République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences - Département de Mathématiques et l'Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Par

CHAIRI Sallah Eddine et **SAOUDAOUI Abd Elhadi**

Thème :

AUTOUR DE LA COALITION DANS LES GRAPHES

Soutenu le jury composé de :

Mr.	A. BENKACI	Maître Assistant	UYF Médéa	Président
Mr.	R. LEMDANI	Maître de Conférences	UYF Médéa	Examinteur
Mme.	S. KOUIDER AIAD	Maître Assistant	UYF Médéa	Examintarice
Mr.	N. IKHLEF ESCHOUF	Professeur	UYF Médéa	Promoteur

Médéa, le 18 juin 2023

RÉSUMÉ

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple. Un ensemble S de V est dit dominant dans G si tout sommet qui n'appartient pas à S est adjacent à au moins un sommet de S. Deux sous-ensembles disjoints V_1 et V_2 de V forment une coalition dans G si $V_1 \cup V_2$ est un ensemble dominant de G mais V_1 et V_2 ne sont pas des ensembles dominants de G. Une partition de sommets $\pi = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ est appelée une partition de coalitions, si chaque ensemble V_i est un ensemble dominant formé d'un seul sommet, ou V_i n'est pas un ensemble dominant mais il forme une coalition avec un autre ensemble V_j qui n'est pas lui même un ensemble dominant. Le nombre maximum des classes de π est appelé le nombre de coalitions de G, et il se note $C(G)$, sa détermination est un problème NP-complet en général. Dans ce mémoire, nous avons proposé des bornes inférieures et supérieures relevant de ce paramètre. Des valeurs exactes de $C(G)$ pour certaines graphes particuliers sont déterminées.

ABSTRACT

Let $G = (V, E)$ be a simple graph. An set S of V is said to be dominating in G if every vertex not in S is adjacent to at least one vertex in S. Two disjoint subsets V_1 and V_2 of V form a coalition in G if $V_1 \cup V_2$ is a dominating set of G, but neither V_1 nor V_2 are dominating sets of G. A vertex partition $\pi = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ is called a coalition partition if each set V_i is a dominating set consisting of a single vertex, or V_i is not a dominating set but forms a coalition with another set V_j that is not itself a dominating set. The maximum number of π is called the coalition number of G and is denoted as $C(G)$. Determining $C(G)$ is generally an NP-complete problem. In this paper, we have proposed lower and upper bounds for this parameter. Exact values of $C(G)$ for certain specific graphs have been determined.

REMERCIEMENTS

Nous exprimons notre reconnaissance infinie à ALLAH le Tout-Puissant, de nous avoir gratifiés du courage, de la volonté et de la patience nécessaires pour mener à bien ce travail.

Un vif remerciement va à notre promoteur Monsieur **N. IKHLEF ESCHOUF**, Professeur à l'université **YAHIA FARES** de Médéa qui a gracieusement accepté de nous guider, de nous orienter et de nous prodiguer leurs précieux conseils. Nos remerciements vont également à Monsieur **A. BENKACI**, Maître Assistant à l'université **YAHIA FARES** de Médéa pour son aide précieuse et pour avoir accepter de présider le jury de ce mémoire.

Nous adressons également nos remerciements à Madame **S. KOUIDER AIAD**, Maître Assistante à l'université **YAHIA FARES** de Médéa et Monsieur **R. LEMDANI**, Maître de Conférences à l'université **YAHIA FARES** de Médéa, pour avoir accepter de lire notre travail et de faire partie de notre jury de mémoire.

Nous tenons en outre à exprimer notre profonde gratitude envers l'ensemble des enseignants du département M.I de l'université **YAHIA FARES** de Médéa.

Enfin, il est primordial pour nous de témoigner toute notre reconnaissance à nos vénérés parents, dont les efforts inlassables ont contribué à ce que nous puissions accomplir ce mémoire dans des conditions optimales.

Nos sincères remerciements vont également à nos chers sœurs et chers frères, qui ont toujours été présents à nos côtés, apportant leur soutien indéfectible tout au long de notre parcours universitaire, sans oublier nos amis.

Table des matières

RESUME i

ABSTRACT ii

REMERCIEMENTS iii

TABLES DES MATIERES v

LISTE DES FIGURES vii

INTRODUCTION 1

1 Notions générales sur les graphes 3

1.1 **Concepts de base** . . . 3

1.1.1 Graphes et sous-graphes . . . 4

1.1.2 Chaîne, cycle et connexité . . . 5

1.2 **Quelques propriétés des graphes** . . . 6

1.2.1 Quelques invariants de base . . . 7

1.2.2 Quelques classes de graphes classiques . . . 8

1.3 **Domination** . . . 12

1.4 **Partition domatique d'un graphe** . . . 14

1.5 **Coloration** 15

2 Quelques résultats sur la coalition dans les graphes **16**

2.1 **Définitions** 16

2.2 **Bornes et valeurs exactes sur C(G)** 17

2.2.1 Coalitions dans les chaînes et dans les cycles 21

2.2.2 Coalition dans les graphes cubique 21

2.3 **Autres variantes de la coalition** 23

2.3.1 Coalition total dans graphe 23

2.3.2 Graphe de coalition. 24

3 Nouveaux résultats sur le nombre de coalition **25**

3.1 Borne inférieure sur $C(G)$ 25

3.2 Borne supérieure sur $C(G)$ 28

3.3 Valeurs exactes de $C(G)$ pour certains graphes particuliers 28

Conclusion **32**

Table des figures

1.1 H est un sous-graphe induit de G 5

1.2 H est un graphe partiel de G 5

1.3 La chaîne P_7 5

1.4 Exemple d'un graphe connexe et d'un graphe non connexe 6

1.5 Le cycle C_6 6

1.6 Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$ 8

1.7 Le graphe complet K_6 et le graphe discret $\overline{K_6}$. 8

1.8 Le graphe biparti complet $K_{2,4}$ 9

1.9 Le graphe roue d'ordre 7. 9

1.10 Un arbre T 10

1.11 L'étoile $K_{1,n-1}$ 10

1.12 Double étoile $S_{r,s}$ 11

1.13 La chenille $c(3,0,3,1)$ 11

1.14 Graphe 4-régulier 11

1.15 Graphe cubique d'ordre 6 12

1.16 Un graphe $2K_3$ 12

1.17 Cycle C_6 et partition domatique de C_6 14

2.1 Graphes cubique d'ordre 6 22

2.2 Graphes cubiques d'ordre 8 22

2.3 le graphe de coalition $CG(C_6, \pi)$ 24

vii Liste des Figures

INTRODUCTION

La théorie des graphes est une branche des mathématiques qui a beaucoup progressé. Elle est très utile car elle permet de modéliser toutes sortes de problèmes liés à l'idée de réseau. Par exemple, un site web peut être représenté par un graphe où chaque page est un sommet et chaque lien est une arête. En physique et en chimie, on peut utiliser la théorie des graphes pour modéliser les molécules, où chaque atome est un sommet et chaque liaison chimique est une arête. C'est un outil puissant pour résoudre des problèmes de tous les jours. La théorie des graphes est un domaine important des mathématiques qui aide à modéliser et à analyser les relations entre des objets, des personnes ou des événements.

Un concept nouveau de la théorie des graphes est la coalition, qui est utilisée pour modéliser les interactions entre les entreprises d'un marché, les partis politiques d'une démocratie ou les groupes sociaux d'une communauté. En d'autres termes, une coalition est un groupe d'individus qui travaillent ensemble pour atteindre un résultat spécifique. Les membres de coalition peuvent partager des ressources, des informations ou des compétences pour atteindre leurs objectifs communs.

