voisinage et degré d'un sommet 13
1.2.3 Sous-graphe et graphe partiel 13
1.2.4 Chaîne, cycle et connexité 14
1.2.5 Quelques invariants d'un graphe 15
1.3 Quelques graphes particuliers 16
1.3.1 Graphe complet 16
1.3.2 Graphe complémentaire 16
1.3.3 Graphe régulier 16
1.3.4 Graphe biparti 17
1.3.5 Graphe biparti complet 17
1.3.6 Arbre, forêt et un chenille 18
1.3.7 Les étoiles 19
1.3.8 Couronne d un graphe 20
1.3.9 Une grille 20
1.3.10 Subdivision d'un graphe 20
1.3.11 Graphes planaires 21
1.3.12 Un cactus 22
1.4 Aperçu sur la domination dans les graphes 22
1.4.1 Quelque types de domination 22

2 Les alliances dans les graphes **24**
2.1 Introduction 24
2.2 Types d'alliances 24
2.2.1 Alliances défensives 25
2.2.2 Alliances offensives 26
2.2.3 Alliances puissantes 26
2.3 Quelques résultats existants sur les paramètres d'alliances . . 27

2.3.1 Résultats relatifs aux paramètres $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$ 27
2.3.2 Résultats exactes aux paramètres $a_p(G)$ et $\gamma_{ap}(G)$. . . 29
2.4 Bornes sur les paramètres d'alliances 29
2.4.1 Bornes sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$ 29
2.4.2 Bornes sur $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$ 32
2.4.3 Bornes sur $\gamma_{ap}(G)$ et $a_p(G)$ 34
2.4.4 Relations entre $\gamma_a(G)$, $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$ 35
2.4.5 Relations entre $\gamma_{ap}(G)$ et $\gamma(G)$ 36
2.5 Généralisation des alliances 37
2.5.1 k-alliances 37

3 Étude des alliances globales fortes dans certaines classes de graphes 40
3.1 Introduction 40
3.2 Calcul des nombres d'alliances dans les grilles 40
3.2.1 Produit cartésien 40
3.2.2 Calcul du nombre d'alliances offensives globales dans les grilles $P_n \Box P_m$. 41
3.2.3 Calcul du nombre d'alliances défensives dans les grilles 45
3.3 Relations entre les paramétrés d'alliances 52
3.3.1 Relations entre $\gamma_{\hat{a}}(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$ dans les chaines 52
3.3.2 Relations entre $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$ dans les grilles 53
3.3.3 Relations entre $\gamma_{\hat{a}}(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$ dans les arbres 54

Table des figures

1.1 Un graphe simple 12
1.2 Un graphe simple G, un graphe partiel et un sous-graphe . . . 13
1.3 Un cycle et une chaîne 14
1.4 Un graphe complet K_6 16
1.5 Le cycle C_4 et son graphe complémentaire $\overline{C_4}$ 16
1.6 Un graphe 3-régulier 17
1.7 Un graphe biparti 17
1.8 Un graphe biparti complet $K_{4,3}$ 18
1.9 Arbre T 18
1.10 Une forêt 18
1.11 Une chenille C 19
1.12 Une étoile 19
1.13 Une double étoile $S_{3,4}$ 19
1.14 Une couronne 20
1.15 Une grille 20
1.16 Une subdivision d'une étoile 21
1.17 Le graphe K_4 et une ses représentation planaire 21
1.18 Un cactus 22

2.1 $a(T1) = 1$ et $\hat{a}(T2) = 2$ 25
2.2 Un arbre T avec $\gamma_a(T) = 3$ $\gamma_{\hat{a}}(T) = 5$ 25
2.3 $\gamma_o(G) = 2$ $\gamma_{\hat{o}}(G) = 4$ 26
2.4 $\gamma_{ap}(T) = 3$ 27
2.5 $\gamma_a = 5$,$\gamma_o = 4$ et $\gamma_{ap} = 6$ 27

3.1 $P_3 \square P_4$ 41
3.2 $\gamma_o(P_2 \square P_4) = 4$ 41
3.3 $\gamma_o(P_2 \square P_5) = 5$ 41
3.4 $\gamma_o(P_2 \square P_7) = 7$ 42
3.5 $\gamma_o(P_3 \square P_3) = 4$ 42
3.6 $\gamma_o(P_3 \square P_4) = 6$ 42

3.7 $\gamma_o(P_3 \square P_6) = 9$ 43
3.8 grille $\gamma_o(P_n \square P_m)$ 44
3.9 $\gamma_a(P_2 \square P_4) = 4$ 45
3.10 $\gamma_a(P_2 \square P_5) = 4$; 45
3.11 $\gamma_a(P_2 \square P_7) = 6$ 45
3.12 46
3.13 $\gamma_a(P_3 \square P_3) = 3$ 46
3.14 $\gamma_a(P_3 \square P_4) = 5$ 47
3.15 $\gamma_a(P_3 \square P_6) = 6$ 47
3.16 $\gamma_a(P_4 \square P_4) = 6$ 48
3.17 $\gamma_a(P_4 \square P_5) = 8$ 48
3.18 Grille $\gamma_a(P_n \square P_m)$ 51
3.19 $\gamma_{\hat{o}}(P_5) = \gamma_{\hat{a}}(P_5) = 3$ 52
3.20 $\gamma_{\hat{o}}(P_8) = \gamma_{\hat{a}}(P_8) + 1$ 53
3.21 $\gamma_{\hat{o}}(S_4, 4) = 6$ 54
3.22 $\gamma_{\hat{o}}(S_4, 4) = 9$ 55
3.23 $\gamma_{\hat{a}}(T) = \frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T) - 1$ 57

Introduction

La recherche opérationnelle est un ensemble de techniques récentes, datant tout au plus de la deuxième guerre mondiale, ces techniques sont basées sur des concepts et outils mathématiques. Il est utilisé dans plusieurs domaines comme l'informatique, les réseaux, les transports et l'organisation des systèmes.
La recherche opérationnelle est un ensemble de techniques basées sur des concepts et des outils mathématiques. Elle regroupe plusieurs domaines importants tels que la théorie des graphes, la programmation linéaire, l'optimisation combinatoire, les processus aléatoires, l'optimisation dans les réseaux, la théorie des jeux qui sont tous utilisés pour modéliser, analyser et résoudre des problèmes complexes de manière efficace.
Parmi ces domaines, La théorie des graphes constitue aujourd'hui un outil fondamental dans plusieurs domaines scientifiques. Elle permet de représenter et d'étudier les relations entre différents objets à l'aide de sommets et d'arêtes. Son origine remonte au célèbre problème des ponts de Königsberg étudié par Leonhard Euler, considéré comme le point de départ de cette théorie. Depuis, la théorie des graphes a connu un développement considérable grâce à ses nombreuses applications.

Un graphe est une structure mathématique composée d'un ensemble de sommets reliés par des arêtes. Les graphes permettent de modéliser plusieurs situations réelles telles que les réseaux de communication, les circuits électriques, les relations sociales ou encore les réseaux de transport. L'étude des propriétés des graphes a donné naissance à plusieurs notions importantes parmi lesquelles la domination et les alliances dans les graphes.
Les alliances dans les graphes permettent d'étudier des ensembles de sommets qui coopèrent entre eux afin d'assurer une certaine stabilité ou défense dans le graphe. Parmi ces notions, on trouve les alliances globales et les alliances globales fortes, qui sont des concepts importants dans l'étude de la structure des graphes. Les alliances dans les graphes ont été introduites pour la première fois par Kristiansen, Hedetniemi et al[11]. Depuis leur introduction, plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude des alliances défensives,

offensives et globales dans différentes classes de graphes.
Ce mémoire est divisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous donnons quelques définitions de base sur les graphes, qui sont utiles pour la suite du mémoire. Dans le deuxième chapitre, nous présentons les définitions des alliances globales dans les graphes, puis nous donnons quelques bornes et résultats importants. Dans le troisième chapitre, nous étudions les alliances globales et les alliances globales fortes dans les graphes grilles et les arbres. Nous déterminons les valeurs de ce paramètre pour certaines classes de graphes et nous établissons plusieurs résultats et démonstrations permettant de caractériser ces alliances. Des exemples illustratifs sont également présentés afin de mettre en évidence les méthodes utilisées et les résultats obtenus.

Chapitre 1

Notions générales sur les graphes

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons quelques définitions sur les graphes simples, ainsi que leur développement mathématique qui va nous être utile tout au long de ce mémoire.

1.2 Définitions et notations

1.2.1 Graphe

Un graphe $G = (V, E)$ est défini par l'ensemble fini $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dont les éléments sont appelés sommets, et par un ensemble $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ dont les éléments sont appelés arêtes. Le cardinal de V est appelé ordre de G, noté par n. Le cardinal de E est appelé la taille de G, noté par m. Une arête $e = \{u, v\}$ relie deux sommets u et v, que l'on dit **adjacents**. On dit également que l'arête e est **incident** aux sommets u et v. Une boucle est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Dans ce qui suit, on considère que les graphes simples.

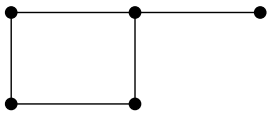


FIGURE 1.1 – Un graphe simple

1.2.2 Voisinage et degré d'un sommet

Soit v un sommet d'un graphe $G = (V, E)$.
Le **voisinage ouvert** de v est défini par :

$$N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}.$$

Le **voisinage fermé** de v est défini par :

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}.$$

Le **degré** d'un sommet v, noté $d_G(v)$, est le nombre d'arêtes incidentes à v. on a $d_G(v) = |N_G(v)|$.

Le **degré maximum** d'un graphe G est noté $\Delta(G)$ et le **degré minimum** est noté $\delta(G)$.

Un sommet **isolé** est de degré nul ,Un sommet **pendant ou feuille** est de degré égal à 1. Un sommet voisin d'un sommet pendant est appelé **sommet support**.

1.2.3 Sous-graphe et graphe partiel

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appelle **sous-graphe** de G tout graphe $H = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$.

Soit $A \subseteq V$. Le **sous-graphe induit** par A, noté $G[A]$, est le graphe ayant A comme ensemble de sommets et contenant toutes les arêtes de G dont les deux extrémités appartiennent à A.

Un **graphe partiel** de G est un graphe obtenu en supprimant une ou plusieurs arêtes de G sans modifier l'ensemble des sommets. Ainsi, H est un graphe partiel de G si

$$V(H) = V(G) \quad et \quad E(H) \subseteq E(G).$$

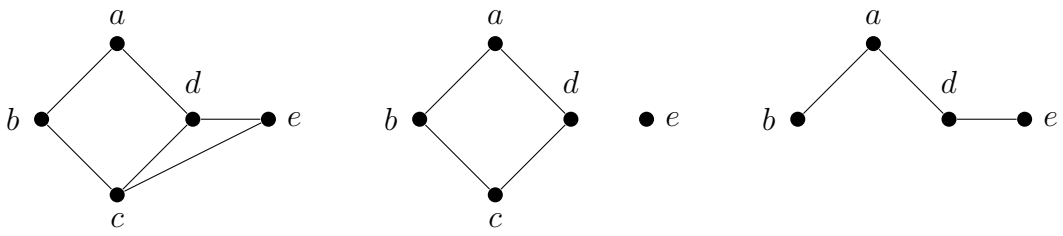


FIGURE 1.2 – Un graphe simple G, un graphe partiel et un sous-graphe

1.2.4 Chaîne, cycle et connexité .

Soit $G = (V, E)$ un graphe. On appelle **chaîne** de G toute suite de sommets distincts $P = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ telle que $v_i v_{i+1} \in E(G)$ pour tout $1 \leq i \leq k-1$. Les sommets v_1 et v_k sont appelés les extrémités de la chaîne.

