République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique
Université Yahia Fares de Médéa
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques et de l'Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Application

par

BOUGUERNI Malika

ESPACES DE HARDY ET OPÉRATEUR DE TOEPLITZ

Soutenu publiquement le 07/07/2019 devant le jury composé de

Président :	H. AYADI	*M.A.A*	U.Y.F.M
Examinateur :	N. BENAICHOUCHE	*M.A.A*	U.Y.F.M
Examinateur :	K. MAALOUM	*M.A.A*	U.Y.F.M
Encadreur :	K. TOUMACHE	*M.A.A*	U.Y.F.M

Année Universitaire : 2018-2019

Remerciements

Au terme de projet de mémoire nous tenons à remercier tout naturellement en premier lieu Dieu Je remercier mon marie Youssouf, je remercier mon directeur K. TOUMACHE, je profite cette page pour remercier ma maman, papa, mes soeurs, et mes frères Bien sûr, je remercier mes amis :

Rabia, Razika, Zahra, Fatiha, Aicha et Amel

♡

Resumé

Le but de ce mémoire est l'étude des deux propriétés topologiques : bornitude et compacité de l'opérateur de projection sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$, dit opérateur de Toeplitz, et nous exposons le Produit et la commutativité des opérateurs de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$.

Table des matières

Introduction **1**

1 Préliminaires **5**

1.1 Espace de Banach 5

1.2 Espace de Hilbert 6

1.3 Fonctions Holomorphes et Harmoniques 7

1.3.1 Fonctions Holomorphes 7

1.3.2 Fonctions harmoniques 8

1.4 Espace L^2 9

2 Espace de Hardy, Opérateurs de Toeplitz **11**

2.1 Définitions et propriétés 11

2.2 Opérateurs de Toeplitz, Matrices de Toeplitz 14

3 Opérations sur les opérateur de Toeplitz **23**

3.0.1 Produit d'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Hardy 23

3.0.2 Commutativité des opérateurs de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ 25

3.0.3 Bornétude 27

3.0.4 Compacité 30

Introduction

L'étude des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy a commencé dans l'années 1911. Des résultats sur le produit des opérateurs, la caractérisation des opérateurs bornés, les opérateurs compacts qui ont étés obtenus.
Le sujet de ce mémoire est l'étude de la bornitude et de la compacité des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy.
Ce mémoire expose "Les traveaux de Dr. ISSAM LOUHICHI l'université Bordeaux I, La these de BARUSSEAU et Kehe ZHU ", et concerne des théorèmes et leurs utilisations pour obtenir les conditions nécessaires et suffisantes de la compacité et la bornitude de l'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Hardy et leurs caractérisations.
On appelle opérateur de Toeplitz de symbole φ et on note T_φ l'opérateur définit par

$$\begin{aligned} T_\varphi : H^2(\mathbb{T}) &\to H^2(\mathbb{T}) \\ f &\mapsto P_+(\varphi f). \end{aligned}$$

où $\mathbb{T}$ est le cercle unité et P est la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur $H^2(\mathbb{T})$ et $f \in H^2(\mathbb{T})$.
Plusieurs questions naturelles se posent. Parmi elles, nous discuterons dans le cadre du mémoire les questions suivantes :

1. Sous quelles conditions le produit de deux opérateurs de Toeplitz est il un opérateur de Toeplitz ?.
2. Sous quelles conditions deux opérateurs de Toeplitz commutent-ils ?.
3. Sous quelles conditions l'opérateur de Toeplitz est-il borné ou bien compact ?.

Dans [8] Brown et Halmos donnent une réponse complète à questions (1) et (2) pour les opérateurs de Toeplitz définit sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ du cercle unité $\mathbb{T}$. Ils montrent que pour deux fonctions φ et ψ bornées sur $\mathbb{T}$:

– le produit $T_\varphi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz T_w si et seulement si $\overline{\varphi}$ est analytique et ψ est analytique, et dans les deux cas $w = \varphi\psi$. Dans l'espace $H^2(\mathbb{T})$, une fonction est dite analytique si tous ses coefficients de Fourier d'indice négatif sont nuls.

– Les opérateurs de Toeplitz T_φ et T_ψ commutent si et seulement si φ et ψ sont toutes les deux analytiques, ou bien $\overline{\varphi}$ et $\overline{\psi}$ sont toutes les deux analytiques, ou bien si φ est une fonction affine de ψ.

Le chapitre (3) traite la question (3) et la réponse est un résultat des recherches Dr. LOUHICHI.

– Une matrice de Toeplitz $A = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définit un opérateur borné sur $l^2(\mathbb{Z}_+)$ si et seulement s'il existe une fonction borné φ *sur* $\mathbb{T}$ telle que les nombres $a_n (n \in \mathbb{Z})$ sont ses coefficients de Fourier i.e :

$$a_n = 1/2 \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta}, n \in \mathbb{Z}$$

.

Dans ce cas la norme de l'opérateur engendré par A est égal à $\| \varphi \|_\infty = supess \mid \varphi(t) \mid$

– L'opérateur de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ et compact si et seulement si son symbole est nul.

Le mémoire est organisé de la manière suivante :

Dans le premier chapitre nous rappelons les notions de bases, en donnant la définition et les propriétés élémentaires de l'espace de Banach, et on définit les fonctions holomorphes et harmoniques, et on définie par la suite l'espace de Hardy. ainsi que ses propriétés élémentaires qu'ils sont utiles dans l'étude des opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Hardy, puis nous parlons sur l'existence de le noyau reproduisant de l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ et défini par $K(z, w) = \dfrac{1}{(1 - \overline{z}w)}$.

Le chapitre (2) est consacré à la présentation de l'opérateur de Toeplitz et nous allons à présent introduire l'opérateur shift sur $H^2(\mathbb{D})$ et quelques propriétés générales des opérateurs de Toeplitz et nous présentons les propriétés fondamentales de $H^2(\mathbb{D})$.

Dans le dernier chapitre nous rappelons les résultats sur le produit de deux opérateurs de Toeplitz et commutativité des opérateurs de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$.

En fin d'après le résultat précédent nous approchons l'étude de la compacité et la bornitude

de l'opérateur de Toeplitz de symbole φ, et on obtient les conditions pour que l'opérateur de Toeplitz soit borné ou compact, deux théorèmes importants (3.0.5) et (3.0.6) sont pésentés.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur K ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)*
On dit que $P : E \to \mathbb{R}$ est un semi norme si :

1. $\forall x, y \in E : P(x+y) \leq P(x) + P(y)$
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in K : P(\lambda x) = \mid \lambda \mid P(x)$

Définition 1.1.2 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une norme sur E est une application $P : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que*

1. $\forall x \in E, P(x) \geq 0$
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda x) = \mid \lambda \mid P(x)$
3. $\forall (x, y) \in E^2, P(x+y) \leq P(x) + P(y)$

Définition 1.1.3 *Soient E un espace vectoriel et P une norme sur E ; le couple (E, P) est appelé un espace normé.*

Définition 1.1.4 *Soit X un ensemble, on appelle distance sur X toute application d de $X \times X$ dans $\mathbb{R}^+$*

- $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$
- $d(x, y) = d(y, x).$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Le couple (X, d) est appelé un espace metrique.

Propriétés 1.1.1 *Soit $(E, \| \, . \, \|)$ un espace normé, alors l'application définie par*

- $E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$
- $(x, y) \longmapsto \| \, x - y \, \|$

est une distance sur E associé à la norme $\| \, . \, \|$.

