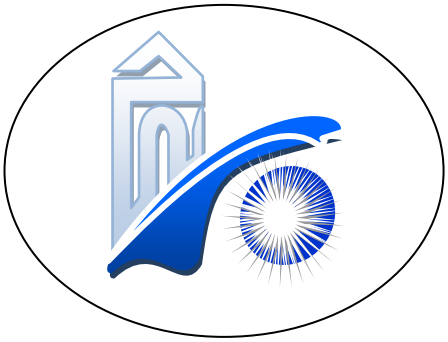
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enregistrement Supérieur et de la Recherche scientifique

UNIVERCITE YAHIA FARES DE MEDEA

Faculté des Sciences et de la technologie

Département de Génie des Procédée et Environnement



Projet de Fin d'Etude en vue de l'obtention du Diplôme de Master
Filière : Génie des Procédés
OPTION : pollution chimique et gestion environnementale

THEME

Etude de la convection thermosolutale générée dans une cavité remplie de deux couches verticales (poreux-fluide)

Préparer par :

- **M^me^ YAHIAOUI Khalida**
- **M^me^ BABA ALI Hadjer**

Encadrer par :

Dr. HADIDI. N

2015-2016

Remerciement

Nous remercions dans un premier temps, notre Dieu le Tout Puissant, qui nous a accordé le souffle de vie afin d'arriver au terme de notre cycle de formation, que l'honneur et la gloire Lui soient rendus.

Nous remercions vivement monsieur Dr.Hadidi d'avoir proposé et dirigé ce travail de si près avec une qualité remarquable ; nous avons grandement apprécié ses compétences et qualités scientifiques ainsi que son intelligence et son intuition sans oublier ses indéniables qualités humaines à travers un suivi régulier ; nous lui présentons toute notre gratitude.

Nous exprimons nos profonds remerciements aux membres de jury, Vous nous faites l'honneur d'accepter avec une très grande amabilité de siéger parmi notre jury de mémoire. Veuillez accepter ce travail maître, en gage de notre grand respect et notre profonde reconnaissance.

Notre gratitude va aussi à l'ensemble des enseignants du département de génie des procédés et environnement pour leur encadrement universitaire.

Nous exprimons notre gratitude à tous les consultants et internautes rencontrés lors des recherches effectuées et qui ont accepté de répondre à nos questions avec gentillesse.

Tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin, trouvent ici l'expression de notre gratitude.

Dédicaces

A la mémoire de mes grand parents puisse Dieu les accueillir dans son infinie miséricorde.

A mes chers parents et mes beaux-parents ; ceux qui ont toujours garni mes chemins avec force et lumière.

A celui qui il a été toujours à mon cotés pour franchir un horizon dans ma vie ; mon mari Essam.

A mes frères et beaux-frères, ma sœur Wafa que j'aime tant.

A toute ma famille pour l'amour et le respect qu'ils m'ont toujours accordé.

A toute mes amies et spécialement mon binôme Khalida, pour une sincérité si merveilleuse inoubliable

A toute la promotion de master 2015/2016.

Hadjer

© TemplatesWise.com

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à tous ceux qui me sont chers, en particulier :

A ma mère ma source de tendresse pour son soutien, sa patiente, sa présence à mes cotés et son inquiétude pour ma réussite "que Dieu te garde pour nous" ;

*A mon cher père, pour avoir toujours été présent pour moi, pour son amour, et ses encouragements et pour m'avoir appris à donner le meilleur de moi-même et à ne jamais baisser les bras devant les difficultés *que Dieu le protège* ;*

A mon très cher frère : Youcef ;

A mes très chères sœurs : Sarah, Rima, Malak ;

A mon très cher mari Said (et sa famille) qui m'a tellement soutenu et qui a fait preuve de beaucoup de patience et de compréhension jusqu'au bout de mon travail ;

A toute ma famille, mes tantes, mes oncles et spécialement a ma grande sœur Wassila ;

A mes chères amies : Amel et Fatima ;

A mon amie et binôme Hadjer et surtout pour sa patience ;

A toute la promotion de pollution chimique et gestion enviromenntale : 2015/2016.

Khalida

ملخص:

يهدف هذا العمل إلى دراسة الانتشار الحراري والكتلي داخل تجويف مربع يحتوي على طبقتين الأولى عبارة عن وسط مسامي متجانس ومشبع بنفس المحلول و الثانية عبارة عن مائع موضوعة عموديا.

تخضع الحواف العمودية لشروط حرارة و تركيز ثابتين بحيث أن الحواف الأفقية غير نفوذه و غير ناشرة للحرارة.

المعادلات الأساسية التي تصف ظاهرة الحمل الحراري تحل رقميا بواسطة طريقة الحجم المتناهي و هذه النتائج تحلل علي شكل خطوط السيل، خطوط تساوي الحرارة و التركيز و أيضا متوسط ثابت نسلت وشرود.

كلمات مفتاحيه: الحمل الحراري الكتلي، وسط مسامي، متعدد الطبقات

Résumé :

Cette étude présente une étude de la thermosolutale générée dans une cavité carrée renfermant deux couches la première poreuses et le deuxième fluide disposé verticalement.

La couche poreuse est considérée homogène, isotrope et saturée par le même fluide. Les parois verticales sont soumises à des conditions de température et de concentration uniformes alors que les parois horizontales sont adiabatiques et imperméables. Les équations de base décrivant la convection double diffusive au sein de l'enceinte sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis. Les résultats numériques sont analysés en termes de lignes de courant, des isothermes, des isoconcentrations et des nombres de Nusselt et Sherwood moyens.

Mots clés : Convection thermosolutale, milieux poreux, multicouches.

Abstract :

This paper deals with numerical study of Thermosolutal convection in an square enclosure filled with two vertical layers the first is porous medium and second is fluid. The porous layer is considered homogeneous, isotropic and saturated with the same fluid.

The vertical walls of porous cavity are subjected to uniform temperature and concentration whereas the horizontal walls are assumed to be adiabatic and impermeable. The set of equations governing the double-diffusive convection in the porous enclosure are solved numerically using the control volume approach. The numerical results are presented and analyzed in terms of streamlines, isotherms, isoconcentrations lines and average Nusselt and Sherwood numbers

Keywords: thermosolutal convection, porous medium, bi-layered, inclined cavity

NOMENCLATURE

a Diffusivité thermique, [m^2s^{-1}]

C Concentration dimensionnelle du soluté

C_0 (C_L) Concentration dimensionnelle du soluté sur la paroi active

D_{a_i} Nombre de Darcy, $D_{a_i} = K_i / L^2$

k Conductivité thermique, W/m°C

K_i Perméabilité du milieu poreux, m^2

L dimension de la cavité, m

Le Nombre de Lewis, $\mathrm{Le} = a_{\mathrm{eff}_i} / \mathrm{D}_{\mathrm{eff}_i}$

$\mathrm{Nu_b}$ Nombre de Nusselt moyen, $Nu_b = \int_0^1 \left[\frac{\partial \theta}{\partial X}\right]_{X=0} dY$

N Rapport des forces de volume, $\mathrm{N} = \beta_C \Delta C / (\beta_T \Delta T)$

p Pression, [Pa]

P Pression adimensionnelle, $\mathrm{P} = \mathrm{pL}^2 / (\rho_f . a^2 / \varepsilon^2)$

Pr Nombre de Prandtl, $\mathrm{P_r} = \nu_f / a_{\mathrm{eff}_i}$

Ra Nombre de Rayleigh, $Ra = g.\beta_T \cdot L^3 \Delta T / \nu_f . a_{eff1}$

Ra_m Nombre de Rayleigh modifié, $Ra_m = RaDa_1$

$\mathrm{R_c}$ Rapport des conductivités thermiques, $\mathrm{R_c} = \mathrm{k}_{\mathrm{eff}_i} / \mathrm{k}_{\mathrm{eff}_1}$

$\mathrm{R_v}$ Rapport de la viscosité effective à celle du fluide, $\mathrm{R_\nu} = \mu_{\mathrm{eff}_i} / \mu_f$

R_K Rapport des perméabilités des couches poreuses, $R_K = K_2 / K_1$

$\mathrm{Sh_b}$ Nombre de Sherwood moyen $Sh_b = \int_0^1 \left[\frac{\partial S}{\partial X}\right]_{X=0} dY$

S Concentration adimensionnelle, $S = \left(C - (C_0 + C_L)/2\right) / \left(C_0 - C_L\right)$

T Température, [°C]

$T_0 (T_L)$ Température sur la paroi active, [°C]

u Vitesse axiale, (m/s)

U Vitesse adimensionnelle suivant la direction X, $U = uL/a$

v Vitesse transversale, [m/s]

V Vitesse adimensionnelle suivant la direction Y, $V = vL/a$

x Coordonnée axiale, [m]

X Coordonnée horizontale adimensionnelle, $X = x/L$

y Coordonnée transversale, [m]

Y Coordonnée verticale adimensionnelle, $Y = y/L$

Symboles grecs

α Angle d'inclinaison de la cavité,

β_T Coefficient d'expansion thermique, [K^{-1}]

β_S Coefficient d'expansion solutale

ρ Masse volumique, [Kg m^{-3}]

μ_{eff} Viscosité équivalente dans le modèle de Brinkman, [Kg m^{-1} S^{-1}]

ν Viscosité cinématique, [m^2 s^{-1}]

ε Porosité

τ Tortuosité

θ Température adimensionnelle, $\theta = \left(T - (T_0 + T_L)/2\right)/\left(T_0 - T_L\right)$

ϕ Variable dépendente

Γ Coefficient de diffusion

ΔT différence de température, $\Delta T = T_0 - T_L$, [°C]

Δc Différence de concentration, $\Delta c = c_0 - c_L$

Indices

b	Moyen
E, e	Est
eff	Effectif
f	Fluide
i	Couche poreuse

Liste Des figures

Figure I.1 : milieux poreux consolidés 5

Figure I.2 : milieux poreux non consolidés 6

Figure I.3 : Volume élémentaire représentatif (V.E.R.) 7

Figure I.4 : Définition schématique de la tortuosité 11

Figure I.5 : Modèle série de la conductivité thermique effective 12

Figure I.6 : Modèle parallèle de la conductivité thermique effective 13

Figure II.1 : transfert de masse par diffusion moléculaire dans un mélange gazeux 17

Figure II.2 : Couplage thermosolutale le long d'une plaque verticale 21

Figure II .3 : Modèle physique et système de coordonnée 22

Figure III.1 : Subdivision du domaine d'étude en volumes de contrôle 28

Figure III.2 : Volume de contrôle représentatif 30

Figure III.3 : Représentation d'un maillage décalé 35

Figure III.4 : Volume de contrôle pour U et V 36

Figure III.5 : Volume de contrôle lié à P 38

Figure III.6 : Schéma du volume de contrôle pour U 45

Figure III.7 : Schéma du volume de contrôle pour V 46

Figure III.8 : Schéma du volume de contrôle pour P 47

Figure IV.1 : représente les lignes de courant 54

Figure IV.2 : représente les isothermes de courant 55

Figure IV.3 : représente les isoconcentrations 55

Figure IV.4 : Effet du nombre de Rayleigh modifié sur les transferts 56

Figure IV.5 : Effet du nombre de Lewis sur les transferts 58

Figure IV.6 : Effet du nombre du rapport de poussée sur les transferts 59

Figure IV.7 : Effet du nombre du rapport de conductivité Thermiques sur les transferts 60

Figure IV.8 :l'effet de D' sur les nombres de Nusselt et sherwood 61
pour différentes valeurs de Da .

Liste des tableaux

Tableau I.1 : les domaines d'application pour les écoulements dans les milieux poreux 4

Tableau I.2 : Valeurs moyennes de porosité de quelques matériaux 8

Tableau I.3 : Valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux 10

Tableau III.1 : Définition des différents termes des équations de conservation 29

Tableau III.2 : Expressions des termes sources linéarités (Sc et Sp) pour les différentes équations. 32

Tableau III.3 : Les expressions de $A|P|$ selon le schéma d'interpolation 42

Tableau IV.1 : Sensibilité du code de calcul au maillage 51

Tableau IV.2 : Comparaison des nombres de Nusselt et Sherwood moyens 52

Tableau IV.3 : Comparaison du nombre de Nusselt et Sherwood 52

Tableau IV.4 : Comparaison du nombre de Nusselt pour 53

Introduction générale 1

Chapitre. I : Notions sur les milieux poreux et leurs applications

I.1. Généralité 3
I.2. Définition relative aux milieux poreux 5
I.2.1. Milieu poreux 5
I.2.2. Notion de volume élémentaire représentatif (V.E.R) 6
I.2.3. Propriétés structurales et thermophysique d'un milieu poreux 7
I.2.3. 1. La porosité 7
I.2.3.2. La variation de la porosité 9
I.2.3. 3. La perméabilité 9
I.2.3.4. La tortuosité 11
I.2.3.5. La surface spécifique 11
I.2.3.6. Conductivité thermique effective 12
I.3. Modèles d'écoulement en milieux poreux 13
I.3.1. La loi de Darcy 13
I.3.2. Formulation de Forchheimer 14
I.3.3. Modèle général 15
I.4. Conclusion 15

Chapitre II : Formulation Mathématique

II.1 Introduction 16
II.2. Le Transfert de masse par diffusion moléculaire 17
II.2.1. Equations de la diffusion massique 19
II.3. Couplage avec la convection thermique 20
II.4. Modèle Physique 22
II.5. Equations gouvernantes 23
II.5.1. Equation de continuité 23
II.5.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement 23
II.5.3. Equation de l'énergie 23
II.5.4. Equation de concentration 23
II.6. Conditions aux limites 23
II.7. A dimensionnement des équations 24
II.8. conclusion 26

Chapitre III: Modélisation numérique

III.1. Introduction 27
III.2. Principe de la méthode des volumes finis 27
III.2.1. Equation différentielle gouvernante 27
III.2.1.1. Equation de continuité 27
III.2.2. Maillage et volume de contrôle 28
III.2.3. Discrétisation des équations de conservation 28
III.2.3.1. Flux de diffusion -convection 30
III.2.3.2. Simplification de l'expression du flux 31
III.2.3.3. Linéarisation du terme source 31

III.2.3.4. Equation finale de discrétisation 32
III.2.3.5.Méthode de résolution des équations algébriques 34
III.2.4. Considérations pour le champ dynamique 34
III.2.4.1.Notion de maillage décalé 35
III.2.5. Discrétisation des équations dynamiques 35
III.2.5.1. Equations du mouvement 35
III.2.5.2.Correction des vitesses et pression 36
III.2.5.3.Equation de correction de pression 37
III.3.Algorithme SIMPLER 39
III.4. Technique de sous-relaxation 41
III.5 Critère de convergence 42
III.6 Schémas d'interpolation 42
III.7 Application de la méthode des volumes finis à notre problème 43
III.7.1 Discrétisation des équations du mouvement 44
III.7.1.1. Equation du mouvement en X 44
III.7.1.2. Equation du mouvement en Y 45
III.7.2. Equation de correction de pression 47
III.7.3. Discrétisation de l'équation de l'énergie 49
III.7.4. Discrétisation de l'équation du soluté 50
III.8. Conclusion 50

Chapitre IV : résultats et discussion

IV.1 Sensibilité du code de calcul au maillage et Validation 51
IV.2. Lignes de courant-isothermes –isoconcentrations 53
IV.3. Effet du nombre de Rayleigh modifié sur les transferts 56
IV.4 Effet du nombre Lewis sur les transferts 57
IV.5. Effet du rapport des forces de poussée (volume) N 59
Conclusion général 62
Références bibliographiques 63

Introduction Générale

Jusqu'à ces dernières décennies, peu d'auteurs se sont préoccupés d'analyser le problème du transfert simultané et couplé de chaleur et de matière dans les milieux poreux. Etant donné son implication dans de nombreux phénomènes naturels et processus industriels, les chercheurs s'intéressent de plus en plus à ce problème et plus précisément aux transferts de chaleur et de masse qui se développent dans les enceintes fermées, souvent en convection naturelle.

L'importance des milieux poreux dans les phénomènes et processus industriels et technologique est aujourd'hui bien démontrée. Cependant et malgré la montée en puissance des moyens d'étude, des lacunes subsistent encore sur le plan des connaissances fondamentales, principalement la compréhension des phénomènes de transfert de chaleur et de masse dans des systèmes comportent des milieux poreux.

De ce fait, les études de la convection thermosolutale en présence d'un milieu poreux font actuellement l'objet d'un intérêt sans cesse accru. Cet intérêt est dû aux nombreuses applications pratiques qui s'y rapportent, et cela dans divers domaines tels que :

- La filtration massique ;
- La dispersion des polluants dans les aquifères ;
- La séparation d'espèces chimique ;
- Le stockage de déchets toxiques ou radioactif et des gaz liquides ;
- Le séchage ;
- Dans le domaine médical où on utilise des membranes poreuses pour concevoir des reins artificiels pour les processus de dialyse ;
- L'isolation thermique ;
- L'extraction dans les gisements d'hydrocarbures ;
- Le refroidissement des circuits électronique et des réacteurs nucléaires.

Dans la présente étude nous nous intéressons à la double diffusive générée dans une cavité carrée, remplie soit par deux couches la première est un milieu poreux tant dis que la deuxième est une couche fluide.

La présente investigation a pour but l'étude de la convection double diffusive dans les une enceinte carrée infiniment longue adiabatique et imperméable sur les faces verticales gauche et droite de l'enceinte. Un gradient de température s'établit entre les faces inférieure et supérieure. Le modèle mathématiquedécrivant le présent problème a été développé en se basant sur l'équation de Darcy-Brinkman

Le premier chapitre est consacré à la présentation des généralités sur les milieux poreux.

La formulation mathématique du problème physique, les hypothèses considérées ainsi que les équations de conservation mises sous formes adimensionnelles sont développées dans le deuxième chapitre.

Dans le troisième chapitre est présentée la méthode numérique choisie pour la résolution des équations de conservation.

Le dernier chapitre est consacré à la présentation et à la discussion des résultats obtenus. Ontermine notre travail par une conclusion générale.

Chapitre I :
Généralités et définition relative au milieu poreux

I.1. Généralité :

Durant les dernières années, les écoulements dans les milieux poreux n'ont cessé d'avoir une importance de plus en plus grandissante jusqu'à devenir un pôle d'attraction durant la dernière décennie .En effet un grand nombre de chercheurs ont porté un intérêt particulier aux milieux poreux. Ceci est dû au fait que le transfert massiques et thermique dans ces milieux occupe une place de plus en plus importante dans plusieurs secteurs de l'industrie et des technologies avancées.

