RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA

FACULTÉ DES SCIENCES

Département Mathématiques et informatiques

MEMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et informatiques.

Filière : Mathématiques.

Option : Analyse Mathématiques et Applications.

TITRE :

INÉQUATIONS VARIATIONNELLES ET SES APPLICATIONS

PRÉSENTÉ PAR :

OUAZAA AYOUB

Devant le jury :

Encadreur : **Mr. Benaichouche noureddine.**

Précédent : **Mr. Ayadi houcine.**

Examinateur : **Mr. Souilah resak.**

Examinateur : **Mr. Benchaa mohamed.**

Promotion : 2020/2021

Remerciements

La réalisation de ce travail n'aurait pas été possible sans le soutient et la participation de plusieurs personnes avec les quelles nous avons étroitement collaboré et qui nous ont fait part de leurs connaissances et leur savoir faire. Nous souhaitons ici leur exprimer toute notre gratitude Avant tout nous remercions :

• Allah tout puissant de nous avoir donné le courage et la patience pour terminer ce travail.

• Mes parents et mon frère et mes sœur pour leur soutien moral, leur encouragement et leur présence permanente à côté de moi.

• Mon encadreur Dr.Benaichouche noureddine pour son encouragement, son aide et son suivi pour terminer ce travail.

• Mon enseignants : H.Ayadi, R.Souilah, M.Benchaa, R.Lemdani, S.Rafaa, M.krimi, H.Bibi, A.Benterki, F.Bouleriah, B.Alleche, M.Leghmizi, A.Benkaci, R.Ait Amrane, W.Oukil,...,sans exceptions.

Resumé

Dans ce travail, nous prouvons l'existence et régularité d'une solution d'un problème $Au \geq f$ avec des conditions aux limites,tel que l'opérateur A est un opérateur non linéaire. La méthode de la résolution de notre problème est basée sur le théorème de Leray-Lions.

Mots clés

Espace de Sobolev, bornée, opérateur pseudo-monotone, coercitive, opérateur de Leray-Lions,

inéquation $Au \geq f$.

Abstract

In this work, we prove the existence and regularity of a solution of a problem $Au \geq f$ with boundary conditions, such that the operator A is a nonlinear operator. The method of solving our problem is based on the Leray-Lions theorem.

Key words

Sobolev space, bounded, operator pseudo-monotonie, coercive, Leray-Lions operator, inequality $Au \geq f$.

TABLE DES MATIÈRES

1 Outils Mathematiques **4**

1.1 Intégrations et théorèmes de convergence de Lebesgue. 4

1.2 Distributions 6

1.3 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ et les injections de Sobolev. 7

1.4 Quelques théorèmes de points fixes. 9

1.4.1 Théorème de Brouwer 9

1.4.2 Théorèmes de Schauder 9

2 Opérateurs monotones et inéquations variationnelles **11**

2.1 Opérateurs Bornés 11

2.2 Opérateurs monotones 12

2.3 Exemples sur les Opérateurs monotones 14

2.4 Opérateurs pseudo-monotone 17

2.5 Inequations variationnelles 20

2.6 Opérateurs de Leray-Lions 23

2.7 Applications sur les opérateurs de Leray-Lions 24

Bibliographie **40**

INTRODUCTION

Les mathématiques consistent d'abord en un langage, qui permet de transcrire des problèmes de nature quantitative : C'est la modélisation. Une fois cette transcription faite, des outils sont disponibles pour comprendre et résoudre les problèmes issus des phénomènes du monde réel qui utilise les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, etc.), ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des Équations Différentielles Ordinaires ou par des Équations aux Dérivées Partielles.

Les équations aux dérivées partielles (EDPs) interviennent aussi dans beaucoup d'autres domaines : en chimie pour modéliser les réactions, en économie pour étudier le comportement des marchés, en finance pour étudier les produits dérivés et en traitement d'images pour restaurer les dégradations.

Dans ce cadre on va étudier dans ce mémoire l'existence (et régularité) d'une solution sur un ensemble convexe C (fermer borné non vide) de l'inéquation variationnelle : trouver $u \in C$ $Au \geq f$ telle que A est un opérateur non linéaire.

Et parlés le problème de l'obstacle est un exemple classique de motivation de l'étude mathématique des inéquations variationnelles et des problèmes à frontière libre.

Ce mémoire est décompose en deux chapitre de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on donnera quelques outils mathématiques.

Dans le second chapitre consiste a traité les opérateurs de Leray-Lions et les solutions des inéquations variationnelles.

NOTATIONS

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes.

$\mathbb{R}^N$	espace euclidien de dimension N, N un nombre naturel non nul
Ω	partie ouverte de $\mathbb{R}^N$
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\langle .,. \rangle_{X,X'}$	crochet de dualité entre X et son dual.
∇u	$(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})^t$ gradient de u
$u_n \to u$	dénote que la suite $\{u_n\}$ converge vers u
$u_n \rightharpoonup u$	dénote que la suite $\{u_n\}$ converge faiblement vers u
$L^p(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable $\big(\int_\Omega \lvert u(x)\rvert^p\big)dx < +\infty$ tel que $1 \leqslant p < +\infty\}$
$\lvert u\rvert_p$	$\big(\int_\Omega \lvert u(x)\rvert^p dx\big)^{\frac{1}{p}} = \lvert u\rvert_{L^p}$
$L^\infty(\Omega)$	$\{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable $\exists M > 0,\ \lvert u(x)\rvert \leqslant M\ \ p,p\}$, la norme est noté $\lvert .\rvert_{L^\infty}$
$p.p$	presque par tout
p'	conjugué de Hölder de p :$p' = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $p' = \infty$ si $p = 1$
$\mathscr{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω à support compact dans Ω
$W^{1,p}(\Omega)$	$= \big\{u \in L^p(\Omega) \,\vert\, \nabla u \in L^p(\Omega)\big\}$
$W_0^{1,p}(\Omega)$	adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$
$W^{-1,p'}(\Omega)$	dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$
$H^1(\Omega)$	$W^{1,2}(\Omega)$
$H_0^1(\Omega)$	$W_0^{1,2}(\Omega)$
$H^{-1}(\Omega)$	dual de $H_0^1(\Omega)$

CHAPITRE 1

OUTILS MATHEMATIQUES

1.1 Intégrations et théorèmes de convergence de Lebesgue.

Définition 1.1.1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et p un nombre réel supérieur ou égale à 1. On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :*

$$L^p(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ \ mesurable\ et\ \ \Big(\int_\Omega |f|^p \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \Big\}$$

munit de la norme suivante $\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f|^p \Big)^{\frac{1}{p}}$

Théorème 1.1.1 (Inégalité de Hölder). *Soient $p, p' \in [1, +\infty]$ une paire d'exposants conjugués, c'est-à-dire tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, et soit $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$, ($L^{p'}(\Omega)$ le dual de $L^p(\Omega)$). Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et on a :*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Démonstration : (Voire [2])

Définition 1.1.2 *(**Inégalité de Young**) : Soient a et b deux réels positifs, et p et p' des réels strictement positifs vérifiant : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Alors on a*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

Démonstration : (Voir [7] page 18)

Théorème 1.1.2 (Convergence monotone de Lebesgue). *Soit f_n une suite croissante de fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Cette suite converge simplement vers une fonction mesurable f et l'on a*

$$\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f \quad quand \quad n \to +\infty.$$

$\overline{\mathbb{R}}_+$ désigne l'ensemble $[0, +\infty]$ muni de la topologie de l'ordre et les intégrales sont également à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Démonstration : Voir [2]

Théorème 1.1.3 (Lemme de Fatou). *Soit f_n une suite de fonctions mesurables de Ω à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On a*

$$\int_\Omega (\lim_{n\to+\infty} \inf f_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} \inf (\int_\Omega f_n).$$

Démonstration : Voire [2]

Théorème 1.1.4 (Convergence dominée de Lebesgue). *Soit f_n une suite de fonctions mesurables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que*

$$f_n(x) \to f(x) \quad quand \quad n \to \infty \ presque \ par \ tout \ dans \ \Omega$$

et telle qu'il existe une fonction g sur Ω à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, intégrable, telle que l'on ait

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \ presque \ par \ tout \ dans \ \Omega$$

Alors f est intégrable et l'on a

$$\int_\Omega |f - f_n| \, d\mu \to 0 \quad quand \quad n \to +\infty$$

En particulier,

$$\int_\Omega f_n \to \int_\Omega f \quad quand \quad n \to +\infty.$$

Démonstration : Voir [2].

Le théorème de convergence dominée existe aussi en version $L^p(\Omega)$.

Définition 1.1.3 *(Equi-intégrabilité) L'équi-intégrabilité, c'est dire que si la mesure d'un ensemble est assez petite l'intégrale de n'importe quelle fonction de ta suite sur cet ensemble est petite.*

E comparer avec la définition mathématique :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad \mu(E) \leqslant \eta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \int_E |f_n| \leqslant \varepsilon$$

telle que μ la mesure de Lebesgue

Théorème 1.1.5 ***(Vitali 1)*** *Soit $f_n, f \in L^p(\Omega)$ Suppose que*

$$f_n \to f \quad quand \quad n \to \infty \ presque\ par\ tout\ dans\ \Omega$$

$\lim_{mesE \to 0} \int_E |f_n|^p = 0$ *uniformément par rapport à n, si E est un sous-ensemble mesurable de Ω Alors :*

$$f_n \to f \quad quand \ \ n \to \infty \ dans\ L^p(\Omega).$$

Démonstration : Voir [5]

Théorème 1.1.6 ***(Vitali 2)*** *Soit f_n une suite de fonctions et f une fonction dans $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$. Alors $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si et seulement si*

1) $f_n \to f$ *en mesure*

2) $\lim_{mesE \to 0} \int_E |f_n|^p = 0.$

Démonstration : Voir [5]

1.2 Distributions

On note $\mathscr{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ a support compact dans Ω

Théorème 1.2.1 *l'espace $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$ c'est à dire $\overline{\mathscr{D}(\Omega)} = L^p(\Omega)$*

Proposition 1.2.1 *φ_n une suite de fonctions de $\mathscr{D}(\Omega)$ converge vers $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ si et seulement si*

i) il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que le support de φ_n soit inclus dans K pour tout n,

ii) Pour tout multi-indice α, $\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha \varphi$ uniformément sur K.