Définition 1.1.5 *Soit (X, d) un espace métrique, on dit que cet espace est complet si et seulement si toute suite de cauchy est convergente.*

Définition 1.1.6 *Soit $(E, \| \, . \, \|)$ un espace normé, on dit que $(E, \| \, . \, \|)$ est un espace Banach si et seulement si l'espace metrique (E, d) où d est la distance associé à la norme $\| \, . \, \|$ est un espace complet.*

Définition 1.1.7 *Un espace de Banach est un espace vectoriel (réel ou complexe) normé complet.*

1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.2.8 *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou$\mathbb{C}$). On appelle produit scalaire sur H toute application notée $\langle ., . \rangle$, de $H \times H$ á valeur dans $\mathbb{K}$ telle que pour tout $x, y, z \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, on a :*

1. *$\langle x, x \rangle \geq 0$ et si $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,*
2. *$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ est le conjugué dans $\mathbb{C}$ de $\langle x, y \rangle$,*
3. *$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \, \langle x, y \rangle$, et $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \, \langle x, y \rangle$.*

Théoréme 1.2.1 *(Inégalité de cauchy-schwarz) Pour tout $x, y \in H$, on a*

$$| \, \langle x, y \rangle \, | \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Corollaire 1.2.1 *Soit X un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, l'application : $x \longrightarrow \langle x, x \rangle^{1/2}$ est une norme sur X.*

Définition 1.2.9 *Un espace de Hilbert H est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui complet pour la norme*

$$\|x\|_H = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Remarque 1.2.1 *Un espace de Hilbert est espace de Banach pour la norme induite.*

Définition 1.2.10 *(L'espace dual $H^{'}$) L'ensemble des formes linéaires sur H est appelé dual topologique de H et noté $H^{'}$.*

$$H^{'} = \{f : H \to \mathbb{C} \ lin aire \ continue\}$$

Si $l \in H^{'}$, on note pour $x \in H$, $l(x) = \langle l, x\rangle$.
L'espace $H^{'}$ muni de la norme

$$\|l\|_{H'} = \sup_{x\neq 0} \frac{|l(x)|}{\|x\|_H}.$$

Définition 1.2.11 *(Base Hilbertienne) On appelle base Hilbertienne une suite (e_n) d'éléments de H tels que*

1. $\|e_n\| = 1 \ \forall n$, $\langle e_n, e_m\rangle = 0 \ \forall m, n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.
2. *L'espace vectoriel engendré par les (e_n) est dense dans H.*

1.3 Fonctions Holomorphes et Harmoniques

1.3.1 Fonctions Holomorphes

Définition 1.3.12 *Soit $\mathbb{D}$ un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On dit que f est holomorphe au point $z_0 \in \mathbb{D}$ si*

$$\lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

existe i.e : f est dérivable au sens complexe.

f est dite holomorphe sur $\mathbb{D}$ si elle est holomorphe en tout point de $\mathbb{D}$.
On note $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$.

Théoréme 1.3.2 *toute fonction holomorphe dans un disque et ne s'annulant pas admet un logarithme holomorphe.*
Rappelons que les disques, les rectangles et les triangles sont des compactes á bords Lipchitzienne.

Théoréme 1.3.3 (principe du maximum) *Supposons $\mathbb{D}$ un convexe. Si $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe et si $\mid f \mid$ admet un maximum local en un point $z_0 \in \mathbb{D}$, alors f est constante.*

Théoréme 1.3.4 *Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ alors f est développable en série entière dans tout disque continu dans $\mathbb{D}$. En particulier f développable en série entière au voisinage de chaque point de $\mathbb{D}$.*

Corollaire 1.3.2 *Une fonction holomorphe est une fonction analytique de variable convexe.*

1.3.2 Fonctions harmoniques

Définition 1.3.13 *Soit $\mathbb{D}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. On dit que f est harmonique sur $\mathbb{D}$ si f est de classe C^2 sur $\mathbb{D}$ et $\Delta f \equiv 0$ sur $\mathbb{D}$, oú Δf est le Laplacien de f défini par $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.*

De plus si la fonction f s'écrit sous la forme $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, oú $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ sont deux fonctions de classe C^2 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, f est dite harmonique si les conditions suivantes sont satisfaisantes :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$$

et

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Les fonctions harmoniques sont intimement liées aux fonctions holomorphes. Ainsi :

Théoréme 1.3.5 *Toute fonction holomorphe sur un ouvert $\mathbb{D}$ est harmonique sur $\mathbb{D}$ (c'est une conséquence des équations de Cauchy-Riemann).*

De plus, Une fonction f harmonique á valeurs réelles est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe : pour tout a de $\mathbb{D}$ et tout disque $\mathbb{D}(a, r)$ contenu dans $\mathbb{D}$, il existe g holomorphe dans $\mathbb{D}(a, r)$ telle que $f = Re(g)$ dans ce disque.

Remarque 1.3.2 *Soit $\mathbb{D}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Une fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ est harmonique si et seulement si $Re(f)$ et $Im(f)$ sont harmoniques sur $\mathbb{D}$.*

La remarque ci-dessus est une conséquence immédiate du fait que :
$Re(\Delta f) = \Delta(Re(f))$ et $Im(\Delta f) = \Delta(Im(f))$.

Théoréme 1.3.6 *Soit $\mathbb{D}$ un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C}$ et soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Si f est une fonction harmonique sur $\mathbb{D}$ alors il existe une fonction φ holomorphe sur $\mathbb{D}$ telle que $Re(\varphi) = f$.*

Proposition 1.3.1 *Soit $\mathbb{D}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est harmonique sur $\mathbb{D}$,*
2. *Pour tout $z_0 \in \mathbb{D}$, il existe $r > 0$ et φ holomorphe sur $\mathbb{D}(z_0, r)$ tels que $f = Re(\varphi)$ sur $D(z_0, r)$.*

Les fonctions harmoniques sur un disque ouvert $\mathbb{D}(a, r)$ ($a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$), continues sur le disque fermé $\overline{\mathbb{D}(a, r)}$ et á valeurs complexes.

1.4 Espace L^2

Soit $dA(z)$ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathbb{D}$. Dans les coordonnées rectangulaires et polaires, On a

$$dA(z) = \frac{1}{\pi}\, dxdy = \frac{1}{\pi} r\, drd\theta$$

et

$$\int_D dA(z) = 1.$$

On désigne par $L^2(\mathbb{D}, dA)$ l'espace des fonctions f définies sur le disque $\mathbb{D}$ telles que :

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2\, dA(z) \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Théoréme 1.4.7 *(de Riesz-Fisher) Pour tout $p \in [1, +\infty]$, L^p est un espace de Banach.*

D'aprés le théoréme de Riesz-Fisher, l'espace $L^2(\mathbb{D})$ muni de produit scalaire usuel donné par

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\, dA(z), \ \textit{pour tous} f, g \in L^2(\mathbb{D}, dA).$$

est donc un espace de Hilbert.

Propriétés 1.4.2 *1. L'inégalité de Minkowski :*

$$\|u + v\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^2} + \|v\|_{L^2},$$

2. Si $u \in L^2$ et $v \in L^2$ alors $uv \in L^1$ car l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée :

$$\int_{\mathbb{D}} |uv| \leq \left(\int_{\mathbb{D}} |u|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{D}} |v|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

On le note aussi :

$$\|uv\|_{L^1} \leq \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}.$$

Chapitre 2

Espace de Hardy, Opérateurs de Toeplitz

2.1 Définitions et propriétés

Nous allons définir deux classes d'espaces, l'une comme classe de fonctions définies sur $\mathbb{D}$ et l'autre comme classe de fonctions définies sur $\mathbb{T}$. Ce résultat nous permettra de voir une fonction de l'espace de Hardy comme une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}$ ou comme une fonction de $L^2(\mathbb{T})$. On pourra alors utiliser la théorie des fonctions holomorphes ou la structure de $L^2(\mathbb{T})$ pour calculer des normes ou utiliser les propriétés des coefficients de Fourier.
Dans ce qui suit, nous rappelons, sans tout redémontrer, la théorie classique des espaces de Hardy.