Les premières recherches qui ont été menées dans ce domaine ont toutes portées sur des écoulements monophasiques, pour ensuite englober les écoulements polyphoniques durant ces dernières années.

Les phénomènes de transfert massiques et thermiques dans les milieux poreux (en monophasiques où en polyphoniques) interviennent dans de nombreuses applications et touches à des domaines multiples tel que représenté ci-dessous :

Domaine d'utilisation	**Application**
Mécanique	-Isolement thermique -Capacité de séchage -Récupération de l'énergie géométrique -Accroissement du transfert de chaleur par modification de surface -Lubrification Réacteurs nucléaires utilisant des gaz de refroidissement s'écoulant à travers des particules radioactives -Fusion et solidification des alliages binaires -Déshumidification -Pré chauffeurs et stabilisateurs de flamme poreux -Stockage de l'énergie solaire -Pots catalytiques dans le domaine de l'automobile
Génie-chimique	-Réacteurs chimiques -Filtration

	-Adsorption -L'échange d'ion -Les réactions catalytiques sur une surface solide -Séchage Réacteurs chromatographiques -Convertisseurs catalytiques pour la réduction de la pollution de l'air des produits de combustion -Transfert de masse à travers les membranes
Environnement	-Ecoulement des eaux souterraines -contamination des eaux souterraines -Ecoulement d'eau, de vapeur d'eau et d'air à travers des matériaux de construction -Recyclage de déchets nucléaires -Irrigation -Nettoyage des sols par injection de vapeur
Géologie	-Migration des eaux et minéraux -Exploitation de l'énergie géothermique
Pétrole	-Ecoulement de gaz et pétrole dans les réservoirs -Accroissement de la production de gaz naturel
Médecine	-Stimulation du transport des gaz dans l'organisme, H.P.C.Darcy [1].

Tableau I.1 : les domaines d'application pour les écoulements dans les milieux poreux

Un exemple concret, d'application de l'écoulement poly phasiques en milieux poreux, est l'exploitation des gisements d'hydrocarbures qui fait appel à différents procédés, parmi lesquels on trouve des méthodes thermiques qui consistent à injecter un fluide chaud (eau chaude, vapeur chaude, gaz….) au sein du gisement. Ces méthodes tendent à faciliter l'écoulement des fluides dans le réservoir en réduisant la viscosité dans l'huile brute. Actuellement, l'injection de vapeur est la plus utilisée. En 1988 par exemple, aux états unis, 72%de la production par l'application des méthodes améliorées était faite de vapeur par A.E.Scheidegger [2].

Autre exemple le cas d'un écoulement dans un milieu poreux avec changement de phase (ébullition). Phénomène qui se rencontre entre autres lors de la stimulation d'accidents nucléaires (désintégration du cœur radioactif en débris poreux, particulièrement ou entièrement saturés en liquide de refroidissement**, I**. Macdonald et al [3].

I.2. Définition relative aux milieux poreux :

I.2.1. Milieu poreux :

Un milieu poreux est un massif formé de cavités de volume et de surface variées, interconnectées, partiellement ou totalement entre eux par des petits canaux, en prenant comme exemple de formation de particules sphériques, de textures fibreuses, etc., entre lesquels les vides forment l'espèce proprement dit (les vides sont appelés pores).

- Un milieu poreux se présente généralement sous les deux formes suivantes : Milieux poreux consolidés, dans lesquels la phase solide est formée de grains cimentés (fig. I.1) [4], (calcaire, grés, la céramique….).
- Milieux poreux non consolidés, dans lesquels la phase solide est formée de grains non soudés entre eux (fig. I.2) [4], (fibres métalliques, gravier, sable, billes….).

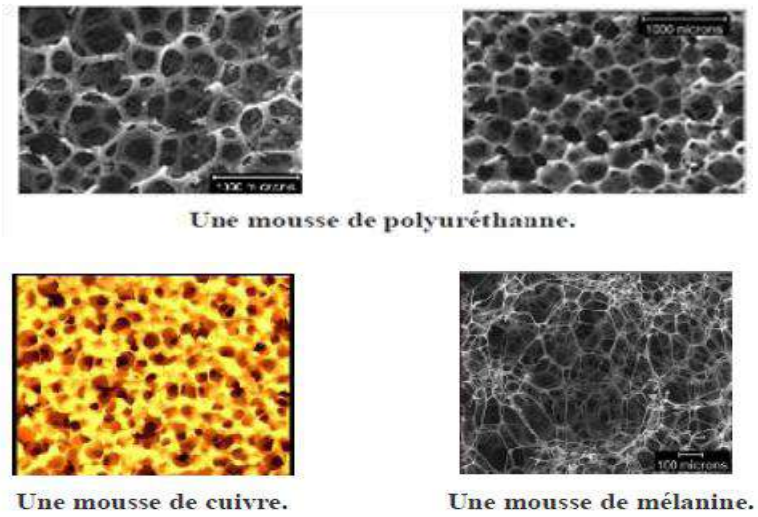


Figure I.1 : milieux poreux consolidés

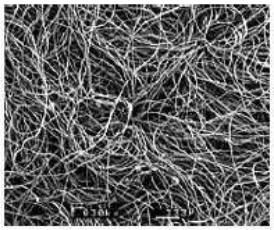


Figure I.2 : milieux poreux non consolidés

Les milieux poreux incluent entre autres : les filtres à sable dans l'industrie de traitement de l'eau, les roches réservoirs d'hydrocarbures et les matériaux de génie civil.

Une des caractéristiques majeures de la plupart des corps poreux est de permettre la circulation des fluides dans les cavités du milieu poreux, on distingue pour cela deux (02) types de milieu poreux :

- Le milieu poreux saturé, où la matrice solide est complètement remplie par les fluides comme le sol imbibé d'eau.

Le milieu poreux où plusieurs fluides, miscibles ou non, coexistent au sein des cavités, comme le sol partiellement saturé d'eau, le mélange eau-huile dans les roches pétrolières (écoulement polyphoniques).

I.2.2. Notion de volume élémentaire représentatif (V.E.R) :

En pratique, l'utilisation des équations différentielles à l'échelle macroscopique d'un milieu poreux s'avère impossible à cause de la géométrie de ce milieu qui se caractérise par le non uniformité de la dimension du vide et de distribution dans la partie centrale de la matrice poreuse. Il est par conséquent nécessaire d'effectuer un changement d'échelle.

On définit ainsi un volume élémentaire représentatif de grande dimension par rapport aux dimensions moyennes des pores où les grandeurs et paramètres telles que la vitesse, la pression, la température, la porosité, sont de valeurs moyennes.

Autrement dit on peut considérer, par la suite, que le milieu poreux est un ensemble de V.E.R. Cette conceptualisation introduite par J. Bear permet de raisonner en termes de milieu continu équivalent.

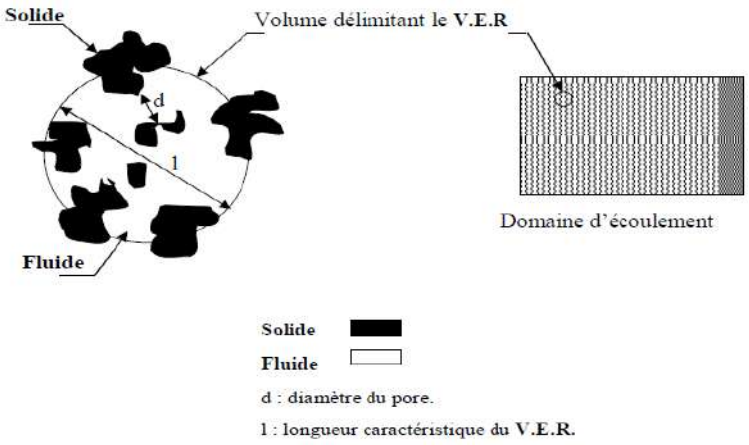


Figure I.3 : Volume élémentaire représentatif (V.E.R.)

I.2.3. Propriétés structurales et thermo physique d'un milieu poreux

Différentes grandeurs géométriques et thermo-physiques sont utilisées pour caractériser l'écoulement et le transfert de chaleur se produisant dans un milieu poreux, nous pouvons citer :

I.2.3. 1. La porosité.

La porosité totale (ε_T) dans un milieu poreux est définie comme étant le rapport du volume occupé par les espèces vides au volume total (matrice + vide) correspondant :

$$\varepsilon_T = \frac{V_P}{V_T} \qquad \textbf{(I.1)}$$

Où

V_P : Volume des espaces vides

V_T : Volume total

En général, la porosité totale ne présente pas d'intérêt, car seuls les pores accessibles jouent un rôle actif. On définit donc la porosité effective ou utile :

$$\varepsilon_e = \frac{V_{PU}}{V_T} \qquad \textbf{(I.2)}$$

Où :

V_{PU} : Volume des pores accessibles ou utiles (c'est à dire communiquant entre eux).

Le tableau (1.1) nous donne quelques valeurs de la porosité de certains matériaux d'après les résultats expérimentaux d'A.E.Scheidrgger [5].

SUBSTANCE	**POROSITE**
Matériau mousseux	0,98
Fibre de verre	0,88 – 0,93
Fil à tisser	0,68 – 0,76
Grain de **silice**	0,65
Poudre d'ardoise noire	0, 57 – 0,66
Cuir	0,56 – 0,59
Terre	0,43 – 0,54
Sable	0,37 – 0,70
Empilement de sphères	0,36 – 0,43
Filtre à cigarette	0,17 – 0,49
Brique	0,16 – 0,34

Tableau I.2 : Valeurs moyennes de porosité de quelques matériaux.

I.2.3.2. La variation de la porosité :

La variation de la porosité apparaît significativement sur le champ de vitesse, et cela en modifiant localement le profil des vitesses, ceci est associé à la nature du contact entre le matériau poreux et la paroi au voisinage de cette dernière, l'assemblage des particules formant le milieu poreux défait.

Le milieu poreux devient ainsi perméable, cette perméabilité est associée à la présence de contraintes de compressions, fracture, etc…

La vitesse du fluide atteint presque deux (02) fois le diamètre des particules.

La majorité des travaux de recherches supposent une variation de la porosité (valeur moyenne) au voisinage de la paroi et peut être approximée pour un lit de particules par :

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty}\left[1 + C\exp\left(\frac{-NR}{dp}\right)\right] \qquad \textbf{(I.3)}$$

Où :

ε : Porosité au centre du lit poreux ;

ε_{∞} : Porosité de la paroi ;

R : Distance à partir de la paroi solide ;

d_p : Diamètre des particules ;

C et N : Constantes empiriques, déterminées d'après de récentes recherches par les conditions suivantes :

$$R = 0 \rightarrow \varepsilon = 1$$
$$R \approx 4d_p à 5d_p \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{\infty}$$

C= 1,4

→Pour ε_{∞} = 4

N= 5, à, 6

I.2.3.3. La perméabilité :

Elle caractérise l'aptitude du milieu poreux à laisser circuler le fluide à travers les pores dans le cas de la présence d'un gradient de pression.

Lorsque le milieu poreux ne contient qu'un seul liquide, la perméabilité absolue K, est donnée par la loi de H.Darcy [6].

$$K = \frac{-\left(\frac{Q}{S}\right).\mu}{\partial P / \partial x} \qquad \textbf{(I.4)}$$

$\frac{Q}{S}$: Vitesse de filtration (vitesse Darcienne) dans le milieu poreux ;

Q : Débit s'écoulant à travers le milieu poreux ;

S : Surface de la section droite ;

μ : Viscosité dynamique de pression dans le sens de l'écoulement.

$\frac{\partial P}{\partial x}$: Gradient de pression dans le sens de l'écoule

L'unité de la perméabilité est le m², mais elle est souvent exprimée en Darcy :

1 Darcy= 9.87×10^{-13} m².

.La perméabilité est déterminée expérimentalement en fonction des paramètres géométriques.

Le tableau (1.2) représente certaines valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux [6].

SUBSTANCE	PERMEABILITE
Briques	$4{,}8\ 10^{-15}$ à $2{,}2\ 10^{-13}$
Cuir	$9{,}5\ 10^{-14}$ à $1{,}2\ 10^{-13}$
Poudre d'ardoise noire	$8{,}9\ 10^{-14}$ à $1{,}2\ 10^{-13}$
Terre	$2{,}9\ 10^{-13}$ à $1{,}4\ 10^{-11}$
Fibre de verre	$2{,}4\ 10^{-11}$ à $5{,}1\ 10^{-11}$
Sable	$2{,}0\ 10^{-11}$ à $1{,}8\ 10^{-08}$
Fibre à tisser	$3{,}8\ 10^{-09}$ à $1{,}0\ 10^{-08}$
Cigarette	1,0 à 10^{-09}

Tableau I.3 : Valeurs moyennes de perméabilité de quelques matériaux, O.Reynolds et Dullien [7,8]

I.2.3.4. La tortuosité

Dans un milieu poreux formé d'un empilement de grains solides, la vitesse réelle locale du fluide n'est pas tout à fait parallèle à la direction moyenne de l'écoulement du fait des obstacles constitués par la phase solide. Le fluide contourne les différentes particules s'opposant à son passage.

Le trajet suivi par un filet fluide est $L_m > L$ où L est la longueur du milieu poreux.

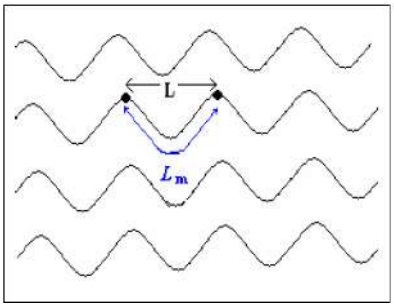


Figure I.4 : Définition schématique de la tortuosité

On appelle tortuosité le rapport entre la longueur moyenne du chemin parcouru par une particule fluide et la longueur de l'échantillon.

$$\tau = \frac{L_m}{L}$$

Dans le cas des milieux poreux constitués d'empilement de particules sphériques, la tortuosité varie peu et reste sensiblement égale à $\pi/2$.

I.2.3.5. La surface spécifique

La surface spécifique est définie comme l'aire totale des vides rapportée à l'unité de volume, soit :

$$A_S = \frac{\text{Aire totale des vides}}{\text{Volume totale du milieu}}$$

Ce paramètre sert d'élément comparatif pour différents milieux poreux de volume total V.

I.2.3.6. Conductivité thermique effective

Vu la complexité de la structure des milieux poreux ainsi que la présence des différentes phases (solide et fluide), la modélisation du transfert de chaleur à travers les milieux poreux nécessite l'introduction de la notion de conductivité thermique effective k_e. En effet, les phases solides et fluide présentes dans le milieu poreux contribuent généralement avec des proportions différentes au mode de conduction (le plus souvent $k_{solide} > k_{fluide}$).

Cette conductivité effective dépend de la porosité et des conductivités thermiques des phases solides k_s et fluide k_f.

De manière générale, il n'existe pas de modèles exacts de conductivité thermique effective qui peuvent être appliquées aux cas pratiques d'écoulement dans les milieux poreux. Les modèles existants sont plutôt des modèles approchés construits pour des géométries simples en utilisant des hypothèses simplificatrices et en se basant sur des données expérimentales. Les modèles proposés sont tous des combinaisons pondérées des modèles série et parallèles basés sur l'analogie électrique.

- Dans le modèle série, le flux de chaleur traverse successivement les phases solide et fluide. La résistance thermique du milieu est alors égale à la somme des résistances thermiques dans chacune des phases ; (Fig. I.5).

$$\frac{1}{k_C} = \frac{\varepsilon}{k_f} + \frac{1-\varepsilon}{k_s} \qquad \textbf{(I.5)}$$

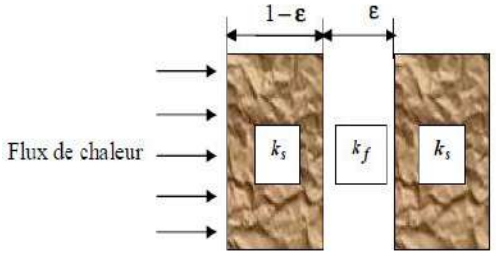


Figure I.5 : Modèle série de la conductivité thermique effective

➢ Dans le modèle parallèle, le flux de chaleur traverse en même temps les deux phases qui sont parallèles. La conductivité effective est égale à la somme des conductivités thermiques dans chacune des phases ; (Fig. I.6).

$$k_e = (1-\varepsilon)k_S + \varepsilon k_f \qquad \textbf{(I.6)}$$

La conductivité thermique effective est toujours comprise entre celle du fluide et celle du solide.

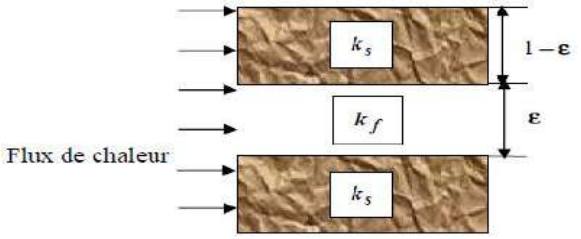


Figure I.6 : Modèle parallèle de la conductivité thermique effective

❖ **Conductivité thermique équivalente**

La conductivité équivalente est une fonction complexe des conductivités du solide et du fluide. En général, on ne pourrait pas évaluer la valeur exacte de la conductivité. Le moyen efficace est la mesure expérimentale dans les conditions d'utilisation en régime permanent. Pour plus de détail sur l'évaluation de la conductivité, nous pouvons citer les travaux de, Tobbal et Bennacer [9], Beji [10].

I.3. Modèles d'écoulement en milieux poreux :

Les lois des écoulements en milieu poreux ne constituent que des approximations. On s'intéresse en général qu'aux phénomènes à l'échelle macroscopique. Plusieurs lois phénoménales sont utilisées.

I.3.1. La loi de Darcy

Établie par Darcy sur la base d'observations expérimentales, c'est une relation empirique qui décrit macroscopiquement les écoulements dans les milieux poreux, moyennant la vitesse de filtration.

$$\vec{V} = \frac{k}{\nu}\left(-\frac{\vec{\nabla}P}{\rho}\right) + \vec{g} \qquad \textbf{(I.7)}$$

Où k est la perméabilité et ν la viscosité cinématique du fluide. L'équation de Darcy a été vérifiée pour les écoulements de faible vitesse. La valeur du nombre de Reynolds est utilisée comme critère pour caractériser la transition d'un régime d'écoulement laminaire à un régime turbulent. Pour cela on a défini un nombre de Reynolds de pore pour les écoulements en milieu poreux. En définissant d comme longueur caractéristique qui représente la dimension caractéristique des pores, le nombre de Reynolds s'écrit :

$$R_e = V.\frac{d}{\nu} \qquad \textbf{(I.8)}$$

En termes de détermination de d, Collins (1961) a proposé l'expression $d = \sqrt{k/\varepsilon}$

Alors que Ward (1964) a plutôt suggéré que $d = \sqrt{k}$ quelle que soit la porosité.