Un **cycle** d'un graphe $G = (V, E)$ est une chaîne dont les deux extrémités sont confondues,Un cycle élémentaire C_n induit par n sommets est un cycle dont les sommets sont distincts.

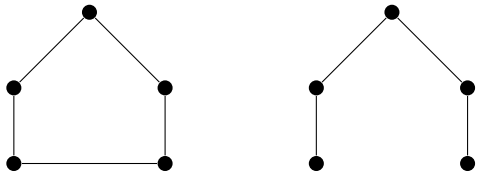


FIGURE 1.3 – Un cycle et une chaîne

Une chaîne est dite **élémentaire** lorsque tous ses sommets sont distincts, et elle est dite **simple** lorsque toutes ses arêtes sont distinctes. La longueur d'une chaîne correspond au nombre de ses arêtes.

On appelle **corde** toute arête reliant deux sommets non consécutifs d'une chaîne. Une chaîne minimale induite par n sommets, notée P_n, est une chaîne élémentaire ne contenant aucune corde.

Le diamètre du graphe G est le maximum des distances entre deux de ses sommets, c.-à-d :

$$\text{diam}(G) = \max_{u,v \in V} d(u, v).$$

L'excentricité d'un sommet v dans G est :

$$\text{exe}(v) = \max\{d(u, v) : u \in V(G)\}.$$

Connexité

La relation entre les sommets d'un graphe G est définie comme suit : $u \sim v$ si et seulement s'il existe dans G une chaîne reliant u à v.

Cette relation est une relation d'équivalence. Les sous-graphes induits par les classes d'équivalence sont appelés **composantes connexes** de G.

Le graphe G est dit **connexe** s'il possède une seule composante connexe.

Si G est connexe, alors $\overline{G}$ est dit **co-connexe**. Les complémentaires des composantes connexes de G sont appelées composantes co-connexes de G.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Une arête $e \in E$ est appelée un **isthme** si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe. si G est connexe alors $G - e$ n'est pas connexe.

1.2.5 Quelques invariants d'un graphe

- Deux graphes G et H sont dits **isomorphes** s'il existe une application bijective $f : V(G) \to V(H)$ telle que, pour toute paire de sommets $x, y \in V(G)$, l'arête $xy \in E(G)$ si et seulement si $f(x)f(y) \in E(H)$.

  Lorsque deux graphes sont isomorphes, ils possèdent plusieurs propriétés communes appelées **invariants de graphes**. Autrement dit, un invariant est une propriété préservée par isomorphisme, comme le nombre de sommets ou le nombre d'arêtes.

- Un **stable** d'un graphe $G = (V, E)$, appelé aussi **ensemble indépendant**, est un sous-ensemble de sommets deux à deux non adjacents. Le cardinal d'un stable maximum de G, noté $\alpha(G)$, est appelé le **nombre de stabilité** de G.

- Un **couplage** M dans un graphe G est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. La taille d'un couplage maximum dans G est notée $\beta(G)$. Un sommet est dit **saturé** s'il est extrémité d'une arête du couplage. Un couplage est dit **parfait** s'il sature tous les sommets du graphe.
- On appelle **clique** d'un graphe G un sous ensemble de sommets de V deux à deux adjacents. Une clique maximum de G est une clique de cardinalité maximale. La cardinalité d'une clique maximum est appelée nombre de clique, et notée $\omega(G)$.

1.3 Quelques graphes particuliers

1.3.1 Graphe complet

Un graphe **complet** d'ordre n, noté K_n est un graphe dans lequel toute paire de sommets est reliée par une arête. Chaque sommet de K_n est de degré $n-1$.

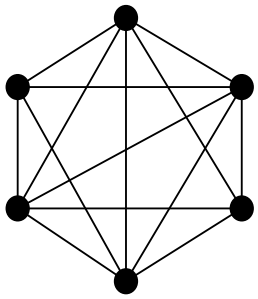


FIGURE 1.4 – Un graphe complet K_6

1.3.2 Graphe complémentaire

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Le **graphe complémentaire** de G, noté $\overline{G}$, est le graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans $\overline{G}$ si elle n'est pas dans G

On considère ci-dessous le cycle C_4 et son graphe complémentaire.



FIGURE 1.5 – Le cycle C_4 et son graphe complémentaire $\overline{C_4}$

1.3.3 Graphe régulier

Un graphe **régulier** est un graphe tel que tous les sommets ont le même degré.

Un graphe G est dit **K-régulier** si $degG(v) = k$ pour chaque sommet v de G.

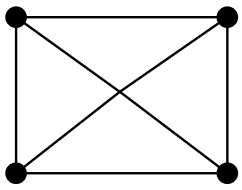


FIGURE 1.6 – Un graphe 3-régulier

1.3.4 Graphe biparti

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **biparti** s'il existe une partition $V = V_1 \cup V_2$ telle que chaque arête relie un sommet de V_1 à un sommet de V_2.

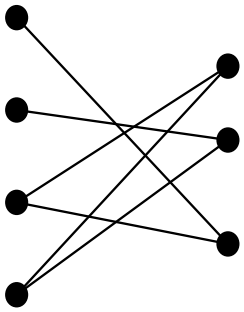


FIGURE 1.7 – Un graphe biparti

1.3.5 Graphe biparti complet

Un graphe **biparti complet** est un graphe biparti telle que tout les sommets de V_1 sont adjacents à tout les sommets de V_2 . Le graphe biparti complet est noté $K_{p,q}$.

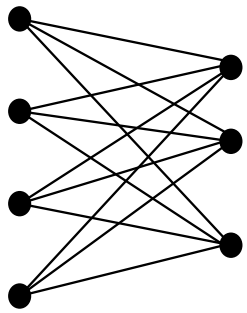


FIGURE 1.8 – Un graphe biparti complet $K_{4,3}$

1.3.6 Arbre, forêt et un chenille

Un **arbre** T est un graphe connexe sans cycle. Un arbre d'ordre n possède exactement $n-1$ arêtes.

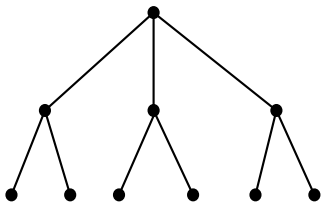


FIGURE 1.9 – Arbre T

Une **forêt** est un graphe dont toutes les composantes connexes sont des arbres.

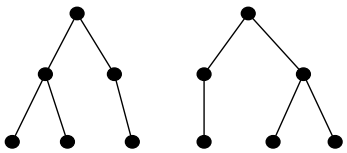


FIGURE 1.10 – Une forêt

Une **chenille** $C(t_1, t_2, ..., t_s)$ est un arbre dont la suppression de des sommets pendants donne une chaîne $u_1, u_2, ..., u_s$ où t_i est le nombre de sommets pendant adjacents à u_i .

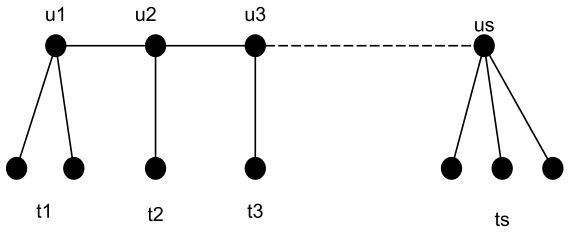


FIGURE 1.11 – Une chenille C

1.3.7 Les étoiles

Une **étoile** est un graphe biparti complet avec $|V_1| = 1$ et $|V_2| = k$ noté $K_{1,k}$, le sommet de V_1 appelé sommet centrale de l'étoile. Autrement dit une étoile est un arbre d'ordre n de $n - 1$ sommets pendants.

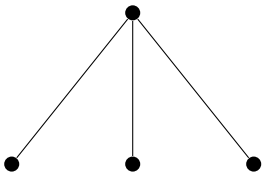


FIGURE 1.12 – Une étoile

Une **double étoile** $S_{p,q}$ est une deux étoiles $K_{1,p}$ et $K_{1,q}$, et en ajoutant une arête reliant les deux centres.

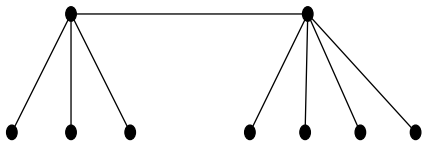


FIGURE 1.13 – Une double étoile $S_{3,4}$

1.3.8 Couronne d un graphe

La k-**couronne** de $G = (V, E)$ est le graphe d'ordre $(k+1)|V|$ obtenu d'une copie de G en attachant à chaque sommet de G une chaîne de longueur $k-1$ de manière que les chaînes soient disjointes. Pour $k = 1$, la 1-couronne de G est appelée la couronne de G.

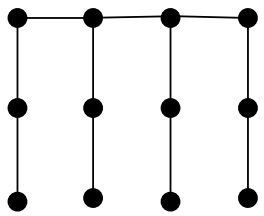


FIGURE 1.14 – Une couronne

1.3.9 Une grille

Une **grille** est un graphe obtenu par le produit cartésien de deux chaînes P_m et P_n. On la note $P_m \square P_n$.

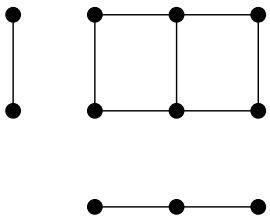


FIGURE 1.15 – Une grille

1.3.10 Subdivision d'un graphe

Une **subdivision** d'un graphe est obtenue en ajoutant des sommets de degré 2 sur ses arêtes.

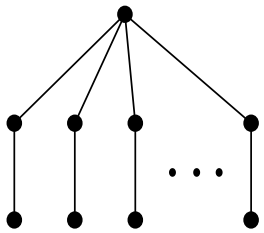


FIGURE 1.16 – Une subdivision d'une étoile

1.3.11 Graphes planaires

Un graphe $G = (V, E)$ est dit **planaire** si et seulement si on peut trouver une représentation graphique de graphe sur un plan de telle sorte que les arcs ne se croisent pas, et sera notée$R(G)$.

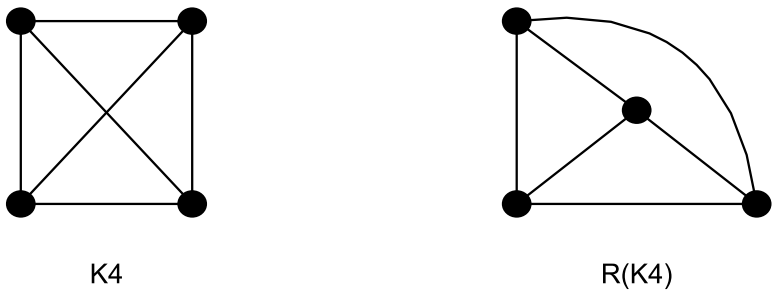


FIGURE 1.17 – Le graphe K_4 et une ses représentation planaire

1.3.12 Un cactus

Un **cactus** est un graphe, où toute arête appartient à au plus un cycle. Un graphe contenant un seul cycle est appelé un unicycle

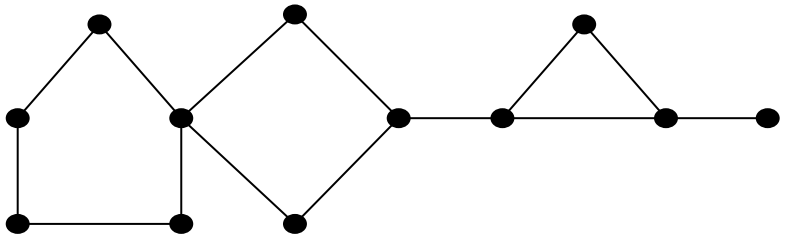


FIGURE 1.18 – Un cactus

1.4 Aperçu sur la domination dans les graphes

l'origine de la domination trouve dans le jeu d'échec, le concept de dominer ou (couvrir) l'ensemble des cases par certaines pièces du jeu.L'idée remonter au 16^{eme} siècle en Inde.
Nous définirons cette notion comme suit :

Un sous-ensemble $D \subseteq V$ est appelé *ensemble dominant* du graphe G si tout sommet de $V \setminus D$ est adjacent à au moins un sommet de D.