Définition 2.1.1 *On définit deux types d'espace de Hardy, le premier est un sous-espace de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ et le second un sous espace de $L^1(\mathbb{T})$. Pour $1 \leq p < \infty$, on note*

$$H^p(\mathbb{D}) = \{F \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), \parallel F \parallel_p^p := sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \mid F(re^{i\theta})^p \mid d\theta/2\pi < \infty\}$$

.

pour $p = \infty$, on note

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \{F \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), \sup_{\xi \in \mathbb{D}} \mid F(\xi) \mid < \infty\}.$$

sur $\mathbb{T}$, pour $1 \leq p \leq \infty$ on définit

$$H(\mathbb{T}) = H^p = \{f \in L^p(\mathbb{T}), \widehat{f}(n) = 0, n < 0\},$$

ici $\widehat{f}(n)$ *est le n-éme coefficient de Fourier de* f*, i.e.*

$$\widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta/2\pi$$

On note encore $\| \, . \, \|_p$ *la norme sur* H^p *héritée de* $L^p(\mathbb{T})$*. De même,* H^∞ *est naturellement muni de la norme du supremum essentiel dont on redonne ici l'écriture précise :*

$$\| \, f \, \|_\infty = \sup\{| \, z \mid \textit{tel que pour tout } \varepsilon > 0, d\mu(f^{-1}(D(z,\varepsilon) \cap \mathbb{T})) > 0\}.$$

Il vient de la définition que pour $1 \leq p \leq q \leq \infty$*,* $H^q \subset H^p$ *et* $H^q(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D})$*.*
Le premier lien que l'on peut aisément exprimer entre H^p *et* $H^q(\mathbb{D})$ *est le suivant :*
Si $F \in H^p(\mathbb{D})$ *et* $0 \leq r < 1$*, alors la fonction* Fr *définie par*

$$\forall \xi \in \mathbb{T}, Fr(\xi) = F(r\xi).$$

Définition 2.1.2 *Soit* $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction continue, on dit que* f *est holomorphe (ou analytique) au point* $z_0 \in \mathbb{D}$ *s'il existe une suite* $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ *dans* $\mathbb{C}$ *telle que*

$$f(z_0) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n . z_0^n$$

On dit que f est holomorphe sur $\mathbb{D}$ si elle l'est en tout point de $\mathbb{D}$, on note par $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$.
On munit $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{D}$. Ainsi équipé, $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ est un espace topologique métrisable. Soit $\mathbb{K}$ un compact de $\mathbb{D}$, on note $\mathcal{P}_k$ la semi norme définie par $\mathcal{P}_k(f) = \sup \mid f \mid$. En prenant $(\mathcal{K}_n)_{n\in I}$ une suite exhaustive de compacts de $\mathbb{D}$. c'est-á-dire $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}_{n+1}$ et tout compact de $\mathbb{D}$ est contenu dans l'un des $\mathcal{K}_n$, on pose

$$\delta(f) = \sum_{n\in I} 2^{-n} \frac{\mathcal{P}_{k_n}(f)}{1+\mathcal{P}_{k_n}(f)}$$

On pose enfin pour tout f et $g \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $d(f,g) = \delta(f-g)$. Alors d est une distance sur $\mathbb{D}$ et la topologie définie par d est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{D}$. Mieux encore, $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de

$\mathbb{D}$ est un espace de Frechet, c'est-à dire $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ est un espace vectoriel topologique localement convexe, métrisable et complet (Théorème de Weirstrass).

Noyau reproduisant

Définition 2.1.3 *Soit H un espace de Hilbert des fonctions définies sur $\mathbb{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$; on dit q'une application K de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$ est un noyau reproduisant pour H si*

1. *pour tout $z, w \in \mathbb{D}, K_z(w) = K(z, w)$ est une fonction de w qui appartient dans H*
2. *pour tout $z, w \in \mathbb{D}, k_z(w) = \langle k_z, k_w \rangle$ et $\| k_z \| = \langle k_z, k_z \rangle^{1/2} = (k(z, z))^{1/2}$*

Ainsi, on dit qu'un espace de Hilbert H admet un noyau reproduisant s'il existe application K vérifiant 1) *et* 2).
Et la structure de le noyau de reproduisant :

$$K_z(w) = \sum \overline{z}^n w^n = \frac{1}{1 - \overline{z}w}, \forall z, w \in \mathbb{D}$$

.

et note k_z la normalisation de K_z

$$k_z(w) = \frac{K_z(w)}{\| K_z(w) \|} = \frac{(1 - | z |^2)^{1/2}}{1 - \overline{z}w}, \forall w \in \mathbb{D}$$

.

Le théorème suivant caractérise les espaces de Hilbert à noyaux reproduisant.

Théoréme 2.1.1 *Soit H un espace de Hilbert de fonction définies sur $\mathbb{D}$; alors H admet un noyau reproduisant si et seulement si l'evaluation ponctuelle $f \longmapsto f(z)$ est continue sur H pour tout $z \in \mathbb{D}$.*

Propriétés 2.1.1 *Soit H un espace de Hilbert de fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ admettant un noyau reproduisant k, alors*

– *k est unique*

- *Pour tout* $z, w \in \mathbb{D}; k(z,w) = \overline{k(w,z)}$
- *Soit* $z \in \mathbb{D}, k(z,z) = 0 \iff f(z) = 0$ *pour tout* $f \in H$
- *Pour tout* $z, w \in \mathbb{D}, \mid k(z,w) \mid \leq (k(z,z))^{1/2}.(k(w,w))^{1/2}$. *pour tout* $z \in \mathbb{D}$, *l'application* $k_2 = k((z,.)$ *est bornée sur tout compact de* $\mathbb{D}$, *et* k *est bornée sur tout compact de* $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.

Propriétés 2.1.2 *Soit* $(e_n)_{n\geq 0}$ *une base hilbertienne de* H *alors pour tout* $(z,w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$,

$$k_z(w) = \sum_{n\geq 0} e_n(w).\overline{e_n(z)}$$

où cette série converge absolument et uniformément sur tout compact de $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$.
En particulier le noyau de reproduisant est indépendant du choix de la base hilbertienne.

Pour $f \in H(\mathbb{D})$ on définit les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} M_0(f,r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \mid f(re^{it}) \mid dt, \\ M_p(f,r) &= \{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{pi} \mid f(re^{it}) \mid^p dt\}^{1/p}, si 0 < p < \infty et \\ M_\infty(f,r) &= \sup_{t\in[0,2\pi[} \mid f(re^{it}) \mid . \end{aligned}$$

Théoréme 2.1.2 *Si* $1 \leq p \leq \infty$, *l'espace de Hardy* $H^p(\mathbb{D})$ *muni de la norme* $\| \, . \, \|_p$ *est un espace de Banach.*

2.2 Opérateurs de Toeplitz, Matrices de Toeplitz

.

On note *pol* l'algèbre des polynômes trigonométrique (engendré par $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ et pol_+ celle des polynômes en z (engendré par $\{z^n\}_{n\geq 0}$)

1. une matrice infinie $\{a_{ij}\}_{i,j\geq 0}$ est dite de Toeplitz s'il existe une suite $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $a_{ij} = b_{i-j}$ pour tout $i, j \geq 0$.
2. un opérateur T définie sur pol_+ est dite de Toeplitz si sa matrice par rapport à la base $\{z^n\}_{n\geq 0}$ est de Toeplitz.

L'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ est un sous espace fermé de $L^2(\mathbb{T})$ ayant (e_n) pour la base orthonormée. Notons par P_+ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ dans $H^2(\mathbb{T})$ dite aussi projection de Riez.