Proposition 1.2.2 *Une forme linéaire T sur $\mathscr{D}(\Omega)$ est une distribution si et seulement si pour tout compact K de Ω ,il existe un entier n et une constante C telles que pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ à support dans K*

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leqslant C \max_{|\alpha| \leqslant n, x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Proposition 1.2.3 *Une forme linéaire T sur $\mathscr{D}(\Omega)$ est une distribution si et seulement si, pour toute suite $\varphi_n \in \mathscr{D}(\Omega)$ qui converge vers φ au sens de $\mathscr{D}(\Omega)$, on a*

$$\langle T, \varphi_n \rangle \to \langle T, \varphi \rangle.$$

Proposition 1.2.4 *Une suite de distributions T_n converge vers une distribution T au sens de $\mathscr{D}'(\Omega)$ si et seulement si pour tout $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$, on a*

$$\langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle.$$

Proposition 1.2.5 *Soit T une distribution sur $\mathscr{D}'(\Omega)$. $D^\alpha T$ la dérivée d'ordre α d'une distribution T est définie par*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle.$$

Si $\alpha = 1$ la forme linéaire définie par :

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle$$

est une distribution. Si T se trouve être une fonction de classe C^1, alors ses dérivées partielles au sens des distributions coïncident avec ses dérivées partielles au sens classique. Enfin, l'application $T \mapsto \partial T / \partial x_i$ est continue de $\mathscr{D}'(\Omega)$ dans $\mathscr{D}'(\Omega)$

Démonstration : Voir [2]

Proposition 1.2.6 *Soit T une distribution sur Ω et $\nu \in C^\infty(\Omega)$. La forme linéaire définie par*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \quad \langle \nu T, \varphi \rangle = \langle T, \nu \varphi \rangle$$

est une distribution.

Démonstration : Voir [2]

1.3 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ et les injections de Sobolev.

Une bonne partie de l'analyse des équations aux dérivées partielles se déroule dans les espaces de Sobolev. Une autre partie se déroule dans les espaces de Hölder,ainsi que dans plusieurs autres espaces fonctionnels

plus sophistiqués dont nous ne parlerons pas ici.

Définition 1.3.1 *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est définie par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \ \mid \ \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \right\}$$

avec : $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})^t$ =grade u.

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}, p \in [1, +\infty[$$

équivalente à la norme suivante :

$$\left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \quad \text{si} \ \ 1 \leqslant p < +\infty$$

Définition 1.3.2 *L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est défini par la fermeture de l'espace $D(\Omega)$,*
(i.e) $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{D(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$. Autrement dit

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega), \ \ avec \ \ u = 0 \ \ sur \ \ \partial\Omega \right\}$$

Proposition 1.3.1 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de pour $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$ et séparable pour $1 \leqslant p < +\infty$.*

Théorème 1.3.1 *Soit $p \in [1, +\infty[$. Alors*

i) Si $1 < p < N$ on a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ avec $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, ou encore $p^* = \frac{Np}{d-N}$

ii) Si $p = N$, on a $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \in [1, +\infty[$

iii) Si $p > N$, on a $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\beta}(\bar{\Omega})$ où $\beta = 1 - \frac{N}{p}$.

Théorème 1.3.2 *Soit Ω ouvert borné, régulier de $\mathbb{R}^N$, et $p \in [1, +\infty[$. Alors les injections*

i) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $1 \leqslant q < p^*$, si $1 \leqslant p < N$,

ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec $1 \leqslant q < +\infty$, si $p = N$,

ii) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ *avec* $0 \leqslant \gamma < 1 - \frac{N}{p}$ *si* $p > N$

sont des injections compactes.

En particulier, l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ est compacte. On rappelle qu'on opérateur est dit être compact s'il transforme les ensembles bornés de l'espace de départ en ensembles relativement compacts de l'espace d'arrivée.

1.4 Quelques théorèmes de points fixes.

Si f est une application d'un ensemble E dans lui-même, on appelle point fixe de f tout élément x de E tel que $f(x) = x$.

Théorème 1.4.1 *Soit* (E, d) *un espace métrique complet,* $T : E \to E$ *une contraction stricte, i.e., telle qu'il existe une constante* $k < 1$ *telle que*

$$\forall x, y \in E, \quad d(T(x), T(y)) \leqslant K d(x, y)$$

Alors T *admet un point fixe unique* $x_0 = T(x_0) \in E$.

1.4.1 Théorème de Brouwer

Le ***théorème de Brouwer*** est le théorème de point fixe fondamentale en dimension finie.
On notera par $B(0, r)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^N : |x| < r\}$, *pour* $r > 0$.

Théorème 1.4.2 *(Théorème de Brouwer) Toute application de* $\overline{B}$ *dans* $\overline{B}$ *admet au moins un point fixe*

Théorème 1.4.3 . *Soit* C *un sous-ensemble convexe, fermé et borné (Compact) de* $\mathbb{R}^N$ *et soit* $f : C \to C$ *une fonction continue. Alors* f *admet un point fixe.*

1.4.2 Théorèmes de Schauder

Le théorème de point fixe de Schauder est une extension aux espace vectorielle normé de dimension infini du théorème de point fixe de Brouwer

Définition 1.4.1 *Une application* $T : X \to X$ *est complètement continue si elle est continue et si, pour chaque sous-ensemble borné* B *de* X, $\overline{T(B)}$ *est compact.*

Théorème 1.4.4 *Soit E espace vectorielle normé ,C un convexe fermé non vide de E et $T : E \to E$ application continue, si $T(C)$ est relativement compact (i.e : $\overline{T(C)}$ est compact) alors T admet un point fixe .*

Théorème 1.4.5 *Supposons que X est un espace de Banach. Soit K un sous-ensemble convexe compact de X invariant sous une application continue $F : K \subset X \to X$. Alors F a un point fixe dans K.*

Démonstration [2]

Théorème 1.4.6 *Soit F une application complètement continue et soit K un sous-ensemble convexe, borné, fermé et invariant de X. Alors F a un point fixe dans K.*

Démonstration [2]

Théorème 1.4.7 *Soit E un espace de Banach et T une application continue compacte de E dans E si : il existe $R \geq 0$ tel que $x = tT(x)$ avec $t \in [0, 1[$ implique $\|x\|_E \leq R$. Alors : T admet un point fixe.*

Démonstration [2]

Théorème 1.4.8 *Soit E un espace de Banach et T une application continue compacte de $[0, 1] \times E$ dans E si : $T(0, x) = 0$ et il existe $R \geq 0$ tel que $x = T(t, x)$ avec $t \in [0, 1]$ implique $\|x\|_E \leqslant R$. Alors : pour tout $t \in [0, 1]$, $T(t, .)$ admet un point fixe $x^*(t)$ qui dépend continûment de t .*

Démonstration [2]

Théorème 1.4.9 *Soit E un espace de Banach et T une application continue compacte de E dans E telle qu'il existe $R \geq 0$ tel que $T(\partial B(0, R)) \subset B(0, R)$. Alors T admet un point fixe.*

Démonstration [2]

CHAPITRE 2

OPÉRATEURS MONOTONES ET INÉQUATIONS VARIATIONNELLES

Un opérateur quasi-linéaire ne s'écrit pas toujours comme la différentielle d'une fonctionnelle du calcul des variations. La notion abstraite d'opérateur monotone,et plus généralement d'opérateur pseudo-monotone, permet d'aller plus loin que le calcul des variations dans le cas convexe. Les inéquations variationnelles apparaissent quant à elles dans de nombreux problèmes, notamment ceux qui font intervenir un obstacle.

2.1 Opérateurs Bornés

Définition 2.1.1 *Soit V et W deux espaces de Banach et soit $A : V \to W$ un opérateur.On dira que A est borné s'il envoie tout borné de V dans un borné de W; i.e*

$$\forall \rho > 0, \ \ \exists C_p > 0, \ \ \forall v \in V : \ \ \|v\|_V \leqslant \rho \Rightarrow \|Av\|_W \leqslant C_\rho.$$

Théorème 2.1.1 ***(Opérateur de superposition dans l'espace de Lebesgue*** $L^p(\Omega)$***)***

L'opérateur de superposition A est généré par l'application f de L^p dans $L^{p'}$ si seulement si il existe une

fonction $a \in L^{p'}$ et des constantes $b \geq 0, \delta > 0$, tels que

$$|f(s,u)| \leqslant a(s) + b|u|^{p/p'} \quad \textit{pour tout} \quad (s,p') \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

***Démonstration Voir**[8]*

2.2 Opérateurs monotones

Définition 2.2.1 *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E''.*

On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$

Démonstration voir [1].

Définition 2.2.2 *On dit que E espace métrique est séparable s'il existe un sous ensemble dénombrable est dense dans E.*

Démonstration voir [1].

Dans ce qui suit , V est un espace de Banach réflexif et séparable et A une application de V dans V' (en général non linéaire).