Le cardinal minimum d'un ensemble dominant est appelé le *nombre de domination* du graphe est noté $\gamma(G)$.

1.4.1 Quelque types de domination

- **La domination stable** : soit $G = (V, E)$ un graphe simple, Un sous ensemble $S \in V$ est un dominant stable si S est un dominant et S est un stable.

- **La domination totale** : Soit G un graphe. Un sous-ensemble S de V est dit dominant total de G si tout sommet de V possède un voisin dans S $N_G(S) = V$ ou bien S est un dominant et le sous-graphe induit par S ne contient pas de sommets isolés.

- **La domination connexe** : Un ensemble dominant connexe d'un graphe G est un ensemble dominant dont le sous-graphe induit est

connexe.

- **La domination couplé** : Un ensemble dominant couplé d'un graphe G est un ensemble dominant et le graphe induit par S admet un couplage parfait.

- **La domination double** : Un ensemble dominant double d'un graphe G si tout sommet de V est dominé par au moins deux sommet (si $v \in V \setminus S$ alors v a au moins deux voisins dans S et si $v \in S$ alors va au moins un voisins dans S).

Chapitre 2

Les alliances dans les graphes

2.1 Introduction

L'alliance peut être défini comme une union ou une association qui est constituée pour un bénéfice réciproque, il peut s'agir entre autres : d'un accord ou traité entre deux ou plusieurs nations pour coopérer à des fins spécifiques, d'une fusion d'efforts ou d'intérêts entre des individus, des familles, des États, ou des organisations. Les alliances se présentent de plusieurs manières dans le monde réel. En règle générale, une alliance peut être comprise comme un ensemble d'éléments partageant des objectifs identiques ou ayant la même propriété parmi tous les éléments de la collection. À titre d'exemples d'alliances, on peut citer :
Groupe de plantes d'une même famille botanique.
Groupe d'entreprises partageant un intérêt économique commun.
Les alliances dans les graphes sont utilisées dans les réseaux sociaux pour représenter des groupes d'utilisateurs liés entre eux.
Les alliances ont été introduites pour la première fois dans les graphes par Kristiansen et Hedetniemi, Ces types d'alliances sont appelées alliances défensives, alliances offensives et alliances puissantes. Les nations sont représentées par des sommets dans un graphe et les arêtes correspondent aux relations possibles (amitié ou hostilité) entre les nations.
Dans ce chapitre, nous présenterons les déférents types d'alliances dans les graphes.

2.2 Types d'alliances

Soit G un graphe simple, Nous définissons les différents types d'alliances :

2.2.1 Alliances défensives

Définition 1. Une alliance **défensive** dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets $S \subseteq V$ tel que pour chaque sommet $u \in S$, $|N[u] \cap S| \geq |N[u] \cap (V \setminus S)|$. Si l'inégalité est **stricte**, alors S est dite **alliance défensive forte**.

Définition 2. Une alliance **défensive** S est dite globale si S est un ensemble dominant.

Définition 3. Le nombre d'alliance défensive $a(G)$ (respectivement le nombre d'alliance défensive forte $\hat{a}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance défensive (respectivement d'une alliance défensive forte).
le figure suivante représente deux arbres avec :

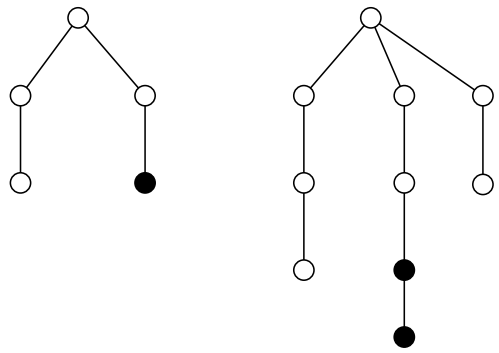


FIGURE 2.1 – $a(T1) = 1$ et $\hat{a}(T2) = 2$

Définition 4. Le nombre d'alliance défensive globale $\gamma_a(G)$ (respectivement, le nombre d'alliance défensive globale forte $\gamma_{\hat{a}}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance défensive globale (respectivement, d'une alliance défensive globale forte).

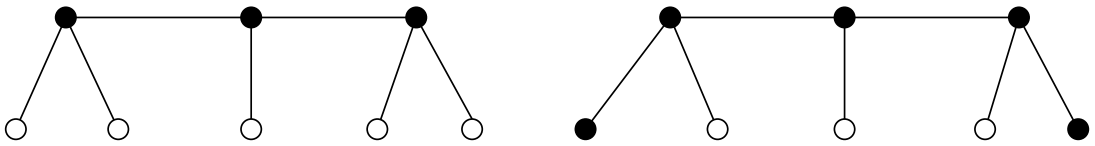


FIGURE 2.2 – Un arbre T avec $\gamma_a(T) = 3$ $\gamma_{\hat{a}}(T) = 5$

2.2.2 Alliances offensives

Définition 5. Une alliance **offensive** dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble de sommets $S \subseteq V$ tel que pour chaque sommet $u \in V \setminus S$,

$$|N[u] \cap S| \geq |N[u] \cap (V \setminus S)|.$$

Si l'inégalité est **stricte**, alors S est dite **alliance offensive forte**.

Définition 6. Le nombre d'alliance offensive $o(G)$ (respectivement le nombre d'alliance offensive forte $\hat{o}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance offensive (respectivement, d'une alliance offensive forte) de G.
Il est à signaler que tout graphe G admet une alliance offensive puisque $V(G)$ est un tel ensemble.

Définition 7. Le nombre d'alliance offensive globale $\gamma_o(G)$ (respectivement, le nombre d'alliance offensive globale forte $\gamma_o(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance offensive globale (respectivement, d'une alliance offensive globale forte) de G.

La figure suivante représente un unicycle tel que

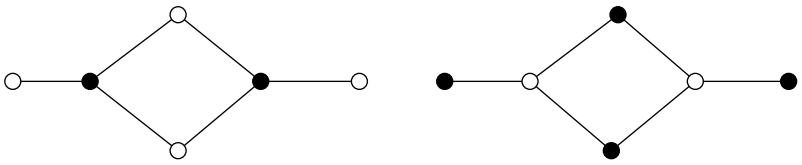


FIGURE 2.3 – $\gamma_o(G) = 2$ $\gamma_{\hat{o}}(G) = 4$

2.2.3 Alliances puissantes

Pour un sous ensemble $S \subseteq V$, notons par $\partial S = N(S) - S$.

Définition 8. Une alliance est dite **puissante** si elle est à la fois défensive et offensive. Ce concept peut être exprimé par la seule condition que pour chaque sommet $v \in N[S]$,

$$|N[v] \cap S| \geq |N[v] - S|.$$

Puisque une alliance puissante S est défensive, il peut défendre tout sommet de S contre une attaque possible par les sommets de ∂S, et puisqu'il est offensive, il peut effectivement attaquer tous les sommets dans ∂S. En outre, une alliance puissante peut également défendre tout sommet de ∂S contre une attaque par des sommets dans $N[\partial S] - N[S]$.

Définition 9. Une alliance puissante est dit globale si elle est dominant

Définition 10. Le nombre d'alliance puissante $a_p(G)$ (respectivement, d'alliance puissante globale $\gamma_{ap}(G)$) est le cardinal minimum d'une alliance puissante (respectivement, d'alliance puissante globale).

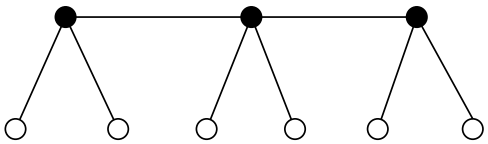


FIGURE 2.4 – $\gamma_{ap}(T) = 3$

La figure suivante représente un arbre T avec

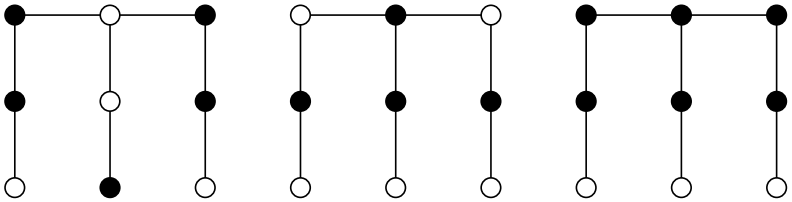


FIGURE 2.5 – $\gamma_a = 5$,$\gamma_o = 4$ et $\gamma_{ap} = 6$

2.3 Quelques résultats existants sur les paramètres d'alliances

2.3.1 Résultats relatifs aux paramètres $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$

Observation 1. (Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003).
Pour tout graphe G, d'ordre n,

1. $1 \leq \gamma(G) \leq \gamma_a(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$
2. $1 \leq \alpha(G) \leq \gamma_a(G) \leq n$
3. $1 \leq \alpha(G) \leq \hat{\alpha}(G) \leq \gamma_{\hat{a}}(G) \leq n$

Haynes et al.[11] donné les valeurs exactes de $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$ pour quelques classes de graphes

Proposition 2.1. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003). Pour le graphe complet K_n on a :*

1. $\gamma_a(K_n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.
2. $\gamma_{\hat{a}}(K_n) = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$.

Proposition 2.2. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003). Pour le double étoile $S_{p,q}$, $r, s \geq 1$, on a :*

1. $\gamma_a(S_{p,q}) = \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{q-1}{2} \right\rfloor + 2.$
2. $\gamma_{\hat{a}}(S_{p,q}) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor + 2.$

Proposition 2.3. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003). Pour le graphe biparti complet $K_{r,s}$ on a :*

1. $\gamma_a(K_{1,p}) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + 1.$
2. $\gamma_a(K_{r,s}) = \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor$ *si* $r, s \geq 2.$
3. $\gamma_{\hat{a}}(K_{r,s}) = \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil$.

Proposition 2.4. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003). Soit un cycle C_n, $n \geq 3$, on a :*

$$\gamma_a(C_n) = \gamma_{\hat{a}}(C_n) = \gamma_t(C_n).$$

Proposition 2.5. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003). Pour $n \geq 3$, on a :*

$$\gamma_a(P_n) = \gamma_t(P_n).$$

Proposition 2.6. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003). Pour $n \geq 2$, on a :*

$$\gamma_a(P_n) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor - 1 & \text{si } n \equiv 2 \ (mod\ 4), \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor & \text{sinon} \end{cases}$$

2.3.2 Résultats exactes aux paramètres $a_p(G)$ et $\gamma_{ap}(G)$.

Dans cette section, nous présentons quelques valeurs exactes des paramètres d'alliance puissante $a_p(G)$ et d'alliance puissante globale $\gamma_{ap}(G)$ pour certaines familles classiques de graphes. Ces résultats, établis par Brigham et al. [5].

Observation 2. (Brigham et al.,[5] 2009) Pour tout graphe complet K_n,

$$a_p(K_n) = \gamma_{ap}(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

Observation 3. (Brigham et al.,[5] 2009) Soit toute étoile $S_{1,k}$,

$$\gamma_a(S_{1,k}) = \gamma_{ap}(S_{1,k})$$

Observation 4. (Brigham et al.,[5] 2009) Si un graphe biparti complet $K_{r,s}$, $1 \leq r \leq s$,

$$a_p(K_{r,s}) = \gamma_{ap}(K_{r,s}) = \min\left\{ r + \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor,\ \left\lceil \frac{r+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{s+1}{2} \right\rceil \right\}$$

Observation 5. (Brigham et al.,[5] 2009)

1. Si les chaînes P_n,
$$a_p(P_n) = \gamma_{ap}(P_n) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor.$$
2. Si les cycles C_n,
$$a_p(C_n) = \gamma_{ap}(C_n) = \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil$$

2.4 Bornes sur les paramètres d'alliances

Nous présentons ci-dessous quelques propriétés et principaux résultats relatifs aux paramètres d'alliances introduits précédemment.