I.3.2. Formulation de Forchheimer :

La formulation de Darcy-Forchheimer (1950) la plus couramment utilisée, pour décrire l'écoulement d'un fluide incompressible à travers un milieu poreux homogène et isotrope, en régime stationnaire et en présence de pesanteur, est la suivante

$$\nabla P = \rho g - \frac{\mu}{k}V + \frac{b\rho}{\sqrt{k}}|V\ |V \qquad \textbf{(I.9)}$$

où **b** est un paramètre caractéristique de la géométrie du milieu poreux appelé paramètre de Forcheimer. Résultant de la prise de moyenne sous fortes hypothèses, cette formulation introduit un terme convectif qui exprime la contribution inertielle devenant importante avec les **(** Re **)** croissant.

Cette loi empirique est connue sous le nom de formulation de Darcy-Brinkman, fortement utile pour le cas des hautes porosités. Le premier terme de droite de l'équation ci-dessus contenant la viscosité μ est le terme de Darcy et le deuxième contenant la viscosité effective μ_{eff} est appelé le terme de Brinkman. La difficulté dans l'utilisation de ce modèle réside dans l'évaluation de la viscosité équivalente du milieu μ_{eff} . En effet cette grandeur est fonction non seulement de la porosité du milieu mais aussi de sa géométrie (tortuosité). Brinkman a assimilé la viscosité équivalente du milieu à celle du fluide ($\mu_{eff} \approx \mu$). Cette approximation a été prouvée expérimentalement et elle est en accord avec les travaux de Neale et Nader [11] et

Beckermann et Viskanta [12]. Le modèle de Brinkman permet ainsi d'imposer la condition de non glissement au champ de vitesse de filtration, au niveau des parois imperméables.

I.3.3. Modèle général :

On généralise les trois dernières équations en introduisant un terme transitoire et le terme convectif $(V\ \nabla)V$ ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\rho}{\varepsilon}\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\rho}{\varepsilon^2}(V\ \nabla)V\ =-\nabla P+\rho g-\frac{\mu}{k}V+\frac{b\rho}{\sqrt{k}}|V\ |V+\mu_{eff}\nabla^2 V \qquad \textbf{(I.10)}$$

Cette équation est équivalente à l'équation de Navier Stokes issue du bilan de quantité de mouvement en milieu fluide. Il faut également noter que la complexité d'un écoulement en milieu poreux peut être le résultat des effets d'inertie et de viscosité, et d'une variation importante de la porosité au niveau des parois.

I.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, les définitions des principales caractéristiques se rapportant aux milieux poreux, les modèles d'équations ainsi que les régimes d'écoulement ont été examinés.
Le prochain chapitre sera consacré à une étude bibliographique portant la double diffusive dans les milieux poreux afin de situer notre travail.

Chapitre II :
Formulation Mathématique

II.1 Introduction :

Le transport d'un constituant d'une solution fluide d'une région de haute concentration à une région de concentration plus faible est appelé transfert de masse. On peut comprendre son mécanisme en faisant une analogie avec la transmission de chaleur. La masse est diffusée dans une direction où le gradient de concentration existant va en diminuant et cesse lorsque le gradient de concentration s'annule. Dans ce chapitre, nous présentons brièvement les notions de base du transfert de masse utilisées dans notre étude.

Le transfert de masse peut s'effectuer en phase gazeuse ou en phase liquide, soit par diffusion moléculaire dans des fluides au repos (la diffusion solutale), soit par des courants dans des fluides en écoulement (la convection solutale).

Les mouvements de convection de double-diffusion ou convection thermosolutale sont générés par les gradients de densité qui sont dus à la fois au champ de température, et au champ de concentration ce dernier. Peut apparaître dans un fluide ayant deux (ou plusieurs) composants diffusant dans le mélange à différentes vitesses et qui contribuent au gradient vertical de densité. Ce phénomène de convection double diffusive apparaît dans des situations réelles diverses: croissance de cristaux destinés à l'industrie des semi-conducteurs, processus de séchage, processus de fusion-solidification de mélanges binaires, stockage des gaz liquide ou oxydation des surfaces métalliques, diffusion souterraine des polluants, enfouissement souterrain des déchets radioactifs, stockage de certains produits agricoles, extraction de pétrole.... On estime actuellement que ce phénomène des transferts convectifs de masse et de chaleur constitue un domaine très actif et d'importants travaux ont été effectués encore très récemment tant au niveau expérimental que numérique. La diversité des configurations et le nombre important de paramètres qui interviennent dans ce type d'écoulement nous donne un grand choix de domaine d'études.

La plupart des études existantes traitant de la convection d'origine thermique sont basées sur le modèle de Darcy. De plus ces études supposent le caractère isotrope et homogène des matériaux poreux. Dans beaucoup de cas, la loi de Darcy se trouve inadéquate et l'anisotropie géométrique des grains ou des fibres est rencontrée dans de nombreux milieux poreux, comme les formations rocheuses, les sols sédimentaires, les matériaux d'isolation thermique et les structures dendritiques formées lors de la solidification de mélanges à plusieurs composants. La majorité des travaux antérieurs qui se sont intéressés à la description des phénomènes de convection double diffusive traitent de la convection naturelle thermosolutale dans les milieux

formés de couches poreuses horizontales ou verticales thermiquement et/ou hydrauliquement anisotropes .Des études thermiquement et/ou hydrauliquement anisotropes récentes prennent en compte le caractère anisotrope et hétérogène des milieux poreux. L'absence d'études qui traitent de la convection naturelle thermosolutale dans une enceinte constitué de milieux poreux multi-couches avec différentes perméabilités dans des cavités carrées et inclinées nous a motivés pour rechercher des résultats concernant ce type de cavité. Notre étude porte plus particulièrement sur l'influence, à des nombres de Rayleigh modérés, de certains paramètres géométriques et physiques, du nombre de Lewis sur la structure de l'écoulement et les transferts de chaleur et de masse.

Dans un premier temps nous donnons quelques notions fondamentales sur le transfert de masse et son couplage avec la convection thermique. Nous présentons par la suite notre modèle mathématique.

Nous nous intéressons à la convection double diffusive générée dans une cavité carrée inclinée, infiniment longue, constituée d'un milieu poreuses multi-couches (deux couches de milieu poreux), de propriétés physiques différentes. Avec des conditions limites classiques (conditions de Dirichlet en température et concentration sur les parois verticales) en régime stationnaire.

II.2. Le Transfert de masse par diffusion moléculaire :

Le transfert de masse par diffusion moléculaire est analogue à la transmission de chaleur par conduction. Il peut avoir lieu dans un fluide au repos mais également dans un fluide en écoulement. Si l'on considère par exemple une cavité contenant deux gaz A et B à la même température, même pression et séparés initialement par une cloison Figure II.1 :

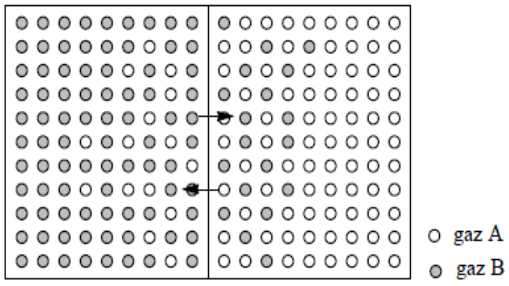


Figure. II.1: transfert de masse par diffusion moléculaire dans un mélange gazeux

Un transfert de masse s'effectue, dès qu'on met ces deux gaz en contact, dans le sens décroissant de la concentration.

En régime permanent, la concentration en chaque point ne varie pas avec le temps, et suivant la loi de Fick :

$$\vec{\dot{m}}_A = -D_{AB}\overrightarrow{grad}C_A \qquad \textbf{(II.1)}$$

Où $\vec{\dot{m}}_A$ est la densité de flux massique en kg/(s m^2).

Cette équation est appelé la loi de Fick et relie la densité du flux massique $\dot{m}_A$ échangé par diffusion solutale au gradient de concentration et à la diffusivité massique D_{AB} du composant A dans B.

Remarquons que la loi de Fick est analogue à celle de Fourrier qui détermine la densité du flux thermique transféré par conduction dans un milieu homogène de conductivité λ .

$$\vec{q} = -\lambda\overrightarrow{grad}T \qquad \textbf{(II.2)}$$

$\vec{q}$ est la densité du flux thermique exprimée en W/m^2

λ : est la conductivité thermique exprimée en W/m.K

T est la température [K]

La diffusion solutale peut être influencée par des paramètres extérieurs, tel que les gradients de température (effets de Soret, effet Dufour), les gradients de pression où les réactions chimiques. Dans notre étude, nous supposerons que ces effets extérieurs sont négligeables et que la diffusion solutale ne dépend que du gradient de concentration.

En diffusion solutale, on travaille généralement sur le concept de concentration d'un élément e dans un mélange. Cette concentration représente la masse de l'élément e dans le mélange de volume V_d et elle est exprimée en kg de solvant (l'élément e) par m^{3}de solution (le mélange).

$$C_e = \frac{m_e}{V_d} = \rho_e \qquad \textbf{(II.3)}$$

La densité de flux massique locale d'un élément e dans un mélange s'exprime.

$$\vec{\dot{m}}_e = \rho_e\overrightarrow{V_e} \qquad \textbf{(II.4)}$$

Où $\overrightarrow{V_e}$ représente la vitesse des particules du composant e dans un système de coordonnées fixes. La vitesse moyenne massique $\vec{V}$ est alors définie comme le rapport de la somme des flux massiques élémentaires à la densité totale du mélange.

$$\rho.\vec{V} = \vec{\dot{m}} = \sum \vec{\dot{m}} = \sum \rho_e \overrightarrow{V_e} \qquad \textbf{(II.5)}$$

$$\vec{V} = \frac{1}{\rho} \sum \rho_e \vec{V} \qquad \textbf{(II.6)}$$

On définit alors le flux massique de l'élément e relativement par rapport à un repère se déplaçant à la vitesse massique moyenne par :

$$\overrightarrow{\dot{M}_e} = \rho_e \left(\overrightarrow{V_e} - \vec{V} \right) \qquad \textbf{(II.7)}$$

Si $\vec{\dot{m}}$ est le flux absolu de l'élément e, $\overrightarrow{\dot{M}}$ est le flux diffus ; il représente le mouvement de l'élément relativement au mouvement moyen du mélange et on peut écrire :

$$\overrightarrow{\dot{m}_e} = \overrightarrow{\dot{M}_e} + \rho_e \vec{V} \qquad \textbf{(II.8)}$$

L'équation (II.8) nous montre qu'il y a deux contributions pour le flux absolu de l'élément e, l'une due à la diffusion (mouvement de l'élément e par rapport au mouvement moyen du mélange) et l'autre due au mouvement moyen du mélange.

II.2.1 Equations de la diffusion massique

L'équation de conservation de la masse globale du mélange s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left(\rho_e \vec{V} \right) = 0 \qquad \textbf{(II.9)}$$

Soit, encore, en distinguant la contribution de chacun des éléments : L'équation relative à l'ensemble des éléments du mélange s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left(\sum \rho_e \overrightarrow{V_e} \right) = 0 \qquad \textbf{(II.10)}$$

L'équation de la conservation de la masse pour chaque élément e du mélange sur un volume de contrôle est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \left(\rho_e \overrightarrow{V_e} \right) = 0 \qquad \textbf{(II.11)}$$

En tenant compte de l'équation (II.7), l'équation (II.11) s'écrira :

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \nabla\left(\rho_e \vec{V}\right) = -\nabla \overrightarrow{\dot{M}_e} \qquad \textbf{(II.12)}$$

En remplaçant le flux massique M_e par son expression donnée par la loi de Fick (II.1) et en introduisant le concept de la concentration défini par l'équation (II.3), on obtient l'équation de la diffusion de chaque constituant e du mélange.

$$\frac{\partial C_e}{\partial t} + \vec{V}.\nabla C_e = \mathrm{D}\,\Delta\, C_e \qquad \textbf{(II.13)}$$

Dans notre étude le mélange ne contient qu'un seul élément, dans tout ce qui va suivre on omettra l'indice e pour la concentration, on écrira donc l'équation (II.13) comme suit :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V}.\nabla C = D\Delta C \qquad \textbf{(II.14)}$$

Lorsque l'écoulement du fluide est assez faible pour contribuer au transfert de masse, l'équation (III.15) s'écrit sous la forme réduite suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\nabla C \qquad \textbf{(II.15)}$$

De même cette diffusivité est analogue à la conductivité thermique (exprimée en kJ/kg.K), si on compare la loi de Fick (III.1) et la loi de Fourrier (III.2) donnant respectivement la densité du flux solutal et la densité du flux thermique.

II.3. Couplage avec la convection thermique :

Pour expliquer le comportement de deux écoulements dus simultanément à la diffusion thermique et à la diffusion solutale, prenons l'exemple simple d'une plaque plane verticale maintenu à une température Tp et baignant dans un fluide à une température T∞. Si Tp> T∞, le fluide près de la paroi s'échauffe ce qui entraîne une diminution de sa densité, et par conséquent un mouvement ascendant s'établit le long de la paroi, du fait de la poussée d'Archimède. C'est le cas de la convection thermique pure. Supposons maintenant que ce même fluide contient un constituant d'une concentration C∞ et que la plaque est soumise à une concentration Cp de ce même constituant, Quatre cas peuvent intervenir suivant la nature du fluide et des conditions aux limites.

En effet le comportement du fluide le long de la paroi est influencé par le signe d'expansion solutal du constituant (soluté) βc et par le taux de concentration de la paroi par rapport à la solution. Selon ces paramètres, les forces de volume thermiques et solutales peuvent coopérer ou s'opposer suivant les configurations suivantes :

- Le cas où le fluide près de la paroi est moins concentré (Cp<C∞), sa densité plus faible entraînerai un mouvement ascendant, cet écoulement solutal qui est dû à un gradient de concentration coopère avec l'écoulement thermique si βc >0 et s'oppose si βc <0.
- Le cas où le fluide près de la paroi est plus concentré (Cp>C∞), il devient plus lourd et descend le long de la plaque, cet écoulement se trouve confronté à l'écoulement thermique si βc >0 mais s'entraident si βc <0.

Les quatre configurations sont représentées sur la figure II.2

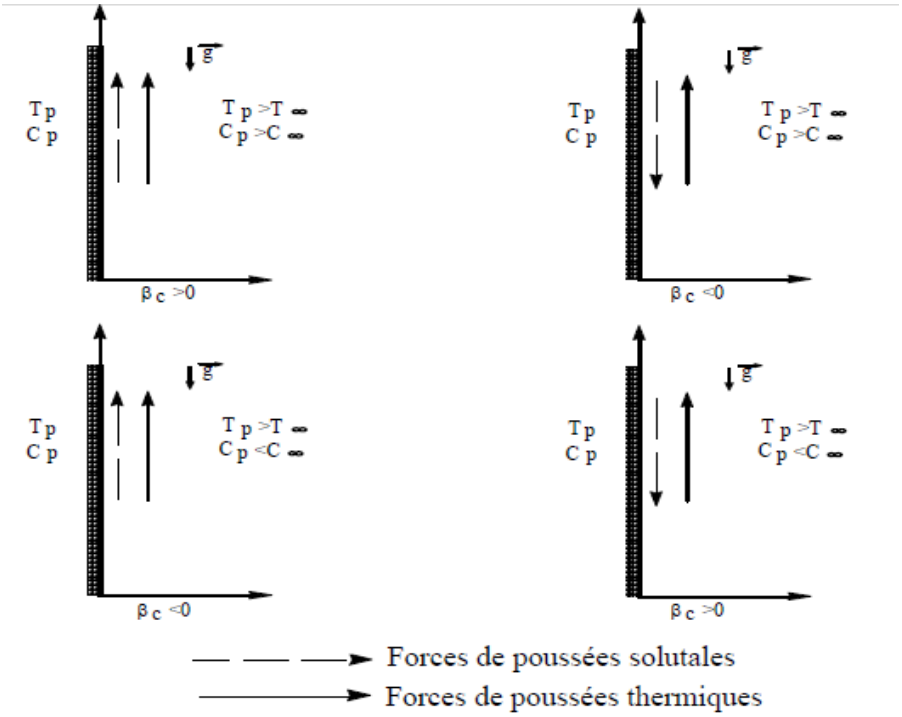


Figure. II.2 : Couplage thermosolutale le long d'une plaque verticale

Bejan [13] présente des résultats concernant ce même type d'écoulement naturel d'un fluide le long d'une plaque verticale soumise à des gradients horizontaux de température et de concentration.

Nous considérons dans notre étude que les transferts de chaleur et de masse ne sont couplés que par la vitesse de l'écoulement et n'interagissent pas entre eux directement. Dans le cas contraire nous serons en présence de l'effet Soret et Dufour. Ce phénomène apparaît lorsque les gradients de température et de concentration sont élevés.

Dans ce chapitre nous décrivons et nous formulons le modèle physique, les hypothèses simplificatrices ainsi que les conditions aux limites appropriées.

Le travail qui fait l'objet de cette étude concerne justement la convection double diffusive générée dans une cavité carrée remplie par deux couches de milieux poreux disposées soit horizontalement. Par une modélisation numérique, les résultats des calculs sont présentés et commentés en termes de lignes de courant, des isothermes, des iso concentrations et des transferts thermiques et massiques moyens.

II.4. Modèle Physique :

Le modèle physique étudié est présenté dans le figure III.3. C'est cavité carrée remplit par deux couches la première est une couche poreuse et la deuxième couche est fluide disposé horizontalement.

Quelques hypothèses sont considérées pour les deux cas de modèles physiques :

- Ecoulement laminaire 2D et stationnaire.
- Chaque couche poreuse est considérée homogène, isotrope et saturée par le même fluide.
- Les propriétés thermo-physiques sont considérées constantes
- Hypothèse de Boussinesq admise.
- Un équilibre thermodynamique local a lieu entre le fluide et le milieu poreux.
- Le modèle de Darcy- Brinkman est adopté. Les parois inférieure et supérieure de la cavité sont adiabatiques et imperméables alors que les faces latérales sont maintenues à des conditions de température et de concentration constantes.

