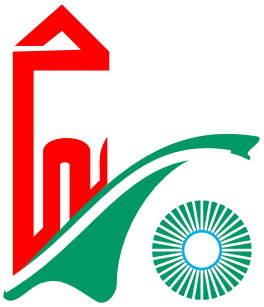
RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ YAHIA FARES DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

SAHRAOUI Nadia

SOME BICOMPLEX SEQUENCES AND THEIR PROPERTIES

Soutenue publiquement le 13.06.2023, devant le jury composé de

Présidente :	Dr. F. BOULARIAH	$M.A.A$	Université de Médéa
Promotrice :	Dr. N. R. AIT-AMRANE	$M.C.B$	Université de Médéa
Examinatrice :	Dr. G. GUETTAI	$M.C.B$	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2022-2023

Some bicomplex Sequences and their properties

Remerciements

Tout d'abord je remercie "**Allah**" le tout puissant, qui m'a donné la force et la patience d'accomplir ce présent travail.

Je tiens à remercier Dr. "**N. Rosa Ait-Amrane**" de m'avoir proposé ce sujet d'actualité qui est trés intéressant et de m'avoir guidé tout au long de la réalisation de ce mémoire avec beaucoup de patience, de sérieux et de compétence. Elle a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes.

Mes remerciements vont aussi aux membres de jury mesdames " **Fatiha Boulariah**" et "**Ghania Guettai**" qui ont accepté d'examiner mon travail.

Mes sincères remerciements vont à mes parents, car ce travail n'aurait pu aboutir sans leurs inépuisables soutien et encouragement.

De tout mon cœur, je remercie ma famille qui par leurs affection et bienveillance m'ont permis d'accomplir ce travail dans la sérénité.

Enfin je teints à remercier tous mes amis pour leurs compréhension et encouragement durant la réalisation de ce mémoire.

Dédicace

A mes très chers parents "**Sahraoui Elhadj** " et " **Bentaher Fatna**".

qui m'ont aidé durant toute ma vie, que Dieu les protègent.

A mes soeurs et mon frère

A ma nièce "**Mira-Maria** "

Résumé

Les Nombres Bicomplexes sont la généralisation multicomplexe d'ordre deux des nombres complexes. Lorsqu'ils sont munis de l'addition et de la multiplication usueles, ils forment une structure algébrique commutative. L'idée d'utiliser une algèbre de dimension supérieure à celle des nombres complexes pour élaborer des outils de dimension 4, afin de répondre à des besoin dans le domaine de la physique et de l'aéronotique.
Nous nous intéréssons à un type de suites particulier, trés utiles et qui donnent des résultats dans le domaines des mathématiques appliquées, les suites récurrentes linéaires, spécialement les suites de Fibonacci et leurs généralisations.

Abstract

The Bicomplex Numbers are the second-order multicomplex generalization of complex numbers. When they are equipped with standard addition and multiplication they form a commutative algebraic structure The idea of using a higher dimensional algebra than that of complex numbers to develop forth dimension tools, in order to respond to needs in physics and aeronotics fields. We are interested in a particular type of sequences, very usful and which gives results in applied mathematics filds, the linear recurrent sequences, specially the Fibonacci sequences and their generalizations.

Table des matières

Remerciement i

Dédicace ii

Résumé iii

Abstract iv

Notation vii

Introduction 1

1 Nombres bicomplexes 2

1.1 Nombres complexes 2
1.2 Nombres n-complexes 3
1.3 Nombres bicomplexes 3
1.4 Normes en nombres bicomplexes 5
1.5 Conjugaisons en nombres bicomplexes 7
1.6 Propriétés algébriques des nombres bicomplexes 8
1.7 Matrice bicomplexe 8
1.8 Polynôme bicomplexe 10

2 Suites récurrentes linéaires 12

2.1 Suites récurrentes 12
2.2 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants 13
2.3 Suites des nombres de Fibonacci 19
2.4 Suites des nombres de Lucas 22
2.5 Suite des nombres de Horadam 24

3 Suites bicomplexes de Fibonacci et de Lucas **26**

3.1 Suites bicomplexes de Fibonacci 26

3.2 Suites bicomplexes de Lucas 35

4 Suites bicomplexes de Horadam **42**

4.1 Formule de Binet de la suite bicomplexe de Horadam 43

4.2 Fonction génératrice de la suite bicomplexe de Horadam 44

Conclusion **47**

Notation

$\mathbb{N}$:= L'ensembles des nombres naturels.