2.4.1 Bornes sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$

Les propositions suivantes de Haynes et al.[11] donnent des bornes supérieures et inférieures sur $\gamma_a(G)$ et $\gamma_{\hat{a}}(G)$.

Théorème 2.4.1. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003). Soit G un graphe d'ordre n, alors*

(i) $\gamma_a(G) \geq \frac{\sqrt{4n+1}-1}{2}$,
(ii) $\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \sqrt{n}$.

Proposition 2.7. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003). Soit G un graphe d'ordre n, alors*

$$\gamma_a(G) \geq \frac{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil + 1}.$$

Théorème 2.4.2. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003). Si G est un graphe biparti d'ordre n et de degré maximum Δ, alors*

$$\gamma_a(G) \geq \frac{2n}{\Delta + 3}.$$

Théorème 2.4.3. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003). Si G est un graphe biparti d'ordre n et de degré maximum Δ, alors*

$$\gamma_{\hat{a}}(G) \geq \frac{2n}{\Delta + 2}.$$

Théorème 2.4.4. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003). Pour T est un arbre d'ordre n, alors*

$$\gamma_a(T) \geq \frac{n+2}{4}.$$

Théorème 2.4.5. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003). Si T est un arbre d'ordre n, alors*

$$\gamma_{\hat{a}}(T) \geq \frac{n+2}{3}.$$

Théorème 2.4.6. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003). Pour T est un arbre d'ordre $n \geq 4$, alors*

$$\gamma_a(T) \leq \frac{3n}{5}.$$

Théorème 2.4.7. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003). Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{3n}{4}.$$

Les bornes précédentes ont été améliorées par Bouzefrane, Chalali et Haynes.

Théorème 2.4.8. *(Bouzefrane, Chellali et Haynes [3], 2010) Si T est un arbre d'ordre $n \geq 2$ avec l feuilles et s sommets supports, alors*

$$\gamma_a(T) \geq \frac{3n-l-s+4}{8} \quad et \quad \gamma_{\hat{a}}(T) \geq \frac{3n-l-s+4}{6}.$$

Proposition 2.8. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003).*
Pour tout graphe G sans sommets isolés et de degré minimum δ

1. $\gamma_a(G) \leq n - \lceil \frac{\delta}{2} \rceil$
2. $\gamma_{\hat{a}}(G) \leq n - \lfloor \frac{\delta}{2} \rfloor$

Le corollaire suivant se découle immédiatement de la proposition précédente.

Corollaire 2.1. *(Haynes, Hedetniemi et Henning [11], 2003).*
Pour tout graphe G, $\gamma_a(G) = n$ si et seulement si $G = \overline{K_n}$.

Corollaire 2.2. *(Chellali et Haynes [8], 2007)*
Pour tout arbre non trivial T ayant ℓ feuilles, on a :

$$\gamma_a(T) \leq \frac{n + \ell - 1}{2}.$$

Ont donnée quelques résultat dans le produit cartésien entre chaines et cycles dans [6].

Théorème 2.4.9. *(Chan-Wei Changa, Fu-Hsing Wangd [6], 2012)*

Si $2 \leq m \leq n$ alors

$$\gamma_a(P_m \Box P_n) = \frac{mn}{3} \quad si\ mn \equiv 0 \pmod 3$$

alors :

$$\gamma_a(P_m \Box P_n) \leq \begin{cases} \lfloor \frac{n}{3} \rfloor m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + a & si\ m = n \equiv 1 \pmod 3 \\ \lceil \frac{m}{3} \rceil m & si\ m = n \equiv 2 \pmod 3 \\ \min\left\{ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor n + \lceil \frac{n}{2} \rceil + b, \lceil \frac{n}{3} \rceil m \right\} & si\ m \equiv 1 \pmod 3,\ n \equiv 2 \pmod 3 \\ \min\left\{ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor m + \lceil \frac{m}{2} \rceil + a, \lceil \frac{m}{3} \rceil n \right\} & si\ m \equiv 2 \pmod 3,\ n \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

tel que

$$a = 1 + \left\lfloor \frac{m+2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m+2}{4} \right\rfloor, \quad b = 1 + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor$$

Si $m \geq 3,\ n \geq 2$ *alors*

$$\gamma_a(C_m \Box P_n) = \left\lceil \frac{mn}{3} \right\rceil$$

si $mn \equiv 0 \pmod 3$ *ou* $m \geq 7,\ m \equiv 1 \pmod 6$, *et* $n = 2$ *ou* 4 *alors :*

$$\gamma_a(C_m \Box P_n) \leq \begin{cases} \min\left\{\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor m,\ \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil n\right\} & si\ n \equiv 2 \pmod 3,\ m \not\equiv 0 \pmod 3 \\ \min\left\{\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil n,\ \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor m + \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + a\right\} & si\ n \equiv 1 \pmod 3,\ m \not\equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

tel que

$$a = 1 + \left\lfloor \frac{m+2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m+2}{4} \right\rfloor$$

De plus, si $m \geq 7,\ m \equiv 1 \pmod 6,\ n \equiv 2, 4 \pmod 6$ *alors :*

$$\gamma_a(C_m \Box P_n) \leq \begin{cases} \frac{mn}{3} + \min\left\{\frac{n}{6}, \frac{m}{3}\right\} & si\ n \equiv 2 \pmod 6 \\ \frac{mn}{3} + \min\left\{\frac{n}{6}, \frac{m}{6} + \frac{3}{2} + \left\lfloor \frac{m+2}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m+2}{4} \right\rfloor\right\} & si\ n \equiv 4 \pmod 6 \end{cases}$$

Si $3 \leq m \leq n$ *alors*

$$\gamma_a(C_m \Box P_n) = \left\lceil \frac{mn}{3} \right\rceil$$

si $mn \equiv 0 \pmod 3$ *ou* $m = 4,\ n \geq 7,\ n \equiv 1 \pmod 6$ *et*

$$\gamma_a(C_m \Box C_n) \leq \min\left\{\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil m,\ \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil n\right\} \quad si\ mn \not\equiv 0 \pmod 3.$$

2.4.2 Bornes sur $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$

Théorème 2.4.10. *(Rodríguez et Sigarreta [15] ,2006)*
Soit G *un graphe cubique connexe d'ordre* n.

1. $\frac{n}{2} \leq \gamma_{\hat{o}}(G) \leq \frac{3n}{4}$.

2. $\gamma_{\hat{o}}(G) = \frac{n}{2}$ *si et seulement si* G *est un graphe biparti.*

3. $\gamma_{\hat{o}}(G) = \frac{3n}{4}$ *si et seulement si* G *est isomorphe au graphe complet* K_4.

Rodríguez et Rodriguez donnent des bornes supérieures et des bornes inférieures sur $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$ pour tout graphe G en fonction de l'ordre n ,du degré minimum δ et maximum Δ.

Théorème 2.4.11. *(Rodríguez et Sigarreta [15] ,2006)*
Pour tout graphe G d'ordre n, de degré minimum δ et de degré maximum Δ,

$$\frac{2n}{3} \geq \gamma_0(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{n(\delta+1)}{2\Delta+\delta+1} \right\rceil & \text{si } \delta \text{ est impair ;} \\ \left\lceil \frac{n\delta}{2\Delta+\delta} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème 2.4.12. *(Rodríguez et Sigarreta [15] ,2006)*
Pour tout graphe régulier G d'ordre n et de degré impair δ,

$$\frac{n(\delta+1)}{3\delta+1} \leq \gamma_o(G) \leq \frac{n}{2}.$$

Théorème 2.4.13. *(Sigarreta et Rodríguez [17], 2009)*
Pour tout graphe connexe G d'ordre n, de degré minimum δ et de degré maximum Δ,

$$(i) \quad \gamma_o(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{n(\delta+1)}{2\Delta+\delta+1} \right\rceil & \text{si } \delta \text{ est impair ;} \\ \left\lceil \frac{n\delta}{2\Delta+\delta} \right\rceil & \text{sinon ;} \end{cases}$$

$$(ii) \quad \gamma_{\hat{o}}(G) \geq \begin{cases} \left\lceil \frac{n(\delta+3)}{2\Delta+\delta+3} \right\rceil & \text{si } \delta \text{ est impair ;} \\ \left\lceil \frac{n(\delta+2)}{2\Delta+\delta+2} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les résultats suivants établi par Chellali [7], donne des bornes inférieures sur $\gamma_{\hat{o}}$ et $\gamma_o(G)$ pour tout graphe biparti.

Théorème 2.4.14. *(Chellali [7], 2010)*
Pour tout graphe biparti G sans sommets isolés,

$$\gamma_o(G) \leq (n - \ell(G) + s(G))/2.$$

Théorème 2.4.15. *(Chellali [7], 2010)*
Pour tout graphe biparti G sans sommets isolés,

$$\gamma_{\hat{o}}(G) \leq (n + \ell(G))/2.$$

Le résultat suivant établit une borne avec caractérisations dans les arbres, par chellali et bouzefrane.

Théorème 2.4.16. *(Bouzefrane et Chellali [1] ,2009)*
Soit T un arbre d'ordre $n \geq 3$ ayant ℓ feuilles et s sommets supports. Alors

$$\gamma_o(T) \geq \frac{n - \ell + s + 1}{3},$$

avec égalité si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.

Où $\mathcal{F}$ la famille des arbres d'ordre au moins trois pouvant être obtenus à partir de r étoiles disjointes en ajoutant d'abord $r-1$ arêtes incidentes uniquement aux centres des étoiles de façon que le graphe obtenu soit connexe, puis en subdivisant exactement une fois chaque nouvelle arête.

Dans le théorème suivant, nous donnons une borne inférieure pour l'alliance offensive globale d'un graphe unicycle connexe.

Théorème 2.4.17. *(Bouzefrane et Ouatiki [4], 2018) Soit G un graphe unicycle d'ordre n avec ℓ feuilles et s sommets supports. Alors*

$$\gamma_o(G) \geq \frac{n - l(G) + s(G)}{3}.$$

Théorème 2.4.18. *(Bouzefrane et Ouatiki [4], 2018) Soit G un graphe unicycle d'ordre n, de cycle C, où ℓ feuilles et s sommets supports.*

$$\gamma_o(G) = \frac{n - l(G) + s(G)}{3},$$

alors C est un cycle pair.

2.4.3 Bornes sur $\gamma_{ap}(G)$ et $a_p(G)$

Brigham et al. [5], ont donné des bornes supérieures sur l'alliance puissante.

Théorème 2.4.19. *(Brigham et al. [5], 2009).*
Si T est un arbre d'ordre n différent d'une chaîne P_n, alors

$$a_p(T) \leq \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor$$

et cette borne est atteinte.

Proposition 2.9. *(Brigham et al. [5], 2009).*
Pour tout graphe G d'ordre n, de degrés minimum δ et maximum Δ, on a :

$$n \leq \left(\frac{\Delta + \delta + 2}{\delta + 1}\right) \gamma_{ap}(G).$$

Corollaire 2.3. *(Brigham et al. [5], 2009).*
Si G est un graphe régulier d'ordre n, alors

$$n \leq 2\gamma_{ap}(G).$$

Théorème 2.4.20. *(Bouzefrane et Ouatiki [12],2021) Soit T un arbre d'ordre n ayant ℓ feuilles et s sommets supports. Alors,*

$$\gamma_{ap}(T) \geq \frac{3n - 2\ell - s + 2}{5}$$

avec caractérisation :

Théorème 2.4.21. *(Bouzefrane et Ouatiki [12],2021) Soit T un arbre non trivial d'ordre n, ayant l feuilles et s sommets supports. Alors*

$$\gamma_{ap}(T) = \frac{3n - 2l - s + 2}{5}$$

si et seulement si $T \in \mathcal{F}$.