Définition 2.2.3 *on dit que :*

i) A est monotone si : $\forall u, v \in V, \ \langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq 0$

ii) A est strictement monotone si : $\langle A(u) - A(v), u - v\rangle > 0 \ \ \forall u, v \in V \ \ u \neq v$

iii) A est hémicontinue si pour tous $u, v \in V$,l'application $t \mapsto \langle A(u + tv), v\rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.2.4 *Un opérateur $A : V \to V'$ est dit hémicontinu au point u_∞ de V si pour toute suite $\{u_n\}$ convergeant vers u_∞,la suite $\{Au_n\}$ converge faiblement vers Au_∞ dans V'.En d'autres termes :*

$$\forall v \in V, \ \ \forall \{\lambda_n\} \subset R, \ \ \lambda_n \to 0, \ \ A(u_\infty + \lambda_n v) \rightharpoonup Au_\infty \ \ \textit{faiblement dans} \ \ V',$$

c.à.d :

$$\langle A(u_\infty + \lambda_n v), v\rangle = \langle Au_\infty, v\rangle. \tag{2.2}$$

Proposition 2.2.1 *Soit $A : V \longrightarrow V'$ un opérateur borné, hémicontinu et monotone,Alors,*

$$u_n \longrightarrow u \ \ \textit{dans} \, V \Longrightarrow Au_n \rightharpoonup Au \ \ \textit{dans} \ \ V'$$

On dira que A est continu de V fort dans V' faible.

Preuve.

Soit u_n une suite telle que $u_n \to u$ dans V fort. Cette suite est donc bornée, et comme A envoie les bornés dans les bornés, $A(u_n)$ reste dans un borné de V'. On extrait une sous-suite n' telle que $A(u_{n'}) \rightharpoonup \xi$ faiblement dans V' (car V' est réflexif). En raison de la monotonie, pour tout $v \in V$, on a

$$0 \leqslant \langle A(u_{n'}) - A(v), u_{n'} - v\rangle = \langle A(u_{n'}), u_{n'} - v\rangle - \langle A(v), u_{n'} - v\rangle. \tag{2.3}$$

Il est bien clair que $\langle A(v), u_{n'} - v\rangle \to \langle A(v), u - v\rangle$ Par ailleurs, Par ailleurs, comme $A(u_{n'})$ converge faiblement dans V' et $u_{n'}$ fortement dans V, leur crochet de dualité converge :

$$\langle A(u_{n'}), u_{n'} - v\rangle \longrightarrow \langle \xi, u - v\rangle$$

Par conséquent, on obtient à la limite :

$$\forall v \in V, \quad 0 \leqslant \langle \xi - A(v), u - v\rangle. \tag{2.4}$$

On va montrer que cette inégalité détermine en fait ξ en utilisant un procède caractéristique des opérateurs monotones et appelle astuce de Minty Soit $w \in V$ quelconque et $t \in \mathbb{R}_+^*$, Appliquant 2.4 à $v = u - tw$ et divisant l'inégalité obtenue par $t > 0$, on obtient

$$\langle \xi - A(u - tw), tw\rangle \geq 0. \tag{2.5}$$

On devise par t et tendre t vers 0. Comme A est hémicontinu, il vient

$$\forall w \in V, \quad \langle \xi - A(u), w\rangle \geq 0. \tag{2.6}$$

Cette inégalité est aussi vraie pour $-w$, donc en fait

$$\forall w \in V, \quad \langle \xi - A(u), w\rangle = 0. \tag{2.7}$$

soit $$A(u) = \xi.$$

On conclut par unicité de la limite faible des sous-suites extraites de la suite $A(u_n)$ et faiblement convergentes.

2.3 Exemples sur les Opérateurs monotones

Dans cette section, nous donnons quelques exemples l'opérateur monotones (et hémicontinue) dans le contexte des problèmes aux limites quasi-linéaires

Exemple 2.3.1 ***(Opérateurs monotones)***

L'opérateur p Laplacien (négatif) $-\Delta_p$ *monotone*

$$-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,p'}(\Omega)$$
$$\langle \Delta_p u, v\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega);W_0^{1,p}(\Omega)} := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx$$

Preuve :

On rappelle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \alpha > 0$:

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y)(x-y) \geq \begin{cases} \alpha|x-y|^p & \text{si } \ p \geq 2, \\ \alpha\frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} & \text{si } \ 1 < p < 2. \end{cases} \tag{2.8}$$

En fait, pour $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\begin{aligned} -\langle \Delta_p u - \Delta_p v, u - v\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega);W_0^{1,p}(\Omega)} &= \int_\Omega \big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\big)(\nabla u - \nabla v)dx \\ &\geq \int_\Omega \alpha|\nabla u - \nabla v|^p \ \ (p \geq 2) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Donc la monotonie du p-Laplacien.

Définition 2.3.1 *L'espace* $H^1(\Omega)$ *est un espace de Sobolev définie par :*

1. $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.
2. *L'espace* $H_0^1(\Omega)$ *définie par :* $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.
3. $H^{-1}(\Omega)$ *le dual de* $H_0^1(\Omega)$.

Exemple 2.3.2 ***(Opérateurs monotones)***

L'opérateur $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ *défini par* $Au = -\Delta u$ *est monotone*

Preuve

$H_0^1(\Omega)$ étant muni de la norme du gradient. En effet , pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$ On a :

$$\begin{aligned}\langle Au - Av, u - v\rangle &= \int_\Omega \nabla(u-v)\nabla(u-v) \\ &= \|u-v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

Donc A est monotone.

Exemple 2.3.3 *(**Opérateurs hémicontinue**)*

L'opérateur $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ défini par $Au = -\Delta u = -div(\nabla u)$ est hémicontinu.

Preuve :

En effet soient $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,On a

$$\begin{aligned}\langle A(u+\lambda v), w\rangle &= \int_\Omega \nabla(u+\lambda v).\nabla w \\ &= \int_\Omega \nabla u.\nabla w + \lambda \int_\Omega \nabla v.\nabla w \\ &= a + \lambda b\end{aligned}$$

ce qui montre que $\lambda \longrightarrow \langle A(u+\lambda v), w\rangle$ est continue.

Soit maintenant Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, p \in]1, +\infty[$ et $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ .On se donne une application $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ continue et monotone au sens où pour tout couple $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^N$,

$$(F(\lambda) - F(\mu)).(\lambda - \mu) \geq 0 \tag{2.9}$$

on désigne le produit scalaire euclidien usuel dans $\mathbb{R}^N$. On suppose que F satisfait la condition de croissance :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^N, \ \ |F(\lambda)| \leqslant C(1 + |\lambda|^{p-1}) \tag{2.10}$$

pour une certaine constante $C > 0$.

Proposition 2.3.1 *L'opérateur $A(u) = -div(F(\nabla u))$ est bien défini de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ est borné, hemicontinu et monotone.*

preuve :

Soit p' il exposant conjugué de p. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ alors $\nabla u \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et $F(\nabla u) \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

En effet

$$\begin{aligned} |F(\nabla u)|^{p'} &= |F(\nabla u)|^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leqslant C(1+|\nabla u|^{p-1})^{\frac{p}{p-1}} \\ &\leqslant C'(1+|\nabla u|^p) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Par conséquent, $-div(F(\nabla u)) \in W^{-1,p'}(\Omega)$ avec la dualité

$$\langle -div(F(\nabla u)), v\rangle_{W^{-1,p'};W_0^{1,p}} = \int_\Omega F(\nabla u).\nabla v dx; \quad pourtout \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.11}$$

De plus, si u est dans un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ alors ∇u est dans un borné de $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ et par le calcul précédent $F(\nabla u)$ est dans un borné de $L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Par conséquent, $A(u)$ reste dans un borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Par le théorème de Carathéodory, l'application $z \to F(z)$ est continue de $L^p(\Omega;\mathbb{R}^N)$ dans $L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ Par composition avec des applications linéaires continues, on en déduit que A est continu de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ donc à fortiori hemicontinu.

En fin, par monotonie de F , on a pour tout couple $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\langle A(u)-A(v), u-v\rangle = \int_\Omega (F(\nabla u)-F(\nabla v)).(\nabla u-\nabla v)dx \geq 0. \tag{2.12}$$

puisque l'intégrant est positive par monotonie de F sur $\mathbb{R}^N$. Donc l'opérateur A est monotone. Donc A est monotone.

Un exemple d'une telle fonction F est donné par

$$F(\lambda) = |\lambda|^{p-2}\lambda. \tag{2.13}$$

Ce qui permet de définir l'opérateur p Laplacien.

Démonstration voir [2]

2.4 Opérateurs pseudo-monotone

Définition 2.4.1 *Un opérateur* $A : V \longrightarrow V'$

i) on dit que A es pseudo-monotone (au sens 1) s'il est

$$pour\, tout \;\; u_n \rightharpoonup u \;\; dans \;\; V \;\; faible \;\; avec \;\; \limsup_{n\longrightarrow\infty}\langle Au_n, u_n - v\rangle \leq 0$$

- *on a :*

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty}\langle Au_n, u_n - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle \;\; \forall v \in V. \tag{2.14}$$

ii) On dit que A est pseudo-monotone (au sens 2) s'il est

$$pour\, tout \;\; u_n \rightharpoonup u \;\; dans \;\; V \;\; faible \;\; avec \;\; A(u_n) \rightharpoonup \xi \;\; dans \;\; V' \;\; faible \;\; et$$

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\langle Au_n, u_n\rangle \leq \langle \xi, u\rangle \tag{2.15}$$

- *on a :*

$$\xi = A(u) \;\; et \;\; \langle Au_n, u_n\rangle \to \langle Au, u\rangle. \tag{2.16}$$

Proposition 2.4.1 *Si A est borné, alors A est pseudo-monotone au sens 1 si seulement si il est pseudo-monotone au sens 2.*

Preuve : Supposons d'abord que A soit pseudo-monotone au sens 1 (mais pas nécessairement borné).