En s'inspérant de cette idée, Haynes et al. [7] ont défini et introduit le concept de la coalition dans les graphes. Deux ensembles de sommets disjoints V_1 et V_2 dans un graphe G forment une colalition si V_1 et V_2 ne sont pas des ensembles dominants de G mais l'union V_1 et V_2 est un ensemble dominant de G. Les ensembles V_1 et V_2 sont considérés comme des partenaires de coalition.

Dans ce mémoire, nous étudions le concept de la partition en coalition de l'ensemble de sommets d'un graphe G. Une partition de coalition dans un graphe G, appelée par la suite une c-partition, est une partition de sommets $\pi = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ telle que chaque ensemble V_i de π est soit un ensemble dominant singleton, soit ne forme pas un ensemble dominant mais forme une coalition avec un autre ensemble V_j de π. Le nombre de coalition $C(G)$ est égal à l'ordre maximum k d'une partition c de G, ayant un ordre de $C(G)$ est appelée une $C(G)$-partition. Ce manuscrit comporte trois chapitres organisés comme suit :

Chapitre 1 : Notions générales sur les graphes. Dans la première section de ce chapitre, nous présentons les principaux concepts de base de la théorie des graphes qui seront utiles tout au long de ce mémoire. Dans la deuxième section, nous présentons les définitions et les notations relatives à la domination. Dans la troisième section, nous abordons quelques propriétés des graphes. Dans la quatrième section, nous présentons les définitions relatives à la coloration.

Chapitre 2 :Quelques résultats existant sur la coalition dans les graphes. Dans ce chapitre, nous passons en revue quelques résultats existants dans la littérature sur la coalition dans les graphes. Dans la première partie, nous donnerons quelques définitions liées au concept de la coalition et la c-partition d'un graphe. Ensuite, dans la deuxième partie, nous discuterons des bornes et des valeurs exactes sur $C(G)$. Enfin, dans la troisième partie, nous examinerons d'autres variantes de la coalition.

Chapitre 3 : Nouveaux résultats sur le nombre de coalition

Le troisième chapitre de ce travail, est consacré à notre contribution. Après avoir examiné les travaux existant dans la littérature, nous avons remarqué qu'il n'y a pas assez de travaux concernant le paramètre $C(G)$ dans le cas d'un graphe connexe. Dans ce sens, nous avons proposé des bornes inférieures et supérieures et valeurs exactes de $C(G)$.

Chapitre 1

Notions générales sur les graphes

Le but de ce chapitre est d'introduire les concepts et la terminologie employés tout au long de ce document. La première section rappellera certaines définitions clés de la théorie des graphes et fournira un bref aperçu des paramètres structurels d'un graphe. Nous examinerons également certains invariants de graphes. Les termes spécifiques à chaque section seront définis et expliqués dans leurs sections respectives. Finalement, nous aborderons succinctement les concepts de la domination, de la partition domatique et de la coloration dans les graphes.

Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce mémoire, nous invitons le lecteur à se référer aux ouvrages de Berge *[4]*, Haynes, Hedetniemi et Slater *[10]*.

1.1 Concepts de base

Nous présentons dans cette section les principales notions requises pour comprendre le contenu de ce mémoire.

1.1.1 Graphes et sous-graphes

Le concept de *graphe* $G = (V, E)$ consiste en deux ensembles finis. l'ensemble de sommets V et l'ensemble d'arêtes E. Le cardinal de V est appelé l'*ordre* de G, noté par $n(G)$. Une arête $e \in E$ est une paire de sommets (u, v) notée par $e = uv$, où u et v sont les *extrémités* de e. Dans ce cas, u et v sont considérés comme *adjacents* et e est considérée comme *incidente* à u et v. Une *boucle* est une arête qui relie un sommet à lui-même. Pour qu'un graphe soit qualifié de simple, il ne doit pas contenir de boucles ni d'arêtes multiples. Dans ce mémoire, seuls les graphes simples et finis sont considérés.

Le *voisinage ouvert* d'un sommet v est défini comme $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ Le *voisinage fermé* de v est quant à lui défini comme étant $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, *le voisinage ouvert* est $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ et le *voisinage fermé* $N_G[S] = \bigcup_{v \in S} N(v) \cup S$.

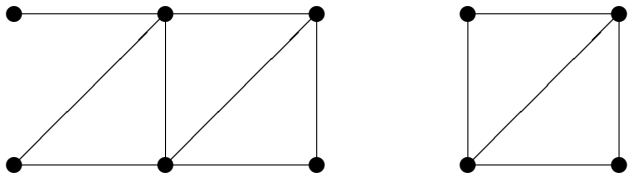
Le degré d'un sommet $x \in S$, noté $d_G(x)$ est égal au nombre de ses voisins dans G, c'est-à-dire $d_S(x) = |N_S(x)|$. On notera $\Delta(G)$ et $\delta(G)$ respectivement le *degré maximum* et le *degré minimum* dans G.

Un sommet qui n'a pas d'arête incidente est appelé sommet *isolé*. Un sommet avec exactement une arête incidente est appelé sommet *pendant*, tandis qu'un sommet adjacent à un sommet pendant est appelé sommet *support*. Un sommet *dominant* est un sommet qui possède exactement $n - 1$ arêtes incidentes.

Un sommet *simplicial* est un sommet dont tous les voisins sont deux à deux.

Un graphe H est un sous-graphe du graphe G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Un sous-graphe H de G est dit induit si $E(H)$ contient toutes les arêtes de G dont les deux extrémités sont dans $V(H)$. Etant donné un sous-ensemble A de V, le sous-graphe induit par A est noté par $G[A]$. La Figure 1.1.illustre un graphe G et un sous-graphe H de G**.** Pour un sommet v de V, le graphe $G - v$ désigne le sous-graphe engendré par $V - \{v\}$.

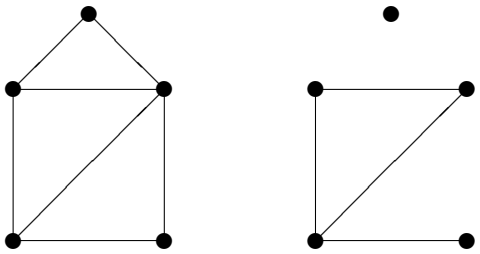
Un graphe partiel H d'un graphe G est un graphe tel que $E(H) \subseteq E(G)$ et $V(H) = V(G)$.



$G = (V, E)$ $H = (V(H), E(H))$

FIG. 1.1 – H est un sous-graphe induit de G

Un sous-graphe d'un graphe partiel de G est appelé sous-graphe partiel de G. Un exemple d'un graphe G et d'un graphe partiel H de G est donné dans la Figure 1.2.



$G = (V, E)$ $H = (V, E(H))$

FIG. 1.2 – H est un graphe partiel de G

1.1.2 Chaîne, cycle et connexité

chaîne

Une *chaîne* est une séquence alternative de sommets et d'arêtes, notée $(v_1, e_1, v_2, e_2, ..., e_{k-1}, v_k)$, où k est un entier positif. La longueur de cette chaîne est égale à $k - 1$. La Figure 1.3 présente un exemple d'une chaîne d'ordre 7 (P_7).



FIG. 1.3 – La chaîne P_7

Connexité

Un graphe $G = (V, E)$ est dit connexe si toute paire de sommets dans le graphe est reliée par un chaîne. Un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes. Une composante connexe d'un graphe est un sous-graphe induit maximal. La Figure 1.4 est un exemple de deux graphes l'un est connexe et l'autre est non connexe possédant deux composantes connexes.



G H

FIG. 1.4 – Exemple d'un graphe connexe et d'un graphe non connexe

cycle

Un *cycle* de longueur n, noté C_n, est un graphe connexe de degré 2, composé de n sommets. Le cycle peut être représenté par la suite ordonnée de ses sommets $(v_1, v_2, ..., v_n)$, où les arêtes sont définies comme suit :$v_i v_{i+1} \in E(C_n)$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, ainsi que l'arête $v_n v_1 \in E(C_n)$. Un cycle d'ordre 6 est présenté dans la Figure 1.5.