Où $\mathcal{F}$ La famille est l'ensemble des arbres obtenus à partir de P_2 par une suite finie d'applications de l'opération O, définie comme suit :

- *$T_1 = P_2$;*
- *pour tout $i \geq 1$, l'arbre T_{i+1} est obtenu à partir de T_i en ajoutant une feuille à un sommet support u, puis un chemin $P_3 : x - y - z$ relié à u par le sommet y.*

2.4.4 Relations entre $\gamma_a(G)$, $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$

Le théorème suivant, établi par Bouzefrane et Chellali, donne une borne supérieure de $\gamma_o(G)$ en fonction de $\gamma_a(G)$.

Théorème 2.4.22. *(Bouzefrane et Chellali [2],2011).*
Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$, alors

$$\gamma_o(T) \leq \frac{3}{2}\gamma_a(T) - 1,$$

À noter qu'aucune caractérisation de cette borne n'a été faite jusqu'à présent.

Théorème 2.4.23. *(Chellali, Haynes et Volkmann [10], 2009).*
Pour tout graphe G d'ordre $n \geq 3$, avec s sommet support et l feuilles,

$$\gamma_{\hat{o}}(G) \geq \gamma_o(G) + l - s.$$

Théorème 2.4.24. *(Chellali, Haynes et Volkmann [10], 2009).*
Pour tout arbre non trivial tree T

$$\gamma_{\hat{o}}(G) \geq \gamma_o(G) + 1.$$

Théorème 2.4.25. *(Chellali, Haynes et Volkmann [10], 2009).*
Pour tout arbre non trivial T,

$$\gamma_{\hat{o}}(T) = \gamma_o(T) + 1$$

si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. *T est un arbre subdivisé,*
2. *T est obtenu à partir des arbres T_1 et T_2, qui sont des subdivisions des arbres T_1' et T_2', respectivement, en ajoutant une arête entre un sommet u_1 de T_1' et un sommet u_2 de T_2', où au moins l'un des sommets u_1 et u_2 est une feuille ou un sommet isolé de $T_1 \cup T_2$.*

Corollaire 2.4. *(Chellali, Mustapha et Haynes[?],2007)*
Si T est un arbre non trivial, alors

$$\gamma_a(T) + \gamma_o(T) \leq n.$$

2.4.5 Relations entre $\gamma_{ap}(G)$ et $\gamma(G)$

La proposition suivante exprime une relation entre le nombre d'alliance puissante globale $\gamma_{ap}(G)$ et le nombre de domination $\gamma(G)$.

Proposition 2.10 (Brigham et al. [5], 2009)**.** *Pour tout graphe G de degré minimum δ,*

$$\gamma(G) + \left\lfloor \frac{\delta}{2} \right\rfloor \leq \gamma_{ap}(G).$$

Théorème 2.4.26. *(Brigham et al. [5], 2009)*
Soit T un arbre. Alors

$$a_p(T) = \gamma_{ap}(T) = \left\lceil \frac{\Delta + 1}{2} \right\rceil$$

si et seulement si T est une double étoile $S_{2,2}$ ou bien T peut être obtenu d'une étoile $K_{1,t}$ en subdivisant au plus $\left\lfloor \frac{t}{2} \right\rfloor$ arêtes exactement une seule fois.

Théorème 2.4.27. *(Brigham et al. [5], 2009)*
Un graphe G vérifie $\gamma(G) = \gamma_{ap}(G)$ si et seulement si $N[v]$ contient au moins $\left\lceil \frac{|N[v]|}{2} \right\rceil$ sommets support, pour tout sommet $v \in V(G)$.

2.5 Généralisation des alliances

2.5.1 k-alliances

Les notions d'alliance défensive et d'alliance offensive ont été étendues au k alliances respectivement défensives et offensives, où la force d'une alliance repose sur le degré de robustesse du partenaire mesuré par le paramètre k.Avant de présenter quelques résultats existants sur ces concepts donnons les définitions suivantes.

Définition 11. Soit $k \geq 1$ un entier. Un ensemble non vide S de sommets d'un graphe G est appelé une k-alliance offensive globale si

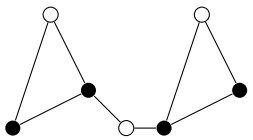
$$|N(v) \cap S| \geq |N(v) - S| + k \quad \text{pour tout } v \in V(G) - S.$$

Le nombre de k-alliances offensives globales de G, noté $\gamma_k^o(G)$, est le cardinal minimum d'une k-alliance offensive globale de G.

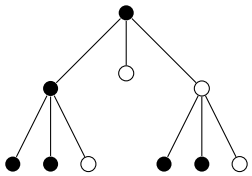
Définition 12. Un ensemble non vide $S \subseteq V$ est une k-alliance défensive globale si

$$|N(v) \cap S| \geq |N(v) - S| + k \quad \text{pour tout } v \in S.$$

Le nombre de k-alliances défensives globales de G, noté $\gamma_k^a(G)$, est le cardinal minimum d'une k-alliance défensive globale de G.



Les sommets noirs forment
une alliance 2-offensive



Les sommets noirs forment
une alliance 2-défensive

2.3.5 Bornes sur γ_o^k

Théorème 2.5.1. *(Chellali et al. [9], 2009). Soit $k \geq 1$ un entier. Si G est un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq k$ alors,*

$$\gamma_o^k(G) \leq \frac{k+1}{k+2} n.$$

Théorème 2.5.2. *(Chellali et al. [9], 2009). Soit $k \geq 2$ un entier, et soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum $\delta \geq k+2$. Alors,*

$$\gamma_o^k(G) \leq \frac{k}{k+1}n.$$

Théorème 2.5.3. *(Chellali et al. [9], 2009). Soit k un entier positif. Si G est un graphe d'ordre n, de degré minimum δ et de degré maximum Δ, alors*

$$\gamma_o^k(G) \geq \frac{n(\delta+k)}{2\Delta+\delta+k}.$$

Théorème 2.5.4. *(Chellali et al. [9], 2009). Soit $k \geq 1$ un entier et soit G un graphe d'ordre n, de degré minimum δ et maximum Δ. Alors,*

$$\gamma_o^k(G) \geq \frac{n(\delta+k+1)}{2\Delta+\delta+k+1}.$$

2.3.6 Bornes sur γ_a^k

Théorème 2.5.5. *(Rodriguez et Sigaretta [16], 2006). Pour tout graphe G,*

$$\frac{\sqrt{4n+k^2}+k}{2} \leq \gamma_a^k(G) \leq n - \left\lfloor \frac{d_n - k}{2} \right\rfloor.$$

Théorème 2.5.6. *(Rodriguez et Sigaretta [16], 2006). Pour tout graphe G,*

$$\gamma_a^k(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\frac{d_1-k}{2}+1} \right\rceil.$$

Où d_1 est le degré maximum, $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$.

Kahina Ouazine et Slimani [13]. ont donné une borne supérieure et inférieure sur γ_a^k.

Théorème 2.5.7. *(Kahina Ouazine,Hachem Slimani [13])*
Soit P un graphe planaire d'ordre $n > 4$. Alors,

$$\gamma_0^a(P) \geq \left\lceil \frac{n+12}{7} \right\rceil.$$

Théorème 2.5.8. *(Kahina Ouazine,Hachem Slimani [13])*
Soit P un graphe planaire d'ordre $n > 6$. Alors,

$$\gamma_{-1}^a(P) \geq \left\lceil \frac{n+12}{8} \right\rceil.$$

Théorème 2.5.9. *(Kahina Ouazine,Hachem Slimani [13])*
Soit G un graphe et soit $\gamma_k^a(G)$ le nombre global défensive k-alliance. Alors,

$$\gamma_k^a(G) \leq n - \left\lceil \frac{\delta_n - k}{2} \right\rceil.$$

Théorème 2.5.10. *(Kahina Ouazine,Hachem Slimani [13])*
Soit T un arbre d'ordre n. Alors,

$$\gamma_{-1}^a(T) \geq \frac{n+2}{4}.$$

Théorème 2.5.11. *(Kahina Ouazine,Hachem Slimani [13]) Soit T un arbre d'ordre n. Alors,*

$$\gamma_0^a(T) \geq \frac{n+2}{3}.$$

Chapitre 3

Étude des alliances globales fortes dans certaines classes de graphes

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions certains paramètres d'alliances globales fortes, en particulier l'alliance défensive forte et l'alliance offensive forte. Dans la première partie, nous calculons les nombres d'alliances globales fortes dans certaines classes de graphes. Dans la deuxième partie, nous établissons des relations entre ces deux paramètres par des inégalités et étudions des cas d'égalité.

3.2 Calcul des nombres d'alliances dans les grilles

3.2.1 Produit cartésien

Soit G_1 un graphe possédant un ensemble de sommets noté $V(G1)$ et contenant m sommets et soit G_2 un graphe possédant un ensemble de sommets noté $V(G2)$ et contenant n sommets. Le produit cartésien de deux graphes G_1 et G_2 est noté $G_1 \square G_2$ et est un graphe qui a pour ensembles de sommets $V(G_1) \times V(G_2)$ et où deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents dans le graphe $G_1 \square G_2$ si et seulement si $u_1 = u_2$ et v_1, v_2 sont adjacents dans G_2, ou u_1, u_2 sont adjacents dans G_1 et $v_1 = v_2$.Et lorsque $|V(G_1)| = m$ et $|V(G_2)| = n$, on considérera l'ensemble de sommets du graphe $|V(G_1)| = m$ et $|V(G_2)| = n$ est de la taille $m \times n$ et correspondant à un tableau dont l'entrée (i, j) correspond au sommet (i, j) avec $i \in V(G_1)$ et $j \in V(G_2)$, et où chaque colonne du tableau induit une copie du grapheG_1 et chaque ligne une copie du graphe G_1.

Définition 13. Un graphe grille est le produit cartésien de deux chaînes.

La figure suivante représente une grille $P_3 \square P_4$.

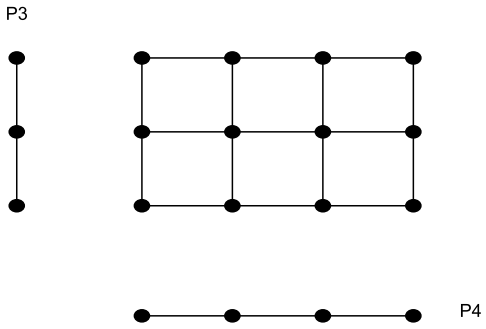


FIGURE 3.1 – $P_3 \square P_4$

3.2.2 Calcul du nombre d'alliances offensives globales dans les grilles $P_n \square P_m$.

Exemple 3.1. Voici quelques exemples d'alliances offensives dans grilles $P_2 \square P_m$.

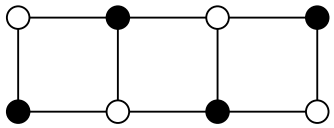


FIGURE 3.2 – $\gamma_o(P_2 \square P_4) = 4$

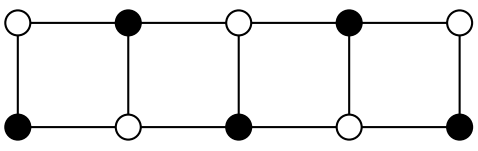


FIGURE 3.3 – $\gamma_o(P_2 \square P_5) = 5$

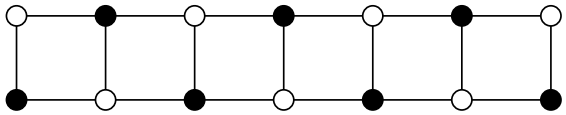


FIGURE 3.4 – $\gamma_o(P_2 \square P_7) = 7$

Le résultat suivant a été établi par Bouzefrane et al.dans[14]

Proposition 3.1. *[14] Soit G une grille $(P_2 \square P_m)$ alors :*

1. $\gamma_o(P_2 \square P_m) = m$.
2. $\gamma_{\delta}(P_2 \square P_m) = m$.