Définition 2.2.4 *On appelle opérateur de Toeplitz de symbole φ et on note T_φ l'opérateur définit par*

$$\begin{aligned} T_\varphi : H^2(\mathbb{T}) &\to H^2(\mathbb{T}) \\ f &\mapsto P_+(\varphi f). \end{aligned}$$

L'application qui à toute fonction bornée φ associé l'opérateur de Toeplitz T_φ est injective. En d'autre termes, si $T_\varphi = 0$ alors nécessairement $\varphi = 0$, En effet, si pour toute fonction f dans $H^2(\mathbb{T})$, $T_\varphi f = 0$ alors en particulier $T_\varphi e_n = 0$ pour tout entier $n \geq 0$, où les e_n sont les éléments de la base orthonormée de $H^2(\mathbb{T})$. Si $\varphi = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i e_i$ est le développement en série de Fourier de φ où $e_i = \langle \varphi, e_i \rangle$ alors pour tout entier n le developpement en série de Fourier de φe_n est $\varphi e_n = \sum a_1 e_{1+n}$. Dire que $T_\varphi e_n = P_+(\varphi e_n) = 0$ pour tout entier positif n revient à dire que les a_1 sont tous nuls pour $i \geq -n$. On en déduit donc que $a_1 = 0$ et ceci pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et donc φ est nulle.

Example 2.2.1

$$T = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \dots & \dots & a_{-(n-1)} & a_{-(n)} & \dots \\ \dots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & \dots & a_{-(n-2)} & a_{-(n-1)} & \dots \\ \dots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots & \dots & a_{-(n-3)} & a_{-(n-2)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{(n-1)} & a_{(n-2)} & a_{(n-3)} & a_{(n-4)} & \dots & \dots & a_0 & a_{-1} & \dots \\ \dots & a_{(n)} & a_{(n-1)} & a_{(n-2)} & a_{(n-3)} & \dots & \dots & a_1 & a_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Définition 2.2.5 *(Le shift sur $H^2(\mathbb{D})$)*

On rappelons que l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$ est l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathbb{D}$ de la forme $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ avec $a = (a_n)_{n\geq 0} \in l^2$.

De plus $\| f \|_2 = (\sum \mid a_n \mid)^2 = \| a \|_2$. Une reformulation immédiate de ceci est le lemme suivante

Lemme 2.2.1 *Soit $\varphi : l^2 \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$ définit par $\varphi(a) = f_a$ avec $a = (a_n)_{n\geq 0} \in l^2$ et $f_a(z) = \sum a_n z^n$. Alors φ est un isomorphisme isométrique.*

Nous allons à présent introduire l'opérateur shift sur $H^2(\mathbb{D})$

Lemme 2.2.2 *L'application linéaire continue S de $H^2(\mathbb{D})$ dans lui-même définie par $S := \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}$ est l'isométrie de $H^2(\mathbb{D})$ telle que $Sf = \alpha f$ avec $\alpha(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.*

Le lemme suivant donne l'equation fondamentale des opérateurs de Toeplitz :

Lemme 2.2.3 *Soit T un opérateur de pol_+ dans H^2. T est un opérateur de Toeplitz si seulement si*

$$S^*TS = T$$

Preuve.
on remarque que l'equation $S^*TS = T$ signifie que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, $\langle S^*TSz^i, z^j\rangle = \langle Tz^i, z^j\rangle$, c'est à dire

$$\langle Tz^i, z^j\rangle = \langle \overline{z}Tz^{i+1}, z^j\rangle = \langle Tz^{i+1}, z^{j+1}\rangle. \tag{2.1}$$

Maintenant, $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ la matrice de T dans la base $\{z^n, n \geq 0\}$. Alors il est facile de voir que pour tout $i, j \geq 0, a_{ij} = \langle Tz^j, z^i\rangle$. Ainsi l'equation (2.1) montre que $\{a_{ij}\}_{i,j} \geq 0$ est de Toeplitz si et seulement si

$$a_{ij} = a_{i+1,j+1}\ \forall i, j \geq 0.$$

c'est à dire $\langle Tz^j, z^i\rangle = \langle Tz^{j+1}, z^{i+1}\rangle = \langle \overline{z}Tz^{j+1}, z^k\rangle$. On a ainsi l'equivalence voulue.
Ce lemme implique en particulier que T est un opérateur de Toeplitz si et seulement si la matrice de T dans une base $\{z^n, n \geq 0\}$ est constante par diagonale.

On peut construire un opérateur de Toeplitz à partir de l'opérateur de multiplication. Soit $p^{H^2} = p_+$ la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ *sur* H^2. l'espace H^2 étant un espace de Hilbert, p_+ est bornée et $\| p_+ \| = 1$. pour $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, on définit

$$T_{fg} = p_+(fg) \forall g \in H^2$$

Si on identifie un élément de H^2 avec l'élément de L^2, on remarque $T_f = p_+M_f$ est borné de $H^2 dans H^2$ et que

$$\| T_{fg} \|_2 = \| p_+ M_{fg} \|_2 \leq \| p_+ \| \| M_f \| \| g \|_2 \leq \| f \|_\infty \| g \|_2.$$

De plus $a_{i,j} = \langle T_f z^j, z^i \rangle = \langle f z^j, z^i \rangle = \widehat{f}(i-j)$ donc T_f est un opérateur de Toeplitz. De plus, on sait que $\| T_f \| \leq \| f \|_\infty$.

Le théorème suivant montre qu'il ya en fait égalité

Théoréme 2.2.3 *(Mikhline,Widon) Soit $T : H^2 \longrightarrow H^2$, un opérateur de Toeplitz borné, initialement défini uniquement sur pol_+. Alors il existe une et une seule fonction $f \in L^\infty$ telle que $T = T_f$. On a $\| T_f \| = \| f \|_\infty$ et*

$$f\varphi = \lim_{n \longrightarrow \infty} z^{-n} T P_+ z^n \varphi, \forall \varphi \in L^2(\mathbb{T}). \tag{2.2}$$

f s'appelle le symbole de l'opérateur de Toeplitz T.

Preuve. on montre l'existence de $f \in L^\infty$ vérifiant l'equation (2.2). Pour cela on peut se demander quels devraient être les coefficients de Fourier de ce $f \in L^\infty(\mathbb{T})$. Ainsi s'il existe un tel que $T = T_f$, on doit avoir

$$\widehat{f}(k) = \begin{cases} \langle T1, z^k \rangle, & \text{si } k \geq 0 \\ \langle T z^{-k}, 1 \rangle, & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

On peut alors chercher à connaître les fonctions qui ont ces coefficients de Fourier Soit

$$a_k = \begin{cases} \langle T1, z^k \rangle, & \text{si } k \geq 0 \\ \langle z^{-k}, T^*1 \rangle, & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

D'aprés le lemme précident on a $S^{*n} T S^n = T$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi pour $n \geq 0$ et pour $k \geq 0$, on a

$$\langle \overline{z}^n T z^n, z^k \rangle = \langle p_+ \overline{z}^n T z^n, z^k \rangle = \langle S^{*n} T S^n 1, z^k \rangle = \langle T1, z^k \rangle = a_k.$$

Dans le cas $-n \leq k < 0$, on a

$$\langle \overline{z}^n T z^n, z^k \rangle = \langle \overline{z}^{n+k} T z^{n+k} \overline{z}^k, 1 \rangle = \langle T \overline{z}^k, 1 \rangle = \langle \overline{z}^k, T^*1 \rangle = a_k$$

enfin si $k < -n$

$$\langle \overline{z}^n T z^n, z^k \rangle = \langle T z^n, z^{k+n} \rangle = 0.$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{z}^n T z^n = \sum_{k \geq n} a_k e^{ikt},$$

cette série de Fourier converge dans $L^2(\mathbb{T})$ car en remarquant que $T1 = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$ et que $T^*1 = \sum_{k \geq 0} a_{-k} \overline{z}^k$, on obtient d'aprés l'égalité de Parseval

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mid a_k \mid^2 \leq \parallel T1 \parallel_2^2 + \parallel T^*1 \parallel_2^2 < \infty.$$

On pose $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ikt}$, alors $f \in L^2(\mathbb{T})$. Il reste maintenant à montrer l'égalité ennoncée. Comme pour tout $g \in L^2(\mathbb{T}) \parallel gz \parallel_2 = \parallel g \parallel_2$, on a

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \parallel f z^k - \overline{z}^n T z^n z^k \parallel_2^2 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \parallel f - \overline{z}^{n+k} T z^{n+k} \parallel_2^2 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sum_{j \leq -n-k} \mid a_j \mid^2 = 0.$$