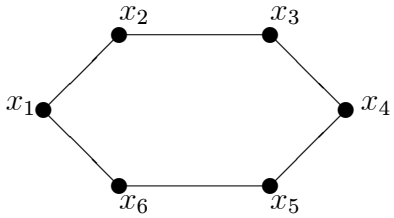


FIG. 1.5 – Le cycle C_6

1.2 Quelques propriétés des graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple d'ordre n.

1.2.1 Quelques invariants de base

- Une *clique* de G est définie comme un ensemble de sommets qui sont tous adjacents les uns aux autres. La taille d'une clique est équivalente au nombre de ses sommets. Une clique de G est dite maximale si elle atteint la taille maximale parmi toutes les cliques possibles dans G.
- Un *couplage* dans un graphe G est constitué d'un ensemble d'arêtes qui sont mutuellement non adjacentes. La taille maximale d'un couplage dans G sera notée $\alpha_0(G)$. On dira qu'un couplage est parfait dans G si sa taille $\alpha_0(G) = \frac{n}{2}$. Il est important de noter que la détermination de $\alpha_0(G)$ peut être effectuée en temps polynomial pour tout graphe G.
- Un ensemble *indépendant* dans G, également appelé ensemble *stable*, est un ensemble de sommets dans G qui ne sont pas adjacents les uns aux autres. Un ensemble *stable maximum* S dans G est un ensemble *stable* avec le plus grand nombre de sommets. Le nombre de *stabilité* (aussi appelé nombre d'*indépendance*), noté $\alpha(G)$, est le plus grand nombre possible de sommets dans un ensemble *stable* S de G.
- Deux graphes sont considérés comme *isomorphes* s'ils ont la même structure, c'est-à-dire s'il existe une fonction bijective entre les ensembles des sommets des deux graphes, telle que deux sommets sont adjacents dans l'un des graphes si et seulement si leurs sommets correspondants par la fonction bijective sont adjacents dans l'autre graphe. Si deux graphes sont *isomorphes*, cela signifie qu'ils ont des propriétés communes, appelées invariants de graphes. En d'autres termes, un *invariant* est une propriété qui reste constante sous *l'isomorphisme.* Le nombre de sommets et le nombre d'arêtes sont deux *invariants* de base d'un graphe.

1.2.2 Quelques classes de graphes classiques

Le graphe complémentaire d'un graphe

Le graphe complémentaire d'un graphe G, noté $\overline{G}$, est un graphe qui possède le même ensemble de sommets que G. Une arête est présente dans $\overline{G}$ si elle n'est pas présente dans G. Voir un exemple d'un graphe et de son complémentaire dans la Figure 1.6.

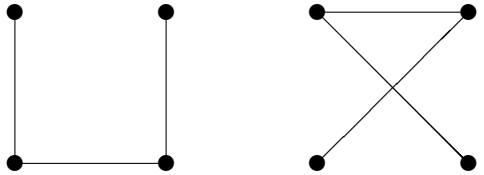


FIG. 1.6 – Un graphe G et son complémentaire $\overline{G}$

Graphe complet et graphe discret

Un graphe est considéré complet s'il y a une arête entre chaque paire de sommets. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe, chaque sommet est relié à tous les autres sommets, ce qui signifie que chaque sommet a un degré égal à $n-1$.

Un graphe G est discret ou nul s'il ne contient aucune arête, c'est-à-dire que son ensemble d'arêtes E est vide.On le note par $\overline{K_n}$. Voir un exemple d'un graphe complet et d'un graphe discret dans la Figure 1.7.

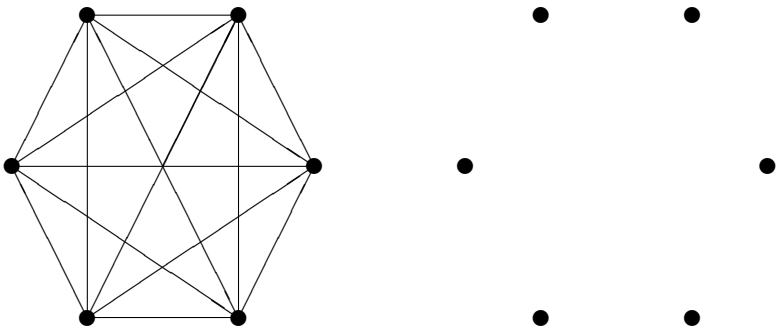


FIG. 1.7 – Le graphe complet K_6 et le graphe discret $\overline{K_6}$.

Graphe biparti

Un graphe *biparti* G est un graphe d'ordre $n \geq 2$, dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux ensembles stables distincts X et Y. Un graphe biparti complet est un graphe biparti maximal en terme de nombre d'arêtes, c'est à dire $|E| = |X| \,.\, |Y|$. Il est noté $K_{p,q}$ avec $p = |X|$ et $q = |Y|$, (voir Figure 1.8).

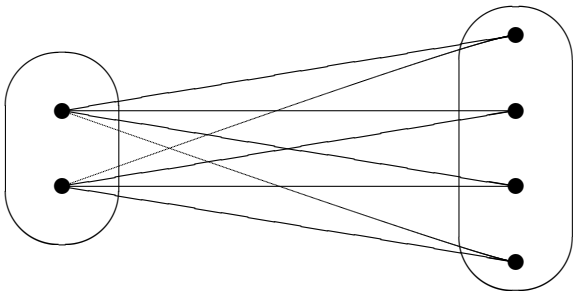


FIG. 1.8 – Le graphe biparti complet $K_{2,4}$

La roue

La roue Wn est un graphe d'ordre $n \geq 4$ est formée à partir d'un cycle d'ordre $n-1$ en ajoutant un sommet qui est adjacent à tous les sommets du cycle, (voir Figure 1.9).

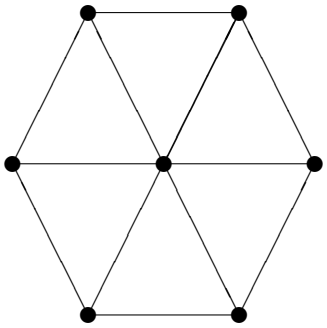


FIG. 1.9 – Le graphe roue d'ordre 7.

Arbres

Un arbre est un graphe connexe qui possède exactement $n-1$ arêtes, où n représente le nombre de sommets du graphe, (voir Figure 1.10).

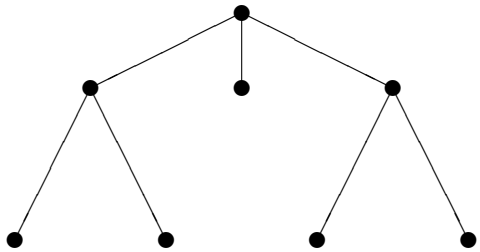


FIG. 1.10 – Un arbre T

Etoiles

L'arbre d'ordre n ayant $n-1$ sommets pondants est appelé *étoile* et noté $K_{1,n-1}$. Le sommet de degré $n-1$ est appelé. sommet centre. (voir Figure 1.11).

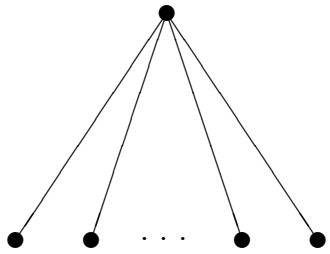


FIG. 1.11 – L'étoile $K_{1,n-1}$

Double étoile

Une double étoile est un graphe, notée $S_{r,s}$ qui est obtenu à partir de deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ en attachant leurs centres par une arête (voir Figure 1.12).