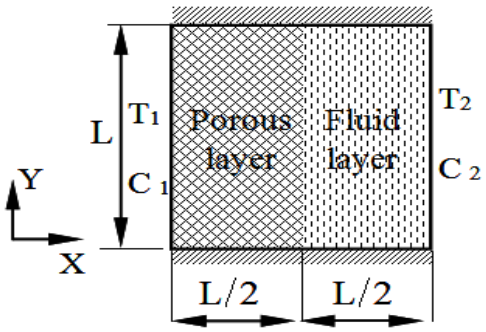


Figure II.3. Modèle physique et système de coordonnée

A cet effet, une convection double diffusive prend naissance dans la cavité partiellement poreuse. Les équations gouvernantes formulées dans les sections qui suivent sont écrites en tenant compte des hypothèses précédentes :

II.5. Equations gouvernantes :

II.5.1. Equation de continuité :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial v_i}{\partial y} \qquad \textbf{(II.20)}$$

II.5.2. Equation de conservation de la quantité de mouvement :

❖ **Suivant x**

$$\rho_f\left(u_i\frac{\partial u_i}{\partial x}+v_i\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)=-\varepsilon^2\frac{\partial p_i}{\partial x}-\varepsilon^2\frac{\mu_f}{K_i}u_i+\varepsilon^2\mu_{eff_i}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}\right)+\varepsilon^2\left(\beta_T\left(T-T_{ref}\right)+\beta_C\left(C-C_{ref}\right)\right) \qquad \textbf{(II.21)}$$

❖ **Suivant y**

$$\rho_f\left(u_i\frac{\partial v_i}{\partial x}+v_i\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)=-\varepsilon^2\frac{\partial p_i}{\partial y}-\varepsilon^2\frac{\mu_f}{K_i}v_i+\varepsilon^2\mu_{eff_i}\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\varepsilon^2\left(\beta_T\left(T-T_{ref}\right)+\beta_C\left(C-C_{ref}\right)\right)\rho_f.g. \qquad \textbf{(II.22)}$$

II.5.3. Equation de l'énergie :

$$(\rho.cp)_f\left[u_i\frac{\partial T_i}{\partial x}+v_i\frac{\partial T_i}{\partial y}\right]=k_{eff}\left[\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2}\right] \qquad \textbf{(II.23)}$$

II.5.4.Equation de concentration :

$$\left[u_i\frac{\partial C_i}{\partial x}+v_i\frac{\partial C_i}{\partial y}\right]=D_{eff}\left[\frac{\partial^2 C_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 C_i}{\partial y^2}\right] \qquad \textbf{(II.24)}$$

L'indice i désigne la couche poreuse, $i=1$correspond à la couche 1 et $i=2$ à la couche fluide 2. Dans le cas du modèle physique avec les couches poreuses horizontales, on pose: $\alpha=0^\circ$. On désignera le modèle physique de la figure 1a par modèle horizontal.

II.6. Conditions aux limites :

Pour la résolution du problème physique, nous avons besoin d'associer aux équations mathématiques régissant le phénomène de convection naturelle, un nombre adéquat de conditions aux limites.

Les conditions aux limites se traduisent sous forme mathématique comme suit :

II.7. A dimensionnement des équations :

En général, l'adimensionnement est une méthode qui peut permettre de réduire le nombre de paramètres influençant les phénomènes physiques et de généraliser les résultats à obtenir.
Afin de ne pas alourdir les équations gouvernantes par l'indice i on a omis l'indice (*i*). Ainsi en introduisant les grandeurs adimensionnelles suivantes :

L : Longueur de la cavité.

$\Delta T = T_1 - T_2$: Ecart de température de référence entre les parois.

$\Delta C = C_1 - C_2$: Ecart de Concentration de référence entre les parois.

a : Diffusivité thermique.

$$X^* = \frac{x}{L} \quad , \quad Y^* = \frac{y}{L} \quad , U^* = \frac{uL}{a} \quad , \quad V^* = \frac{vL}{a} \quad , \quad \theta = \frac{T - T_{ref}}{T_1 - T_2} \quad , \quad S = \frac{C - C_{ref}}{C_1 - C_2} \quad ;$$

$$P^* = p \frac{L^2}{\left(\frac{\rho_f .a^2}{\varepsilon^2} \right)} \qquad \text{Avec:} \qquad T_{ref} = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad , \quad C_{ref} = \frac{C_1 + C_2}{2}$$

Afin de ne pas trop encombrer l'écriture des équations les exposants (*) relatifs aux variables adimensionnelles seront omis par la suite.

En procédant à une mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernantes, celles-ci s'écrivent sous la forme suivante :

L'ensemble des équations gouvernant la conservation de la masse, la quantité de mouvement, de l'énergie et de l'espèce chimique s'écrivent pour chacune des couches, sous forme adimensionnelle comme suit :

$$\frac{\partial U_i}{\partial X} + \frac{\partial V_i}{\partial Y} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i^2}\left[U_i \frac{\partial U_i}{\partial X} + V_i \frac{\partial U_i}{\partial Y} \right] = -\frac{\partial P_i}{\partial X} - \frac{\Pr}{Da_i}.U_i + Rv \Pr.\left(\frac{\partial^2 U_i}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U_i}{\partial Y^2} \right) \qquad \textbf{(2)}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i^2}\left[U_i \frac{\partial V_i}{\partial X} + V_i \frac{\partial V_i}{\partial Y} \right] = -\frac{\partial P_i}{\partial Y} - \frac{\Pr}{Da_i}.U_i + Rv \Pr.\left(\frac{\partial^2 V_i}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial Y^2} \right) + Ra \Pr[\theta_i + NS_i] \qquad \textbf{(3)}$$

$$U_i \frac{\partial \theta_i}{\partial X} + V_i \frac{\partial \theta_i}{\partial Y} = Rc.\left(\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial Y^2} \right) \quad \textbf{(4)}$$

$$U_i \frac{\partial S_i}{\partial X} + V_i \frac{\partial S_i}{\partial Y} = \frac{1}{Le}.\left(\frac{\partial^2 S_i}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 S_i}{\partial Y^2} \right) \quad \textbf{(5)}$$

L'indice i désigne les couches, il prend les valeurs 1 ou 2. Les paramètres apparaissant dans ces équations sont définis dans la nomenclature.

Les conditions aux limites se traduisent mathématiquement sous forme adimensionnelle par :

Pour Y=0 $0 \leq X \leq 1$ $U_i=V_i=0$ $\left.\frac{\partial \theta_i}{\partial Y}\right| = 0$ $\left.\frac{\partial S_i}{\partial Y}\right| = 0$ **(7)**

Pour Y=1 $0 \leq X \leq 1$ $U_i=V_i=0$ $\left.\frac{\partial \theta_i}{\partial Y}\right| = 0$ $\left.\frac{\partial S_i}{\partial Y}\right| = 0$ **(8)**

Pour X= 0 $0 \leq Y \leq 1$ $U_i=V_i=0$ $\theta_i=-0.5$ $S_i=-0.5$ **(9)**

Pour X= 1 $0 \leq Y \leq 1$ $U_i=V_i=0$ $\theta_i=0.5$ $S_i=0.5$ **(10)**

A côté des conditions aux limites, on associe aussi les conditions de continuité aux interfaces.

La mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernante a donnée naissance à un groupement adimensionnel tel que le nombre de Darcy (Da_i) de chaque couche poreuse, le nombre de Rayleigh (Ra) ainsi que le nombre de Prandtl (Pr). Les autres paramètres sont définis dans la nomenclature.

Bien que dans les équations gouvernantes adimensionnées, c'est le nombre de Rayleigh fluide qui est défini, dans la suite on utilisera le nombre de Rayleigh modifié Ra_m (basé sur le nombre Rayleigh fluide Ra et le nombre de Darcy de la première couche poreuse $Ra_m = Ra\ Da_1$).

II.8. Conclusion :

Une fois les équations régissant le problème physique posé, avec les conditions aux limites associées, sont mises sous leurs formes adimensionnelles, et étant donné leur présentation sous forme d'équations aux dérivées partielles qui ne peuvent prétendre à une résolution analytique directe, nous avons donc opté pour une résolution numérique. Celle-ci permettra de transformer les équations aux dérivées en équations algébriques. Ceci fera l'objet du prochain chapitre.

Chapitre III :
Modélisation Numérique

III.1. Introduction :

La procédure numérique retenue pour la résolution du système d'équations couplées (III.16)-(III.19), gouvernant la convection thermosolutale dans une cavité carrée longue de dimensions (LxL) remplie de deux couches verticales avec les conditions limites écrites précédemment, est basée sur la méthode des volumes finis. Cette méthode classique est due à Patankar [14]. Elle utilise une formulation des équations en variables primitives (vitesse–pression).

III.2. Principe de la méthode des volumes finis :

III.2.1. Equation différentielle gouvernante :

Les phénomènes physiques impliquant l'écoulement d'un fluide, le transfert de chaleur et le transfert de masse, sont gouvernés par les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, d'énergie, des espèces chimiques,... etc. Ces principes sont exprimés par des équations différentielles. Si on note par ϕ la variable dépendante, les équations de conservation possèdent une forme commune, qui est donnée par :

$$\nabla.\left(\rho\vec{V}\phi\right)=\nabla.\left(\Gamma\vec{\nabla}\phi\right)+S \qquad \textbf{(III.1)}$$

Avec :

$\nabla.\left(\rho\vec{V}\phi\right)$: Terme convectif.

$\nabla.\left(\Gamma\vec{\nabla}\phi\right)$: Terme de diffusion.

S : Terme source.

Γ : Coefficient de diffusion.

ϕ : EST la variable dépendante généralisée (vitesse, température, Concentration).

III.2.1.1. Equation de continuité :

La difficulté majeure dans le calcul du champ de vitesse, réside dans le champ de pression, qui est inconnu. Cependant, ce champ de pression est implicitement spécifié dans l'équation de continuité.

Quand ce champ de pression est substitué dans les équations du mouvement, le champ de vitesse résultant satisfait l'équation de continuité. Le couplage entre le champ de pression et le champ de vitesse est utilisé dans l'élaboration d'une procédure de calcul pour le champ dynamique.

III.2.2. Maillage et volume de contrôle

La méthode des volumes finis consiste à diviser le domaine de calcul en un certain nombre de volumes de contrôle. Il existe plusieurs types de maillage, on peut citer le maillage uniforme, le maillage non uniforme et aussi le maillage à zones ; et c'est pour le maillage à zones que nous avons opté dans notre travail avec des pas très petits. La figure III-1 indique la subdivision d'un domaine en volume de contrôle.

La variable dépendante considérée est calculée en ces points. Les équations algébriques définies en ces nœuds, sont obtenues par intégration des équations de conservation à travers les volumes de contrôle, pour chaque nœud.

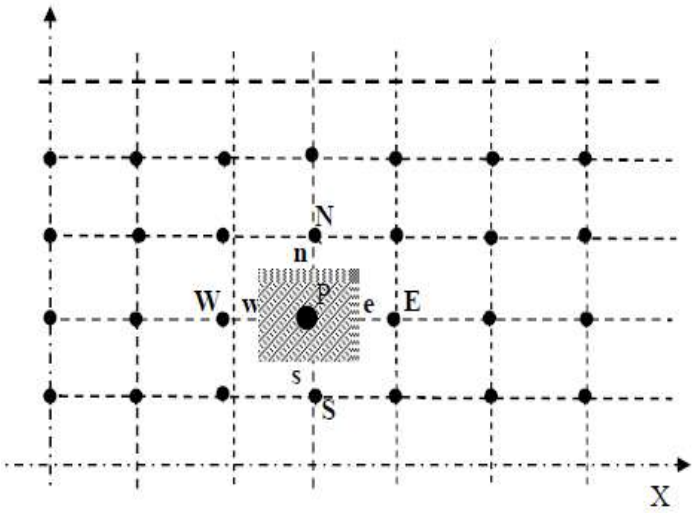


Figure III.1 : Subdivision du domaine d'étude en volumes de contrôle

III.2.3. Discrétisation des équations de conservation

Pour une situation bidimensionnelle, en régime permanent, l'équation différentielle (III.1) peut s'écrire, en considérant une direction i, sous la forme suivante :

$$\rho . u_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + S \qquad \textbf{(III.2)}$$

En combinant les flux convectifs et diffusifs (III.1), le flux total (convection- diffusion) J_i s'écrit alors :

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_i} = S \qquad \textbf{(III.3)}$$

Avec

$$J_i = \rho . u_i \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \qquad \textbf{(III.4)}$$

Les différents termes des équations de conservation obtenues dans notre cas sont rapportés dans le tableau (III-1).

Equation	ϕ	Γ	S
Continuité	1	0	0
Mouvement/X	U	GR2	$-\frac{\partial P}{\partial X} - GR1U + GR3$
Mouvement/Y	V	GR2	$-\frac{\partial P}{\partial Y} - GR1V + GR4$
Energie	θ	GR5	0
Concentration	S	GR6	0

Tableau III.1 : Définition des différents termes des équations de conservation.

En intégrant l'équation (III.3) à travers le volume de contrôle représenté dans la figure (IV.II), on obtient :

$$J_W A_W - J_e A_e + J_S A_S - J_n A_n = \overline{S} \Delta V = \overline{S} \Delta X \Delta Y \qquad \textbf{(III.5)}$$

Dans l'équation (III.5), les quantités Je, w, n, s représentent les flux totaux sur les faces des volumes de contrôle ; S est le terme source, et ΔV le volume. Les $A_{e,w,n,s}$ sont les aires de chaque face du volume de contrôle.

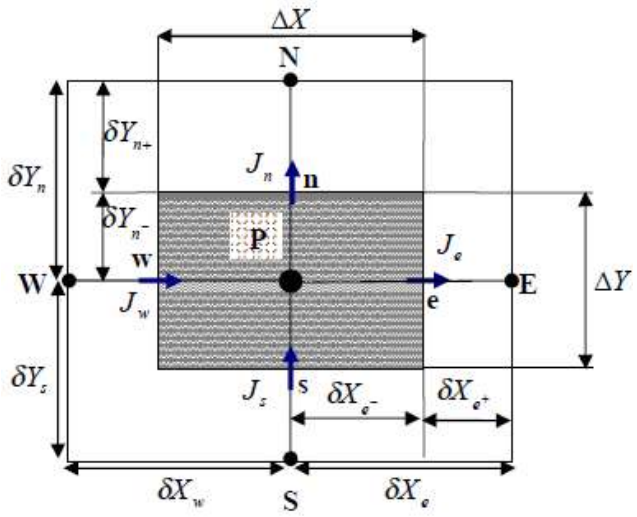


Figure III.2 : Volume de contrôle représentatif.

Avec :

$$J_e = \int_n^s (J_X)_e dY = \left[U\phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right]_e \Delta Y \qquad \textbf{(III.6)}$$

$$J_w = \int_n^s (J_X)_w dY = \left[U\phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right]_w \Delta Y \qquad \textbf{(III.7)}$$

$$J_n = \int_w^e (J_Y)_n dY = \left[V\phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right]_n \Delta X \qquad \textbf{(III.8)}$$

$$J_s = \int_w^e (J_Y)_S dX = \left[V\phi - \Gamma \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right]_s \Delta X \qquad \textbf{(III.9)}$$

III.2.3.1. Flux de diffusion -convection :

Considérons la région entre les points P et E de la figure (IV.2).Si un problème unidimensionnel de convection - diffusion est résolu entre les points P et E, un profil exponentiel de ϕ est obtenu comme solution exacte. La solution exponentielle conduit à :

$$J_e = F_e \left(\phi_P + \frac{(\phi_P - \phi_E)}{\exp(P_e) - 1} \right) \qquad \textbf{(III.10)}$$

Où le nombre de Peclet, P_e est donné par :

$$P_e = \frac{F_e}{D_e} \qquad \textbf{(III.11)}$$

$F_e = \rho U_e A_e$ est le débit d'écoulement, et D_e la conductance de diffusion.

Le coefficient de diffusion Γ_e est évalué par une moyenne harmonique [14] à travers le volume de contrôle. L'expression de D_e est alors :

$$D_e = A_e \left(\frac{(\delta X_{e^-})}{\Gamma_P} + \frac{(\delta X_{e^+})}{\Gamma_E}\right)^{-1} \qquad \textbf{(III.12)}$$

Les distances δX_{e^-} et δX_{e^+} [14] sont représentées sur la figure (III.2).

III.2.3.2. Simplification de l'expression du flux :

L'équation (IV.12) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$J_e = F_e \phi_p + \{D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0]\}(\phi_P - \phi_E) \qquad \textbf{(III.13)}$$

Avec

$$A(|P_e|) = \frac{|P_e|}{(\exp(|P_e|) - 1)} \qquad \textbf{(III.14)}$$

Le calcul des exponentielles est assez long, de plus il n'est pas exact pour les situations bidimensionnelles et tridimensionnelles avec terme source. Pour ces raisons, des approximations pour l'expression du flux ont été utilisées [14].

III.2.3.3. Linéarisation du terme source :

Souvent le terme source S dépend de la variable ϕ. Il est exprimé comme une fonction linéaire de ϕ_P. La méthode de la tangente [13] est recommandée dans la linéarisation du terme source ; elle consiste à écrire :

$$\bar{S} = \overset{*}{S} + \left[\frac{dS}{d\phi}\right]^* (\phi_P - \phi_E) \qquad \textbf{(III.15)}$$

La formule de linéarisation peut s'écrire alors :

$$\bar{S} = Sc + S_P \phi_P \qquad \textbf{(III.16)}$$

S_P est le coefficient de ϕ_P est Sc est la partie de S qui ne dépend pas explicitement de ϕ_P .Le symbole * est utilisé pour noter la valeur de ϕ_P à une itération donnée. Il est souhaitable lors de la linéarisation que SP soit négatif, car un SP positif peut causer une divergence.

Les valeurs des termes sources linéarisés (Sc et S_P) pour les différentes équations sont résumées dans le tableau (III.2).

Equation	ϕ	Sc	Sp
Continuité	1	0	0
Mouvement/X	U	$-\frac{\partial P}{\partial X}+GR3$	$-\frac{\Pr}{Da_i}$
Mouvement/Y	V	$-\frac{\partial P}{\partial Y}+GR4$	$-\frac{\Pr}{Da_i}$
Energie	θ	0	0
Concentration	S	0	0

Tableau III.2 : Expressions des termes sources linéarisés (Sc et Sp) pour les différentes équations.