Exemple 3.2. Quelques exemples d'alliances offensives dans grilles $P_3 \square P_m$.

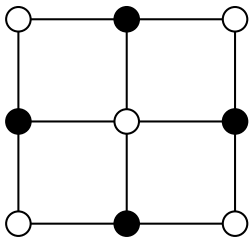


FIGURE 3.5 – $\gamma_o(P_3 \square P_3) = 4$

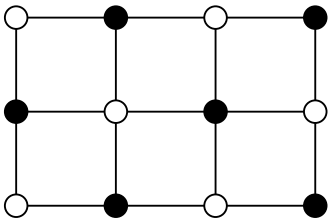


FIGURE 3.6 – $\gamma_o(P_3 \square P_4) = 6$

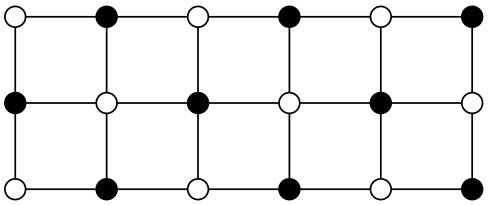


FIGURE 3.7 – $\gamma_o(P_3 \square P_6) = 9$

Observation 6. Soit G une grille $(P_3 \square P_m)$ alors :

$$\gamma_o(P_3 \square P_m) = \left\lfloor \frac{3 \cdot m}{2} \right\rfloor$$

Preuve.

Soit G une grille $(P_3 \square P_m)$ de $k = 3m$ sommets. Soit S un γ_o-ensemble, alors on définit

$S = \{x_{i,j} \ ; \ i + j \text{ est impair}\}$ et $V \setminus S = \{x_{i,j} \ ; \ i + j \text{ est pair}\}$.

Pour tout sommet $v \in V \setminus S$, nous avons $N(v) \subseteq S$ et

$$N(v) \cap (V \setminus S) = \varnothing,$$

sinon

$$|N(v) \cap S| < |N(v) \cap (V \setminus S)|,$$

ce qui contredit que S est un γ_o-ensemble.

Comme chaque sommet $v \in V \setminus S$ possède au moins deux voisins, on a

$$|N(v) \cap S| \geq 1.$$

Ainsi S est un ensemble γ_o-dominateur et

$$|S| = \left\lfloor \frac{3 \cdot m}{2} \right\rfloor.$$

D'où

$$\gamma_o(P_3 \square P_m) = \left\lfloor \frac{3 \cdot m}{2} \right\rfloor.$$

Proposition 3.2. *Si $G = P_n \square P_m$ une grille de $n \times m$ sommets. Alors*

$$\gamma_o(P_n \square P_m) = \left\lfloor \frac{n \cdot m}{2} \right\rfloor$$

Preuve.

Soit G une grille $(P_n \square P_m)$ de $k = n \cdot m$ sommets. Soit S un γ_o-ensemble alors on définit :
$S = \{x_{i,j} \mid i+j \text{ est impair}\}$ et $V \setminus S = \{x_{i,j} \mid i+j \text{ est pair}\}$.

pour tout sommet $v \in V \setminus S$, nous avons $N(v) \subseteq S$, et $N(v) \cap (V \setminus S) = \emptyset$, sinon $|N(v) \cap S| < |N(v) \cap (V \setminus S)|$ contradiction, que S est un $\gamma_o(G)$-ensemble.

Comme chaque sommet v a au moins un voisin $d(v) \geq 2$, $|N(v) \cap S| \geq 1$ est toujours vrai car tous les voisins de v sont dans S.

D'où S est un ensemble γ_o-dominateur et :

$$\gamma_o(P_n \square P_m) = \left\lfloor \frac{n \cdot m}{2} \right\rfloor$$

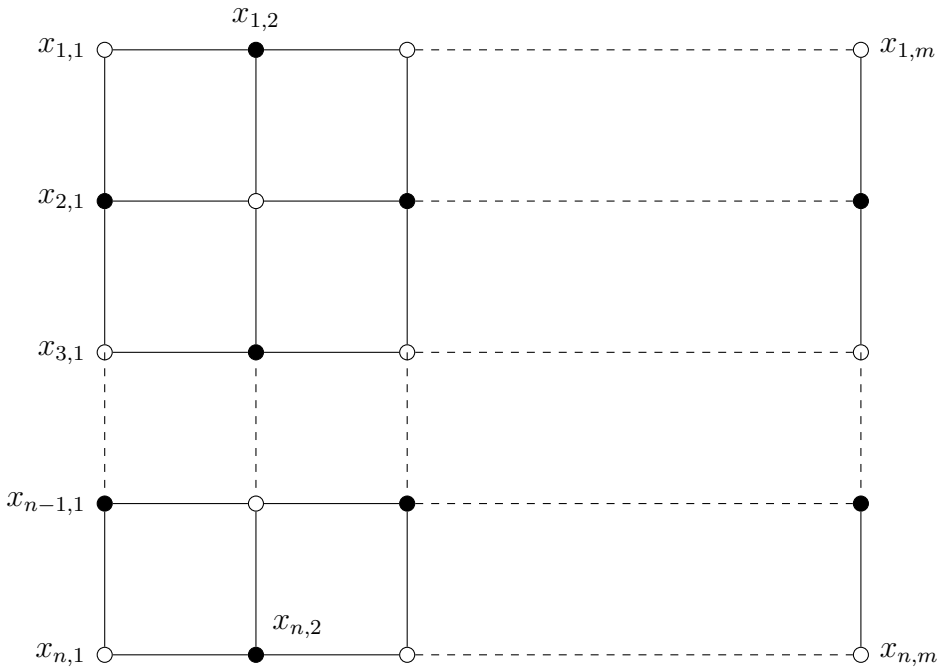


FIGURE 3.8 – grille $\gamma_o(P_n \square P_m)$

3.2.3 Calcul du nombre d'alliances défensives dans les grilles

Exemple 3.3. Voici quelques exemples défensives globales dans grilles $P_2\Box P_m$.

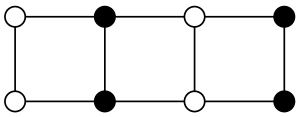


FIGURE 3.9 – $\gamma_a(P_2\Box P_4) = 4$

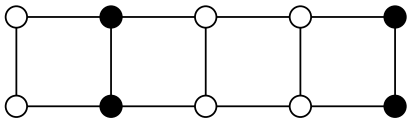


FIGURE 3.10 – $\gamma_a(P_2\Box P_5) = 4$;

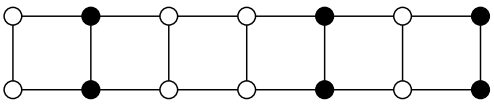


FIGURE 3.11 – $\gamma_a(P_2\Box P_7) = 6$

Observation 7. Si G une grille $(P_2\Box P_n)$ alors :

$\gamma_a(P_2\Box P_m) = 2\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$

Preuve.

La grille $P_2\Box P_m$ possède 2 lignes et m colonnes, avec $m \geq 1$, et on note les deux sommets de la colonne j par $x_j = (u_j, v_j)$.

I) Si $m \equiv 0 \pmod 3$**.**

On définit S comme un γ_a-ensemble en prenant, dans chaque groupe de trois colonnes consécutives $(j, j+1, j+2)$, la colonne centrale$(j+1)$ dans S.

Ainsi,

$$|S| = 2\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil .$$

Pour tout $u \in S$, on a $|N(u) \cap S| = 2$ et $|N(u) \cap (V \setminus S)| = 2$.

Donc

$$|N(u) \cap S| \geq |N(u) \cap (V \setminus S)|.$$

II) Si $m \equiv 1 \pmod 3$ **ou** $m \equiv 2 \pmod 3$**.**

Dans chaque groupe de trois colonnes, on prend la colonne centrale dans S et on ajoute également la dernière colonne.

Ainsi,

$$|S| = 2\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil .$$

Donc

$$\gamma_a(P_2 \square P_m) = 2\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil .$$

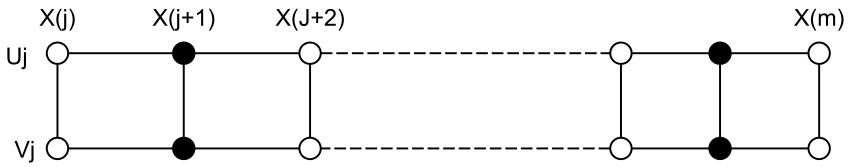


FIGURE 3.12 –

Exemple 3.4. Quelques exemples défensives globales dans grilles $P_3 \square P_m$.

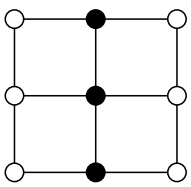


FIGURE 3.13 – $\gamma_a(P_3 \square P_3) = 3$

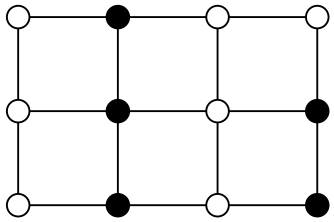


FIGURE 3.14 – $\gamma_a(P_3 \square P_4) = 5$

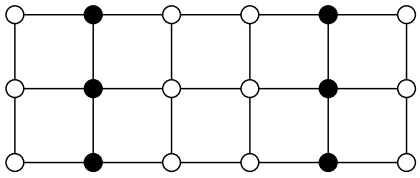


FIGURE 3.15 – $\gamma_a(P_3 \square P_6) = 6$

Proposition 3.3. *Pour tout entier $m \geq 3$, on a :*

$$\gamma_a(P_3 \square P_m) = \begin{cases} 3\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 1 & si\ m \equiv 1 \pmod 3 \\ 3\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil & sinon. \end{cases}$$

Preuve.

La grille $P_3 \square P_m$ possède 3 lignes et m colonnes. On note la j-ième colonne par X_j.

I) Si $m \equiv 0 \pmod 3$**.**

Dans chaque groupe de trois colonnes consécutives $(j, j+1, j+2)$, on choisit la colonne centrale $(j+1)$ dans S. Si $m \equiv 2 \pmod 3$, on ajoute en plus la dernière colonne. Ainsi,

$$|S| = 3\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil.$$

Cette construction domine tous les sommets et satisfait la condition d'alliance globale. Donc

$$\gamma_a(P_3 \square P_m) = 3\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil.$$

II) Si $m \equiv 1 \pmod 3$**.**

On choisit également la colonne centrale de chaque groupe de trois colonnes. Pour la colonne restante, il suffit d'ajouter deux sommets, ce qui donne

$$|S| = 3\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 1.$$

Par conséquent,

$$\gamma_a(P_3 \square P_m) = 3\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 1.$$

Ainsi,

$$\gamma_a(P_3 \square P_m) = \begin{cases} 3\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 1, & \text{si } m \equiv 1 \pmod 3, \\ 3\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 3.5. Quelques exemples défensives globales dans grilles $P_4 \square P_m$.

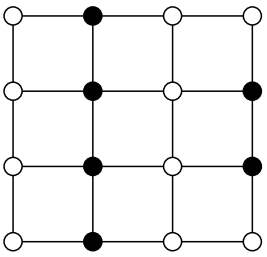


FIGURE 3.16 – $\gamma_a(P_4 \square P_4) = 6$

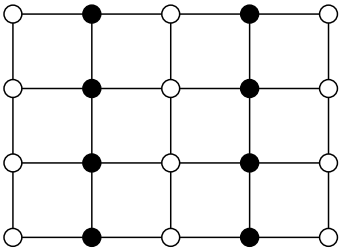


FIGURE 3.17 – $\gamma_a(P_4 \square P_5) = 8$

Proposition 3.4. *Pour tout entier $m \geq 4$, on a :*

$$\gamma_a(P_4 \square P_m) = \begin{cases} 4\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 2 & si\ m \equiv 1 \pmod 3, \\ 4\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil & sinon. \end{cases}$$

Preuve.