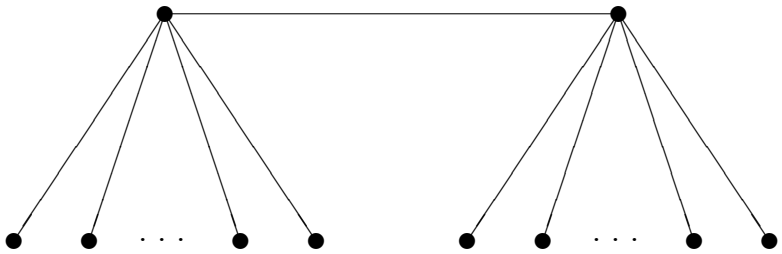


FIG. 1.12 – Double étoile $S_{r,s}$

Chenille

Une *chenille* est un arbre dont la suppression de ses sommets qui ne sont pas des feuilles produit une chaîne appelée la *colonne vertébrale* de la *chenille*. Cette dernière est représentée par $C(t_1, t_2, ..., t_s)$, où la séquence des entiers positifs $(t_1, t_2, ..., t_s)$ correspond au nombre de sommets qui ne sont pas des feuilles (voir Figure 1.13).

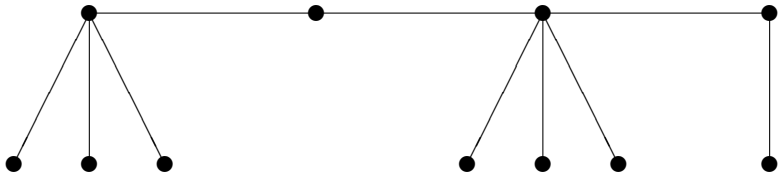


FIG. 1.13 – La chenille $c(3, 0, 3, 1)$

Graphes r-régulier

Un graphe dans lequel tous les sommets ont le même degré r, est appelé un graphe *r-régulier*, ainsi pour tout sommet x de V, on a $d_G(x) = r$.(voir Figure 1.14).

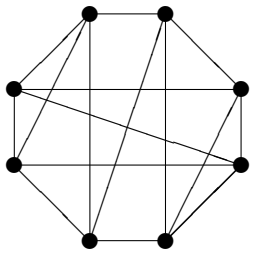


FIG. 1.14 – Graphe 4-régulier

Graphe cubique

Un graphe cubique est un graphe 3-régulier. (voir Figure 1.15).

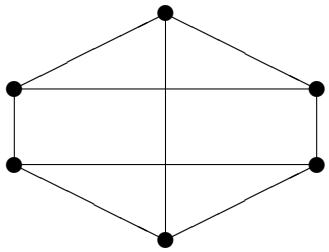


FIG. 1.15 – Graphe cubique d'ordre 6

Union de deux graphes

Soient G et H deux graphes. L'union de G et H est le graphe $G + H$ dont l'ensemble des sommets est $V(G) \cup V(H)$ et l'ensemble des arêtes est $E(G) \cup E(H)$. Pour un entier k donné, l'union de k copies de G est notée par kG. (voir Figure 1.16).

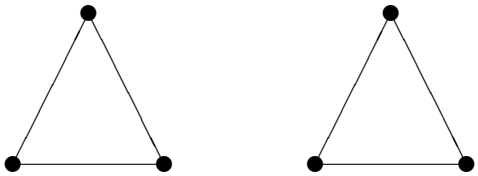


FIG. 1.16 – Un graphe $2K_3$

1.3 Domination

Etant donné un graphe simple $G = (V, E)$, un sous ensemble de sommets $D \subseteq V$ de G est dit ensemble *dominant* si tout sommet $v \in V - D$ est adjacent à au moins un sommet $u \in D$. L'ensemble dominant D est *minimal* si pour tout sommet v de G, $D - \{v\}$ n'est pas un ensemble dominant de G. Le *nombre de domination inférieur* (appelé aussi *nombre de domination*), noté $\gamma(G)$, d'un graphe G représente la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G. Un ensemble *dominant minimum* avec une telle cardinalité $\gamma(G)$ est appelé $\gamma(G)$-*ensemble*.

Par exemple, pour le cycle C_6 (voir Figure 1.5), on a $\gamma(G) = 2$, où $\{x_1, x_4\}$, $\{x_2, x_5\}$ et $\{x_3, x_6\}$ sont des $\gamma(G)$-ensembles.

Parmi les résultats obtenus sur la domination, on cite le suivant :

Théorème 1.3.1 *[12]Soit D un ensemble dominant d'un graphe simple $G = (V, E)$. Alors D est minimal si et seulement si pour tout sommet $u \in D$, u est isolé dans D ou u a un voisin privé dans $V - D$.*

Théorème 1.3.2 *[12]Si $G = (V, E)$ est un graphe sans sommets isolés, alors le complémentaire $V - S$ de tout ensemble dominant minimal $S \subset V$ est un ensemble dominant.*

Différents types de domination sont définis en ajoutant des propriétés supplémentaires à l'ensemble des sommets dominants. Voici une description de quelques-uns des types les plus étudiés.

Domination totale

Un sous-ensemble de sommets $D \subseteq V$ est un dominant total si chaque sommet de V est adjacent à au moins un sommet de D. De manière plus formelle, D satisfait à la condition $N(D) = V$. Le nombre de domination totale $\gamma_t(G)$ de graphe G est le cardinal minimum d'un ensemble dominant total.

Domination stable

Un ensemble dominant stable de G est défini comme un sous-ensemble dominant $D \subseteq V$ tel que le sous-graphe induit par D est stable. Le nombre de domination stable inférieur de G, noté $i(G)$, est le cardinal minimal d'un dominant stable. Le nombre de stabilité noté $\alpha(G)$ est le cardinal maximal d'un dominant stable.

Domination couplée

Un sous-ensemble D de V est dit dominant couplé de G si D est un dominant et le sous-graphe induit par D admet un couplage parfait. Le nombre de dominant couplé noté $\gamma_{pr}(G)$ est le cardinal minimum d'un ensemble dominant couplé de G.

1.4 Partition domatique d'un graphe

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, une partition P de G est définie comme une partition des sommets selon certaines règles. Si cette partition P contient un nombre fixe de classes, noté k, on parle alors de k-partition, ce qui signifie que la partition est composée de k classes distinctes.

Une partition dominante d'un graphe G est une partition de son ensemble de sommets V en ensembles dominants. La partition $\{V\}$ avec une seule classe est considérée comme une partition dominante, mais les partitions dominantes les plus intéressantes sont celles qui comportent un grand nombre de classes. Le nombre domatique d'un graphe $G = (V, E)$, noté $d(G)$, représente le nombre maximum de classes dans une partition domatique de G.

Par exemple, le nombre domatique du cycle C_6 est égal à 3.(voir Figure 1.17).

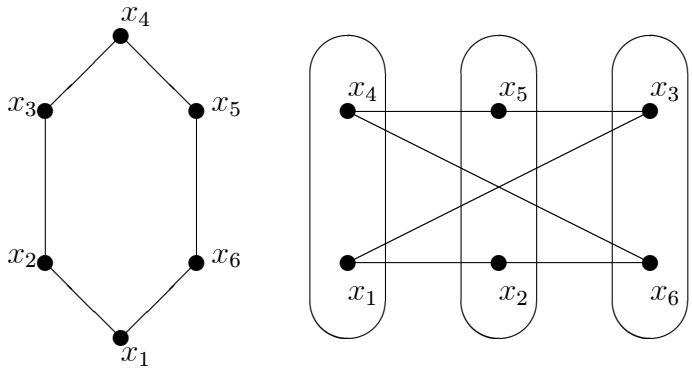


FIG. 1.17 – Cycle C_6 et partition domatique de C_6

1.5 Coloration

Une coloration propre d'un graphe $G = (V, E)$ consiste à attribuer des couleurs aux sommets de G de telle manière que deux sommets adjacents u et v ne portent pas la même couleur. Une classe de couleur i est un ensemble de sommets de V qui ont été colorés avec la couleur i. Le nombre minimum de classes de couleur nécessaires pour partitionner l'ensemble V est appelé le nombre chromatique, noté $\chi(G)$. La coloration des sommets d'un graphe peut être considérée comme une partition de l'ensemble des sommets de G en ensembles stables.