III.2.3.4. Equation finale de discrétisation :

L'intégration de l'équation de continuité donne :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \qquad \textbf{(III.17)}$$

Où F_e, F_w, F_n et F_s sont les débits volumiques à travers les faces du volume de contrôle.

Multiplions l'équation (III -10) par ϕ_p elle devient :

$$F_e\phi_P - F_w\phi_P + F_n\phi_P - F_s\phi_P = 0 \qquad \textbf{(III.18)}$$

D'autre part, la linéarisation du terme source donne :

$$\overline{S} = Sc + S_P\phi_P \qquad \textbf{(III.19)}$$

La combinaison entre les équations (III-5) et (III-11) donne :

$$\left(J_e - F_e\phi_P\right) - \left(J_w - F_w\phi_P\right) + \left(J_n - F_n\phi_P\right) - \left(J_s - F_s\phi_P\right) = \left(Sc + S_P\phi_P\right)\Delta X\Delta Y \qquad \textbf{(III.20)}$$

Sachant que :

$$J_e - F_e\phi_P = \phi_E\left(\phi_P - \phi_E\right) \quad \textbf{(III.20a)}$$

$$J_w - F_w\phi_P = \phi_W\left(\phi_W - \phi_P\right) \quad \textbf{(III.20b)}$$

$$J_n - F_n\phi_P = \phi_N\left(\phi_P - \phi_N\right)$$

$$J_S - F_s\phi_P = \phi_S\left(\phi_S - \phi_E\right) \quad \textbf{(III.20d)}$$

On obtient l'équation discrétisée :

$$a_P\phi_P = a_W\phi_W + a_E\phi_E + a_S\phi_S + a_N\phi_N + b \quad \textbf{(III.21)}$$

Avec :

$$a_E = D_e A\left(\left|P_e\right|\right) + \left[-F_e, 0\right] \quad \textbf{(III.21a)}$$

$$a_W = D_w A\left(\left|P_w\right|\right) + \left[-F_w, 0\right] \quad \textbf{(III.21b)}$$

$$a_S = D_s A\left(\left|P_s\right|\right) + \left[-F_s, 0\right] \quad \textbf{(III.21c)}$$

$$a_N = D_n A\left(\left|P_n\right|\right) + \left[-F_n, 0\right] \quad \textbf{(III.21d)}$$

$$b = Sc\Delta X\Delta Y \quad \textbf{(III.21e)}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S - S_P\Delta X\Delta Y \quad \textbf{(III.21f)}$$

Le symbole [a, b] représente le maximum entre a et b et $A\left(\left|P_i\right|\right)$ la fonction d'interpolation qui diffère d'un schéma à un autre.

Avec :

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{\delta X_e}\Delta Y \quad , F_e = U_e \Delta Y \quad , \; P_e = \frac{F_e}{D_e}$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{\delta X_w}\Delta Y \quad , F_w = U_w \Delta Y \quad , \; P_w = \frac{F_w}{D_w} \qquad \textbf{(III.22)}$$

$$D_n = \frac{\Gamma_n}{\delta Y_n}\Delta X \quad , F_n = V_n \Delta X \quad , \; P_n = \frac{F_n}{D_n}$$

$$D_s = \frac{\Gamma_s}{\delta Y_s}\Delta X \quad , F_s = V_s \Delta X \quad , \; P_s = \frac{F_s}{D_s}$$

D_i, F_i et P_i représentent respectivement la diffusion, le débit volumique et le rapport du transfert par convection au transfert par diffusion.

L'équation (III.14) peut se mettre sous la forme générale suivante :

$$a_P \phi_P = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b \qquad \textbf{(III.23)}$$

L'indice nb note les nœuds voisins de P, et la sommation est faite à travers tous les nœuds voisins (e, w, n, s).

III.2.3.5.Méthode de résolution des équations algébriques :

La méthode de résolution adoptée dans la présente étude est la technique ligne par ligne ; qui combine entre une méthode directe (algorithme de Thomas) et une méthode itérative (Gauss Seidel) [14-16], est utilisée pour la résolution des équations algébriques. Elle consiste à appliquer l'algorithme de Thomas pour trouver les valeurs de S pour une direction et une position données. Les valeurs de ϕ des nœuds des positions avoisinantes sont estimées lorsque toutes les positions seront considérées, une itération est accomplie par la technique ligne par ligne. Le processus peut être répété en choisissant les positions dans l'autre direction.

III.2.4. Considérations pour le champ dynamique

L'analyse des équations gouvernantes pour les composantes de vitesse u_i révèle que ces dernières ne peuvent être obtenues directement par la résolution des équations du mouvement.

En effet, ces équations contiennent le gradient de pression $-\frac{\partial P}{\partial x_i}$ qui est un terme source important, lequel n'est pas exprimé en terme de u_i ou d'autres variables. Cependant, la pression est indirectement spécifiée à travers l'équation de continuité. Une autre difficulté surgit aussi pour les équations du mouvement et de continuité. Si les vitesses et les pressions sont calculées aux mêmes nœuds, plusieurs champs physiques irréels peuvent être considérés comme solutions. L'un des remèdes pour cet inconvénient est le maillage décalé proposé par Patankar.

III.2.4.1.Notion de maillage décalé :

La figure (III.3) montre une partie d'un maillage adapté au cas bidimensionnel. Dans le maillage décalé, les composantes de vitesse sont portées sur les faces des volumes de contrôle. Toutes les autres variables ϕ, y compris la pression, sont calculées aux nœuds principaux.

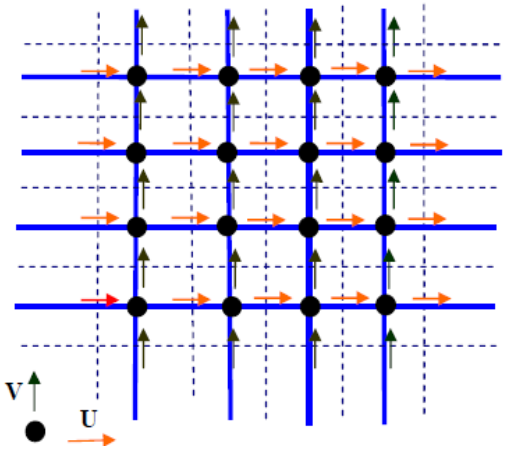


Figure III.3 : Représentation d'un maillage décalé.

III.2.5. Discrétisation des équations dynamiques

III.2.5.1. Equations du mouvement :

Les volumes de contrôle correspondant à U et V sont mentionnés dans la figure (III.4) l'équation du mouvement discrétisée au nœud (e) s'écrit alors :

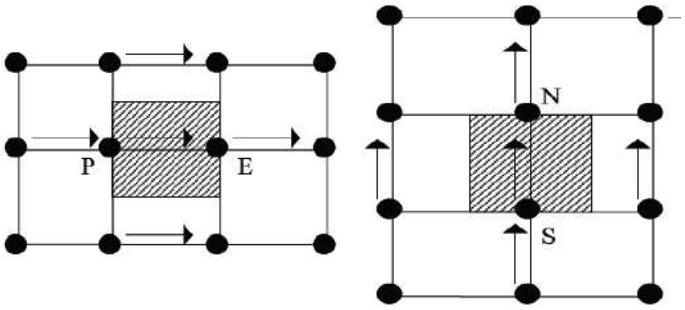


Figure III.4 : Volume de contrôle pour U et V.

L'intégration des deux équations de quantité de mouvement suivant les directions X et Y donne :

$$a_e U_e = \sum a_{nb} U_{nb} + b + (P_P - P_E) A_e$$

(III.24)

$$a_n V_n = \sum a_{nb} V_{nb} + b + (P_P - P_n) A_n$$

A_e, A_n représentent les surfaces sur les quelles agissent les forces de pression.

$(P_P - P_E) A_e$, $(P_P - P_E) A_n$: Sont les forces de pression agissant sur les deux faces verticale et horizontale.

La résolution nécessite la connaissance de la pression.

Le champ de vitesse obtenu ne satisfera l'équation de continuité que si la pression est correcte.

Au choix initial $P*$ correspond la solution $U*, V*$

$$a_e U_e^* = \sum a_{nb} U_{nb}^* + b + (P_P^* - P_E^*) A_e$$

(III.25)

$$a_n V_n^* = \sum a_{nb} V_{nb}^* + b + (P_P^* - P_N^*) A_n$$

III.2.5.2.Correction des vitesses et pression :

L'objectif est de corriger la pression estimée P^* telle que la vitesse obtenue U^*, V^*

S'approchera progressivement de la valeur qui satisfera l'équation de continuité.

Soit P la pression exacte :

$$P = P^* + P'$$

$$U = U^* + U' \quad \textbf{(III.26)}$$

$$V = V^* + V'$$

P' : Correction de pression et U', V' : correction des vitesses.

Nous avons :

$$a_e U_e = \sum a_{nb} U_{nb} + b + (P_P - P_E) A_e \quad \textbf{(III.27)}$$

$$a_e U_e^* = \sum a_{nb} U_{nb}^* + b + (P_P^* - P_E^*) A_e \quad \textbf{(III.28)}$$

Faisons la soustraction entre ces deux équations :

$$a_e U_e' = \sum a_{nb} U_{nb}' + (P_P' - P_E') A_e \quad \textbf{(III.29)}$$

L'une des hypothèses simplificatrices introduites par Patanker est de supposer que le terme $\sum a_{nb} U'_{nb\ e}$ est négligeable.

$$a_e U_e' = (P_P' - P_E') A_e \quad \textbf{(III.30)}$$

Où : encore $U_e' = (P_P' - P_E') d_e$ **(III.31)**

L'équation (IV-26) représente la formule de correction de vitesse, avec $d_e = \frac{A_e}{a_e}$

Donc : $U_e = U_e^* + (P_P' - P_E') d_e$ **(III.32)**

De la même manière

$$V_e = V_e^* + (P_P' - P_N') d_n \quad \textbf{(III.33)}$$

Avec : $d_n = \frac{A_n}{a_n}$

III.2.5.3.Equation de correction de pression :

Le problème maintenant est comment trouver la correction de pression P'?

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad \textbf{(III.34)}$$

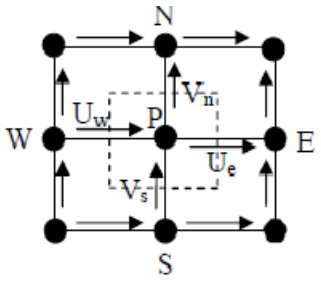


Figure III.5 : Volume de contrôle lié à P

Intégration sur un volume de contrôle autour de P donne :

$$(U_e - U_w)\Delta Y + (V_n - V_s)\Delta X = 0 \qquad \textbf{(III.35)}$$

Substitution des vitesses par $U = U^* + U'$, $V = V^* + V'$

D'où :

$$a_P P'_P = a_E P'_E + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b \qquad \textbf{(III.36)}$$

$$a_E = d_e \Delta Y \qquad \textbf{(III.36a)}$$

$$a_W = d_w \Delta Y \qquad \textbf{(III.36b)}$$

$$a_N = d_n \Delta X \qquad \textbf{(III.36c)}$$

$$a_S = d_s \Delta X \qquad \textbf{(III.36d)}$$

$$b = (U_w^* - U_e^*)\Delta Y + (V_s^* - V_n^*)\Delta X \qquad \textbf{(III.36f)}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \qquad \textbf{(III.36e)}$$

Le terme b devrait tendre vers zéro à la convergence.

III.3.Algorithme SIMPLER :

(SIMPLER : Semi **I**mplicit **M**ethod for **P**ressure **L**inked equation **R**evised), l'algorithme est développé pour permettre d'améliorer la vitesse de convergence.

- **Equation de pression**

Equation du mouvement :

$$a_e U_e = \sum a_{nb} U_{nb} + b + (P_P - P_E) A_e \qquad \textbf{(III.37)}$$

Où

$$U_e = \left(\frac{\sum a_{nb} U_{nb} + b}{a_e} \right) + (P_P - P_E) d_e \qquad \textbf{(III.38)}$$

On définit $\hat{U}_e$ pseudo vitesse comme :

$$\hat{U}_e = \left(\frac{\sum a_{nb} U_{nb} + b}{a_e} \right)_e \qquad \textbf{(III.39)}$$

Donc

$$U_e = \hat{U}_e + (P_P + P_E) d_e \qquad \textbf{(III.40)}$$

D'une manière similaire :

$$V_e = \hat{V}_e + (P_P - P_N) d_n \qquad \textbf{(IV.41)}$$

- **L'équation de continuité :**

L'intégration de l'équation de continuité sur un volume de contrôle donne lieu à :

$$(U_e - U_w)\Delta Y + (V_n - V_s)\Delta X = 0 \qquad \textbf{(III.42)}$$

Substitutions U_i et V_i par $\hat{U}_i + (P_P - P_E) d_i$ et $\hat{V}_i + (P_P - P_N) d_i$ tel que i représente e, w, n, et s. D'où l'équation de pression :

$$a_P P_P = a_W P_W + a_E P_E + a_S P_S + a_N P_N + b \qquad \textbf{(IV.43)}$$

Avec :

$$a_E = d_e \Delta Y \quad \textbf{(III.43a)}$$

$$a_W = d_w \Delta Y \quad \textbf{(III.43b)}$$

$$a_N = d_n \Delta X \quad \textbf{(III.43c)}$$

$$a_S = d_s \Delta X \quad \textbf{(III.43d)}$$

$$b = \left(\hat{U}_w - \hat{U}_e\right)\Delta Y + \left(\hat{V}_s - \hat{V}_n\right)\Delta X \quad \textbf{(III.43e)}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad \textbf{(III.43f)}$$

Remarque :

Aucun terme n'a été négligé pour aboutir à l'équation de pression.

Dans le cas de la convection naturelle, le champ dynamique est couplé avec le champ thermique. Les différentes étapes de l'algorithme Simpler, dans ce cas, sont les suivants :

1- Choix initial des vitesses U^* ,V^* et de température θ^* de soluté S^* .

2- Calculer les coefficients des équations du mouvement et obtenir les pseudos vitesses

$$\hat{U}_e = \frac{\sum a_{nb} U_{nb} + b}{a_e}$$

3- Calculer les coefficients dans les équations de pression et résoudre celles-ci pour obtenir P.

4- Utiliser cette pression comme choix initial P^* et résoudre les équations du mouvement pour obtenirU^*, V^*.

5-Calculer le terme b et résoudre l'équation de correction de pression pour obtenir P'.

6- Corriger les vitesses $U_i = U_i^* + \left(P_P' - P_i'\right)$mais non pas la pression.

7-Résoudre les équations d'énergie et solutale pour obtenirθ, S.

8- Prendre ces valeurs comme nouveau choix initial et retourner à l'étape 2.

9- Répéter le processus jusqu'à convergence.

III.4 Technique de sous-relaxation :

Les coefficients de sous relaxation sont utilisés dans les équations algébriques pour éviter la divergence du système fortement non linéaire.

Elle consiste à diminuer la variation de la grandeur physique ϕ d'une itération à une autre par l'introduction d'un coefficient de sous relaxation α_ϕ .

Toutes les équations de conservation sont écrites après discrétisation sous la forme générale suivante :

$$a_P \phi_P = \sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b \qquad \textbf{(III.44)}$$

Si nous notons ϕ_P^* la valeur de ϕ_P à l'itération précédente, il est possible d'écrire :

$$\phi_P = \phi_P^* + \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_P} \right] - \phi_P^* \qquad \textbf{(III.45)}$$

Le terme entre parenthèses de cette équation représente le changement survenu à ϕ_P pendant une itération. Cette variation peut être alors amortie par l'introduction d'un facteur de sous relaxation α_ϕ de la manière suivante :

$$\phi_P = \phi_P^* + \alpha_\phi \left[\frac{\sum_{nb} a_{nb} \phi_{nb} + b}{a_P} \right] - \phi_P^* \qquad \textbf{(III.46)}$$

Tous les facteurs de sous relaxation doivent être compris entre 0 et 1. Plus ils sont faibles, plus la sous relaxation est forte et la convergence lente. Mais plus ils sont élevés, plus la sous relaxation est faible avec des risques d'instabilités et divergence du processus itératif.

Il n'existe pas de règles pour choisir les coefficients de sous relaxation, cela peut dépendre de la nature du problème, du nombre et de la taille des volumes de contrôle ainsi que de la procédure itérative choisie. Il faut cependant savoir que le choix de ces facteurs est essentiel pour aboutir à la convergence du processus itératif.

III.5 Critère de convergence :

On dit qu'un processus itératif atteint la convergence lorsque les itérations ultérieures ne produisent aucun changement significatif sur les variables dépendantes ϕ. Pratiquement, on exprime cette convergence par un test d'arrêt du processus itératif appelé critère de convergence qui dépend de la nature du problème et des objectifs du calcul.

Un critère de convergence est imposé en terme d'erreur relative pour les variables U, V, P, et θ . Et qui décrit pour chaque variable :

$\max\left|\frac{\phi-\phi^*}{\phi^*}\right| \leq 10^{-4}$, ainsi que pour le terme b, avec $|b| \leq 10^{-5}$

III.6 Schémas d'interpolation :

Dans les coefficients de l'équation algébrique (III-15), nous avons rencontré le terme $A(|P_i|)$ qui représente la fonction d'interpolation utilisée pour l'évaluation de la variable dépendante ϕ à une interface du volume de contrôle.

$A(|P|)$ Prendra une fonction selon le schéma choisi et qui est récapitulée dans le tableau III-3.

Schéma	$A\|P\|$
Centré	$1\text{-}0.5\|P\|$
Upwind	1
Hybride	$[0,(1-0.5\|P\|)]$
Power-Law	$[0,(1-0.5\|P\|)^5]$
Exponentiel	$\frac{P}{\exp\|P\|-1}$

Tableau III.3 : Les expressions de $A|P|$ selon le schéma d'interpolation.

Limitations :

- ☒ **Le schéma centré :** il est limité aux problèmes à faible nombre de Peclet, $|P| \leq 2$
- ☒ **Le schéma Upwind :**

- non approprié pour le faibles nombre de $|P|$
- Pour les grandes valeurs de $|P|$**,** la diffusion est surestimée (normalement $\frac{d\phi}{dX} \to 0$).