Soit u_n une suite telle que $u_n \rightharpoonup u$, faiblement convergence $A(u_n) \rightharpoonup \xi$ et

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\langle Au_n, u_n\rangle \leq \langle \xi, u\rangle \tag{2.17}$$

et on déduit que

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty}\langle Au_n, u_n - u\rangle = \limsup_{n\longrightarrow\infty}\langle Au_n, u_n\rangle - \limsup_{n\longrightarrow\infty}\langle Au_n, u - v\rangle \leq 0. \tag{2.18}$$

Donc, par pseudo-monotonie au sens 1,il vient que pour tout $v \in V$,

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty}\langle Au_n, u_n - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle, \tag{2.19}$$

d'où en développant le crochet de gauche

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty}\langle Au_n, u_n\rangle - \langle \xi, v\rangle \geq \langle Au, u-v\rangle. \tag{2.20}$$

Prenant $v = u$, on en déduit que $\liminf_{n\longrightarrow\infty}\langle Au_n, u_n\rangle \geq \langle \xi, v\rangle$, d'où

$$\langle Au_n, u_n\rangle \to \langle \xi, v\rangle \tag{2.21}$$

et en reportant dans l'inégalité ci-dessus

$$\langle \xi, u-v\rangle \geq \langle Au, u-v\rangle. \tag{2.22}$$

Prenant $v = u + w$, on en déduit que $\xi = A(u)$ et que A est pseudo-monotone au sens 2.

Supposons maintenant que A soit pseudo-monotone au sens 2 et borné. Soit u_n une suite telle que $u_n \rightharpoonup u$ et $\limsup_{n\to\infty}\langle A(u_n), u_n - u\rangle \leqslant 0$. Soit $v \in V$. Comme A est borné, on peut extraire une suite telle que

$$A(u_{n'}) \rightharpoonup \xi \ \text{ et } \ \langle A(u_{n'}), u_{n'} - v\rangle \to \liminf_{n\to\infty}\langle A(u_n), u_n - u\rangle. \tag{2.23}$$

Comme $\langle A(u_{n'}), u\rangle \rightharpoonup \langle \xi, u\rangle$, ona d'abord $\limsup_{n\to\infty}\langle A(u_{n'}), u_{n'}\rangle \leqslant \langle \xi, u\rangle$. Donc, par pseudo-monotonie au sens 2, il vient que $\xi = A(u)$ et $\langle A(u_{n'}), u_{n'}\rangle \to \langle A(u_n), u_n\rangle$ on voit donc que

$$\langle A(u_{n'}), u_{n'} - v\rangle \to \langle A(u_n), u_n - v\rangle \tag{2.24}$$

donc A est pseudo-monotone au sens 1.

Proposition 2.4.2 *Si $A : V \to V'$ est borné, hémicontinu et monotone, alors A est pseudo-monotone (au sens 1).*

Preuve :

a) Soit u_j une suite converge faiblement vers u dans V. Supposons que

$$\limsup_{j\to\infty}\langle A(u_j), u_j - u\rangle \leqslant 0, \tag{2.25}$$

si A est monotone on a ,

$$\limsup_{j\to\infty}\langle A(u_j), u_j - u\rangle \to 0, \tag{2.26}$$

En effet, la monotonie de A et la convergence faible de $\{u_j\}$ vers u implique que

$$\langle Au_j, u_j - u\rangle \geq \langle Au, u_j - u\rangle \ \text{ pour } \ j \to +\infty \tag{2.27}$$

et donc

$$0 \geq \limsup_{j\to+\infty}\langle Au_j, u_j - u\rangle \geq \liminf_{j\to+\infty}\langle Au_j, u_j - u\rangle \geq \limsup_{j\to+\infty}\langle Au, u_j - u\rangle = 0. \tag{2.28}$$

D'où (2.26)

b) pour $v \in V$ et $t \in]0,1[$, posons $w = (1-t)u + tv$ on a $\langle Au_j - Aw, u_j - w\rangle$ de sort que :

$$t\langle Au_j, u - v\rangle \geq -\langle Au_j, u_j - u\rangle + \langle Aw, u_j - u\rangle - t\langle Aw, v - u\rangle \tag{2.29}$$

d'où, grâce à (2.26), on obtient

$$t\liminf_{j\to\infty}\langle Au_j, u - v\rangle \geq -t\langle Aw, v - u\rangle \tag{2.30}$$

en divisant par t et tenant compte de (2.26), on obtient

$$\liminf_{j\to\infty}\langle Au_j, u_j - v\rangle \geq \langle Aw, v - u\rangle \tag{2.31}$$

$$w = (1-t)u + tv \ \ \forall t \in]0,1[, \tag{2.32}$$

en faisant tendre t vers 0 dans (2.31) et en utilisant l'hémicontinuité, en déduit

$$\liminf_{j\to\infty}\langle Au_j, u_j - v\rangle \geq \langle Au, v - u\rangle. \tag{2.33}$$

Ce qui signifie que A est pseudo-monotone au sens 1.

2.5 Inequations variationnelles

Les opérateurs monotones se prêtent bien à la résolution des inéquations variationnelles abstraites, dont nous donnerons des exemples concrets dans le contexte des problèmes aux limites non linéaires plus loin.

Théorème 2.5.1 *Soit $A : V \longrightarrow V'$ un opérateur borné, hémicontinu et monotone et soit C un convexe fermé borné non vide de V Alors, pour tout $f \in V'$, l'inéquation variationnelle :*

trouver $u \in C$ tel que :

$$\forall v \in C, \quad \langle A(u) - f, v - u \rangle \geq 0 \tag{2.34}$$

admet au moins une solution.

On utilise la méthode de Galerkin.

Lemme 2.5.1 *Il existe une famille dénombrable de convexes fermés $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ croissante, croissante, telle que chaque C_m est de dimension finie, inclus dans C et $\bigcup_{m=0}^{+\infty} C_m$ est dense dans C.*

Preuve : Grace espace V est séparable, alors il existe une famille dénombrable $(w_m)_{m\in\mathbb{N}}$ linéaire inde-pendent c.a.d $\overline{vect\{w_1, ..., w_n\}} = V$, on pose

$$\bigcup_{m=0}^{+\infty} V_m = vect\{w_1, ..., w_n\} \tag{2.35}$$

$$\overline{\bigcup_{m=0}^{+\infty} V_m} = V \tag{2.36}$$

et on pose :

$$C_m = C \cap V_m \subset C \cap V_{m+1} = C_{m+1} \text{ comme } C_m \text{ est croisante} \tag{2.37}$$

donc

$$\overline{\bigcup_{m=0}^{+\infty} C_m} = \overline{\bigcup_{m=0}^{+\infty} C \cap V_m} = C \cap \overline{\bigcup_{m=0}^{+\infty} V_m} = C \cap V = C. \tag{2.38}$$

Alors $\bigcup_{m=0}^{+\infty} C_m$ est dense dans C.

Lemme 2.5.2 *l'inéquation variationnelle : trouver $u_m \in C_m$ tel que*

$$\forall v \in C_m, \quad \langle A(u_m) - f, v - u_m \rangle \geq 0 \tag{2.39}$$

admet au moins une solution.

Preuve : On note $V_m = vect C_m$ l'espace vectoriel engendré par C_m. Il est de dimension finie et on le munit d'une structure euclidienne, dont on note le produit scalaire par $(.|.)$ par le théorème de Riesz dans V_m,

$$\forall g \in V', \quad \exists! g_m \in V_m, \quad \text{tel que :} \quad g(v) = \langle g_m, v \rangle, \quad \forall v \in V_m \tag{2.40}$$

il existe une application linéaire continue j_m de V' faible dans V_m telle que

$$\forall g \in V'. \quad \forall v \in V_m. \quad \langle g, v \rangle = \big(j_m g | v\big) \tag{2.41}$$

donc on a, C_m est un convexe fermé, borné, non vide de V_m pour tout m. La projection orthogonale sur C_m, notée P_m, on a :

$$\forall w \in C_m, \quad \exists P_m(v) \in C_m, \quad \big(v - P_m(v) | P_m(v) - w\big)_m \geq 0. \tag{2.42}$$

C'est une application continue de V_m dans C_m, non linéaire puisque C_m est borné. On définit alors une application $T_m : C_m \to C_m$ par :

$$\forall w \in C_m, \quad T_m(v) = P_m\big(v - j_m A(v) + j_m f\big). \tag{2.43}$$

Comme A est continue de V fort dans V' faible par le Lemme 2.5.1, on voit que T_m est continue comme composée d'applications continues. D'après le théorème de Brouwer, T_m admet au moins un point fixe $u_m \in C_m$. En particulier, d'après (2.42) et (2.43) on a pour tout $v \in C_m$,

$$(u_m - j_m A(um) + j_m f - T_m(u_m) | T_m(u_m) - v)_m \geq 0, \tag{2.44}$$

soit, comme u_m est un point fixe,

$$\big(f - A(u_m), u_m - v\rangle = \big(j_m f - j_m A(u_m) | u_m - v\big) \geq 0. \tag{2.45}$$

Donc le Lemme 2.5.2 est démontré.

Théorème 2.5.2 *Si A est strictement monotone alors la solution de l'inéquation variationnelle (2.34) est unique.*

Preuve :

Soient $u_1, u_2 \in C$ deux solutions. Pour tous $v_1, v_2 \in C$,

$$\langle A(u_1) - f, v_1 - u_1\rangle \geq 0 \ \text{ et } \ \langle A(u_2) - f, v_2 - u_2\rangle \geq 0 \tag{2.46}$$

On prend $v_1 = u_2$ et $v_2 = u_1$, d'où

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\rangle \leqslant 0. \tag{2.47}$$

Par conséquent, comme A est monotone

$$\langle A(u_1) - A(u_2), u_1 - u_2\rangle = 0 \tag{2.48}$$

d'où $u_1 = u_2$ par stricte monotonie.