Théorème 1.5.1 *[5]Pour tout graphe G de degré maximum $\Delta(G)$. Alors*

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Théorème 1.5.2 *[11]Soit G un graphe d'ordre n et $\overline{G}$ son complémentaire. Alors*

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1 \text{ et } n \leq \chi(G) \times \chi(\overline{G}) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

Chapitre 2

Quelques résultats sur la coalition dans les graphes

Dans ce chapitre, nous rappelons les différents résultats obtenus sur la partition de la coloalition dans les graphes.

2.1 Définitions

Le terme coalition est utilisé pour décrire une situation dans laquelle deux ou plusieurs groupes acceptent de travailler ensemble dans un partenariat pour atteindre un objectif commun, comme dans les systèmes parlementaires de gouvernement, lorsque lors d'une élection générale aucun parti politique n'obtient une majorité claire. Dans de tels cas, deux ou plusieurs partis forment des cabinets de coalition qui sont soutenus par une majorité parlementaire. De nombreux pays fonctionnent souvent avec des cabinets de coalition. Bien que les coalitions impliquent généralement des accords entre plus de deux partis politiques, nous considérons dans ce mémoire que les situations dans lesquelles les coalitions sont formées par deux groupes. Cela suggère les définitions suivantes.

Définition 2.1.1 *[7] Deux sous-ensembles V_1 et V_2 de sommets de G forment une coalition si V_1 et V_2 ne sont pas des ensembles dominants de G mais l'union V_1 et V_2 est un ensemble dominant de G.*

De nombreuses recherches ont été effectuées sur la partition de l'ensemble des sommets d'un graphe en sous-ensembles ayant une propriété spécifiée. Par exemple, une coloration propore des sommets est une partition de l'ensemble des sommets en ensembles indépendants stables, tandis qu'une partition domatic est une partition de l'ensemble de sommets en ensembles dominants. Dans ce mémoire, on considère la partition en coalition qui est définie comme suit.

Définition 2.1.2 *[7]Une partition de coalition (c-partition), dans un graphe G est une partition de sommets $\pi = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ telle que chaque ensemble V_i de π est soit un ensemble dominant singleton, soit ne forme pas un ensemble dominant mais forme une coalition avec un autre ensemble V_j de π. Le nombre de coalition $C(G)$ est égal à l'ordre maximum k d'une c-partition de G, et une c-partition de G ayant un ordre $C(G)$ est appelée une $C(G)$-partition.*

A titre d'exemple $C(C_6) = 6$ et $\pi = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}\}$

2.2 Bornes et valeurs exactes sur C(G)

Le premier résultat établi par Haynes et al. [7] montre que la c-partition existe toujours.

Théorème 2.2.1 *[7]Tout graphe G a une c-partition.*

Théorème 2.2.2 *[7]Soit G un graphe de degré maximum $\Delta(G)$, et soit π une $C(G)$-partition. Si $X \in \pi$, alors X est au plus dans $\Delta(G) + 1$ coalitions.*

Théorème 2.2.3 *[7]Soit G un graphe d'ordre n. Alors :*

- $C(G) = 1$ *si et seulement si* $G = K_1$.
- $C(G) = 2$ *si et seulement si* $G = K_2$ *ou* $G = \overline{K_n}$ *pour* $n \geq 2$

Théorème 2.2.4 *[7]Soit G un graphe d'ordre n et sans sommets isolés. Alors $C(G) = 3$ si et seulement si $G = K_3$ ou G est l'étoile $K_{1,n-1}$, pour $n \geq 3$.*

Corollaire 2.2.1 *[7]Si G est un graphe d'ordre n, alors*

$$1 \leq C(G) \leq n.$$

Corollaire 2.2.2 *[7]Si G est un graphe sans sommets isolés et sans sommets dominants, alors*

$$4 \leq 2d(G) \leq C(G).$$

Corollaire 2.2.3 *[7]Si $G \neq K_n$ est un graphe d'ordre n avec k sommets de degré $n-1$, alors*

$$3 \leq k + 2 \leq C(G).$$

Observation 2.2.1 *[7]Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$ contenant un ensemble non vide I de sommets isolés, alors l'une des deux affirmations suivantes est vraie.*

- $C(G) = 2$,
- $C(G) \geq 3$ *et toute $C(G)$-partitiion $\pi = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ de G satisfait $I \cap V_j \neq \emptyset$ pour tout j.*

Théorème 2.2.5 *[7]Si G est un graphe sans sommet dominant et de degré minimum $\delta(G) \geqslant 1$, alors*

$$2 + \delta(G) \leq C(G).$$

Corollaire 2.2.4 *[7]Soit $G \neq K_n$ un graphe avec un ensemble non vide I de sommets isolés, et soit $G' = G[V - I]$. Alors*

$$2 + \delta(G') \leq C(G).$$

Corollaire 2.2.5 *[7]Si G est un graphe sans sommet dominant et v est un sommet simplicial de G, alors*

$$2 + d(v) \leq C(G).$$

Corollaire 2.2.6 *[7]Si G est un graphe d'ordre $n \geq 2$ et de degré maximum $\Delta(G)$ contenant un ensemble non vide de sommets isolés I, alors*

$$C(G) = 2 \text{ ou } C(G) \leq \Delta(G) + 2.$$

Théorème 2.2.6 *[8]Pour tout graphe G, alors*

$$C(G) \leq \frac{(\Delta(G) + 3)^2}{4}.$$

Théorème 2.2.7 *[8]Pour tout entier naturel Δ non négatif, il existe un graphe G avec $\Delta(G) = \Delta$, pour lequel $C(G) = \frac{(\Delta+2)(\Delta+4)}{4}$ si Δ est pair, et $C(G) = \frac{(\Delta+3)^2}{4}$ si Δ est impair.*

Théorème 2.2.8 *[8]Si G est un graphe sans sommets dominant et $\delta(G) < \frac{\Delta(G)}{2}$, alors*

$$C(G) \leq (\delta(G) + 1)(\Delta(G) - \delta(G) + 2).$$

Théorème 2.2.9 *[3]Pour tout graphe G avec $\delta(G) = 1$,alors*

$$C(G) \leq 2\Delta(G) + 2.$$

Corollaire 2.2.7 *[3]Pour tout arbre T*

$$C(T) \leq 2\Delta(T) + 2.$$

Théorème 2.2.10 *[3]Pour tout graphe G d'ordre n avec $\delta(G) = 0$, $C(G) = n$ si et seulement si*

$$G \simeq K_1 \cup K_{n-1.}$$

Définition 2.2.1 *(La famille F_1) Soit x une feuille d'un graphe G et y son sommet support. La famille $\mathcal{F}_1$contient le graphe G si et seulement si toutes les propriétés suivantes sont vérifiées :*

- *$V(G) = \{x, y, w, w_1, ..., w_k\}$,$N(w) = \{w_1, ..., w_k\}$,pour un entier $k \geq 1$ et $y \notin N(w)$.*
- *$N(w)$ est une union disjointe de deux sous-ensembles P et Q tels que chaque sommet de P est adjacent à tout autre sommet de $N(w)$, et pour tout $q \in Q$, chaque sommet de $N(w)/\{q\}$ est adjacent à y ou q.*

Théorème 2.2.11 *[3]Soit G un graphe avec $\delta(G) = 1$ et sans sommet dominant. Alors, $C(G) = n$ si et seulement si $G \in \mathcal{F}_1$.*

Théorème 2.2.12 *[3]Soit G un graphe d'ordre n avec $\delta(G) = 1$ et un sommet dominant. Alors, $C(G) = n$ si et seulement si G est obtenu en attachant une feuille à un sommet de K_{n-1}.*

Théorème 2.2.13 *[3]Pour tout arbre T d'ordre n, $C(T) = n$ si et seulement si $T \in \{P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\}$.*

Corollaire 2.2.8 *[3]Pour tout arbre T d'ordre $n \geq 5$*

$$C(T) \leq n - 1.$$

Théorème 2.2.14 *[3]Pour tout arbre T d'ordre n, $C(T) = n - 1$ si et seulement si $T \in \{P_5, S_{1,2}, P_6, K_{1,3}\}$.*

Corollaire 2.2.9 *[3]Pour tout arbre T d'ordre n, avec $n \geq 7$*

$$C(T) \leq n - 2$$

2.2.1 Coalitions dans les chaînes et dans les cycles

Dans cette section, nous donnons la valeur exactes du nombre de coalition des chaînes et des cycles.