$\mathbb{Z}$:= L'ensembles des entiers.

$\mathbb{R}$:= L'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{C}$:= L'ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{BC}$:= L'ensemble des nombres bicomplexes.

$\mathbb{K}[X]$:= Un corps commutatif des polynômes.

$A = [\zeta_{mn}]_{mn}$:= Matrice bicomplexe.

$\mathcal{M}_{k\times k}(\mathbb{K})$:= Matrice carrée d'ordre k.

P_k := Les polynômes caractéristiques associés aux suites récurrentes linéaires.

F_n := Les suites des nombres de Fibonacci.

L_n := Les suites des nombres de Lucas.

W_n := Les suites des nombres des Horadam.

$\mathbb{BC}_{F_n}$:= Les suites bicomplexes de Fibonacci.

$\mathbb{BC}_{L_n}$:= Les suites bicomplexes de Lucas.

$\mathbb{BC}_{W_n}$:= Les suites bicomplexes de Horadam.

Q_n := Les éléments de $\mathbb{BC}_{F_n}$.

K_n := Les éléments de $\mathbb{BC}_{L_n}$.

H_n := Les éléments de $\mathbb{BC}_{W_n}$.

$\otimes_{\mathbb{R}}$:= Le produit tenseur.

Introduction

En 1892, les nombres bicomplexes ont été présentés par Corrado Segre [21]. En 1991, G. Baley Prince dans son livre [16], a présenté des nombres bicomplexes basés sur les espaces et fonctions multi-complexes. Au cours des dernières années, les structures fractales de ces nombres ont été étudié par Rochon Dominic [18]. L'ensemble des nombres bicomplexes peut être exprimé dans la base $\{1, i, j, ij\}$. Il est considéré de degré 2 sur $\mathbb{C}$ et de degré 4 sur $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{BC}$ des nombres bicomplexes est défini par :

$$\mathbb{BC} := \{x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij \quad | \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\},$$

où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes d'unités imaginaires i, j avec $j \neq i$ sont des unités imaginaires qui commutent i,e. $ij = ji$, verifiants $i^2 = j^2 = -1$.

Ainsi, chaque nombre bicomplexe est présenté sous la forme de paires de nombres complexes typiques avec la structure supplémentaire de multiplication commutative, voir (Table1). Un ensemble de nombres bicomplexes $\mathbb{BC}$ est un espace vectoriel réel avec des opérations d'addition et de multiplication scalaire. L'espace vectoriel $\mathbb{BC}$ muni du produit bicomplexe est une algèbre associative. De plus, l'espace vectoriel avec les propriétés de la multiplication et le produit des nombres bicomplexes forment une algèbre commutative. Les éléments $e_1 = \frac{1+ij}{2}$ et $e_2 = \frac{1-ij}{2}$ appelés "orthogonal idempotent", qui simplifient considérablement l'algèbre des nombres bicomplexes, pour tout z de l'ensemble $\mathbb{BC}$:

$$\mathbb{BC} = \{z_1 + j z_2 \mid (z_1, z_2 \in \mathbb{C})\},$$

$$\mathbb{BC} = \{z_1 + j z_2 = (z_1 - i z_2) e_1 + (z_1 + i z_2) e_2\}.$$

Cette représentation est très utile car : addition, la multiplication et la division peuvent être faites terme à terme. Dans ce travail, nous rappelons quelques propriétés des nombres bicomplexes, en examinant leurs conjugués et leurs normes. Ensuite, nous rappelons des propriétés fondamentales

des suites de Fibonacci, Lucas et leur généralisation la suite de Horadam. Enfin, nous étudions l'ensemble des nombres bicomplexes à coefficient les suites de Fibonacci, suites de Lucas et suites de Horadam, nous donnons quelques propriétés de base. Comme nous obtenons des identités associées à ces suites, telles que les identités de Cassini, Catalan et D'Ocagne.