- ☒ **Schéma hybride :** Le schéma hybride est une combinaison de deux schémas précédents, il se réduit à l'approximation centrée lorsque $|P| < 2$, et devient identique au schéma Upwind lorsque $|P| > 2$. L'erreur maximale est pour $|P| \approx 2$

Schéma Power-law : Ce schéma est recommandé pour les problèmes de convection-diffusion, il s'avère très efficace puisqu'il approche beaucoup mieux la solution exacte. Dans notre cas, nous avons utilisé le schéma Power-law.

III.7 Application de la méthode des volumes finis à notre problème :

On rappelle les équations qui régissent le mouvement :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \qquad \textbf{(III.47)}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i^2}\left[U\frac{\partial U}{\partial X} + V\frac{\partial U}{\partial Y}\right] = -\frac{\partial P}{\partial X} - GR1.U + GR2.\left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right) + GR3 \qquad \textbf{(III.48)}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_i^2}\left[U\frac{\partial V}{\partial X} + V\frac{\partial V}{\partial Y}\right] = -\frac{\partial P}{\partial Y} - GR1.U + GR2.\left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right) + GR4 \qquad \textbf{(III.49)}$$

$$U\frac{\partial \theta}{\partial X} + V\frac{\partial \theta}{\partial Y} = GR5.\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}\right) \qquad \textbf{(III.50)}$$

$$U\frac{\partial S}{\partial X} + V\frac{\partial S}{\partial Y} = GR6.\left(\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2}\right) \qquad \textbf{(III.51)}$$

III.7.1 Discrétisation des équations du mouvement :

III.7.1.1. Equation du mouvement en X :

Comme on l'a déjà signalé, l'équation du mouvement dans la direction X sera intégrée dans le volume de contrôle décalé vers la droite, figure (III.6). D'après cette figure, on peut noter que les nœuds w', P' et e' correspondent respectivement aux noeuds P, e et E. L'intégration de l'équation du mouvement dans la direction X à travers le volume de contrôle de la figure (III.6) et après arrangement donne :

$$a_{P'}U_{P'} = a_{E'}U_{E'} + a_{W''}U_{W'} + a_{N'}U_{N'} + a_{S'}U_{S'} + (P_P - P_E)\Delta Y' + b' \qquad \textbf{(III.52)}$$

Les coefficients a_i sont définis dans les équations (IV.14), alors que les expressions des conductances diffusives et les débits volumiques sont donnés par :

$$\left.\begin{aligned} D_{e'} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X'}\right)_{e'} \Delta Y' & F_{e'} &= U_{e'}\Delta Y' \\ D_{w'} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X'}\right)_{w'} \Delta Y' & F_{w'} &= U_{w'}\Delta Y' \\ D_{n'} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y'}\right)_{n'} \Delta X' & F_{n'} &= V_{n'}\Delta X' \\ D_{s'} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y'}\right)_{s'} \Delta X' & F_{s'} &= V_{s'}\Delta X' \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(III.53)}$$

Avec $\Gamma = R_v \,\mathrm{Pr}$, $b' = Sc\Delta X'\Delta Y'$ et les valeurs de Sc et Sp sont données dans le tableau (III.2)

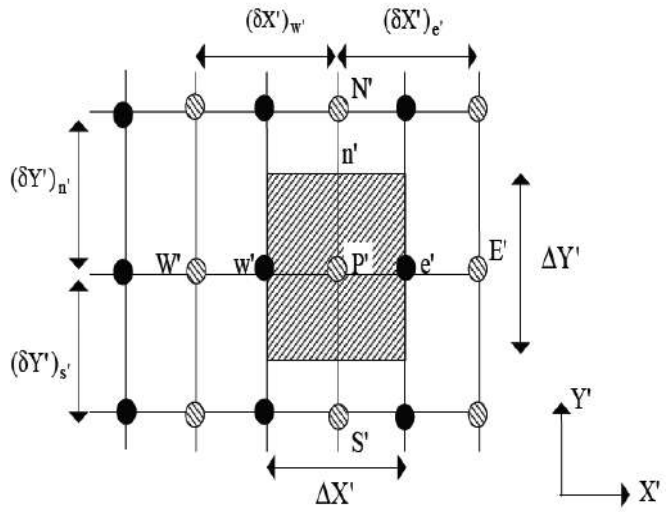


Figure III.6 : Schéma du volume de contrôle pour U.

III.7.1.2. Equation du mouvement en Y :

L'intégration de l'équation du mouvement dans la direction Y est faite dans le volume de contrôle décalé vers le haut, figure (III.7), et les nouveaux nœuds seront désignés par P", E", W" et N" et les interfaces par e", w", n" et s". D'après cette figure, on peut noter que les nœuds s", P", et n" correspondent respectivement aux nœuds P, n et N.

En utilisant les mêmes démarches d'intégration qu'en X, la discrétisation de l'équation du mouvement dans la direction Y est obtenue comme suit :

$$a_{P''}U_{P''} = a_{E''}U_{E''} + a_{W''}U_{W''} + a_{N''}U_{N''} + a_{S''}U_{S''} + \left(P_P - P_N\right)\Delta Y'' + b'' \qquad \textbf{(III.54)}$$

Où les coefficients a_i " sont définis dans les équations (IV.14), et les expressions des flux diffusifs et les débits volumiques prennent la forme :

$$\left.\begin{aligned} D_{e''} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X''}\right)_{e''}\Delta Y'' & F_{e''} &= U_{e''}\Delta Y'' \\ D_{w''} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X''}\right)_{w''}\Delta Y'' & F_{w''} &= U_{w''}\Delta Y'' \\ D_{n''} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y''}\right)_{n''}\Delta X'' & F_{n''} &= V_{n''}\Delta X'' \\ D_{s''} &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y''}\right)_{s''}\Delta X'' & F_{s''} &= V_{s''}\Delta X'' \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(III.55}$$

Avec $\Gamma = R_v \,\mathrm{Pr}$, et le terme source est donné par :

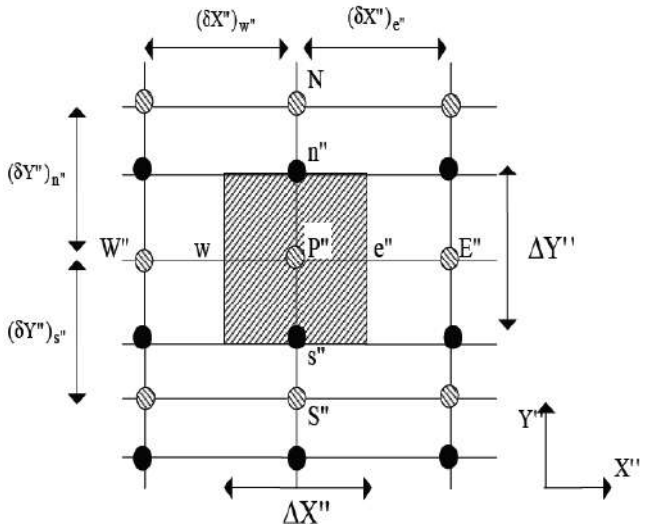
$$b'' = Sc\Delta X''\Delta Y'' \qquad \textbf{(III.56)}$$

La valeur de $\theta_{P''}$ et $S_{P''}$ aux interfaces sera calculée de la manière suivante :

$$\left.\begin{aligned} \theta_{P''} &= fe\,\theta_P + (1-fe)\theta_N \\ S_{P''} &= fe\,S_P + (1-fe)S_N \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(III.57)}$$

Et fe est un facteur d'interpolation [13] définis par :

$$fe = \frac{(\delta X'')_{n''}}{2(\Delta Y'')} \qquad \textbf{(III.58)}$$



FigureIII.7 : Schéma du volume de contrôle pour V.

III.7.2. Equation de correction de pression :

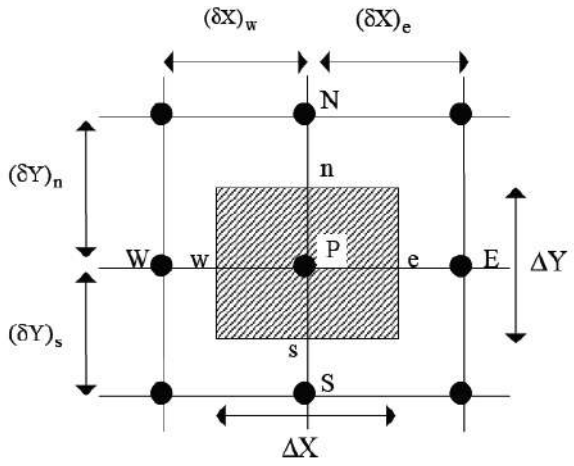


Figure III.8 : Schéma du volume de contrôle pour P.

L'intégration de l'équation de continuité pour le volume de contrôle de la figure (III.8) donne :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial U}{\partial X} dX dY + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial V}{\partial Y} dX dY = 0 \qquad \textbf{(III.60)}$$

Soit après intégration et simplification, et en utilisant les mêmes démarches que celles faites dans c), l'équation précédente prend la forme :

$$a_P P'_P = a_E P'_P + a_W P'_W + a_N P'_N + a_S P'_S + b_{P'} \qquad \textbf{(III.61)}$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \qquad \textbf{(III.62)}$$

$$\left.\begin{aligned} a_E &= d_e \Delta Y \\ a_W &= d_w \Delta Y \\ a_N &= d_n \Delta X \\ a_S &= d_S \Delta Y \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.63)}$$

Avec :

$$\left.\begin{aligned} d_e &= \frac{A_e}{a_e} = \frac{\Delta Y}{a_e} \\ d_w &= \frac{A_w}{a_w} = \frac{\Delta Y}{a_w} \\ d_n &= \frac{A_n}{a_n} = \frac{\Delta X}{a_n} \\ d_s &= \frac{A_s}{a_s} = \frac{\Delta X}{a_s} \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(III.64)}$$

$$b_{P'} = \left(U_w^* - U_e^*\right)\Delta Y + \left(V_s^* - V_n^*\right)\Delta X \quad \textbf{(III.65)}$$

L'indice (*) désigne la valeur des variables de l'itération précédente. On fait le même raisonnement pour obtenir le champ de pression, on obtient alors :

$$a_P P_P = a_W P_W + a_E P_E + a_S P_S + a_N P_N + b_P \quad \textbf{(III.66)}$$

Avec :

$$\left.\begin{aligned} a_E &= d_e \Delta Y \\ a_W &= d_w \Delta Y \\ a_N &= d_n \Delta X \\ a_S &= d_s \Delta X \end{aligned}\right\} \quad \textbf{(III.67)}$$

Avec :

$$b_P = \left(\hat{U}_w - \hat{U}_e\right)\Delta Y + \left(\hat{V}_s - \hat{V}_n\right)\Delta X \quad \textbf{(III.68)}$$

Avec :

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S \quad \textbf{(III.69)}$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{U}_{P'} &= \frac{\sum_{nb'} a_{nb'} U_{nb'}}{a_{P'}} \\ \hat{V}_{P''} &= \frac{\sum_{ab''} a_{nb''} V_{nb''}}{a_{p''}}\end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(III.70)}$$

III.7.3. Discrétisation de l'équation de l'énergie :

L'intégration de l'équation de l'énergie est faite dans le volume de contrôle correspondant aux nœuds principaux, figure (III.8).

$$\int_s^n \int_w^e U \frac{\partial \theta}{\partial X} dXdY + \int_s^n \int_w^e V \frac{\partial \theta}{\partial Y} dXdY = R_k \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) dXdY \qquad \textbf{(III.71)}$$

Après intégration et arrangement des termes, l'équation de l'énergie discrétisée s'écrit comme :

$$a_P \theta_P = a_W \theta_W + a_E \theta_E + a_S \theta_S + a_N \theta_N \qquad \textbf{(III.72)}$$

Où les coefficients a_i sont définis dans les équations (III.14), les flux diffusifs et les débits volumiques prennent la forme :

$$\left.\begin{aligned} D_e &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X}\right)_e \Delta Y & F_{e'} &= U_{e'} \Delta Y \\ D_w &= \left(\frac{\Gamma}{\delta X}\right)_w \Delta Y & F_w &= U_w \Delta Y \\ D_n &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y}\right)_n \Delta X & F_n &= V_n \Delta X \\ D_s &= \left(\frac{\Gamma}{\delta Y}\right)_s \Delta X & F_s &= V_s \Delta X \end{aligned}\right\} \qquad \textbf{(III.73)}$$

$$\Gamma = R_k$$

III.7.4. Discrétisation de l'équation du soluté :

L'intégration de l'équation du soluté est faite dans le volume de contrôle correspondant aux nœuds principaux, figure (III.8).

$$\int_s^n \int_w^e U \frac{\partial S}{\partial X} dXdY + \int_s^n \int_w^e V \frac{\partial S}{\partial Y} dXdY = \frac{1}{Le} \int_s^n \int_w^e \left(\frac{\partial^2 S}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial Y^2} \right) dXdY \qquad \textbf{(III.74)}$$

Après intégration et arrangement des termes, l'équation de l'énergie discrétisée s'écrit comme :

$$a_P S_P = a_W S_W + a_E S_E + a_S S_S + a_N S_N \qquad \textbf{(III.75)}$$

Où les coefficients a_i sont définis dans les équations (IVIII.14), les flux diffusifs et les débits volumiques prennent la forme :

$$\left.\begin{array}{ll} D_e = \left(\frac{\Gamma}{\delta X} \right)_e \Delta Y & F_{e'} = U_{e'} \Delta Y \\ D_w = \left(\frac{\Gamma}{\delta X} \right)_w \Delta Y & F_w = U_w \Delta Y \\ D_n = \left(\frac{\Gamma}{\delta Y} \right)_n \Delta X & F_n = V_n \Delta X \\ D_s = \left(\frac{\Gamma}{\delta Y} \right)_s \Delta X & F_s = V_s \Delta X \end{array}\right\} \qquad \textbf{(III.76)}$$

$$\Gamma = \frac{1}{Le}$$

III.8. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons exposé la procédure numérique choisie afin de calculer les transferts couplés de chaleur et de soluté dans la cavité. Pour cela, on exploite la méthode de volume finis, avec un schéma en loi de puissance (Power Law). L'algorithme SIMPLER est adopté pour résoudre le système d'équations algébriques et traiter le couplage pression-vitesse. Dans le prochain chapitre nous présentons la validation du code de calcul ainsi que les résultats obtenus avec leurs descriptions et leurs discussions.

Chapitre IV
Résultats et Discussion

Dans cette section, les résultats de la simulation numérique se rapportant au modèle physique sont analysés et commentés.

Dans toutes les simulations de cette étude, nous avions considéré une solution aqueuse comme fluide saturant la couche poreuse ($\Pr = 7$). La porosité ε , le rapport des conductivités thermiques des deux couches poreuse et fluide et le nombre de Lewis sont respectivement fixés à 0.5, 1et 10. Le rapport de la Viscosité effective à la Viscosité fluide ($R\nu$) est pris égal à l'unité. Par ailleurs, Nous nous sommes placés dans les deux cas d'un écoulement convectif où la contribution des forces de Volume dues à la concentration Vient s'ajouter à celle des forces de Volume dues à la température. C'est la convection double diffusive avec un rapport des forces de Volume $N > 0$(convection thermosolutale coopérante) et même dans le cas où $N < 0$ convection thermosolutale opposée. Nous avions pris une large étendue des perméabilités (Da) et du nombre de Rayleigh modifié $\mathrm{Ra_m}$, ils Varient respectivement dans les proportions suivantes : $10^{-10} \le Da \le 1$ et $7\times10^{-4} \le \mathrm{Ra_m} \le 7\times10^{6}$. Les résultats des calculs numériques sont présentés en termes de lignes de courants, des isothermes, des isoconcentrations et des transferts thermiques et massiques moyens.

IV.1 Sensibilité du code de calcul au maillage et Validation :

Pour trouver le nombre de nœuds adéquat, nous avions effectué plusieurs exécutions pour les modèles horizontal et Vertical. Un maillage de (82×82) nœuds donne un bon compromis entre le temps d'exécution et la précision des résultats. Un exemple de calcul est présenté dans les tableaux IV.1.