Théorème 2.2.15 *[7]Pour toute chaîne d'ordre n :*

$$C(P_n) = \begin{cases} n & si\ n \leq 4 \\ 4 & si\ n = 5 \\ 5 & si\ 6 \leq n \leq 9 \\ 6 & si\ n \geq 10 \end{cases}$$

Théorème 2.2.16 *[7]Pour tout cycle d'ordre $n \geq 3$:*

$$C(C_n) = \begin{cases} n & si\ n \leq 6 \\ 5 & si\ n = 7 \\ 6 & si\ n \geq 8 \end{cases}$$

2.2.2 Coalition dans les graphes cubique

Théorème 2.2.17 *[1]Le nombre de coalition du graphe cubique G_1 et G_2 d'ordre 6 est égal à 6. (voir Figure 2.1)*

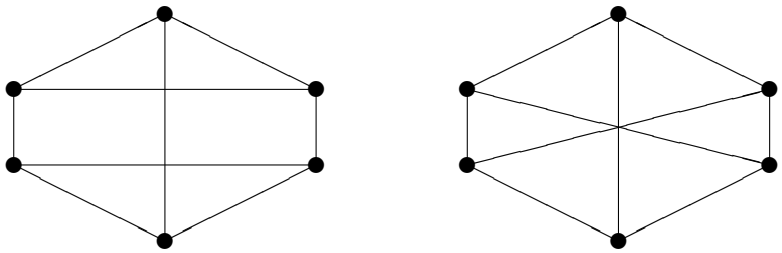


FIG. 2.1 – Graphes cubique d'ordre 6

Théorème 2.2.18 *[1]Pour les graphes cubiques $G_1, G_2, ..., G_6$ d'ordre 8 de la Figure 2.2,alors*

- $C(G_1) = C(G_5) = C(G_6) = 8$.
- $C(G_4) = 7$.
- $C(G_2) = C(G_3) = 6$.

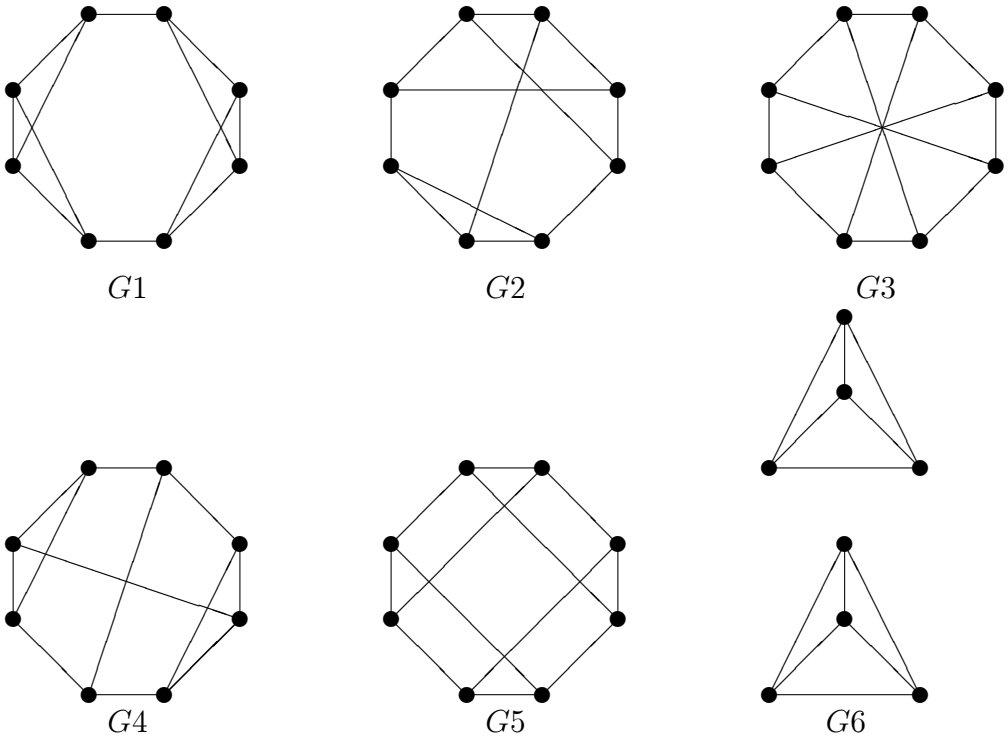


FIG. 2.2 – Graphes cubiques d'ordre 8

2.3 Autres variantes de la coalition

2.3.1 Coalition total dans graphe

Définition 2.3.1 *Une partition totale de coalition (appelée tc-partition), dans un graphe G est une partition des sommets de G, $\pi = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ telle que chaque ensemble V_i de π n'est pas un ensemble dominant total de G, mais forme une coalition avec un autre ensemble non dominant total $V_j \in \pi$. Le nombre total de coalition $TC(G)$ est égal à l'ordre maximal k d'une tc-partition de G. Une tc-partition de G de cardinalité $TC(G)$ est appelée une $TC(G)$-partition.*

par exemple cycle $(C_6) : \pi = \{\{x_1, x_2\}, \{x_3, x_4\}, \{x_5, x_6\}\}$.

Parmi les résultats obtenus sur la partition totale, on cite le suivant :

Théorème 2.3.1 *[2]Chaque graphe G possède une tc-partition.*

Théorème 2.3.2 *[2]Si G est un graphe sans sommets isolé, alors $TC(G) \geq \gamma(\overline{G})$ et cette borne est optimale pour le graphe complet K_n.*

Théorème 2.3.3 *[2]Si G est un graphe sans sommet dominant alors*

$$TC(G) \geq \gamma_t(G)$$

Théorème 2.3.4 *[2]Si G est un graphe sans sommets isolé et sans sommet dominant, alors*

$$TC(G) + C(G) \geq \gamma(\overline{G}) + \gamma_t(\overline{G})$$

Pour plus de détails sur la partition totale de coalition voir [2].

2.3.2 Graphe de coalition.

Soit G un graphe et $\pi = \{V_1, V_2, ..., V_k\}$ une c-partition d'ordre k de G. le graphe de coalition , noté $CG(G, \pi)$ est le graphe dont les k sommets correspondent un à un aux ensembles de π, et deux sommets V_i et V_j sont adjacents dans $C(G, \pi)$ si et seulement si leurs ensembles correspondants V_i et V_j forment une coalition dans G.

L'exemple (voir Figure 2.3)

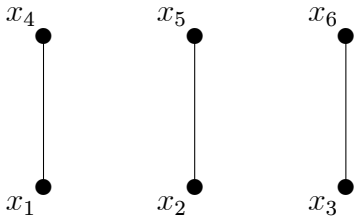


FIG. 2.3 – le graphe de coalition $CG(C_6, \pi)$

Parmi les résultats obtenus sur la partition totale, on cite le suivant:

Proposition 2.3.1 *[6]Soit G un graphe et π une c-partition de G, Alors*

$$\Delta(CG(G, \pi)) \leq \Delta(G) + 1.$$

Corollaire 2.3.1 *[6]Si G est un chemin ou un cycle avec une c-partition, alors*

$$\Delta(CG(G, \pi)) \leq 3$$

Pour plus de détails sur la notion de graphe de coalition voir [6, 9].