Définition 2.5.1 *On dit que A est coercif (le cas d'un convexe C non borné) s'il existe $v_0 \in C$,*

($v_0 = 0$ si $C = V$) tel que

$$\lim_{\|v\|_V \to +\infty} \frac{\langle A(v), v - v_0\rangle}{\|v\|_V} = +\infty. \tag{2.49}$$

Théorème 2.5.3 *Soit $A : V \to V'$ un opérateur borné, hémicontinu, monotone et coercif et soit C un convexe fermé non vide de V. Alors, pour tout $f \in V'$, l'inéquation variationnelle (2.34) admet au moins une solution.*

preuve : On pose $C_R = \{v \in C; \|v\|_V \leqslant R\}$ pour $R > 0$. C'est un convexe fermé borné de V Grâce au Théorème 2.5.1 il existe alors au moins une solution $u_R \in C_R$ à l'inéquation. En particulier pour $v_0 \in C_R$, et donc

$$\langle A(u_R) - f, v_0 - u_R\rangle \geq 0, \tag{2.50}$$

et soit alors :

$$\langle A(u_R), u_R - v_0\rangle \leqslant \langle f, u_R - v_0\rangle \leqslant \|f\|_{V'}\big(\|u_R\|_V + \|v_0\|_V\big). \tag{2.51}$$

Maintenant montrons que u_R reste bornée dans V,On Divisant la dernière inégalité par $\|u_R\|_V$ (on suppose que non nul, sinon il n'y a rien à montrer), on obtient :

$$\frac{\langle A(u_R), u_R - v_0\rangle}{\|u_R\|_V} \leqslant \|f\|_{V'}\big(1 + \frac{\|v_0\|_V}{\|u_R\|_V}\big). \tag{2.52}$$

Supposons qu'il existe une suite $R_n \to +\infty$ telle que $\|u_{R_n}\|_V \to +\infty$. Alors on a $\|v_0\|_V/\|u_{R_n}\|_V \to 0$ et dernier l'inégalité contredit la coercivité de A. Donc il existe un constante positive M tel que : $\|u_R\|_V \leqslant M$, pour tout R, Alors u_R est borné.

On prend maintenant $R = M + 1$. alors montrons que u_R est solution de l'inéquation variationnelle (2.34). Pour tout $v \in C$ et tout $\lambda \in [0, 1]$, alors $\lambda v + (1 - \lambda)u_R \in C$. De plus,

$$\|\lambda v + (1 - \lambda)u_R \in C\|_V \leqslant \|\lambda v\|_V + (1 - \lambda)\|u_R\|_V \leqslant \lambda\|v\|_V + M. \tag{2.53}$$

En particulier, si on prend $0 < \lambda \leqslant 1/\|v\|_V$, on voit que $\lambda v + (1 - \lambda)u_R \in C_R$. Donc, par l'inéquation variationnelle sur C_R, On obtient :

$$\langle A(u_R) - f, \lambda v + (1 - \lambda)u_R - u_R\rangle \geq 0. \tag{2.54}$$

Soit

$$\lambda\langle A(u_R) - f, v - u_R\rangle \geq 0. \tag{2.55}$$

En divisant par λ, on obtient

$$\langle A(u_R) - f, v - u_R\rangle \geq 0. \tag{2.56}$$

Donc le résultat.

Corollaire 1 *Soit $A : V \to V'$un opérateur borné, hémicontinu, monotone et coercif. Alors A est surjectif.*

2.6 Opérateurs de Leray-Lions

On travaille dans les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et soit $p \in]1; +\infty[$ tel que a : $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une fonction carathéodory est vérifier que

a_1. a est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, continue par rapport à $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

a_2. Il existe $k \in L^{p'}(\Omega)$ et une constante C tels que :

$$\forall (x, s, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad |a(x, s, \xi)| \leqslant k(x) + C(|s|^{p-1} + |\xi|^{p-1}) \tag{2.57}$$

a_3. Pour x et s fixés, a est monotone par rapport à ξ,

$$\big[a(x,s,\xi)-a(x,s,\xi')\big][\xi-\xi'] \geq 0, \quad \xi,\xi' \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \xi \neq \xi' \tag{2.58}$$

a_4. Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$a(x,s,\xi).\xi \geq \alpha|\xi|^p, \quad \forall (x,s,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ \text{(ellipticité)}. \tag{2.59}$$

Théorème 2.6.1 *L'opérateur $A(u) = -div\Big(a(x,u,\nabla u)\Big)$ est borné, pseudo-monotone et coercif de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$.*

Cette famille l'opérateur contient ce qu'on appelle les opérateurs de Leray-Lions. Preuve : voir [2].

2.7 Applications sur les opérateurs de Leray-Lions

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et soit $p \in]1;+\infty[$ un nombre réel.

Considérons l'opérateur $A : V = W_0^{1,p}(\Omega) \to V' = W^{-1,p'}(\Omega)$ donné par :

$$A(u) = -\mathrm{div}\Big(\widehat{a}(x,\nabla u)\Big), \quad u \in V \tag{2.60}$$

avec les hypothèses suivantes sur $\widehat{a}$:

$\widehat{a}_1$). $\widehat{a} : \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est Carathéodory, rappelons que cela signifie que : Pour presque tout $x \in \Omega$, l'application $\xi \mapsto \widehat{a}(x,\xi)$ est continue (de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$) et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ l'application $x \in \Omega \mapsto \widehat{a}(x,\xi)$ est mesurable.

$\widehat{a}_2$). $\exists \alpha > 0$ telle que

$$\widehat{a}(x,\xi).\xi \geq \alpha\|\xi\|^p_{\mathbb{R}^N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \text{p.p en } x \in \Omega. \tag{2.61}$$

Le point est mis pour le produit scalaire dans $\mathbb{R}^N$. On dit que $\widehat{a}$ est coercive.

$\widehat{a}_3$). $\exists C > 0$ et une fonction $a_0 \in L^{p'}(\Omega)$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ positive, telles que :

$$\|\widehat{a}(x,\xi)\|_{\mathbb{R}^N} \leqslant C\Big\{\|\xi\|^{p-1}_{\mathbb{R}^N} + a_0(x)\Big\}, \forall \xi \in \mathbb{R}^N \ \text{ et p.p en } x \in \Omega. \tag{2.62}$$

Cette condition est dite de croissance.

$\widehat{a}_4$). $\widehat{a}$ est strictement monotone i.e :

$$\Big[\widehat{a}(x,\xi)-\widehat{a}(x,\xi')\Big].\Big[\xi-\xi'\Big]>0,\quad \forall \xi,\xi'\in\mathbb{R}^N,\ \xi\neq\xi'\ \text{ p.p en } x\in\Omega. \tag{2.63}$$

Exemple 2.7.1 *Sous les hypothèses $\widehat{a}_1-\widehat{a}_4$, pour tout $f\in W^{-1,p'}(\Omega)$, et on définie l'ensemble convexe C par : $C=\{v,\psi\in W_0^{1,p}(\Omega),\ \ v\geq\psi\}$. On prend $\psi=0$, alors le problème :*

$$\begin{cases} u\in C, & \\ -div\Big(\widehat{a}(x,\nabla u)\Big)\geq f, & \text{sur } \Omega \\ u\geq 0, & \text{sur } \Omega \end{cases} \tag{2.64}$$

admet au moins une solution.

Preuve :

Montrons que l'opérateur A est un opérateur de Leray-Lions (A bornée,monotone, hemicontinue et coercive). Soit $V=W_0^{1,p}(\Omega)$, muni de la norme du gradient, et considérons l'opérateur $A:V\to V'$ définie, pour $u,\varphi\in V$ par :

$$\langle Au,\varphi\rangle=\langle -\mathrm{div}\Big(\widehat{a}(x,\nabla u)\Big),\varphi\rangle=\int_\Omega \widehat{a}(x,\nabla u).\nabla\varphi \tag{2.65}$$

On a d'après (2.62) et l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} |\langle Au,\varphi\rangle| &\leqslant C\int_\Omega \Big\{|\nabla u|^{p-1}+a_0\Big\}.|\nabla\varphi| \\ &\leqslant C\int_\Omega \Big\{\|\nabla u\|^{p-1}_{L^{p'}(\Omega)}+\|a_0\|_{L^{p'}(\Omega)}\Big\}.\|\nabla\varphi\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

Ce qui montre que, pour tout $u\in V$, Au est bien définie et que A est borné.

A est hémicontinu. En effet soient $u,v,w\in V$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

Montrons que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $\lambda\mapsto\langle A(u+\lambda v),w\rangle=\displaystyle\int_\Omega \widehat{a}\Big(x,\nabla\big(u+\lambda v\big)\Big).\nabla w$ est continue. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$ fixé et soit $\{\lambda_n\}$ une suite de $\mathbb{R}$ convergeant vers λ. Posons

$$f_n(x)=\widehat{a}\Big(x,\nabla\big(u+\lambda_n v\big)\Big).\nabla w \tag{2.66}$$

Comme $\widehat{a}$ est une fonction de Carathéodory et $\lambda_n \to \lambda$ dans $\mathbb{R}$, on a :

$$\widehat{a}\Big(x, \nabla\big(u+\lambda_n v\big)\Big) \to \widehat{a}\Big(x, \nabla\big(u+\lambda v\big)\Big) \quad \text{p.p} \quad \text{dans} \quad \Omega \tag{2.67}$$

et comme

$$\begin{aligned}
\widehat{a}\Big(x, \nabla\big(u+\lambda_n v\big)\Big).\nabla w &\leqslant C\Big\{|\nabla u + \lambda_n \nabla v|^{p-1} + a_0\Big\}.|\nabla w| \\
&\leqslant C_p\Big\{|\nabla u|^{p-1} + |\lambda_n|^{p-1}|\nabla v|^{p-1} + a_0\Big\}.|\nabla w| \\
&\leqslant C\Big\{|\nabla u|^{p-1} + |\nabla v|^{p-1} + a_0\Big\}.|\nabla w|
\end{aligned}$$

avec $C_p = C\max\{1, 2^{p-2}\}$, puisque la suite $\{\lambda_n\}$ est bornée, il résulte alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty} \langle Au + \lambda_n v, w\rangle = \langle Au + \lambda v, w\rangle. \tag{2.68}$$

D'où l'hémicontinuité de A.