Notre travail est basé principalement sur l'article intitulé «On Bicomplex Fibonacci Numbers and Their Generalization» réalisé par l'auteur «Serpil Halici» publié dans « 346 accesses 3 citations Part of the studies in systems, decision and control book series (SSDC,volume 179) (2018)».

Ce mémoire est divisé en quatre chapitres.

Chapitre 1

Nombres bicomplexes

1.1 Nombres complexes

1.1.1 Rappel sur nombres complexes

On appelle corps des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, l'ensemble contenant $\mathbb{R}$. Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i vérifiant $i^2 = -1$.

Tout élément $z \in \mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $z = x + iy$ où x et y sont des réels.

L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni de l'addition et la multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que celles connues dans $\mathbb{R}$.

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z.

1.1.2 Nombre complexe conjugué

Soit $z = x + iy$, un nombre complexe avec x et y deux réels. Le conjugué de z est le nombre complexe définie par : $\bar{z} = x - iy$.

1.1.3 Propriétés des nombres complexes

(1) La somme, le produit, la différence et le quotient de deux nombres complexes est un nombre complexe.

(2) Si deux nombres complexes sont égaux, alors leurs parties réelle et imaginaire sont séparément égales.

(3) Si le nombre complexe est égal à zéro, alors ses parties réelles et imaginaires sont séparément égales à zéro.

$$x + iy = 0 \Longrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0.$$

(4) Si deux nombres complexes sont égaux, alors leurs conjugués sont également égaux.

1.1.4 Forme Polaire d'un Nombre Complexe

La forme polaire est une autre manière d'écrire les nombres complexes. Elle met à profit leur représentations polaires. Un nombre complexe z peut être représenté dans le plan de Gauss soit par un point, soit par un vecteur (le vecteur position de ce point). Ce point ou ce vecteur est entièrement caractérisé par ses coordonnées cartésiennes x et y

$$\begin{cases} x & \text{est la partie réelle de } z, \\ y & \text{est la partie imaginaire de } z. \end{cases}$$

Le plan de Gauss : est un plan muni d'un repère cartésien dont l'axe des abscisses est la droite réelle $\mathbb{R}$ et dont l'axe des ordonnées est la droite imaginaire $\mathbb{I}$.

1.2 Nombres n-complexes

Le nombre n-complexe est un nombre de forme $z = z_1 + i_n z_2$ où z_1 et z_2 sont des nombres $(n-1)-$complexes et $i_n i_p = i_p i_n, \ \ p = 1, 2, ..., n-1, \ i_p^2 = -1, \ i_n^2 = -1$. C'est un nombre de dimension 2^n. Ainsi à chaque étape nous avons une algèbre. Les espaces multicomplexes sont les généralisations de l'espace des nombres complexes. L'espace des nombres complexes est le premier d'une suite infinie d'espaces de nombres complexes, pour plus de détails voir[14].

1.3 Nombres bicomplexes

Définition 1.1 *L'espace $\mathbb{BC}$ des nombres bicomplexes est défini par :*

$$\mathbb{BC} := \{x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij \quad | \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}, \tag{1.1}$$

$\mathbb{C}$ est une extension de dimension 2 de l'espace les nombres complexes d'unité imaginaire i, j, avec $i \neq j$ sont des unités imaginaires qui commutent, i,e.

$$ij = ji, \ \ i^2 = j^2 = -1.$$

Les nombres bicomplexes sont des nombres complexes à coefficients complexes, ce qui explique le nom de bicomplexe. Dans ce qui suit nous essayons de souligner les similitudes entre les propriétés des nombres complexes et bicomplexes. Comme on pouvait s'y attendre, bien que les nombres

bicomplexes partagent certaines structures et propriétés des nombres complexes, il existe de nombreuses différences profondes et même frappantes entre ces deux types de nombres voir [14].
L'équation (1.1) forme ce que l'on appelle l'ensemble $\mathbb{BC}$ des nombres bicomplexes
on peut définir aussi comme :

$$\mathbb{BC} := \{z_1 + jz_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}, \tag{1.2}$$