Chapitre 3

Nouveaux résultats sur le nombre de coalition

Dans ce chapitre, nous allons présenter des brones supérieures et inférieurs ainsi que des valeurs exactes de $C(G)$ pour de classes particulières de graphes.

3.1 Borne inférieure sur $C(G)$

Théorème 3.1.1 *Soit $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_k$ l'union de $k \geq 2$ composantes connexes tel que pour $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$, on a $d(G_i) \geq d(G_{i+1})$. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, posons $q_i = d(G_i)$ et $q = q_1 + q_2 + \cdots + q_k$. Alors*

$$C(G) \geq \begin{cases} q - k(k-2) & si\ q_k > k-1 \\ q - (k-1)(k-2) & si\ q_k = k-1 \\ q_k + \sum_{i=1}^{q_k} (q_i - q_k + 1) & si\ q_k < k-1 \end{cases}$$

Preuve. Pour tout $i \in \{1, 2, ..., k\}$, soit $X_1^i, ..., X_{q_i}^i$ une partition domatique de G_i de cardinalité q_i. Soit π une partition de G définie comme suit :

$$\pi = \{X_1^1, ..., X_{q_1}^1, X_1^2, ..., X_{q_2}^2, ..., X_1^k, ..., X_{q_k}^k\}.$$

Il est clair que $|\pi| = q$ et $q_1 \geq q_2 \geq ... \geq q_k$. Nous allons construire une partition de coaltion $\psi = \{V_1, V_2, ...\}$ de G à partir de π selon la valeur de q_k. Pour cela, nous allons distinguer les trois cas suivant.

Cas 1. $q_k > k - 1$.

$$\psi = \left(\pi - \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{i=1(i\neq j)}^{k} \{X_j^i\} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k} \left\{ \bigcup_{i=1(i\neq j)}^{k} X_j^i \right\} \right).$$

Il est facile de vérifier que

$$\left| \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{\substack{i=1 \\ (i\neq j)}}^{k} \{X_j^i\} \right| = k(k-1) \text{ et } \left| \bigcup_{j=1}^{k} \left\{ \bigcup_{\substack{i=1 \\ (i\neq j)}}^{k} X_j^i \right\} \right| = k.$$

Egalement, par inspection, on peut constater que ψ est une c-partition de G de cardinalité $q - k(k-2)$. D'où

$$C(G) \geq q - k(k-2).$$

Cas 2. $q_k = k - 1$

$$\psi = \left(\pi - \bigcup_{j=1}^{k-1} \bigcup_{\substack{i=1 \\ (i\neq j)}}^{k} \{X_j^i\} \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} \left\{ \bigcup_{\substack{i=1 \\ (i\neq j)}}^{k} X_j^i \right\} \right).$$

Il est facile de vérifier que

$$\left|\bigcup_{j=1}^{k-1}\bigcup_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{k}\left\{X_j^i\right\}\right| = (k-1)^2 \text{ et } \left|\bigcup_{j=1}^{k-1}\left\{\bigcup_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{k} X_j^i\right\}\right| = k-1.$$

Egalement, par inspection, on peut constater que ψ est une c-partition de G de cardinalité $q-k(k-1)$. D'où

$$C(G) \geq q-(k-1)\,(k-2).$$

Cas 3. $q_k < k-1$

Soit A et B deux ensembles (éventuellement vides) définis comme suit.

$$A = \bigcup_{i=q_k+1}^{k-1}\bigcup_{j=q_k+1}^{q_i}\left\{X_j^i\right\} \text{ et } B = \bigcup_{i=q_k+1}^{k-1}\bigcup_{j=q_k+1}^{q_i} X_j^i.$$

La partition ψ peut être obtenue à partir de π de la façon suivante.

$$\psi = \left(\pi - \left(\bigcup_{j=1}^{q_k}\bigcup_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{k}\left\{X_j^i\right\}\right)\cup\left(A\cup X_1^1\right)\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{q_k}\left\{\bigcup_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{k} X_j^i\right\}\right)\cup\left(B\cup X_1^1\right).$$

Par une simple vérification, on peut voir que

$$\left|\pi - \left(\bigcup_{j=1}^{q_k}\bigcup_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{k}\left\{X_j^i\right\}\right)\cup\left(A\cup X_1^1\right)\right| = \sum_{i=1}^{q_k}\left(q_i-q_k+1\right), \quad \left|\left(\bigcup_{j=1}^{q_k}\left\{\bigcup_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{k} X_j^i\right\}\right)\cup\left(B\cup X_1^1\right)\right| = q_k\,.$$

et que ψ est une c-partition de G de cardinalité $q_k+\sum_{i=1}^{q_k}\left(q_i-q_k+1\right)$. D'où

$$C(G) \geq q_k + \sum_{i=1}^{q_k}\left(q_i-q_k+1\right).$$

■

Si les composantes G_1, $G_2, \ldots,$ G_k sont des sous-graphes complets d'ordres respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_k$, alors $q_i = n_i$ et $q = n$. De ce fait, le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 3.1.1 *Si chaque $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_k$ est l'union de $k \geq 2$ cliques d'ordres respectifs n_1, $n_2, \ldots, n_k$, alors*

$$C(G) \geq \begin{cases} n - k(k-2) & si\ n_k > k-1 \\ n - (k-1)(k-2) & si\ n_k = k-1 \\ n_k + \sum_{i=1}^{n_k} (n_i - n_k + 1) & si\ n_k < k-1 \end{cases} .$$

Exemple 3.1.1 *Si $G = K_5 + 2K_4$, alors $C(G) \geq 10$.*

Exemple 3.1.2 *Si $G = 2K_6 + K_5 + K_3$, alors $C(G) \geq 14$.*

Exemple 3.1.3 *Si $G = K_7 + K_6 + 4K_4 + K_2$ alors $C(G) \geq 13$.*

3.2 Borne supérieure sur $C(G)$

Proposition 3.2.1 *Soit $k \geq 3$ un entier et $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_k$ l'union de k composantes connexes d'ordres respectifs $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Alors $C(G) \leq n - 1$.*

Preuve. Soit π une $C(G)$-partition. Puisque G, l'union de k composantes connexes alors $\gamma(G) \geq 3$. Ceci implique qu'il existe au moins un ensemble de π qui contient au moins deux sommets. De ce fait $C(G) \leq n - 1$. ■

3.3 Valeurs exactes de $C(G)$ pour certains graphes particuliers

Théorème 3.3.1 *Si $G = K_s + K_t$ tel que $s \geq t \geq 2$, alors $C(G) = s + t$.*

Preuve. Dans ce cas, une partition de G en singletons est une c-partition de cardinalité n. En combinant ceci avec le Corollaire 2.2.1, on constate que $C(G) = n$. ■

Théorème 3.3.2 *Si* $G = G_1 + G_2 + G_3$ *est l'union de trois cliques telles que* $r = \min_{1 \leq i \leq 3}\{|V(G_i)|\} \geq 2$, *alors*

$$C(G) = \begin{cases} n-2 \text{ si } r = 2 \\ n-3 \text{ si } r \geq 3 \end{cases}.$$

Preuve. D'abord, nous allons montrer que

$$C(G) \leq n-2. \tag{3.1}$$

Supposons au contraire que (3.1) n'est pas vraie. Alors d'après la Proposition 3.2.1, on a $C(G) = n-1$. Considérons une partition de coalition π de cardinalité $n-1$. Dans ce cas, π possède exactement une classe de taille 2, disons X et les autres classes sont des ensembles singletons. Posons $X = \{u, v\}$. Puisque tout dominant de G est de taille au moins trois, alors tout ensemble singleton forme une coalition avec X. De ce fait, on constate que u et v n'appartiennent pas à la même composante connexe. Sans perte de généralité, on peut supposer que $u \in V(G_1)$ et $v \in V(G_2)$. Soit $w \in V(G_1) - u$ (ceci est possible car $r \geq 2$). Dans ce cas $\{w\}$ et X sont deux calsses de π qui ne forment pas une coalition, contradiction. D'où (3.1) est satisfait.