A est strictement monotone : soient $u, v \in V$, avec $u \neq v$, d'après $\widehat{a}_4$). on a :

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \int_\Omega \Big[\widehat{a}(x, \nabla u) - \widehat{a}(x, \nabla v)\Big].\Big[\nabla u - \nabla v\Big] > 0. \tag{2.69}$$

Montons que A est coercitif, comme $\psi \in C$ il suffit de montrer que :

$$\frac{\langle Av, v - \psi\rangle}{\|v\|_V} \to +\infty, \quad \text{quand} \quad \|v\|_V \to +\infty$$

$\langle Av, v - \psi\rangle = \langle Av, v\rangle - \langle Av, \psi\rangle$

d'après (2.61) on a :

$$\langle Av, v\rangle = \int_\Omega \widehat{a}(x, \nabla v).\nabla v \geq \alpha \int_\Omega |\nabla v|^p = \alpha \|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}. \tag{2.70}$$

De plus d'après l'inégalité de Hölder et (2.62) on a :

$$\begin{aligned}\langle Av,\psi\rangle=\int_\Omega \widehat{a}(x,\nabla v).\nabla\psi &\leqslant \Big(\int_\Omega |\widehat{a}(x,\nabla v)|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p'}}.\Big(\int_\Omega |\nabla\psi|^p_{W^{1,p}(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant \Big(C\int_\Omega \|\nabla v\|^{(p-1)p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)}+|a_0(x_0)|^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}.\|\psi\|_{L^p(\Omega)}\\ &\leqslant C\Big(\|\nabla v\|^p_{W^{-1,p'}(\Omega)}+\|a_0\|^{p'}_{W^{-1,p'}(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p'}}.\|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)}\\ &\leqslant C\|v\|^{p-1}.\|\psi\|+C' \ \text{ tel que } \ (C'=C\|a_0(x_0)\|.\|\psi\|_{W^{1,p}(\Omega)})\\ &\leqslant C_\eta.\|v\|^{(p-1)p'}_{W^{1,p}(\Omega)}+C(\eta).\|\psi\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \ \text{ (Inegalité de young) } \ \eta>0.\end{aligned}$$

Donc :

$$\langle Av,\psi\rangle\leqslant C_\eta.\|v\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}+C(\eta).\|\psi\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{2.71}$$

(2.70) et (2.71) et en divisant par $\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ on obtient :

$$\frac{\langle Av,v-\psi\rangle}{\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}}\geq\alpha\|v\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)}-C_\eta.\|v\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)}-C(\eta).\frac{\|\psi\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}}{\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}}. \tag{2.72}$$

On choisit η tel que $C_\eta=\frac{\alpha}{2}$ on obtient :

$$\frac{\langle Av,v-\psi\rangle}{\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}}\geq\frac{\alpha}{2}\|v\|^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega)}-C(\eta)\frac{\|\psi\|^p}{\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}}\longrightarrow+\infty \ \text{ quand } \ \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}\longrightarrow+\infty \ \text{ (car } \ p>1). \tag{2.73}$$

Alors, l'opérateur A borné, hémicontinu, monotone et coercif.

Donc le problème (2.64) admet au moins une solution. 

Remarque 2.7.1 *Si on prend $Au=-div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), 1<p<\infty$ A est associe a la fonction de carathéodory suivant $\widehat{a}(x,\xi)=|\xi|^{p-2}.\xi$ qui vérifier les conditions $\widehat{a}_1-\widehat{a}_4$.*

1. $\widehat{a}$ est vérifier $\widehat{a}_2$

$$\widehat{a}(x,\xi).\xi=|\xi|^{p-2}.|\xi|^2=|\xi|^p\geq\alpha|\xi|^p$$

2. $\widehat{a}$ est vérifier $\widehat{a}_3$

$$|\widehat{a}(x,\xi)|\leqslant|\xi|^{p-2}.|\xi|=C\|\xi|^{p-1}, \ \ C=1$$

3. $\widehat{a}$ est vérifier $\widehat{a}_4$, d'après (2.8) pour $p \geq 2$ on a

$$\Big[\widehat{a}(x,\xi) - \widehat{a}(x,\xi')\Big].\Big[\xi - \xi'\Big] = \Big[|\xi|^{p-2}.\xi - |\xi|^{p-2}.\xi'\Big]\Big[\xi - \xi'\Big] \geq 0.$$

Donc $\widehat{a}$ est vérifier les conditions $\widehat{a}_1 - \widehat{a}_4$ alors l'opérateur A est borné, monotone, hemicontinue et coercif alors est opérateur de Leray-Lions.

Exemple 2.7.2 *Soit A un opérateur de $W_0^{1,p}(\Omega)$dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ définie par :*

$$A(u) = -div\big(F(\nabla u)\big),$$

et soit C un ensemble convexe définie par soit $a, b \in [0,1]$ tel que $a \leqslant b$:

$$C = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad a \leqslant v \leqslant b, \}.$$

L'opérateur A est borné,hemicontinu et monotone, et coercif, alors pour tout $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$ le problème elliptique :

$$\begin{cases} u \in C, \\ -div\big(F(\nabla u)\big) \quad \geq \quad f, \quad sur \ \ \Omega. \\ \qquad\qquad\quad u \quad = \quad 0, \quad sur \ \ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.74}$$

admet au moins une solution.

Preuve :

L'opérateur $A(u) = -\text{div}(F(\nabla u))$ est bien défini de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p'}(\Omega)$ est borné, hemicontinu et monotone. (D'après le Proposition 2.3.1), et coercif car : comme $a \in C$ il suffit de montrer que :

$$\frac{\langle Av, v-a\rangle}{\|v\|_V} \to +\infty, \quad \text{quand} \quad \|v\|_V \to +\infty$$

ona $\langle A(v), v-a\rangle = \langle A(v), v\rangle - \langle A(v), a\rangle$.

On utilisant condition de coercitive de F on a qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que :

$$\langle A(v), v\rangle = \int_\Omega F(\nabla v).\nabla v \geq \alpha \int_\Omega \|\nabla v\|^p = \alpha \|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \tag{2.75}$$

et en utilisant l'inégalité de Hölder et la condition de croissance de F (2.10) on obtient :

$$\begin{aligned}\langle A(v),a\rangle = \int_\Omega F(\nabla v).\nabla a &\leqslant \Big(\int_\Omega |F(\nabla v)|^{p'}\Big)^{\frac{1}{p'}}.\Big(\int_\Omega |\nabla a|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\leqslant \Big(C\int_\Omega \big(1+|\nabla v|^{(p-1)p'}\big)\Big)^{\frac{1}{p'}}.\|a\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\\ &\leqslant C\|v\|^{p-1}.\|a\|+C' \ \text{ tel que } \ (C'=C+C\|a\|_{W_0^{1,p}(\Omega))})\\ &\leqslant C_\eta.\|v\|^{(p-1)p'}_{W_0^{1,p}(\Omega)}+C(\eta).\|a\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Donc :

$$\langle A(v),a\rangle \leqslant C_\eta.\|v\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}+C(\eta).\|a\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega))} \tag{2.76}$$

(2.75) et (2.76) et en divisant par $\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ on obtient :

$$\frac{\langle A(v),v-a\rangle}{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \geq \alpha\|v\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}-C_\eta.\|v\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega))}-C(\eta).\frac{\|a\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}}{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}}. \tag{2.77}$$

On choisit η tel que $C_\eta=\frac{\alpha}{2}$ on obtient :

$$\frac{\langle Av,v-\psi\rangle}{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \geq \frac{\alpha}{2}\|v\|^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)}-C(\eta).\frac{\|a\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}}{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} \longrightarrow +\infty \ \text{ quand } \ \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\longrightarrow+\infty \ \ (\text{car } \ p>1). \tag{2.78}$$

Donc A est bornée, monotone, hemicontinue et coercive alors est un opérateurs de Leray-Lions.

D'où le problème (2.74) admet au moins une solutions.

Exemple 2.7.3 • *Dans cet partie nous étudions l'existence et la régularité de solution du problème suivant :*

$$\begin{cases} -div\Big(a(x,u,\nabla u\Big) \geq f, & sur \ \ \Omega\\ u\geq 0, & sur \ \ \Omega\\ u\in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.79}$$

Telle que a est fonction carathéodory vérifier les conditions a_1-a_4 en travaillent pour $p=2$.

Dans cet exemple, on utilisé la methode de pénalisation pour résoudre le problème (2.79).

Théorème 2.7.1 *Soit $f\in L^m(\Omega)$, avec $\frac{2N}{N+2}\leqslant m<\frac{N}{2}$, alors il existe au moins une fonction $u\in H_0^1(\Omega)\cap L^q(\Omega)$ avec $q=\frac{Nm}{N-2m}$, qui est solution du problème (2.79).*

Estimations à priori

Soit f une fonction de $L^m(\Omega)$, telle que $m > 1$. On considère pour $n > 0$ le problème pénalisé suivant

$$\begin{cases} -div\big(a(x,u_n,\nabla u_n\big) - nu_n^- = f_n \\ u_n \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.80}$$

Telle que $u_n = u_n^+ - u_n^-$, et $f_n = T_n(f)$, (fonction de troncature) telle que :

$$T_n(f) = \begin{cases} n & \text{si } \ f \geq n \\ f & \text{si } \ -n < f < n \\ -n & \text{si } \ f \leqslant -n. \end{cases} \tag{2.81}$$

On dite que u_n est une solution faible de problème (2.80) si on a :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \big(a(x,u_n,\nabla u_n\big)\nabla v - n\int_\Omega u_n^- v = \int_\Omega f_n v \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u_n \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.82}$$

1/-Existence de solution du problème (2.80)

on va prend : $A = B + C$ tel que $\quad B(u) = -\text{div}\big(a(x,u,\nabla u)\big)$ et $\ C(u) = -nu^-$

• montrons que A est un opérateurs de Leray-Lions c'est à dire :

i/- A est bornée

ii/- A est pseudo-monotone

iii/- A est coercive

i/- Montrons que A est borné :

soient $u, v \in H_0^1(\Omega)$ et en utilisant la croissance de a et l'inégalité de Poincaré (I.P) on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle A(u), v\rangle| &= \Big|\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla v - n\int_\Omega u^- v\Big| \\ &\leqslant \Big|\int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla v\Big| + n\Big|\int_\Omega u^- v\Big| \\ &\leqslant \|a(x,u,\nabla u)\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + n\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant C(1 + \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)})\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + n\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant C\big(1 + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\big)\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + C'\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \big(C = \text{cste (I.P)}, C' = n\big) \\ &\leqslant C''\big(1 + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}\big)\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \big(C'' \text{ constante}\big). \end{aligned}$$