La grille $P_4 \square P_m$ possède 4 lignes et m colonnes. On note la j-ième colonne par X_j.

I) Si $m \equiv 0 \pmod 3$**.**

On construit un ensemble S en choisissant, dans chaque groupe de trois colonnes consécutives $(j, j+1, j+2)$, tous les sommets de la colonne centrale $(j+1)$. Si $m \equiv 2 \pmod 3$, on ajoute également la dernière colonne.

Ainsi,

$$|S| = 4\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil.$$

Cette construction domine tous les sommets de la grille et vérifie la condition d'alliance globale. Par conséquent,

$$\gamma_a(P_4 \square P_m) = 4\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil.$$

II) Si $m \equiv 1 \pmod 3$**.**

On choisit encore la colonne centrale dans chaque groupe de trois colonnes. Comme il ne reste qu'une seule colonne à traiter, il suffit d'ajouter deux sommets dans cette dernière colonne pour préserver la domination et la condition d'alliance globale.

Ainsi,

$$|S| = 4\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 2.$$

D'où,

$$\gamma_a(P_4 \square P_m) = 4\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 2.$$

Par conséquent, la relation annoncée est établie.

Proposition 3.5. *Pour tout n et m entier $m \geq n \geq 2$, on a :*

$$\gamma_a(P_n \Box P_m) = \begin{cases} n\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - (n - \gamma_t(P_n)) & \text{si } m \equiv 1 \pmod 3, \\ n\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec $\gamma_t(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$

Preuve.
Soit $G = P_n \Box P_m$, avec $m \geq n$.
Considérons l'ensemble

$$S = \{x_{i,j} \in V(G) \ : \ j \equiv 2 \pmod 3\}.$$

Si $m \not\equiv 1 \pmod 3$, l'ensemble S est formé d'une colonne sur trois. Tout sommet de $V(G) \setminus S$ possède au moins un voisin dans S, donc S est un ensemble dominant global. De plus, pour tout sommet $v \in S$,

$$|N(v) \cap S| \geq |N(v) \cap V \setminus S\|,$$

d'où S est une alliance globale . Ainsi,

$$\gamma_a(P_n \Box P_m) \leq |S| = n\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil.$$

D'autre part, dans chaque bloc de trois colonnes consécutives, au moins une colonne entière doit appartenir à toute alliance globale forte afin de dominer tous les sommets de la grille. Par conséquent,

$$\gamma_a(P_n \Box P_m) \geq n\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil.$$

Ainsi,

$$\gamma_a(P_n \Box P_m) = n\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil.$$

Supposons maintenant que

$$m \equiv 1 \pmod 3.$$

La construction précédente contient alors une dernière colonne entière isomorphe à P_n. Afin de minimiser la cardinalité de l'alliance, il n'est pas nécessaire de conserver tous les sommets de cette colonne. Il suffit de garder les sommets appartenant à un ensemble dominant total minimum de P_n.

Par conséquent, parmi les n sommets de cette dernière colonne, seuls $\gamma_t(P_n)$ sommets sont nécessaires, et l'on peut supprimer

$$n - \gamma_t(P_n)$$

sommets.
On obtient alors

$$\gamma_a(P_n \square P_m) = n \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - (n - \gamma_t(P_n)) .$$

Finalement,

$$\gamma_a(P_n \square P_m) = \begin{cases} n \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - (n - \gamma_t(P_n)) , & \text{si } m \equiv 1 \pmod 3, \\ n \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil , & \text{sinon.} \end{cases}$$

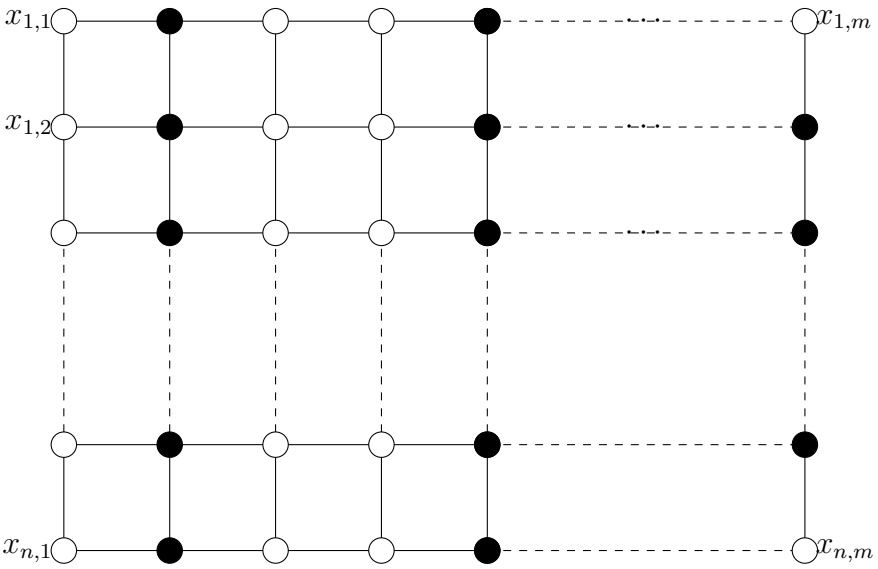


FIGURE 3.18 – Grille $\gamma_a(P_n \square P_m)$

3.3 Relations entre les paramétrés d'alliances

3.3.1 Relations entre $\gamma_{\hat{a}}(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$ dans les chaines

Proposition 3.6. *Pour toute chaine d'ordre $n \geq 2$, on a*

$$\gamma_{\hat{o}}(P_n) = \begin{cases} \gamma_{\hat{a}}(P_n) + 1, & si\ n \equiv 0 \pmod 4, \\ \gamma_{\hat{a}}(P_n), & sinon. \end{cases}$$

Preuve.
D'après les résultats précédents, on a

$$\gamma_{\hat{o}}(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1, & \text{si } n \equiv 0 \pmod 2, \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & \text{sinon,} \end{cases} \text{ et} \gamma_{\hat{a}}(P_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1, & \text{si } n \equiv 2 \pmod 4, \\ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous distinguons les cas suivants :

Cas 1 : $n \equiv 0 \pmod 4$.
Alors n est pair et $n \not\equiv 2 \pmod 4$. Ainsi,
$\gamma_{\hat{o}}(P_n) = \frac{n}{2} + 1$ et $\gamma_{\hat{a}}(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n}{2}$.
Par conséquent,

$$\gamma_{\hat{o}}(P_n) = \gamma_{\hat{d}}(P_n) + 1.$$

Cas 2 : $n \equiv 2 \pmod 4$.
Alors $\gamma_{\hat{o}}(P_n) = \frac{n}{2} + 1$ et $\gamma_{\hat{a}}(P_n) = \frac{n}{2} + 1$.
Donc

$$\gamma_{\hat{o}}(P_n) = \gamma_{\hat{d}}(P_n).$$

Cas 3 : $n \equiv 1 \pmod 4$ ou $n \equiv 3 \pmod 4$.
Alors n est impair, donc $\gamma_{\hat{o}}(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ et $\gamma_{\hat{a}}(P_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.
Ainsi,

$$\gamma_{\hat{o}}(P_n) = \gamma_{\hat{d}}(P_n).$$

la figure suivante est présenté le résultat :

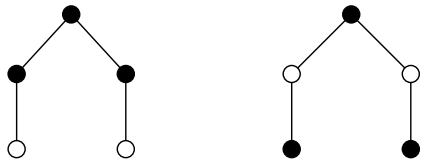


FIGURE 3.19 – $\gamma_{\hat{o}}(P_5) = \gamma_{\hat{a}}(P_5) = 3$

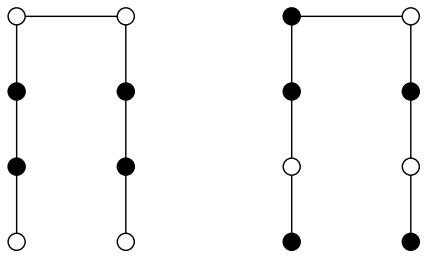


FIGURE 3.20 – $\gamma_{\hat{o}}(P_8) = \gamma_{\hat{a}}(P_8) + 1$

3.3.2 Relations entre $\gamma_o(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$ dans les grilles

Proposition 3.7. *Si $G = P_n \Box P_m$ une grille de $n \times m$ sommets. Alors*

$$\gamma_o(P_n \Box P_m) = \gamma_{\hat{o}}(P_n \Box P_m)$$

Preuve.

Par les définitions des alliances offensives globales et des alliances offensives fortes globales, on obtient

$$\gamma_o(P_n \Box P_m) \leq \gamma_{\hat{o}}(P_n \Box P_m).$$

D'autre part, la grille $P_n \Box P_m$ est un graphe biparti. Soit S la plus grande classe de sa bipartition. On a alors

$$|S| = \left\lceil \frac{nm}{2} \right\rceil.$$

Pour tout sommet $u \in V \setminus S$, tous ses voisins appartiennent à S. Par conséquent,

$$|N[u] \cap S| = d(u)$$

et

$$|N[u] \cap (V \setminus S)| = 1.$$

Comme $d(u) \geq 2$, il vient

$$|N[u] \cap S| > |N[u] \cap (V \setminus S)|.$$

Ainsi, S est une alliance offensive forte globale de $P_n \Box P_m$. Donc

$$\gamma_{\hat{o}}(P_n \Box P_m) \leq |S| = \left\lceil \frac{nm}{2} \right\rceil.$$

Or, d'après le résultat précédent,

$$\gamma_o(P_n \Box P_m) = \left\lceil \frac{nm}{2} \right\rceil .$$

Par conséquent,

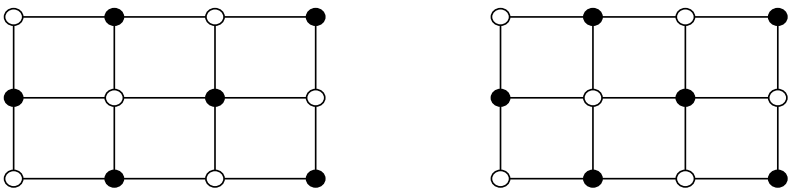
$$\gamma_{\hat{o}}(P_n \Box P_m) \leq \gamma_o(P_n \Box P_m).$$

On en déduit que

$$\gamma_o(P_n \Box P_m) = \gamma_{\hat{o}}(P_n \Box P_m).$$

Ce qui achève la démonstration.

La figure suivante représente un exemple d'alliance offensive de $P_3 \Box P_4$ avec $\gamma_o(P_3 \Box P_4) = 6$ et $\gamma_{\hat{o}}(P_3 \Box P_4) = 6$



3.3.3 Relations entre $\gamma_{\hat{a}}(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$ dans les arbres

À noter que la différence entre $\gamma_{\hat{a}}(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$ est très large dans certains graphes, par exemple.