Ainsi pour tout polynôme trigonométrique p on a

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \parallel fp - \overline{z}^n T z^n p \parallel_2^2 = 0 \tag{2.3}$$

et en particulier

$$\parallel fp \parallel = \lim_{n \longrightarrow \infty} \parallel \overline{z}^n T z^n p \parallel_2 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \parallel T z^n p \parallel_2 \leq \parallel T \parallel . \parallel p \parallel_2.$$

Maintenant l'inégalité précédente implique que M_f est borné sur les polynômes ce qui suffit pour affirmer que M_f est borné. Par un théorème ($Voir[6]$) cela implique que $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ et que $\parallel M_f \parallel = \parallel f \parallel_\infty$. On a donc

$$\parallel f \parallel_\infty \leq \parallel T \parallel.$$

Soient $\varphi \in L^2(\mathbb{T})$ et $\varepsilon > 0$, par denssité de Pol dans $L^2(\mathbb{T})$, il existe $p_\varepsilon \in Pol$ tel que $\parallel \varphi - p_\varepsilon \leq \varepsilon$. On écrit maintenant

$$\begin{aligned}
\parallel f\varphi - \overline{z}^n T z^n \varphi \parallel_2 &\leq \parallel f\varphi - fp_\varepsilon \parallel_2 + \parallel fp_\varepsilon - \overline{z}^n T z^n p_\varepsilon \parallel_2 + \parallel \overline{z}^n T z^n p_\varepsilon - \overline{z}_n T z^n \varphi \parallel_2 \\
&\leq \parallel f \parallel_\infty \parallel f - p_\varepsilon \parallel_2 + \parallel fp_\varepsilon + \overline{z}^n T z^n p_\varepsilon \parallel_2 + \parallel T \parallel \parallel p_\varepsilon - \varphi \parallel_2 \\
&\leq (\parallel f \parallel_\infty + \parallel T \parallel)_\varepsilon + \parallel fp_\varepsilon - \overline{z}^n T z^n p_\varepsilon \parallel_2 .
\end{aligned}$$

Avec l'equation (2.3) on a pour tout $\varepsilon, \delta > 0$, il existe $N > 0$ tel que

$$n > N \Longrightarrow \| f\varphi - \overline{z}^n T z^n \varphi \|_2 \leq \varepsilon + \delta.$$

Ainsi

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \| f\varphi - \overline{z}^n T z^n \varphi \|_2 = 0.$$

Ce qui donne l'égalité (2.2). Il reste à montrer que $T = T_f$. L'égalité (2.2) entraîne $T_{fg} = p_+ \overline{z}^n T z^n g = \lim_{n\longrightarrow\infty} S^{*n} T S^n g = T_g$.
Pour tout $g \in L^2(\mathbb{T})$. L'unicité de f découle du fait que $\langle T_f z^j, z^k \rangle = \widehat{f}(k-j)$. Ainsi les valeurs de la matrice de T déterminent totalement les coefficients de Fourier de f et ces coefficients déterminent f.

Corollaire 2.2.1 *Soient $\varphi_{ij} \in L^\infty$ (une famille finie) et $k \in \mathcal{K}(H^2)$. Alors*

$$\| \sum_i \prod_j \varphi_{ij} \|_\infty \leq \| \sum_i \prod_j T\varphi_{ij} + k \|.$$

En particulier, si $f \in L^\infty$, on a $\| T_f \| = \| T_f \|_e = \| f \|_\infty$.

Preuve. D'aprés le théorème (2.1.1), pour tout $g \in L^2(\mathbb{T})$ et $\varphi \in L^\infty$, on a
$\lim_{n\longrightarrow\infty} \| \overline{z}^n T_\varphi p_+ z^n g - \varphi g \|_2 = 0$
Ce qui, par invariance de la norme par multiplication par z^n, donne

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \| T_\varphi p_+ z^n g - z^n \varphi g \|_2 = 0. \tag{2.4}$$

En appliquant p_+, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \| T_\varphi p_+ z^n g - p_+ z^n \varphi g \| = 0. \tag{2.5}$$

Maintenant pour tout $f \in L^\infty$, T_f est borné et on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \| T_f T_\varphi p_+ z^n g - T_f p_+ z^n \varphi g \| = 0. \tag{2.6}$$

l'égalité (2.5) appliquée à f et à φg implique

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \| T_f p_+ z^n \varphi g - z^n f \varphi g \| = 0 \tag{2.7}$$

les égalités (2.6) et (2.7) donnent alors

$$\| \overline{z}^n T_f T \varphi p_+ z^n g - f\varphi g \|_2 = \lim_{n\longrightarrow\infty} \| T_f T_\varphi p_+ z^n g - z^n f \varphi g \|_2 = 0.$$

Ce raisonnent entrîne que pour toute famille finie φ_{ij}, on a

$$\sum_i \prod_j \varphi_{ij} g = \lim_{n\longrightarrow\infty} \overline{z}^n (\sum_i \prod_j T\varphi_{ij}) p_+ z^n g, \forall g \in L^2(\mathbb{T}).$$

D'autre part comme $p_+ z^n g$ converge faiblement vers 0 et que k est un opérateur compact, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \parallel k p_+ z^n g \parallel = 0, \forall g \in L^2(\mathbb{T}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \parallel (\sum_i \prod_j \varphi_{ij}) g \parallel_2 &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \parallel \overline{z}^n (\sum_i \prod_j T\varphi_{ij} + k) p_+ z^n g \parallel \\ &\leq \parallel \sum_i \prod_j T\varphi_{ij} + k \parallel \parallel g \parallel_2 \end{aligned}$$

et on a alors le résultat désiré.
Pour le cas particulier, si $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ alors par ce qui précède pour tout opérateur compact k, on a

$$\parallel f \parallel_\infty \leq \parallel T_f + k \parallel.$$

Donc $\parallel f \parallel_\infty \leq \inf_k \parallel T_f + k \parallel = \parallel T_f \parallel_e \leq \parallel T_f \parallel \leq \parallel f \parallel_\infty$. Le corollaire précédent implique que $T_f \in \mathcal{K}(H^2)$ si et seulement si $f = 0$. C'est un résultat auquel on peut s'attendre en se rappelant que la matrice de T_f dans la base canonique de H^2 est constante sur les diagonales. L'égalité $\parallel T_f \parallel = \parallel T_f \parallel_e = \parallel f \parallel_\infty$ peut également être obtenue grace à la quantité $\langle T_f k_z, k_z \rangle$. En effet si $f \in L^2(\mathbb{T})$ alors on peut écrire $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in H^2$ et $f_2 \in H^2$, on peut ainsi écrire pour tout $z \in \mathbb{D} f(z) = f_1(z) + \overline{f}_2(z)$. On écrit alors

$$\begin{aligned} \langle T_f k_z, k_z \rangle &= \langle f_1 k_z, k_z \rangle + \langle \overline{f}_2 k_z, k_z \rangle \\ &= \langle f_1 k_z, k_z \rangle + \overline{\langle f_2 k_z, k_z \rangle} \end{aligned}$$

et on peut remarque que $f_1 k_z \in H^2$ et $f_2 k_z \in H^2$ ainsi la propriété fondamentale du noyau reproduisant entraîne que

$$\langle T_f k_z, k_z \rangle = f_1(z) + \overline{f}(z) = f(z), \forall z \in \mathbb{D}.$$

Il reste maintenant à remarquer que k_z converge faiblement vers 0 quand z tend vers le bord de $\mathbb{D}$ et que ceci entraîne

$$\| f \|_\infty = \limsup_{z \longrightarrow \partial\mathbb{D}} | f(z) | = \limsup_{z \longrightarrow \partial\mathbb{D}} | \langle T_f k_z, k_z \rangle | \leq \| T_f \|_e \leq \| T_f \| \leq \| f_\infty \|.$$

Nous ne détaillons pas ici toute les étapes car nous le ferons très précisément quand nous aborderons les opérateurs de Toeplitz sur l'espace de Bergmane.
Elle nous servira alors en particulier à montrer $\| T_h \| = \| T_h \|_e = \| h \|_\infty$ pour les symboles harmoniques bornés. Cependant, sur l'espace de Bergman, on verra que cette égalité est en générale fausse.
On donne quelques propriétés générales des opérateurs de Toeplitz.