Maillage	$(50)^2$	$(82)^2$	$(98)^2$	$(106)^2$
Nu	1.127	1.124	1.123	1.123
Sh	0.244	0.022	0.111	0.111

Tableau IV.1. Sensibilité du code de calcul au maillage pour

$$Ra = 10^5, Da = 10^{-3}, \varepsilon = 0.5, Le = 10$$

Le code de calcul est Validé par rapport à plusieurs cas limites de la littérature [17-27],. Une très bonne concordance est à noter. Les résultats comparatifs sont résumés dans le tableau IV.2, IV.3 et IV.4 en termes des Valeurs du nombre de Nusselt et Sherwood moyens

	Le	10				
	Ra_m	1×10^2	2×10^2	4×10^2	1×10^3	2×10^3
Bennacer *et al.* (2002)[17].	*Nu*	3.11	4.96	7.77	13.48	19.89
	Sh	13.24	19.83	29.36	48.20	69.08
Trevisan and Bejan 1985)[18].	*Nu*	3.27	5.61	9.69	-	-
	Sh	15.61	23.23	30.73	-	-
Goyeau *et al.* (1996)[19].	*Nu*	3.11	4.96	7.77	13.47	19.90
	Sh	13.25	19.86	28.41	48.32	69.29
S. Akbal, F. Bayta¸(2008) [20]	*Nu*	3.05	4.85	7.59	13.16	19.48
	Sh	12.93	19.42	28.9	48.21	70.45
Notre code	*Nu*	3.10	4.94	7.67	12.85	19.71
	Sh	13.25	19.25	26.06	34.69	61.01

Tableau IV.2. Comparaison des nombres de Nusselt et Sherwood moyens pour Pr=0.71, N=0, Da=10^{-7}, $R_K = 1$ et ε =0.5

	Le	0.84		1.05
	Da	10^{-6}	10^{-5}	10^{-6}
Singh *et al.* (1999) [21].	*Nu*	4.096	4.113	3.997
	Sh	3.710	3.725	4.126
Baytas *et al* (2009)[22].	*Nu*	4.42	4.50	4.39
	Sh	4.0	4.01	4.44
Present code	*Nu*	4.41	4.42	4.29
	Sh	4.02	4.03	4.38

Tableau IV.3. Comparaison du nombre de Nusselt et Sherwood pour $Pr = 0.71,\ Ra = 10^5$

Ra	10^3	10^4	10^5	10^6
Fusegi *et al*. (1991)[23]	1.08	2.10	4.36	8.77
Ha and Jung (2000)[24]	1.07	2.07	4.46	-----
Tric *et al*. (2000)[25]	1.07	2.05	4.34	8.64
Frederick and Moraga (2007) [26]	1.07	2.06	4.35	8.74
Mouhtadi *et al* (2012) [27]	1.07	2.06	4.36	8.82
Kuznetsov and Sheremet (2011) [28]	---	2.07	4.45	9.43
notre Code	1.07	2.06	4.37	8.81

Tableau IV.4 : Comparaison du nombre de Nusselt pour

$$Pr = 0.71 \text{et } N = 0 .$$

IV.2 Lignes de courant-isothermes –isoconcentrations

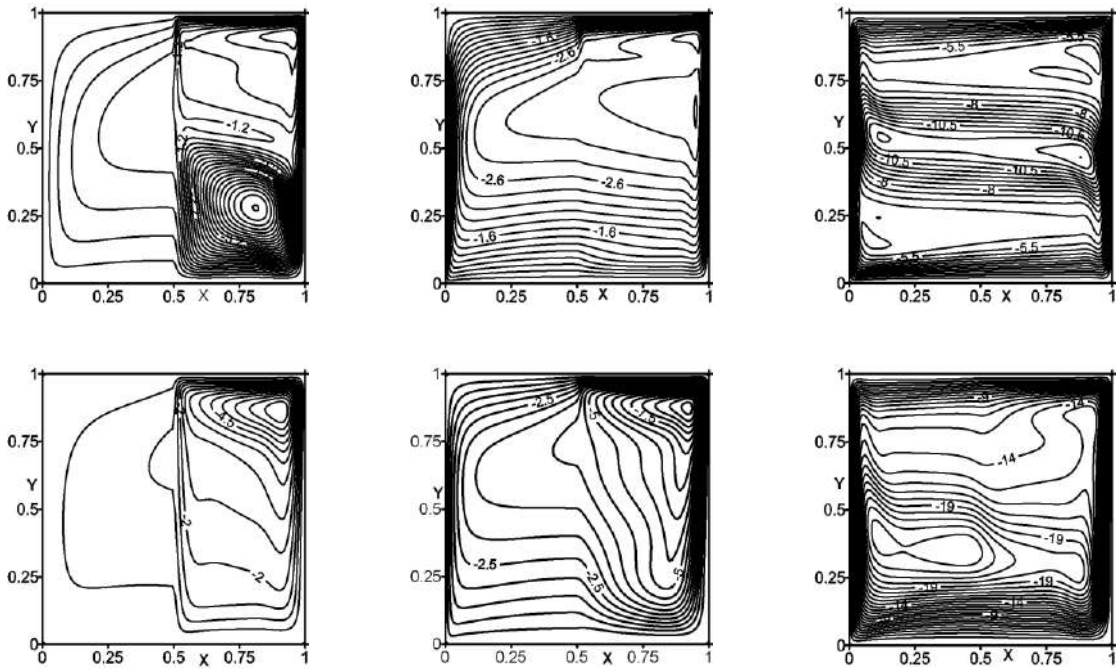
Les structures d'écoulement, des isothermes et des isoconcentrations sont présentées dans les figures IV.1 à IV.4. Pour une situation présentant une faible Valeur de (Da), une résistance significative à l'écoulement dans la première couche est à noter. Ce comportement est dû à la faible perméabilité de la première couche poreuse. A cet effet, la circulation du fluide dans la couche 2 (fluide) est plus favorable et la convection thermosolutale est plus prononcée dans cette deuxième couche. Pour une Valeur de Da égale à 10^{-2}, les lignes de courant sont multicellulaires dans toute cavité. La couche limite hydrodynamique prend place sur les parois Verticales. La convection thermosolutale est bien prononcée dans les deux couches.

Les isothermes sont déformées et un gradient de température intensif prend place dans la deuxième couche tandis que les isoconcentrations sont déformées dans les deux couches avec formation d'une couche limite solutale sur les parois Verticales car le nombre de Lewis est élevé (Le=10) et la convection est d'origine solutale (N=1). Les isothermes dans la première couche sont parallèles aux parois Verticales, indiquant que le transfert de chaleur tend vers une situation diffusive. Pour une Valeur de Da égale à 10^{-5}, Les isothermes sont déformées et prennent place sur la diagonale de la cavité, la couche limite thermique tend à se former, localisée respectivement sur les parties basses et hautes des parois latérales.

Les isoconcentrations sont elles aussi déformées et prennent place sur toute la cavité avec un resserrement notable sur les parois verticales de la cavité. Une couche limite solutale prend place sur les parois latérales car le nombre de Lewis est élevé.

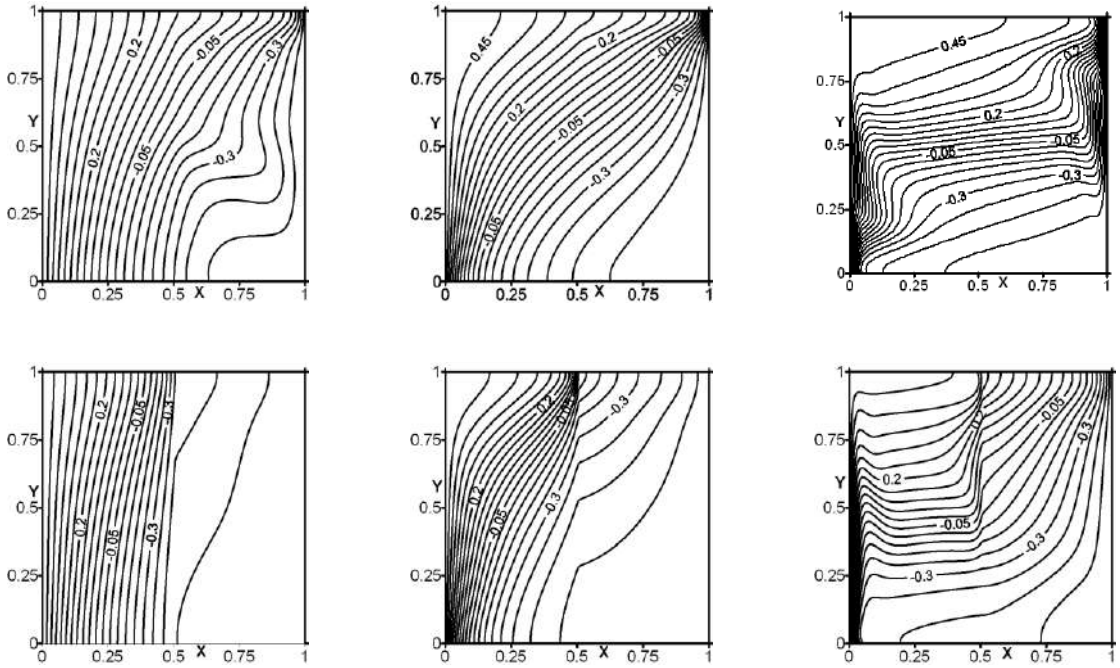
En passant à un Da égal à 10^{-2}, la structure des isolignes est très affectée. En effet, la convection thermosolutale est bien prononcée dans les deux couches. La perméabilité de la couche 1 est très favorable aussi bien aux transferts massiques que thermiques. Les couches limites thermiques sont localisées sur les parties basses et hautes des parois latérales mais les couches limites solutales prennent place sur toute la longueur des parois latérales de la cavité.

On note la tendance vers une situation de non dépendance des structures d'écoulement, des isothermes et des isoconcentrations avec la perméabilité Da.



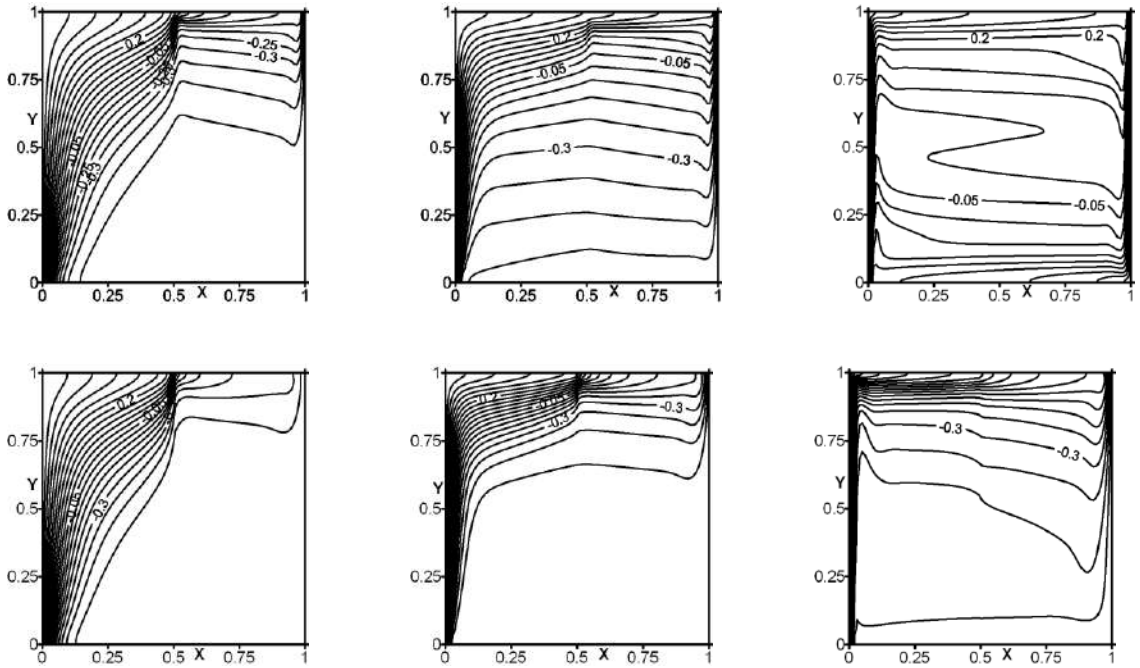
b) $\lambda^r = 10^{-1}, D^r = 10$

Fig. IV.1 : représente les lignes de courant pour
$Da = 10^{-6}$, $Da = 10^{-5}$, $Da = 10^{-2}$



b) $\lambda^r = 10^{-1}, D^r = 10$

Fig. IV.2 : représente les isothermes de courant pour,
$Da = 10^{-6}$, $Da = 10^{-5}$, $Da = 10^{-2}$



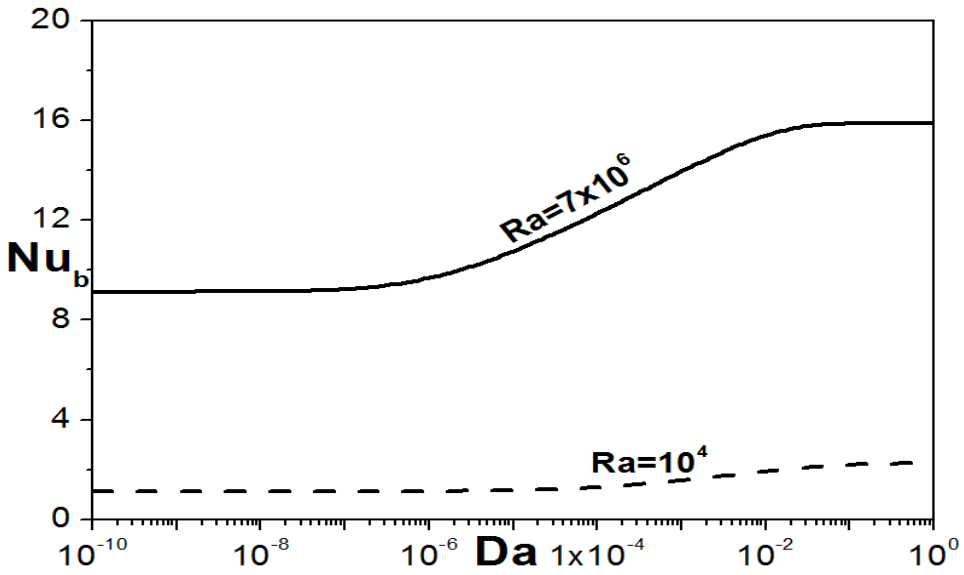
b) $\lambda^r = 10^{-1}, D^r = 10$

Fig. IV.3 : représente les isoconcentrations pour
$Da = 10^{-6}$, $Da = 10^{-5}$, $Da = 10^{-2}$

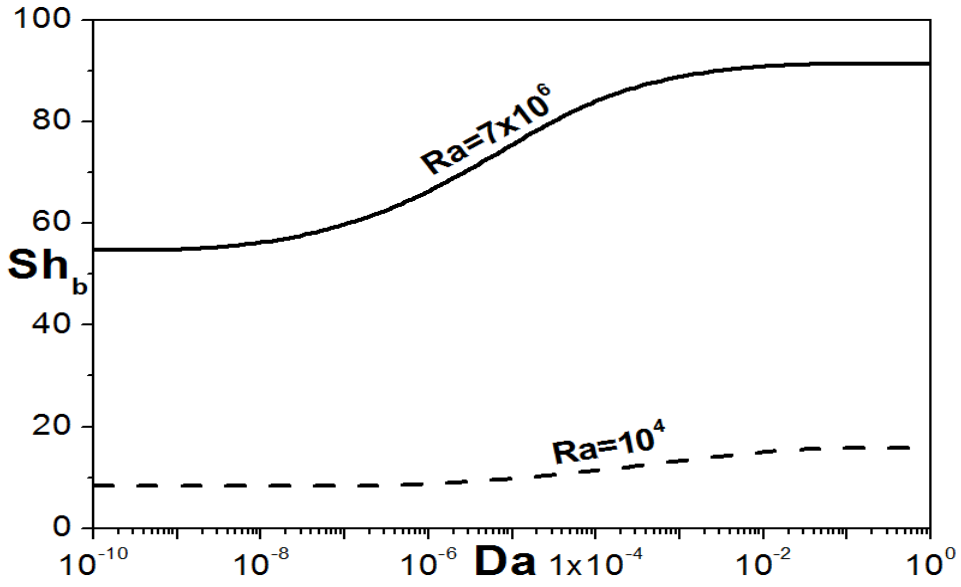
La variation des autres paramètres sont analysés dans cette étude tels que le rapport de conductivité thermique λ^r qui varie de 10^{-1} à 10 et le rapport de diffusivité moléculaire (D^r) qui varie de 10^{-1} à 10 aussi tant dis que le nombre de Dary varie de 10^{-6} à 10^{-1}. Les résultats indiquent que l'effet du rapport de conductivité thermique sur la structure de l'écoulement, isothermes et isoconcentrations est plus importante à différentes valeurs du nombre de Darcy (Da) qui varie de 10^{-6} à 10^{-1}.

IV.3 Effet du nombre de Rayleigh modifié sur les transferts.

La figure IV.5 illustre l'évolution des transferts thermique et massique moyens en fonction de Da pour différentes valeurs de Ra. Ces transferts sont quantifiés en termes des nombres de Nusselt et Sherwood moyens. Les deux figures montrent que les transferts sont purement diffusifs alors que pour Ra faible, nous distinguons trois régimes : le premier pour les faibles valeurs des perméabilités (le transfert dans ce cas est double diffusif), un régime convectif en couche limite pour des perméabilités élevés et un régime intermédiaire au cours duquel les transferts augment avec l'accroissement de Da.



a) Transfert de chaleur

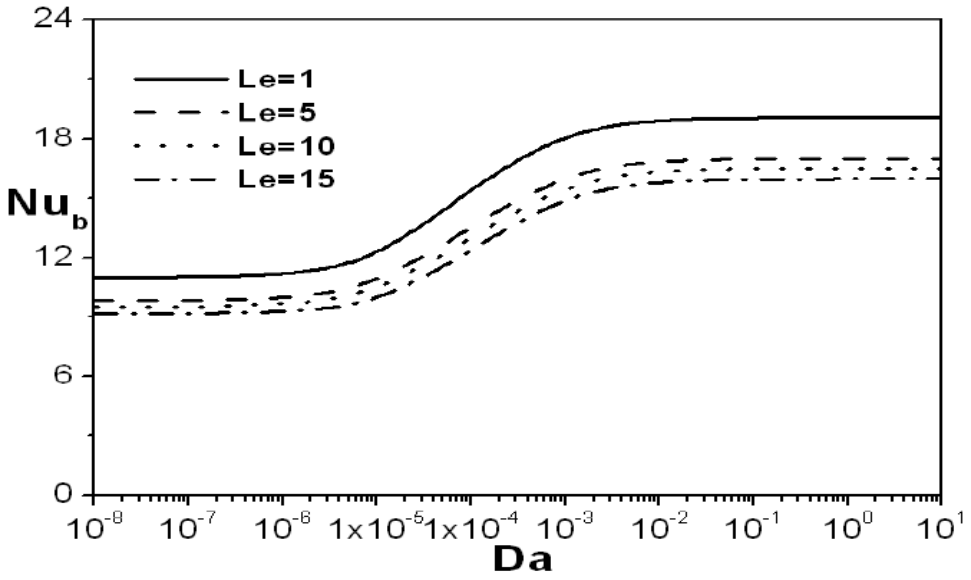


b) Transfer de masse

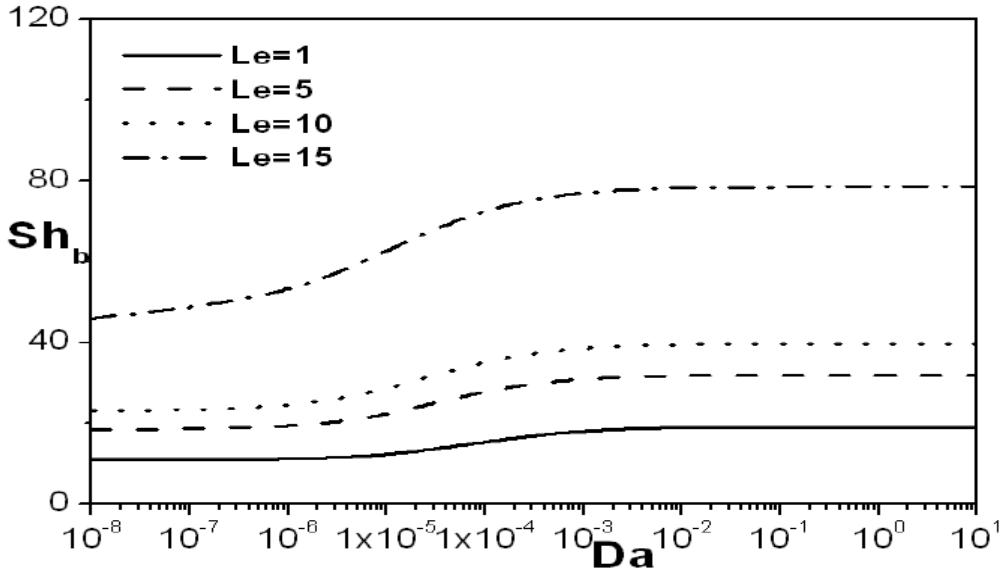
Fig. IV.4. Effet du nombre de Rayleigh modifié sur les transferts pour $N=3$, Le=100