Table1 : **Loi de multiplication des unités**

.	i	j	ij
i	-1	ij	-j
j	ij	-1	-i
ij	-j	-i	1

Nous avons l'espace linéaire réel à quatre dimensions $\mathbb{R}^4$ d'une base canonique

$$1 = (1;0;0;0);\ i = (0;1;0;0);\ j = (0;0;1;0);\ ij = (0;0;0;1);$$

avec les opérations arithmétiques suivantes :

$$z_1 = x_1.1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij$$

et

$$z_2 = y_1.1 + y_2 i + y_3 j + y_4 ij.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &:= (x_1 + y_1).1 + (x_2 + y_2)i + (x_3 + y_3)ij + (x_4 + y_4)ij, \\ z_1.z_2 &:= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4) + (x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 - x_4y_3)i \\ &\quad + (x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 - x_4y_2)j + (x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1)ij, \end{aligned}$$

avec :

$$\left(\frac{1+ij}{2}\right)^2 = \frac{1+ij}{2}.$$

Pour plus d'informations veuillez voir [22].

Définition 1.2 *Le conjugué d'un nombre bicomplexe z par rapport à i*

$$\bar{z}_i := \bar{z}_1 + \bar{z}_2 i$$

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}(i).$$

Définition 1.3 *Le conjugué d'un nombre bicomplexe z par rapport à j*

$$\bar{z}_j := z_1 - z_2 j$$

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}(j).$$

Définition 1.4 *Le conjugué d'un nombre bicomplexe z par rapport à ij, $\bar{z}_{ij}$ est un composition de deux conjugaisons et est définie par*

$$\bar{z}_{ij} := \bar{z}_1 - \bar{z}_2 j$$

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}(ij).$$

où $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ sont les conjugaisons en nombres z_1 et z_2.

1.4 Normes en nombres bicomplexes

Pour $N_i(z)$ on peut prendre $z = 1 + ij$ et calculer la norme.

$$N_i(1 + ij) = (1 + ij)(1 - ij) = 1^2 - (ij)^2 = 0.$$

Les nombres bicomplexes ont trois convolutions et normes différentes. Pour tout nombre bicomplexe z ces involutions sont les suivantes :

$$z = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij,$$
$$\bar{z}_i = x_1 - x_2 i + x_3 j - x_4 ij,$$
$$\bar{z}_j = x_1 + x_2 i - x_3 j - x_4 ij,$$
$$\bar{z}_{ij} = x_1 - x_2 i - x_3 j + x_4 ij.$$

Les normes découlant des définitions des convolutions sont les suivantes :

$$N_i(z) = z\bar{z}_i = (x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij)(x_1 - x_2 i + x_3 j - x_4 ij),$$
$$N_j(z) = z\bar{z}_j = (x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij)(x_1 + x_2 i - x_3 j - x_4 ij),$$
$$N_{ij}(z) = z\bar{z}_{ij} = (x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 ij)(x_1 - x_2 i - x_3 j + x_4 ij).$$

Remarque 1.5 *Notons que toutes ces normes sont isotropes .*
***isotropes** : présence des mêmes propriétés dans toutes les directions.*

Pour plus de détails, nous réferons le lecteur à voir [8].

Bien que les nombres bicomplexes soient une généralisation des nombres réels de dimension quatre, ceux-ci forment néanmoins une structure algébrique complètement différente autres généralisation des réels de dimension quatre bien connue, les quaternions. En effet, les quaternions forment un anneau non commutatif, tandis que les nombres bicomplexes forment un anneau commutatif.

Définition 1.6 *Le corps des quaternions est défini comme :*

$$q := \{x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \qquad | x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\},$$

telque :

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1.$$

Définition 1.7

$$e_1 = \frac{1+ij}{2} \ \textit{et} \ \ e_2 = \frac{1-ij}{2}.$$

Les éléments e_1 et e_2 sont des nombres bicomplexes qui simplifient considérablement l'algèbre des nombres bicomplexes, ils ont les propriétés suivantes :

$$e_1^2 = e_1; \ \ e_2^2 = e_2; \ \ e_1 + e_2 = 1; \ \ e_1.e_2 = e_2.e_1 = 0,$$

grace à la dernière propriété e_1 et e_2, appelée aussi d'idempotents orthogonaux, tout élément z de $\mathbb{BC}$ peut être exprimé en fonction des éléments e_1 et e_2.