Proposition 2.2.1 *Soit $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ alors*

1. *l'adjoint T_f^* de T_f est un opérateur de Toeplitz et vérifie $T_f^* = T_{\overline{f}}$.*
2. *Si $f \in H^2$ alors $T_f = M_f$ (comme opérateurs sur H^2).*
3. *Si $f, g \in H^\infty$ alors $T_f T_g = T_g T_f = T_{fg}$.*
4. *Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda T_f + \mu I = T_{\lambda f + \mu}$.*
5. *Soit $f \in L^\infty$ et soient φ et $\overline{\theta}$ sont des fonctions de H^∞ alors $T_f T_\varphi = T_{f\varphi}$ et $T_\theta T_f = T_{f\theta}$.*

Preuve. Les vérifications de $1, 2, 3$ *et* 4 sont élémentaires. Montrons pour tout $g \in H^2$, en plaçant par exemple sur le disque, il est claire que φg est holomorphe sur $\mathbb{D}$ et φ étant bornée $\| \varphi g \|_2 \leq \| \varphi \|_\infty \| g \|_2$ ainsi $\varphi g \in H^2$. On peut alors écrire $T_\varphi(g)\varphi = p_+(\varphi g) = \varphi g$. On a alors

$$T_f T_\varphi(g) = T_f p_+(\varphi g) = T_f(\varphi g) = p_+(f\varphi g) = T_{f\varphi}(g).$$

Pour la deuxième partie il suffit de considérer l'adjoint et d'utiliser l'assertion 1. ∎

Chapitre 3

Opérations sur les opérateur de Toeplitz

3.0.1 Produit d'opérateur de Toeplitz sur l'espace de Hardy

Si $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$ et $\psi \in H^\infty(\mathbb{T})$ alors pour toute fonction f dans $H^2(\mathbb{T})$, on a

$$T_\varphi T_\psi f = T_\varphi(\psi f) = P_+(\varphi\psi f) = T_{\varphi\psi} f.$$

Donc le produit $T_\varphi T_\psi$ est l'opérateur de Toeplitz de symbole $\varphi\psi$. Maintenant si φ est anti-analytique, i.e. $\overline{\varphi}$ est analytique et si ψ est bornée alors pour toute fonction $f \in H^2(\mathbb{T})$ on a

$$(T_\varphi T_\psi)^* = T_{\overline{\psi}} T_{\overline{\varphi}} = T_{\overline{\varphi\psi}} = (T_{\varphi\psi})^*.$$

Donc $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$.
En resumé, si φ est anti-analytique, bornée ou si ψ est analytique alors le produit $T_\varphi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz de symbole $\varphi\psi$.
Le question et donc de savoir quand est-ce que le produit de deux opérateur de Toeplitz est un opérateur de Toeplitz ? En effet, l'ensemble des opérateur de Toeplitz n'est pas du tout stable par multiplication. En d'autres termes, si T_φ et T_ψ sont deux opérateurs de Toeplitz bornés, alors le produit $T_\varphi T_\psi$ n'est pas en général un opérateur de Toeplitz.

Théoréme 3.0.1 *Tout opérateur borné sur $H^2(\mathbb{T})$, dont la matrice de la base orthonormée de $H^2(\mathbb{T})$ est une matrice de Toeplitz, est un opérateur de Toeplitz.*

Le théorème suivant dû à Brown et Halmos, donne une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux opérateurs de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ soit un opérateur de Toeplitz et montre que cela n'arrive que dans le cas trivial.

Théoréme 3.0.2 *Soit φ et ψ deux fonctions bornées sur $\mathbb{T}$. Le produit $T_\varphi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz si et seulement si φ est anti-analytique ou si ψ est analytique.*
Si cette condition est satisfaite alors $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$.

Preuve. Soient $(a_{i-j})_{i,j\geq 0}$,$(b_{i-j})_{i,j\geq 0}$ et $(c_{i,j})_{i,j\geq 0}$ respectivement les matrices de T_φ, T_ψ *et* $T_\varphi T_\psi$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, les a_n sont les coefficients de Fourier de φ et les b_n sont ceux de ψ. Pour tout couple (i,j) d'entiers positifs, on a

$$c_{i,j} = \sum_{k\geq 0}^{+\infty} a_{i-k}b_{k-j} \text{ et } c_{i+1,j+1} = a_{i+1}b_{-j-1} + \sum_{k\geq 0}^{+\infty} a_{i-k}b_{k-j},$$

c'est-à-dire que

$$c_{i+1,j+1} = c_{i,j} + a_{i+1}b_{-j-1.}$$

Il vient que pour tous entiers positifs i et j

$$\text{si } c_{i+1,j+1} = c_{ij} \; alors \; a_{i+1}b_{-j-1} = 0.$$

Si la matrice $(c_{ij})_{i,j\geq 0}$ est une matrice de Toeplitz et donc d'apré le théorème (3.0.1) le produit $T_\varphi T_\psi$ est une opérateur de Toeplitz, alors $a_{i+1} = 0$ pour tout entier positif i ou $b_{-j-1} = 0$ pour tout entier positif j, ce qui est équivalent à dire que $\widehat{\varphi}(n) = 0$ pour tout entier $n \geq 1$ i.e. φ est anti-analytique, ou $\widehat{\psi}(n) = 0$ pour tout entier $n \leq -1$ i.e. ψ est analytique.
Réciproquement si ψ est analytique alors T_ψ est l'opérateur de multiplication par ψ et donc pour toute fonction $fdansH^2(\mathbb{T})$:

$$T_\varphi T_\psi f = T_\varphi(\psi f) = P_+(\varphi\psi f) = T_{\varphi\psi} f.$$

Si φ est anti-analytique alors son adjoint $\overline{\varphi}$, est analytique et alors :

$$(T_\varphi T_\psi)^* = T_{\overline{\psi}} T_{\overline{\varphi}} = T_{\overline{\varphi\psi}} = (T_{\varphi\psi})^*.$$

et par un deuxième passage á l'adjoint, on obtient que $T_\varphi T_\psi = T_{\phi\psi}$. Le corollaire suivant montre clairement que l'ensemble des opérateurs de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ n'est pas diviseure de zéro.

Corollaire 3.0.1 *Le produit de deux opérateurs de Toeplitz est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.*

Preuve. Soit φ et ψ deux fonctions bornées telles que $T_\varphi T_\psi = 0$. Comme l'opérateur nul est un opérateur de Toeplitz alors d'aprés le théorème précédent ou φ est anti-analytique ou ψ est analytique ; de plus $\varphi\psi = 0$. Si ψ était analytique et non identiquement nulle (*donc* $\psi \in H^2(\mathbb{T})$) alors l'ensemble des zéros de ψ serait de mesure nulle et dans ce cas $\varphi\psi = 0$ impliquerait que la fonction φ serait nulle presque partout sur $\mathbb{T}$ et donc $T_\varphi = 0$.

Corollaire 3.0.2 *Si T_φ un opérateurs de Toeplitz inversible sur $H^2(\mathbb{T})$ alors son inverse est un opérateur de Toeplitz si et seulement si φ est analytique ou si φ est anti-analytique.*

Corollaire 3.0.3 *Un opérateurs de Toeplitz est une isométrie si et seulement si φ est analytique et $\mid \varphi \mid$ est la fonction constante e_0.*

Preuve. Si T_φ est isométrie alors $T_{\varphi^*}T_\varphi = T_{\overline{\varphi}}T_\varphi = I$. D'où d'aprés le theorème (3.0.2), φ est analytique ou $\overline{\varphi}$ est anti-analytique (i.e. φ est analytique) et $\mid \varphi \mid^2 = \overline{\varphi}\varphi = e_0$ car l'opérateur I n'est autre que T_{e_0}.
Réciproquement si φ est analytique et $\overline{\varphi}\varphi = e_0$, alors $T_{\varphi^*}T_\varphi = T_{\overline{\varphi}}T_\varphi = T_{\overline{\varphi}\varphi} = T_{e_0} = I$.
Donc T_φ est isométrie.