Si $r = 2$, alors d'après le Corollaire 3.1.1 et la condition (3.1), on a le résultat désiré. Supposons maintenant que $r \geq 3$. D'après le Corollaire 3.1.1, on a $C(G) \geq n-3$. Supposons que $C(G) \geq n-2$. Alors d'après la condition (3.1), on a $C(G) = n-2$. Soit π une partition de coalition de G de cardinalité $n-2$. On a l'une des deux possibilités suivantes.

Possibilité 1. π possède une classe, disons X de taille 3 et les autres classes sont des singletons.

Posons $X = \{u, v, w\}$. Il est à observer que deux sommets de X, disons u et v appartiennent à la même composante, disons G_1 car sinon X serait un ensemble dominant de G, ce qui est impossible. Par conséquent, $w \in V(G_2) \cup V(G_3)$ car sinon X ne forme pas une coalition avec les autres classes. Par symétrie, on peut supposer que $w \in V(G_2)$. Soit $z \in V(G_2) - w$ (ceci est possible puisque $r \geq 3$). Dans ce cas $\{z\}$ et X sont deux calsses de π qui ne forment pas une coalition, contradiction.

Possibilité 2. π possède deux classes X_1 et X_2 chacune de taille 2 et le autres classes sont des singletons.

Posons $X_1 = \{u, v\}$ et $X_2 = \{a, b\}$. Montrons que les sommets u et v n'appartiennent pas à la même composante. Supposons au contraire que u et v sont dans G_1. Dans ce cas X_1 forme nécessairement une coalition avex X_2 dans lequel l'un des deux sommets a et b, disons a appartient à G_2 et l'autre sommet b appartient à G_3. Mais dans ce cas, toute classe $\{z\}$ de π tel que $z \in V(G_2) - \{a\}$ (z existe puisque $r \geq 3$) ne forme pas une coalition avec les autres classes de π, contradiction. De ce fait, on peut supposer que u et v appartiennet à deux composantes différentes, disons $u \in V(G_1)$ et $v \in V(G_2)$. Par le même argument, on constate que l'un des deux composantes G_1 et G_2, disons G_1 contient a.et par suite $b \in V(G_2) \cup V(G_3)$. Si $b \in V(G_2)$, alors toute classe $\{z\}$ de π tel que $z \in V(G_2) - \{v\}$ (z existe puisque $r \geq 3$) ne forme pas une coalition avec les autres classes de π, contradiction. De même, si $b \in V(G_3)$, alors classe $\{z\}$ de π tel que $z \in V(G_1) - \{a, u\}$ (z existe puisque $r \geq 3$) ne forme pas une coalition avec les autres classes de π, contradiction. ■

Proposition 3.3.1 *Soit H un graphe sans sommets dominants et G le graphe obtenu à partir de H en ajoutant k nouveaux sommets tel que chaque nouveau sommet est un sommet dominant dans G. Alors*

$$C(G) = C(H) + k.$$

Preuve. Soit π une $C(H)$-partition et $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ l'ensemble des nouveaux sommets ajoutés. Il est clair que $\pi \cup \{\{v_1\}, \{v_2\}, ..., \{v_k\}\}$ est une c-partition de G. Par conséquent, $C(G) \geq C(H) + k$.

Maintenant, nous allons montrer que $C(G) \leq C(H) + k$. Supposons au contraire que

$$C(G) \geq C(H) + k + 1.$$

Soit ϕ une $C(G)$-partition. Puisque, pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}, v_i$ est un sommet dominant dans G, il s'ensuit alors que $\{v_i\} \in \phi$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, Mais dans ce cas, il facile de vérifier que $\phi - \{\{v_1\}, \{v_2\}, ..., \{v_k\}\}$ est une c-partition de H. Ceci implique $C(H) \geq C(G) - k$: En combinant ceci avec l'inégalité **??**, on trouve $C(H) \geq C(H) + 1$, contradiction. En conséquence, **??** n'est pas vraie et donc $C(G) = C(H) + k$. ■

En utilisant le Théorème 2.2.16 et la Proposition 3.3.1, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.1 *Si W_{n+1} est la roue d'ordre $n+1$, alors*

$$C(W_{n+1}) = \begin{cases} n+1 & si\ n \leq 6 \\ 6 & si\ n = 7 \\ 7 & si\ n \geq 8 \end{cases}.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, notre attention s'est portée sur l'exploration de la notion de coalition dans les graphes. Nous nous sommes concentrés sur la partition de coalition dans les graphes. Après avoir passé en revue les concepts fondamentaux utilisés dans ce mémoire, nous avons présenté des résultats concernant ce nouveau paramètre noté $C(G)$. En premier lieu, nous avons établi une borne supérieure et une borne inférieure pour $C(G)$, ensuite nous avons déterminé la valeur exacte du $C(G)$ dans le cas où G est un graphe spécial obtenu à partir d'un graphe quelconque H en ajoutant un certain nombre de nouveaux sommets qui serviront de sommets dominants dans G.

Le travail effectué dans ce mémoire offre de nombreuses perspectives pour des travaux futurs, notamment :

- Déterminer le nombre de coalition d'un graphe non connexe en fonction des nombres de coalition de ses composantes connexe.
- Déterminer la valeur exacte de $C(G)$ dans le cas où G est le graphe puissance d'un autre graphe.
- Trouver des bornes supérieures et inférieures qui encadrent le plus possible le paramètre $C(G)$.
- Etudier l'effet de l'ajout ou la contraction d'un arête quelconque sur $C(G)$.

Bibliographie

[1] S.Alikhan, H.R. Golmohammadi, E.V. Konstantinova, Coalition of cubic graphs of order at most 10, (2022)

[2] S.Alikhan, H.R. Golmohammadi, Introduction to total coalitions in graphs, arXiv :2211.11590v1 [math.CO] 21 Nov 2022.

[3] D. Bakhshesh, D. Pradhan, On the coalition number of graphs

[4] C. Berge,Graphs and Hypergraphs. (North Holland, Amsterdam, 1973).

[5] R. Brooks. On coloring the nodes of a network. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 : 194 - 197, 1941.

[6] T.W.Haynes, J.T.Hedetniemi, S.T.Hedetniemi, Alice A McRae, and Raghuveer Mohan, Coalition graphs of paths, cycles, and trees., Discuss. Math. Graph Theory (In press).

[7] T.W. Haynes, J. T. Hedtniemi, S. T. Hedtniemi, A. A. McRae, R. Mohan, Introdution to coalitions in graphs, AKCE Int. J. Graphs combin. 17 (2), (2020) 653-659.

[8] T.W. Haynes, J.T. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A.A. McRae and R. Mohan, Upper bounds on the coalition number, Austral. J. Combin. 80 (3) (2021), 442–453.

[9] T.W. Haynes, J. T. Hedtniemi, S. T. Hedtniemi, A. A. McRae, R. Mohan, Coalition graphs

[10] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, New York, 1998.

[11] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. On complementary graphs. Ann. Math. Monthly, 63 : 175 - 177, 1965.

[12] O. Ore, Theory of Graphs, Amer. Math. Soc. Colloq.Publ., 38. Providence, RI : Amer. Math. Soc, 1962.