IV.4 Effet du nombre Lewis sur les transferts

Dans cette section, l'effet du nombre de Lewis sur les transferts a été traité. Les variations des nombres de Nusselt et Sherwood moyens en fonction de Da pour différentes valeurs de Le sont présentées dans la figure IV.6. Étant donné qu'on est dans le cas de la convection thermosolutale d'origine thermique et solutale de même grandeur (N=1), le transfert de masse croit nettement avec Le pour un Da fixé, ce qui n'est pas le cas pour le nombre de Nusselt moyen. En effet, Nu_b diminue lorsque le nombre de Lewis augmente.



a) transfert de chaleur



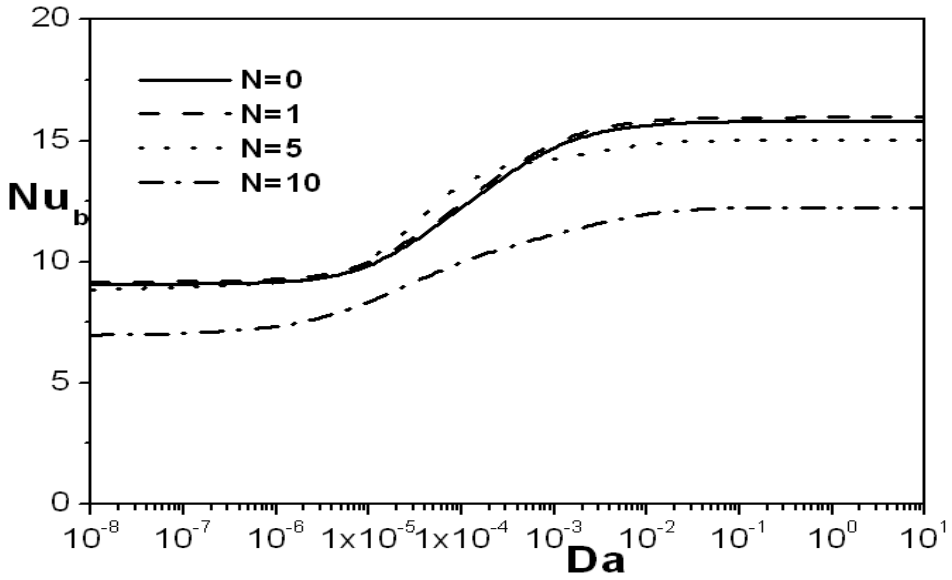
b) transfert de masse

Fig. IV.5. Effet du nombre de Lewis sur les transferts pour

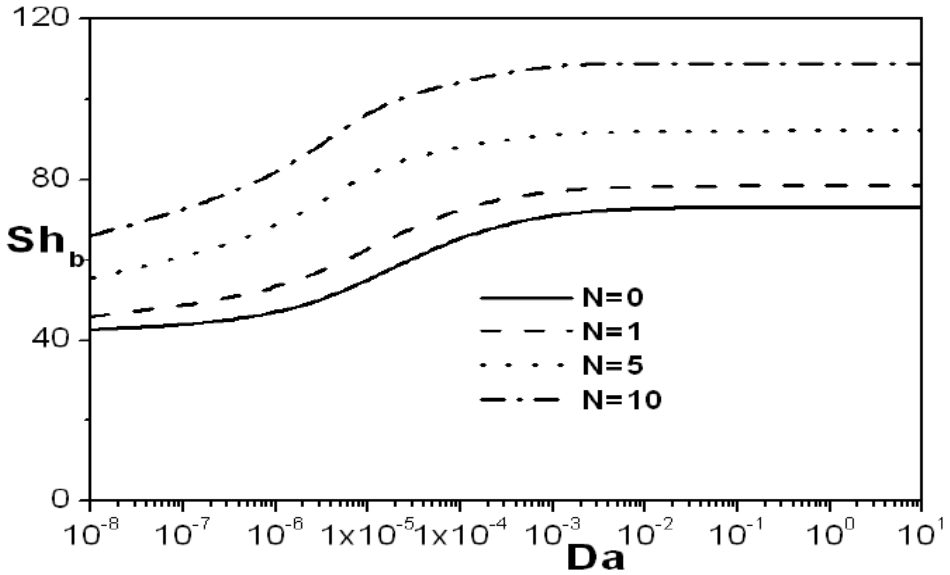
$Ra = 7 \times 10^6$, $N = 1$

IV.5 Effet du rapport des forces de poussée (volume) N

L'évolution des nombres de Nusselt et Sherwood moyens en fonction de R_K pour différentes valeurs de N est présentée dans la figure IV.7. La figure montre que pour une valeur fixée de Da, le transfert thermique diminue avec l'augmentation de N. cependant l'accroissement de transfert massique augmente nettement avec N.



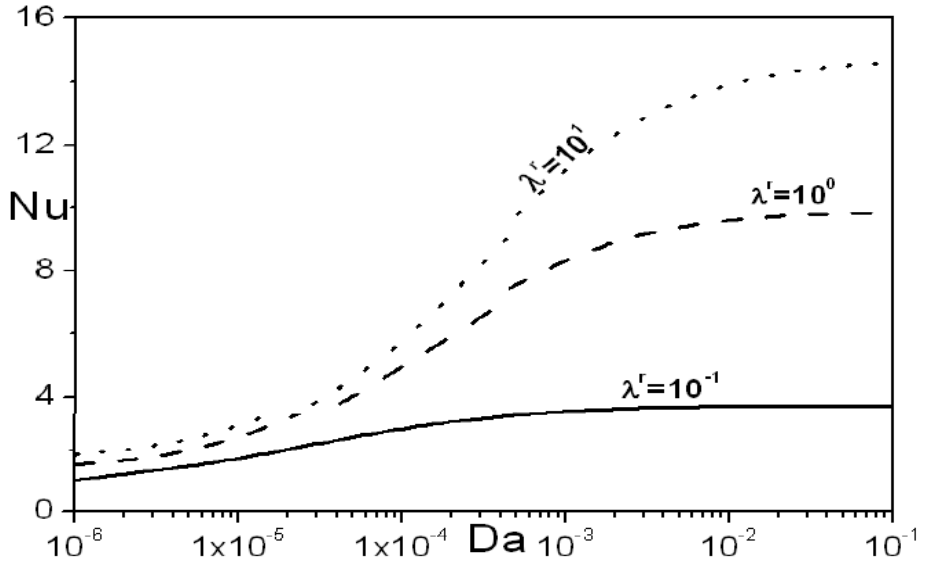
a) transfert de chaleur



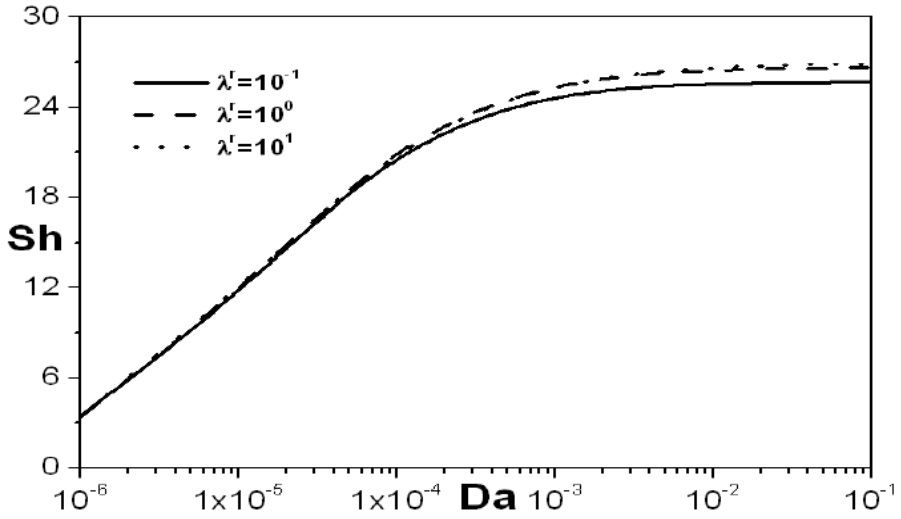
b) transfert de masse

Figure IV.6. Effet du nombre du rapport de poussée sur les transferts pour $Ra = 7\times10^6$ et $Le = 100$.

L'évolution de transfert de chaleur et de masse dans l'ensemble de la cavité en fonction du rapport de conductivité thermique (λ^r) pour différentes valeurs de (Da) est présente sur Fig IV.8 Le nombre de Nusselt (Nu) et nombre de Sherwood (Sh) augmentent avec l'augmentation du nombre de Darcy (Da) et un régime convectif pour une valeur élevée de Da où (Nu) et (Sh) atteignent le maximum . Les effets du rapport de conductivité (λ^r) sur le transfert de chaleur est notable mais il reste faible sur le transfert de masse (pour les paramètres considérés). Les transferts sont principalement diffusif aux faibles valeurs de nombre Darcy (Da) ce comportement est dû à la résistance à l'écoulement dans la couche poreuse.



a) transfert de Chaleur



b) transfert de Chaleur

Figure IV.7. Effet du nombre du rapport de conductivité
Thermiques sur les transferts pour

L'étude de l'effet de rapport de la diffusivité massique D^r pour différentes valeurs de Da sur les transferts est présenté sur la figure IV.9 , Les résultats ci-dessous montrent que le transfert de masse est considérablement diminuer pour atteindre des valeurs inférieures à 1 et augmente à des valeurs intermédiaires de D^r jusqu'à une valeur critique de $D_{cr}{}^r$. Pour des Pour des valeurs élevées de D^r ,le transfert de masse (Sh). Le maximum est trouvé indépendant de D^r, comportement induit par transfert de masse asymptotique.le transfer de chaleur n'est pas sensible de la variation de D^r.

$Ra = 7\times10^6$ et $Le = 100$.

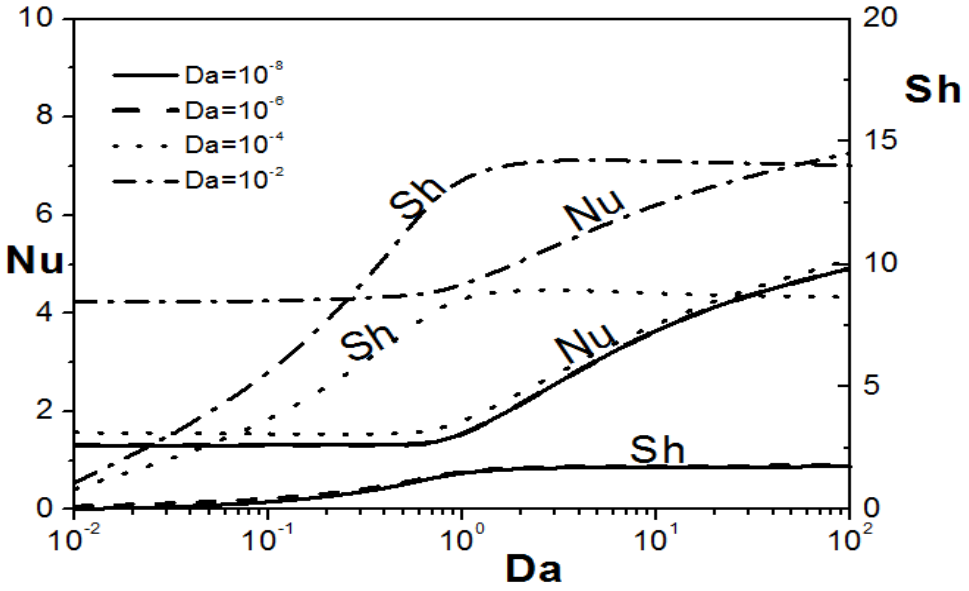


Figure.IV.8. : l'effet de D^r sur les Nombres de Nusselt et Sherwood pour différentes valeurs de Da , $N = 3$ et $Ra = 10^6$

CONCLUSION GENERALE

Dans cette étude nous avons présenté une étude numérique de la convection double diffusive dans une cavité renfermant deux couches verticales la première est une couche poreuse et la deuxième est une couche fluide. Cette étude est une contribution à l'enrichissement des connaissances et de réponse des éléments aux problèmes de transfert de chaleur et de masse dans une couche de fluide poreux composite. La présente étude a montré que la perméabilité de la couche de poreuse a un effet significatif sur la structure de l'écoulement, isothermes, isococentrations et transferts. La présence de la couche poreuse a un fort effet sur le transfert de chaleur et de masse et la modification de la structure de l'écoulement, ces effets dépend essentiellement de la perméabilité de la couche poreuse et des paramètres liés aux caractéristiques de la convection naturelle diffusifs doubles, précédemment citées (λ^r , Ra , D^r et N). Nous avons montré en première étape à travers ce travail que la perméabilité de la couche poreuse a un effet très appréciable sur la structure d'écoulement et les transferts. Par ailleurs trois régimes de transferts ont été identifiés, un écoulement diffusif pur pour les faibles valeurs de Da, un écoulement qui s'intensifie de plus en plus avec l'accroissement de Da (pour Da modéré) et un autre régime complètement couche limite indépendant de Da (pour Da élevés).

Ces résultats aideront sans doute à mieux comprendre les phénomènes des écoulements dus à la convection thermosolutale dans les milieux composites.

En perspective nous analyserons des cas plus complexes avec d'autres conditions aux limites et nous traiterons des problèmes de convection double diffusion en régime transitoire.

Références Bibliographiques

[1] H.P.C.Darcy, "Les Fontaines Publiques De La Ville De Dijon". V. Dalmont, Paris (1956).

[2] A.E.Scheidegger,"The Physics Of Trough Porous Media". University Of Toronto (1960).

[3] I. F.Macdonald, M.S.El Sayed, K.Mow and F.A.L.Dullien, Ind. Eng. Chem. Fundamentals, 6, 393, (1979).

[4] Site internet: www. Heat Transfer. TORONTO. UC.COM

[5] A.E.Scheidrgger, "The physics of flow through porous media", University of Toronto Press, 3rd edition (1974)

[6] F. A. L.Dullien, ″Porous Media: Fluid Transport And Pore Structure″, Academic Press New York (1979).

[7] O.Reynolds, ″Papers On Mechanical And Physical Subjects″ , Cambridge University Press (1900).

[8] A.L. Dullien, "Porous media, fluid transport and pore structure", Academic Press, 2nd Edition (1992)

[9] A.Tobbal, R.Bennacer et R.Cabrillac, Effet de l'anisotropie des matériaux poreux sur les phénomènes de transfert de chaleur et de masse,Proceedings du 13ème Congrès Français de Mécanique, Vol. II, pp. 457-460, 1997.

[10] H.Beji, Etude Numérique de la convection naturelle en milieu poreux saturé : Modélisation du nombre de Darcy et introduction de la dispersion dynamique, thèse de Doctorat, Université Paris 6, 1989.

[11] C.Beckerman et R.Viskanta, Double-diffusive convection during dendritic solidification of binary mixture, PhysicoChem. Hydrodyn., Vol . 10, pp.195-213, 1988.

[12] G.Neale et W.Nader, Practical significance of Brinkman's extension of Darcy's law: coupled parallel flows within a channel and bounding porous medium, The Canadian J. Chem. Eng., Vol. 52, pp. 475-478, 1974

[13] A.Bejan, Convection heat transfer, John Wiley and Sons 1984.

[14] Patankar, S.V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Mc-Graw-Hill, New York, 1980.

[15] J. P. Roache, Résolution numérique des équations aux derives partielles.

[15] A. Gourdin et M. Boumhart, Méthodes numériques appliqués.

[16] D. Euvrard, Analyse numérique en mécanique des fluides.

[17] R. Bennacer, A.Tobbal, H. Beji, P.Vasseur Double diffusive convection in a vertical enclosure filled with anisotropic porous media, International Journal of Thermal Sciences 40 (2001) 30-41.

[18] O.V. Trevisan, A. Bejan, Natural convection with combined heat and mass transfer buoyancy effects in a porous medium, International Journal of Heat and Mass Transfer 28 (1985) 1597-1611.

[19] B. Goyeau, J.P. Songbe, D. Gobin, Numerical study of double-diffusive natural convection in a porous cavity using the Darcy-Brinkman formulation, International Journal of Heat and Mass Transfer 39 (7) (1996) 1363-1378

[20] S. Akbal, F. Baytas, Effects of non-uniform porosity on double diffusive natural convection in a porous cavity with partially permeable wall, International Journal of Thermal Sciences 47 (2008) 875-885.

[21] R.L. Frederick, S.G. Moraga, Three-dimensional natural convection in finned cubical enclosures, International Journal Heat and fluid flow 28 (2007) 289-298.

[22] A.C. Baytas, A.F. Baytas, D.B. Ingham, I. Pop, Double diffusive natural convection in an enclosure filled with a step type porous layer: non-Darcy flow, International Journal of Thermal Sciences 48 (2009) 665-673.

[23] A.K. Singh, T. Paul, G.R. Thorp, Natural convection due to heat and mass transfer in a composite system, Heat Mass transfer 35 (1999) 39-48.

[24] T. Fusegi, J. M.Hyun, K. Kuwahara, B. Farouk, A numerical study of three-dimensional natural convection in a differentially heated cubical enclosure, International Journal of Heat and Mass Transfer 34 (1991) 1543-1557.

[25] M.Y. Ha, M.J. Jung, A numerical study on three-dimensional conjugate heat transfer of natural convection and conduction in a differentially heated cubic enclosure with a heat-generating cubic conducting body, International Journal of Heat and Mass Transfer 43(2000) 4229-4248.

[26] E. Tric, G. Labrosse, M. Betrouni, A first incursion into the 3D structure of natural convection of air in a differentially heated cubic cavity, from accurate numerical solutions, International Journal of Heat and Mass Transfer 43 (2000) 4043-4056.

[27] G. V. Kuznetsov, M.A. Sheremet. A numerical simulation of double-diffusive conjugate natural convection in an enclosure, International Journal of Thermal Sciences 50 (2011) 1878-1886.