Donc :

$$\|A(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant C''\big(1+\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\big) \tag{2.83}$$

d'où l'opérateur A est borné.

ii/- La pseudo-monotonie de A

on suppose que $u_m \rightharpoonup u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ et $\limsup_m \langle Au_m, u_m - u\rangle \leq 0$

alors en montrant que

$$\liminf_{m\longrightarrow\infty}\langle Au_m, u_m - v\rangle \geq \langle Au, u-v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.84}$$

• Pour l'opérateur B on a

$$\begin{aligned}\langle B(u_m), u_m - v\rangle &= \int_\Omega a(x,u_m,\nabla u_m)(\nabla u_m - \nabla v)\\ &= \int_\Omega \Big(a(x,u_m,\nabla u_m) - a(x,u_m,\nabla u)\Big)(\nabla u_m - \nabla u)\\ &+ \int_\Omega a(x,u_m,\nabla u)(\nabla u_m - \nabla u) + \int_\Omega \Big(a(x,u_m,\nabla u_m)(\nabla u - \nabla v)\end{aligned} \tag{2.85}$$

et comme $\nabla u_m \rightharpoonup \nabla u$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$, alors $a(x,u_m,\nabla u) \to a(x,u,\nabla u)$ dans $L^2(\Omega)$

d'où $\int_\Omega a(x,u_m,\nabla u)(\nabla u_m - \nabla u) \to 0$

en montre que :

$$\liminf_m \langle B(u_m), u_m - v\rangle \geq \liminf_m \int_\Omega \Big(a(x,u_m,\nabla u_m)(\nabla u - \nabla v). \tag{2.86}$$

Comme $u_m^- \to u^-$ fortement dans $L^2(\Omega)$ ([5]) alors que $-nu_m^-(u_m - u) \to 0$ fortement dans $L^1(\Omega)$ en vertu de (2.84) on obtient que

$$\limsup_m \langle A(u_m), u_m - u\rangle = \limsup_m \int_\Omega a(x,u_m,\nabla u_m)(\nabla u_m - \nabla u) - n\lim_m \int_\Omega u_m^-(u_m - u) \leqslant 0 \tag{2.87}$$

et comme $u_m^- \to u^-$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$ (d'après le théorème de Nemitski [5]) donc

$$\limsup_m \langle B(u_m), u_m - u\rangle = \limsup_m \langle A(u_m), u_m - u\rangle \leqslant 0 \tag{2.88}$$

i.e :

$$\limsup_{m\to+\infty} \int_\Omega \Big[a(x,u_m,\nabla u_m) - a(x,u,\nabla u)\Big](\nabla u_m - \nabla u) \leqslant 0 \tag{2.89}$$

puisque $\int_\Omega a(x,u,\nabla u)(\nabla u_m - \nabla u) \to 0$ (car $a \in L^2(\Omega)$ et $u_m \to u$ faiblement dans $H_0^1(\Omega)$).

Et d'autre part on a :

$$\int_\Omega \Big(a(x,u_m,\nabla u_m)-a(x,u,\nabla u)\Big)(\nabla u_m-\nabla u)=\int_\Omega \Big(a(x,u_m,\nabla u_m)-a(x,u_m,\nabla u)\Big)(\nabla u_m-\nabla u)$$
$$+\int_\Omega \Big(a(x,u_m,\nabla u)-a(x,u,\nabla u)\Big)(\nabla u_m-\nabla u).$$

Par la monotonie de a on obtient

$$\int_\Omega \Big(a(x,u_m,\nabla u_m)-a(x,u,\nabla u)\Big)(\nabla u_m-\nabla u)\geq \int_\Omega \Big(a(x,u_m,\nabla u)-a(x,u,\nabla u)\Big)(\nabla u_m-\nabla u)\to 0 \quad (2.90)$$

Alors

$$\liminf_{m\to+\infty}\int_\Omega \Big[a(x,u_m,\nabla u_m)-a(x,u,\nabla u)\Big](\nabla u_m-\nabla u)\geq 0 \quad (2.91)$$

(2.89) et (2.91) on a :

$$\int_\Omega \Big(a(x,u_m,\nabla u_m)-a(x,u,\nabla u)\Big)(\nabla u_m-\nabla u)\longrightarrow 0 \ \text{ dans } \ L^2(\Omega). \quad (2.92)$$

D'où (d'après le lemme 5.9 [5]), alors $a(x,u_m,\nabla u_m)\rightharpoonup a(x,u,\nabla u)$ faiblement dans $L^2(\Omega)$.

En vertu de (2.85) on obtient

$$\liminf_m \int_\Omega \big(a(x,u_m,\nabla u_m)\big)(\nabla u_m-\nabla v)\geq \int_\Omega \big(a(x,u,\nabla u)\big)(\nabla u-\nabla v) \quad (2.93)$$

$$\liminf_m \int_\Omega \langle B(u_m),u_m-v\rangle \geq \int_\Omega \langle B(u),u-v\rangle \quad (2.94)$$

• $C(u)=-nu^-$.

Comme $u_m\to u$ fortement dans $L^2(\Omega)$ alors $C(u_m)\to C(u)$ fortement dans $L^2(\Omega)$ alors pour tout $v\in H_0^1(\Omega)$ on a

$$\lim_m \int_\Omega -nu_m^-(u_m-v)=-n\int_\Omega u^-(u-v)$$

d'où :

$$\lim_m \langle C(u_m),u_m-v\rangle=\langle C(u),u-v\rangle. \quad (2.95)$$

D'où C est pseudo-monotone,

de (2.94) et (2.95) on obtient :

$$\liminf_m \langle A(u_m), u_m - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle. \tag{2.96}$$

D'où l'opérateur A est pseudo-monotone.

ii/- Montrons que A est coercive : soit $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned}\langle A(u), u\rangle = \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla u - n\int_\Omega u^- u &= \int_\Omega a(x,u,\nabla u)\nabla u + \int_\Omega n(u^-)^2 \\ &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 = \alpha\|u\|^2.\end{aligned}$$

On diviser par $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ on obtient :

$$\frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq \alpha\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \longrightarrow +\infty \ \text{ quand } \ \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow +\infty. \tag{2.97}$$

Ainsi l'opérateur A est coercive.

Comme A est borné, pseudo-monotone et coercive alors A est un opérateur de Leray-Lions.

D'où le problème (2.80) admet au moins une solution.

• En passe maintenant a la régularité de la solution du problème approché (2.80)

Lemme 2.7.1 *Soit $f \in L^m(\Omega)$, avec $m > 1$ tel que*

$$\frac{2N}{N+2} \leqslant m < \frac{N}{2} \quad \textit{avec} \quad \frac{1}{M} - \frac{1}{N} = \frac{1}{2}$$

et u_n est solution du problème pénalisé (2.80) .

Alors la suite u_n est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ avec $q = \frac{Nm}{N-2m}$.

Preuve :

Pour $k \geq 0$, on considère la fonction

$$T_1(G_k(s)) = T_1(s - T_k(s)) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad s \geq k+1 \\ s-k & \text{si} \quad k \leqslant s < k+1 \\ 0 & \text{si} \quad |s| < k \\ s+k & \text{si} \quad -k-1 < s \leqslant -k \\ -1 & \text{si} \quad s < -k-1. \end{cases} \tag{2.98}$$

on utilisé la fonction $T_n(G_k(u_n))$ comme fonction test (car est une fonction dérivable sur $]-k, k+1[$) dans le problème pénalisé (2.80) alors on a :

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla(T_1(G_k(u_n))) - n\int_\Omega u_n^- T_1(G_k(u_n) = \int_\Omega f_n T_1(G_k(u_n)) \tag{2.99}$$

on définie A_k et B_k comme suite :

$A_k = \{x \in \Omega : |u_n| \geq k\}$; $B_k = \{x \in \Omega : k \leqslant |u_n| < k+1\}$. telle que :

$$\Omega = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k \text{ et } A_k = \bigcup_{s=k}^{+\infty} B_s \tag{2.100}$$

on a les résultats suivants :

$|T_1(G_k(u_n))| \leqslant 1$ sur A_k, $f_n = |T_n(f)| \leqslant f$, $\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla(T_1(G_k(u_n))) = \int_{B_k} a(x,u_n,\nabla u_n)\nabla u_n$

alors par simplification on obtient :

$$\alpha\int_{B_k}|\nabla u_n|^2 - n\int_\Omega u_n^- T_1(G_k(u_n)) \leqslant \int_{A_k}|f|. \tag{2.101}$$

On va montrer que le second terme du (2.101) est positif.