Corollaire 3.0.4 *Les seuls opérateurs de Toeplitz idempotents sont l'opérateur nul et l'opérateur identité.*

Preuve. Un opérateurs de Toeplitz T_φ est idempotent si $T_\varphi = (T_\varphi)^2$. Dans ce cas $T_\varphi(I - T_\varphi) = 0$. Il vient donc d'après le corollaire (3.0.1) que, est ou bien est nul, ou bien égal à I. Ce corollaire permet de redémontrer que le produit $T_{e_1}T_{e_1}^*$ n'est pas un opérateurs de Toeplitz En effet si $T_{e_1}T_{e_1}^*$ était un opérateurs de Toeplitz et puisque $T_{e_1}T_{e_1}^*T_{e_1}T_{e_1}^* = T_{e_1}T_{e_1}^*$ il serait alors un Toeplitz idempotent. Donc ou $T_{e_1}T_{e_1}^* = I$, ce qui est est absurde car il est facile de voir par exemple que $T_{e_1}T_{e_1}^*e_0 = 0$; ou $T_{e_1}T_{e_1}^* = 0$, ce que est évidemment faux puisque ni T_{e_1} ni son adjoint n'est nul.

3.0.2 Commutativité des opérateurs de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$

Nous nous intéressons à la question de la commutativité de deux opérateurs de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$. Si φ et ψ deux symboles analytiques bornés alors T_φ et T_ψ sont deux opérateurs

de multiplication sur $H^2(\mathbb{T})$ respectivement par φ et ψ donc ils commutent. Par ailleurs si φ et ψ sont tous les deux anti-analytiques alors

$$(T_\varphi T_\psi)^* = T_{\overline{\psi}} T_{\overline{\varphi}} = T_{\overline{\varphi}} T_{\overline{\psi}} = (T_\psi T_\varphi)^*$$

et donc $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$.
Considérons maintenant l'opérateur de translation unilatérale T_{e_1} et son adjoint $T_{e_1}^*$.

Théoréme 3.0.3 *Un opérateurs T sur $H^2(\mathbb{T})$ est un opérateurs de Toeplitz si et seulement si $T_{e_1}^* T T_{e_1} = T$.*

Comme la translation unilatérale est une isométrie on a $T_{e_1}^* T_{e_1} = I$. Or $T_{e_1}^* T_{e_1} T_{e_1}^* T_{e_1} = I \neq T_{e_1} T_{e_1}^*$. D'ou d'aprés le théorème (3.0.3), $T_{e_1} T_{e_1}^*$ n'est pas un opérateur de Toeplitz et donc $T_{e_1}^* T_{e_1} \neq T_{e_1} T_{e_1}^*$.
À travers cet exemple, il est clair que le produit de deux opérateurs de Toeplitz n'est pas toujours commutatif.

Théoréme 3.0.4 *Soit T_φ un opérateur de Toeplitz borné sur $H^2(\mathbb{T})$. T_φ est analytique (resp. anti-analytique) si et seulement s'il commute avec la translation unilatérale T_{e_1} (resp. avec $T_{e_1}^*$).*

Nous allons voir quelques lignes plus loin, grâce au théorème suivant de Brown et Halmos [9], que cela n'est pas possible que rarement.

Théoréme 3.0.5 *Deux opérateurs de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ commutent si et seulement s'ils sont tous les deux analytiques, ou s'ils sont tous les deux anti-analytiques ou si l'un est une fonction affine de l'autre.*

Preuve. Soit T_φ et T_ψ deux opérateurs de Toeplitz bornés tels que $T_\varphi T_\psi = T_\psi T_\varphi$.
Notons par $(a_{i-j})_{i,j\geq 0}$, $(b_{i-j})_{i,j\geq 0}$, $(c_{ij})_{i,j\geq 0}$ et $(d_{ij})_{i,j\geq 0}$, respectivement les matrices de T_φ, T_ψ, $T_\varphi T_\psi$. Pour tous entiers positifs i *et* j, on a

1. $c_{i+1,j+1} = a_{i+1} b_{-j-1} + c_{ij}$
2. $d_{i+1,j+1} = a_{-j-1} b_{i+1} + d_{ij}$

Comme T_φ et T_ψ commutent alors nécessairement $c_{ij} = d_{ij}$. Donc

$$a_{i+1}b_{-j-1} \quad = \quad a_{-j-1}b_{i+1}, \forall i, j \geq 0 \tag{3.1}$$

Il suffit maintenant de montrer que si l'égalité (3.1) est vraie alors nous sommes forcément dans l'une des trois situations suivantes :

1. φ et ψ sont tous les deux analytique.
2. φ et ψ sont tous les deux anti-analytique.
3. il existe deux constantes α et β danc $\mathbb{C}$ telles que $T_\varphi = \alpha T_\psi + \beta T_{e_0}$.

Supposons que l'égalité (3.1) soit vraie et que les deux situations (1) et (2) soient fausses. Alors, ou φ est égale à une constante c auquel cas $\varphi = 0$. $\psi + c$ et nous sommes donc dans la situation (3), ou il existe un $i_0 \geq 0$ et $j_0 \geq 0$ tels que : $a_{i_0+1} \neq 0$ et $a_{-j_0-1} \neq 0$. Si

Ainsi, les matrices des deux opérateurs de Toeplitz λT_φ et T_ψ différent seulement par leur diagonales principales. Donc

$$T_\psi - b_0 I = \lambda(T_\varphi - a_0 I) \text{ i.e. } T_\psi = \lambda T_\varphi + (b_0 - \lambda a_0)I.$$

Réciproquement si φ et ψ sont tout les deux analytiques (resp. anti-analytiques) alors les deux opérateurs T_φ et T_ψ (resp. leur adjoints $T_{\overline{\varphi}}$ et $T_{\overline{\psi}}$) sont les opérateurs de multiplication respectivement par φ et ψ (resp. par $\overline{\varphi}$ et $\overline{\psi}$) et donc commutent (resp. leur adjoints commutent et donc eux aussi commutent).
S'il existe deux nombres complexes α *et* β tels que $\varphi = \alpha\psi + \beta$ alors grâce à la linéarité de l'opérateur de Toeplitz par rapport à son symbole et parce que T_ψ commute avec lui-même et avec l'identité, on a bien que T_φ et T_ψ commutent.

3.0.3 Bornétude

Il est intéressant de savoir quand est-ce qu'une matrice de Toeplitz peut définir un opérateur borné sur $l^2(\mathbb{Z}_+)$? La réponse à cette question à été donnée par le théorème suivant :

Théoréme 3.0.6 *Une matrice de Toeplitz $A = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définit un opérateur borné sur $l^2(\mathbb{Z}_+)$ si et seulement s'il existe une fonction borné φ sur $\mathbb{T}$ telle que les nombres $a_n (n \in \mathbb{Z})$ sont ses coefficients de Fourier i.e :*

$$a_n = 1/2 \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta}, n \in \mathbb{Z}$$

.

Dans ce cas la norme de l'opérateur engendré par A est égal à $\| \varphi \|_\infty := supess_{t\in\mathbb{T}} \mid \varphi(t) \mid$

Pour démontrer ce théorème nous avons besoin la définition de la matrice Laurent et le théorème associé

Définition 3.0.1 *Soit* $a_n (n \in \mathbb{Z})$ *une suite de nombres complexes. On considère A la matrice bilatéralement infinit suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \dots \\ \dots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \dots \\ \dots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ \dots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

dont les éléments d'une même diagonale sont égaut. La matrice A est appelée matrice de Laurant.