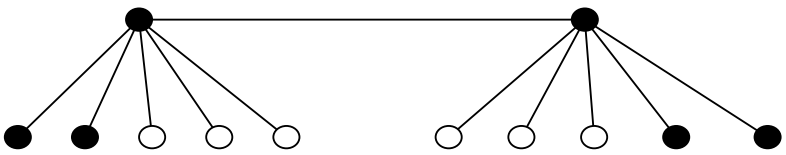


FIGURE 3.21 – $\gamma_{\hat{o}}(S_4, 4) = 6$

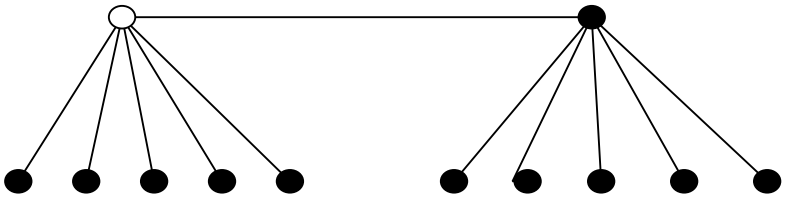


FIGURE 3.22 – $\gamma_{\hat{o}}(S_4, 4) = 9$

À notre connaissance, qu'aucune relation n'a été établie jusqu'à présent entre le nombre d'alliances défensives globales fortes et les alliances offensives globales fortes.
Il est très intéressant de trouver une relation entre ces deux invariants, $\gamma_{\hat{a}}(G)$ et $\gamma_{\hat{o}}(G)$.

Théorème 3.3.1. *(Bouzefrane,en préparation) Si T est un arbre d'ordre $n \geq 3$ alors :*

$$\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T) - 1.$$

Preuve.
Utilise l'induction sur l'ordre n de T . Si le diam$(T) = 2$,alors T est une étoile $K_{1,p}$ avec $\gamma_{\hat{a}}(K_{1,p}) = \lceil \frac{p}{2} \rceil + 1$ et $\gamma_{\hat{o}}(K_{1,p}) = p$. d'où le résultat est vrai. Si le diam$(T) = 3$ alors T est une double étoile $S_{p,q}$ avec $\gamma_{\hat{a}}(S_{p,q}) = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + \lfloor \frac{q}{2} \rfloor + 2$ et $\gamma_{\hat{o}}(S_{p,q}) = p + q$, Ainsi $\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T) - 1$.

Enracinons T a un sommet support d'excentricité maximum .On suppose maintenant que chaque arbre T' d'ordre n' avec $3 \leq n' \leq n$.
On a $\gamma_{\hat{a}}(T') \leq \frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T') - 1$ T un arbre d'ordre n .on Considérons cas suivants :
cas 1 .$|L_u| \geq 2$, $\deg_T(v) \geq 3$, alors tous fils de v est soit une feuille ou bien un sommet support. Soit $T' = T - T_u$.Puisque le diam$(T) \geq 4$

T' est d'ordre au moins trois .Soit S' un$\gamma_{\hat{a}}(T)$-ensemble. Si v un sommet support alors $v \in S'$ .Si v n'est pas un sommet support ,alors S' contient v et tous leur fils.Ou S' contient tous les descendants de v et pas v . La minimalité de S' implique que le deuxième cas est puis si et seulement si le $\deg'_T(v) = 2$. Supprimant le feuille de v de S' et ajoutent v ,D'où $\gamma_{\hat{a}}(T)$-ensemble contient v , alors on peut supposer qu'il a un $\gamma_{\hat{a}}(T)$-ensemble qui contient v .Un tel ensemble le peut être étendu à un GSDA de T' en ajoutent u et $\left\lfloor \frac{|L_u|}{2} \right\rfloor$ fils de u ; et donne

$$\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \gamma_{\hat{a}}(T') + 1 + \left\lfloor \frac{|L_u|}{2} \right\rfloor$$

$$\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{4}{3}\gamma_{\hat{a}}(T') - 1 + 1 + \left\lfloor \frac{|L_u|}{2} \right\rfloor$$

$$\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{4}{3}\gamma_{\hat{a}}(T') + \left\lfloor \frac{|L_u|}{2} \right\rfloor$$

De plus, si D est un $\gamma_{\hat{o}}(T)$-ensemble de T' alors $D \cup \{L_u\}$ est un GSDO ; et donne $\gamma_{\hat{o}}(T') \leq \gamma_{\hat{a}}(T) - |L_u|$.d'où

$$\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{4}{3}\Big[\gamma_{\hat{o}}(T) - |L_u|\Big] + \left\lfloor \frac{|L_u|}{2} \right\rfloor.$$

$$\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T) - \frac{4}{3}|L_u| + \left\lfloor \frac{|L_u|}{2} \right\rfloor.$$

$$\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T) - 1.$$

cas2 $\deg_T(v) = 2$

Soit w le père de v sur l'arbre enraciné ,Vu le cas précédant on peut supposer que tous les fils de w et de degré au plus deux. On suppose premièrement que w n'est pas un sommet support .Soit $T' = T - T_v$

et on peut supposer que T est d'ordre au moins trois . $\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \gamma_{\hat{a}}(T') + 2$. Puisque tous $\gamma_{\hat{a}}(T)$ peut étendu a un GSDA .

en ajoutant u et v ,il est facile de voir que

$$\gamma_{\hat{o}}(T') \leq \gamma_{\hat{o}}(T) - 2$$

$$\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{4}{3}\,\gamma_{\hat{o}}(T') + 1.$$

$$\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{4}{3}\,(\gamma_{\hat{o}}(T) - 2) + 1$$

$$\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T) - \frac{5}{3} \leq \frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T) - 1$$

On suppose maintenant que le $\deg(w) \geq 3$ et que chaque chaine attaché a w sauf $P_3 = uvy$ est une chaine P_2, done T_w est obtenu à partir d'une étoile $K_{1,p}$ avec $p \geq 2$ ou exactement chaque arrête est subdvisé deux fois. Soit $T' = T - T_w$, puisque w n'est pas un support alors T' est d'ordre au moins deux, si non le résultat est vrai. On suppose que T' est d'ordre au moins trois alors $\gamma_{\hat{a}}(T) \leqslant \gamma_{\hat{a}}(T') + p + 3$ et $\gamma_{\hat{o}}(T') \leqslant \gamma_{\hat{o}}(T) - p - 3$; Utilisons l'induction sur

T', on obtient $\gamma_{\hat{a}}(T) \leqslant \left(\frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T') - 1\right) + p + 3 \leqslant \left(\frac{4}{3}\left[\gamma_{\hat{o}}(T') - p - 3\right]\right) - 1 + p + 3$ d'ou $\gamma_{\hat{a}}(T) \leqslant \frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T) - \frac{4p}{3} - 4 - 1 + p + 3 = \frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T') - 2 - \frac{p}{3} \leqslant \frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T) - \frac{p+6}{3}$ et puisque $p \geq 2$ d'ou $\gamma_{\hat{a}}(T) \leqslant \frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T) - 1$. .
Finalement on suppose que $\deg_T(w) = 2$, soit $T' = T - T_w$, on suppose que T' est d'ordre au moins trois si non $T \in \{p_5, p_6\}$ et le résultat est vrai, alors tous $\gamma_{\hat{a}}(T')$-ensemble peut etre étendu en une GSDA de T en ajoutant u, v, w et donc $\gamma_{\hat{a}}(T) \leqslant \gamma_{\hat{a}}(T') + 3$

Et cette borne est atteinte pour

$$G \cong P_5 \text{ ou } G \cong K_{1,3}.$$

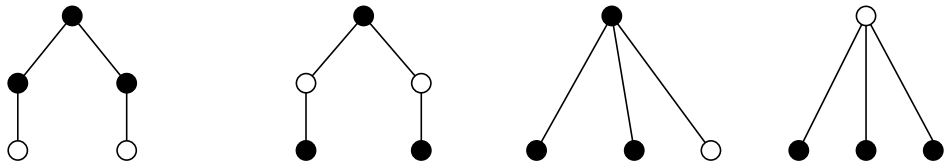


FIGURE 3.23 – $\gamma_{\hat{a}}(T) = \frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T) - 1$

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude des alliances globales et des alliances globales fortes dans certaines classes de graphes. La détermination de ces paramètres constitue, en général, un problème difficile pour un graphe quelconque.

Dans un premier temps, nous avons présenté les notions fondamentales relatives aux différentes formes d'alliances dans les graphes ainsi qu'un ensemble de résultats connus de la littérature.

Par la suite, nous avons déterminé les nombres d'alliances globales fortes défensives $\gamma_a(G)$ et offensives $\gamma_o(G)$ pour certaines classes particulières de graphes, notamment les grilles $P_n \Box P_m$, les chaînes P_n et les arbres.

Nous avons également établi plusieurs relations entre ces invariants. En particulier, nous avons montré que, pour tout arbre T d'ordre $n \geq 3$, $\gamma_{\hat{a}}(T) \leq \frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T) - 1$.

Les résultats obtenus contribuent à une meilleure compréhension du comportement des alliances globales fortes dans les graphes étudiés. Ils ouvrent également la voie à de nouvelles recherches portant sur la détermination de ces paramètres dans d'autres familles de graphes et sur l'établissement de nouvelles relations entre les différents invariants d'alliances. Comme perspective à notre travail, nous proposons

- Étendre les bornes obtenues à d'autres classes de graphes.
- Caractériser les graphes pour lesquels : $\gamma_{\hat{a}}(T) = \frac{4}{3}\gamma_{\hat{o}}(T) - 1$.

Bibliographie

[1] Mohamed Bouzefrane and Mustapha Chellali. On the global offensive alliance number of a tree. *Opuscula Mathematica*, 29(3) :223–228, 2009.

[2] Mohamed Bouzefrane and Mustapha Chellali. A note on global alliances in trees. *Opuscula Mathematica*, 31(2) :153–158, 2011.

[3] Mohamed Bouzefrane, Mustapha Chellali, and Teresa W Haynes. Global defensive alliances in trees. *Utilitas Mathematica*, 82 :241–252, 2010.

[4] Mohamed Bouzefrane and Saliha Ouatiki. On the global offensive alliance in unicycle graphs. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 15(1) :72–78, 2018.

[5] Robert C Brigham, Ronald D Dutton, Teresa W Haynes, and Stephen T Hedetniemi. Powerful alliances in graphs. *Discrete Mathematics*, 309(8) :2140–2147, 2009.

[6] Chan-Wei Chang, Ma-Lian Chia, Cheng-Ju Hsu, David Kuo, Li-Ling Lai, and Fu-Hsing Wang. Global defensive alliances of trees and cartesian product of paths and cycles. *Discrete Applied Mathematics*, 160(4) :479–487, 2012.

[7] Mustapha Chellali. Offensive alliances in bipartite graphs. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, 73 :245, 2010.

[8] Mustapha Chellali and Teresa Haynes. Global alliances and independence in trees. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 27(1) :19–27, 2007.

[9] Mustapha Chellali, Teresa Haynes, Bert Randerath, and Lutz Volkmann. Bounds on the global offensive k-alliance number in graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 29(3) :597–613, 2009.

[10] Mustapha Chellali, Teresa W Haynes, and Lutz Volkmann. Global offensive alliance numbers in graphs with emphasis on trees. *Australas. J Comb.*, 45 :87–96, 2009.

[11] Teresa W. Haynes, Stephen T. Hedetniemi, and Michael A. Henning. Global defensive alliances in graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 10 :R47, 2003.

[12] Saliha Ouatiki and Mohamed Bouzefrane. A lower bound on the global powerful alliance number in trees. *RAIRO-Operations Research*, 55(2) :495–503, 2021.

[13] Kahina Ouazine, Hachem Slimani, and Abdelkamel Tari. Alliances in graphs : Parameters, properties and applications—a survey. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 15(2) :115–154, 2018.

[14] CHIKHI OUSSAMA, SAIB HOUSSAM EDDINE, and BOUZEFRANE Mohamed (Encadreur). Les alliances globales dans les graphes et ses applications. Master's thesis, Université Yahia Fares - Médéa, 2023.

[15] JA Rodriguez and JM Sigarreta. Offensive alliances in cubic graphs. *arXiv preprint math/0610023*, 2006.

[16] Juan Alberto Rodríguez-Velázquez and José María Sigarreta. Global defensive k-alliances in graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 157(2) :211–218, 2009.

[17] José María Sigarreta and JA Rodríguez. On the global offensive alliance number of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 157(2) :219–226, 2009.