En effet, en utilisant le fait que $u_n^- = 0$ sur $\{x \in \Omega : u_n \geq k\}$

On a :

$$-n\int_\Omega u_n^- T_1(G_k(u_n) = -n\int_{\{u_n>k\}} u_n^- T_1(G_k(u_n)) - n\int_{\{-k-1\leqslant u_n<-k\}} u_n^-(u_n+k) + n\int_{\{u_n<-k-1\}} u_n^- \tag{2.102}$$

on trouve que :

$-n\int_{\{u_n>k\}} u_n^- T_1(G_k(u_n)) = 0$ car $u_n^- = 0$ sur $\{x \in \Omega : u_n \geq k\}$,

et $\int_{\{-k-1\leqslant u_n<-k\}} u_n^-(u_n+k) \leqslant 0$ alors : $-n\int_{\{-k-1\leqslant u_n<-k\}} u_n^-(u_n+k) \geq 0$

de plus $\int_{\{u_n<-k-1\}} u_n^- = 1 > 0$ car $u_n^- = max(-u_n, 0)$. De ces résultats, il est bien clair que :

$$-n\int_\Omega u_n^- T_1(G_k(u_n) \geq 0 \tag{2.103}$$

a partir de (2.101) et (2.103) on conclut :

$$\alpha\int_{B_k}|\nabla u_n|^2 \leqslant \int_{A_k}|f|. \tag{2.104}$$

Soit $\lambda \geq 1$. En utilisant (2.104) et l'inégalité de Sobolev on a :

$\Big(H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ tel que : $\frac{1}{2^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{N}$, $2^* = \frac{2N}{N-2}\Big)$.

$$\begin{aligned}\Big(\int_\Omega |u_n|^{2^*\lambda}\Big)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant C\int_\Omega |\nabla(|u_n|^\lambda)|^2 &= C\int_\Omega |\nabla u_n|^2|u_n|^{2(\lambda+1)}\\ &= C\sum_{k=0}^{+\infty}\int_{B_k}|\nabla u_n|^2|u_n|^{2(\lambda-1)}\\ &\leqslant C\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^{2(\lambda-1)}\int_{A_k}|f|\\ &\leqslant C\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^{2(\lambda-1)}\sum_{s=k}^{+\infty}\int_{B_s}|f|.\end{aligned}$$

On utilisant le Théorème de Fubini pour les sommes (pour changement l'ordre des sommations), alors

$$\begin{aligned}\Big(\int_\Omega |u_n|^{2^*\lambda}\Big)^{\frac{2}{2^*}} \leqslant C\sum_{s=0}^{+\infty}\int_{B_s}|f|\sum_{k=0}^{s}(k+1)^{2\lambda-2} &\leqslant C\sum_{s=0}^{+\infty}\int_{B_s}|f|(s+1)^{2\lambda-1}\\ &\leqslant C\sum_{s=0}^{+\infty}\int_{B_s}|f|(1+u_n)^{2\lambda-1}\\ &\leqslant \int_\Omega |f|(1+u_n)^{2\lambda-1}\\ &\leqslant C\Big(\int_\Omega |f|^m\Big)^{\frac{1}{m}}\Big(\int_\Omega (1+u_n)^{m'(2\lambda-1)}\Big)^{\frac{1}{m'}}\\ &\leqslant C_f\Big(\int_\Omega (1+u_n)^{m'(2\lambda-1)}\Big)^{\frac{1}{m'}}.\end{aligned}$$

On va choisir λ tel que : $2^*\lambda = m'(2\lambda-1) = q$, $2^* = \frac{2N}{N-2}$, $m' = \frac{m}{m-1}$, $\lambda = \frac{m(N-2)}{2(N-2m)}$,

$\lambda \geq 1 \Longleftrightarrow m < \frac{N}{2}$ et $m \geq \frac{2N}{N+2}$

$$q = 2^*\lambda = \frac{2N}{N-2}\times\frac{m(N-2)}{2(N-2m)} = \frac{Nm}{N-2m}. \tag{2.105}$$

Puisque $m < \frac{N}{2}$ alors $\frac{2}{2^*} > \frac{1}{m'}$, par conséquent, on obtient

$$\int_\Omega |u_n|^{2^*\lambda} = \int_\Omega |u_n|^q \leqslant C. \tag{2.106}$$

Alors : u_n est uniformément bornée dans $L^q(\Omega)$,

et

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2|u_n|^{2(\lambda-1)} \leqslant C. \tag{2.107}$$

Puisque $\lambda \geq 1$; l'inégalité précédente, implique :

$$\int_{\{u_n \geq 1\}} 1.|\nabla u_n|^2 \leqslant C \int_\Omega |\nabla u_n|^2 |u_n|^{2(\lambda-1)} \leqslant C \tag{2.108}$$

$$\alpha \int_{\{u_n < 1\}} |\nabla u_n|^2 \leqslant C \int_\Omega |f| \leqslant C \tag{2.109}$$

d'après (2.108) et (2.109) en déduit :

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \leqslant C. \tag{2.110}$$

Donc : u_n est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega)$.

D'où u_n est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$.

Preuve du Théorème 2.7.1

D'après le lemme 2.7.1 il existe une sous suite (u_n) notée aussi (u_n) qui converge faiblement vers u dans $H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ et elle converge p.p dans Ω vers la même limite.

On va montre que u est une solution du problème (2.79).

Premièrement on va montre que

$$u \geq 0 \ \ p.p \ \ \text{dans} \ \ \Omega. \tag{2.111}$$

Définissions la suite de fonction $\nu_m(s) = \frac{s(1+m|s|)}{1+|s|(1+m|s|)}$ qui converge simplement vers $sign(s)$.

En d'autre part, on a pour tout $m \in \mathbb{N}$, ν_m est continument différentiable avec $\nu_m(0) = 0$, $\nu_m^{'} \geq 0$ et $\sup_{s\in\mathbb{R}} \nu_m^{'}(s) \leqslant C$.

En prenant $\nu_m(u_n)$ comme fonction test au problème (2.80), on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u_n|^2 \nu_m^{'}(u_n) - n \int_\Omega u_n^- \nu_m(u_n) \leqslant \int_\Omega f_m \nu_m(u_n) \tag{2.112}$$

l'inégalité ci-dessus nous donne :

$$-n \int_\Omega u_n^- \nu_m(u_n) \leqslant \int_\Omega f_m \nu_m(u_n). \tag{2.113}$$

En appliquant le théorème de convergence monotone et convergence dominée, puis on passe a la limite quand $m \to +\infty$, on obtient

$$-n \int_\Omega u_n^- sign(u_n) \leqslant \|f\|_{L^1(\Omega)} = C \tag{2.114}$$

$$n\int_\Omega u_n^- = -n\int_\Omega u_n^- sign(u_n) \leqslant \|f\|_{L^1(\Omega)} = C \tag{2.115}$$

donc

$$\int_\Omega u_n^- = \int_\Omega |u_n^-| \leqslant \frac{\|f\|_{L^1(\Omega)}}{n} = \frac{C}{n} \tag{2.116}$$

donc nu_n^- est bornée dans $L^1(\Omega)$ et $u_n^- \to 0$ fortement dans $L^1(\Omega)$.

Comme $u_n \to u$ p.p alors $u^- = 0$ p.p dans Ω.

d'où la preuve de (2.111). D'autre part, on a la fonction $F_n = nu_n^- + f_n$, est bornée dans $L^1(\Omega)$ donc d'après un résultat (Lemme page 198, [6]), que $\left(\nabla u_n\right)_n$ admet une sous suite qui converge vers ∇u p.p dans Ω.

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$ avec $v \geq 0$ p.p dans Ω. Prenant $(u_n - v)$ comme fonction test dans le problème (2.80) on a

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n).\nabla(u_n - v) - n\int_\Omega u_n^-(u_n - v) = \int_\Omega f_n(u_n - v). \tag{2.117}$$

Le 2^{em} terme du 1^{er} membre est de signe positif, en effet

$$-n\int_\Omega u_n^-(u_n - v) = n\int_\Omega {u_n^-}^2 + n\int_\Omega u_n^- v \geq 0 \tag{2.118}$$

donc de (2.117) nous donne :

$$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n).\nabla u_n - \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n).\nabla v \leqslant \int_\Omega f_n(u_n - v). \tag{2.119}$$

Pour le 1^{er} terme du coté gauche de (2.119) on a par le lemme de Fatou

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u).\nabla u \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n).\nabla u_n. \tag{2.120}$$

Comme (u_n) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, alors d'après le condition de croissance (2.57) alors on a $a(x,u_n,\nabla u_n)$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et aussi u_n et ∇u_n convergent p.p vers $u, \nabla u$ respectivement dans Ω alors $a(x,u_n,\nabla u_n) \to a(x,u,\nabla u)$ p.p dans Ω donc d'après le théorème de Vitali on a

$$a(x,u_n,\nabla u_n) \to a(x,u,\nabla u) \quad \text{faiblement dans} \quad L^2(\Omega) \tag{2.121}$$

d'où $$\int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n).\nabla v \to \int_\Omega a(x,u,\nabla u).\nabla v.$$

Maintenant on passe a la limite du second membre de (2.119) on a

$$\int_\Omega f_n(u_n - v) \to \int_\Omega f_n(u - v). \tag{2.122}$$

En passant a la limite dans (2.119) on obtient

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u).\nabla u - \int_\Omega a(x,u,\nabla u).\nabla v \leqslant \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n).\nabla u_n$$
$$- \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega a(x,u_n,\nabla u_n).\nabla v \leqslant \lim_n \int_\Omega f_n(u_n - v) = \int_\Omega f_n(u - v)$$

d'où

$$\int_\Omega a(x,u,\nabla u).\nabla(u - v) \leqslant \int_\Omega f(u - v). \tag{2.123}$$

Par conséquent u est solution de problème unilatéral (2.79).

CONCLUSION

Dans ce travail nous utilisons le cadre théorique pour prouvons l'existence et régularité d'une solution d'un problème aux limites non linéaire $Au \geq f$ *. La méthode de la résolution s'appelle la méthode des opérateur Leray-lions.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Brézis.H. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications,* Massons, Paris (1987).117

[2] Hervé Le Dret.*Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires (Mathématiques et Applications t. 72)* Paris.France (2013).

[3] L.Boccardo - H. Brezis, *Some remarks on a class of elliptic equations with degenerate coercivity,* Preprint

[4] L. Boccardo - G.R. Cirmi, *Existence and uniqueness of solution to unilateral problems with L^1- data,* J. Conv. Analysis, to appear

[5] Lucio Boccardo and Gisella Croce, *Elliptic Partial Differential Equations Existence and Regularity of Distributional Solutions,* 2014 Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston

[6] T.Del Vecchio,Nonliear elliptic équations with measure data,Potential. Analysis 4(2)(1995),185-203

[7] related :math.univ-lyon1.fr/ chalenda/chap3-ar.pdf inegalité de young L^p

[8] J.APPEL and P.P.ZABREIKO, Non linear superposition operators, spring 1989.