Théoréme 3.0.7 *Soit* $A = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *une matrice de Laurant. A définit un opérateur borné sur* $l^2(\mathbb{Z})$ *si et seulement s'il existe une fonction* φ *bornée sur* $\mathbb{T}$ *telle que* $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est la suite des coefficients de Fourier de* φ*.*

Preuve. (theorème (3.0.5)) Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ la fonction dont les coefficients de Fourier sont les élément a_n de la matrice A et soit L_φ l'opérateur de Laurant de symbole φ. On sait que L_φ est borné si et seulement si φ et aussi borné, auquel cas $\| L_\varphi \|_\infty = \| \varphi \|_\infty$. On note par M_φ la matrice de l'opérateur L_φ dans la base orthonormé $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $l^2(\mathbb{Z})$:

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & a_{-4} & \dots \\ \dots & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \dots \\ & & & & & & \\ \dots & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ \dots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ \dots & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

D'aprés le theorème précédent, M_φ définit un opéfrateur borné sur $l^2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ et dans ce cas $\| M_\varphi \| = \| \varphi \|_\infty$.

Par ailleurs on remarque que la matrice A n'est autre que le quart inferieur droit de la matrice M_φ ; autrement dit, si on note par p_+ la projection orthogonale de $l^2(\mathbb{Z})$ dans $l^2(\mathbb{Z}_+)$ alors $A = P_+ M_\varphi$ ceci implique que si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ alors

$$\| A \| \leq \| M_\varphi \| = \| \varphi \|_\infty \tag{3.2}$$

Réciproquement, on suppose que A définit un opérateur borné sur $l^2(\mathbb{Z}_+)$.

Pour tout entier positif n, on considère S_n la projection de $l^2(\mathbb{Z})$ définit par :

$$S_n = (t_k)_{k\in\mathbb{Z}} \longrightarrow (..., 0..., t_{-n}, t_{-n+1}, ..., t_0, t_1, t_2, ...)$$

La matrice de l'opérateur $S_n M_\varphi S_n$ dans la base orthonormé $(e_{-n+1})_{i\geq 0}$ de $Im S_n$ réésulte de la matrice M_φ en supperimant toutes les lignes et les colonnes d'indice $\{-(n+1), -(n+2), ...\}$; elle n'est autre alors que la matrice A, ce qui montre que :

$$\| A \| \;\; = \;\; \| S_n M_\varphi S_n \|, pour \;\; tout \;\; n \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

D'autre part il est clair par définition même de S_n, que la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ converge fortement vers l'opérateur identité de $l^2(\mathbb{Z})$ quand n tend vers $+\infty$.

Ceci implique que $(S_n M_\varphi S_n)_{n\geq 0}$ converge fortement vers M_φ et donc :

$$\| M_\varphi \| \;\; \leq \;\; \liminf_n \| S_n M_\varphi S_n \| . \tag{3.4}$$

les relations (3.3) et (3.4) implique que :

$$\| M_\varphi \| \leq \| A \|, \tag{3.5}$$

et alors, par le théorème précédent les a_n sont des coefficients de Fourier d'une fonction φ bornée sur $\mathbb{T}$.

Finalement la matrice $A = (a_n)_{n\in z}$. définit un opérateur sur $l^2(\mathbb{Z})_+$ si et seulement s'il existe $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ telle que pour tout entier n, $\widehat{\varphi}(n) = a_n$ et dans ce cas les inégalités (3.2) et (3.5) donnent que $\| A \| = \| \varphi \|_\infty$.

3.0.4 Compacité

Corollaire 3.0.5 *L'opérateur de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ et compact si et seulement si son symbole est nul.*

Preuve. Soit T_φ un opérateur de Toeplitz compact, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ et tout entier $n \geq 0$ tels que $n + k \geq 0$, ona :

$$\langle T\varphi e_n, e_{n+k}\rangle = \langle \varphi e_n, e_{n+k}\rangle = \langle \varphi, e_k\rangle.$$

D'autre part, puisque la suite de fonction $(e_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers 0 et comme par hypothèse T_φ est un opérateur compact, alors $(T_\varphi e_n)_{n\geq 0}$ converge en norme $\| \ . \ \|_2$ vers 0. D'ou pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\varepsilon$ ona :

$$\| T_\varphi e_n \|_\varepsilon \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, si on prend $n \geq \sup\{N_\varepsilon, -k\}$, on voit que

$$| \widehat{\varphi}(k) | = | \langle \varphi, e_k\rangle | = | \langle T_\varphi e_n, e_{n+k}\rangle | \leq \| T_\varphi e_n \|_2 < \varepsilon,$$

d'ou $\widehat{\varphi}(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et donc φ est l'application identiquement nulle.

Réciproquement, si le symbole est nul alors l'opérateur de Toeplitz est nul sur $H^2(\mathbb{T})$ et donc compact.

conclusion

Cet mémoire donne une réponse complète à questions nécessaire pour les opérateurs de Toeplitz définit sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{T})$ du cercle unité $\mathbb{T}$. Ils montrent que pour deux fonctions φ et ψ bornées sur $\mathbb{T}$:

- le produit $T_\varphi T_\psi$ est un opérateur de Toeplitz T_w si et seulement si $\overline{\varphi}$ est analytique et ψ est analytique, et dans les deux cas $w = \varphi\psi$. Dans l'espace $H^2(\mathbb{T})$, une fonction est dite analytique si tous ses coefficients de Fourier d'indice négatif sont nuls.
- Les opérateurs de Toeplitz T_φ et T_ψ commutent si et seulement si φ et ψ sont toutes les deux analytiques, ou bien $\overline{\varphi}$ et $\overline{\psi}$ sont toutes les deux analytiques, ou bien si φ est une fonction affine de ψ.

Le chapitre (3) traite la bornitude et la compacité et la réponse est un résultat des recherches Dr. LOUHICHI.

- Une matrice de Toeplitz $A = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définit un opérateur borné sur $l^2(\mathbb{Z}_+)$ si et seulement s'il existe une fonction borné φ *sur* $\mathbb{T}$ telle que les nombres $a_n (n \in \mathbb{Z})$ sont ses coefficients de Fourier i.e :

$$a_n = 1/2 \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta}, n \in \mathbb{Z}$$

.

  Dans ce cas la norme de l'opérateur engendré par A est égal à $\| \varphi \|_\infty = supess \mid \varphi(t) \mid$

- L'opérateur de Toeplitz sur $H^2(\mathbb{T})$ et compact si et seulement si son symbole est nul.

Bibliographie

[1] A. Brown et P. R. Halmos : Algebraic properties of Toeplitz operators. J. Reino Angew. Math. 123(1964),89-102.

[2] B. Barusseau. Propriétés spectrales des opérateurs de Toeplitz. Thèse présentée à l'Université Bordeaux 1. Spécialité mathématiques pures. Mai. 2010.

[3] F. Helein. Fonctions holomorphes

[4] H. Brezis. Analyse fonctionnelle. Masson, Paris, 1996.

[5] I. Chalendar. Fonctions Harmoniques, classe de Nevanlinna, espaces de Hardy, et une introduction aux opérateurs de Toeplitz et de Hankel. Université Lyon I. 2008.

[6] I. CHALENDAR. Fonctions Harmoniques, Classe de Nevanlinna, Espaces de Hardy, et une introduction aux opérateurs de Toeplitz et de Hankel. (polycopie de cours). Univesité de Lyon I. 2008.

[7] K. Zhu. Toeplitz operators in function spaces, volume 139 of Monographs and Textbooks in pure and applied mathemaics. Marcel Dekker Inc. New York, 1990.

[8] LOUHICHI-ISSAM-2005

[9] N.Das. Norm of Toeplitz operators on the Bergman space. Indian j. pure Appl. Math.,33(2) :255-267,2002.

[10] S. Grudsky and N. Vasilevski. Bergman Toeplitz Operators :radial component influence. Integral Equation Operator Theory,40(1) :16-33,2001.