La relation (1.2) donne :

$$z = z_1 + jz_2 = (z_1 - iz_2)e_1 + (z_1 + iz_2)e_2, \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \tag{1.3}$$

qui dite la représentation idempotente de l'élément z.

Aussi, z_1, z_2 sont appelés coefficients idempotents.

Pour plus de détails voir [25].

Les propriétés de e_1, e_2 garantissent que la décomposition est unique.

Soit P_1, P_2 :

$$P_1 : z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC} \longmapsto (z_1 - z_2 i) \in \mathbb{C}(i),$$

$$P_2 : z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC} \longmapsto (z_1 + z_2 i) \in \mathbb{C}(i),$$

qui définissent une paire de projections mutuellement complémentaires.

On a

$$(P_1)^2 = P_1 \ ; \ (P_2)^2 = P_2,$$

avec

$$P_1 e_1 + P_2 e_2 = Id,$$

où Id étant l'opérateur d'identité. Ils ont plusieurs propriétés remarquables :
soit $z_1, z_2 \in \mathbb{BC}$

$$P_1(z_1 + z_2) = P_1(z_1) + P_1(z_2),$$
$$P_2(z_1 + z_2) = P_2(z_1) + P_2(z_2),$$
$$P_1(z_1.z_2) = P_1(z_1) \ . \ P_1(z_2),$$
$$P_2(z_1.z_2) = P_2(z_1) \ . \ P_2(z_2).$$

1.5 Conjugaisons en nombres bicomplexes

Le conjugué d'un nombre complexe z est le nombre complexe formé de la même partie réelle que z et de la partie imaginaire opposée, alors que dans les nombres bicomplexes, les conjugaisons formés à partir des différentes parties imaginaires d'où on s'attend aux moins deux conjugaisons sur $\mathbb{BC}$, soit :

$$\beta_1 = (z_1 - iz_2) \qquad et \qquad \beta_2 = (z_1 + iz_2).$$

Selon les 3 convolution possible on peut définir les différents conjugaisons de z avec :

$\bar{\beta}_1$ est le conjugué de nombre bicomplexe β_1.

$\bar{\beta}_2$ est le conjugué de nombre bicomplexe β_2.

Définition 1.8 (La Conjugaison Bicomplexe par rapport à i) *D'après l'équation* (1.3) *:* $\bar{z}_i$ *est déterminée par la formule :*

$$\bar{z}_i = \bar{\beta}_2 e_1 + \bar{\beta}_1 e_2,$$

Définition 1.9 (La conjugaison bicomplexe par rapport à j) *D'après l'équation* (1.3) *:* $\bar{z}_j$ *est déterminée par la formule :*

$$\bar{z}_j = \beta_2 e_1 + \beta_1 e_2,$$

Définition 1.10 (La conjugaison bicomplexe par rapport à ij) *D'après l'équation* (1.3) *:* $\bar{z}_{ij}$ *est déterminée par la formule :*

$$\bar{z}_{ij} = \bar{\beta}_1 e_1 + \bar{\beta}_2 e_2.$$

1.6 Propriétés algébriques des nombres bicomplexes

- $\mathbb{BC} := \{z_1 + jz_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$, a une multiplication associative, distributive et commutative par la règle :

$$(z_1 + jz_2)(z_3 + jz_4) = (z_1z_3 - z_2z_4) + j(z_1z_4 - z_2z_3).$$

- $z_1 + jz_2 = z_3 + jz_4 \Longleftrightarrow z_1 = z_3$ et $z_2 = z_4$,

  $(z_1 + jz_2) + (z_3 + jz_4) = (z_1 + z_3) + j(z_2 + z_4)$.

  En utilisant la définition (1.1) et les relations entre i, j et ij. On a pour tout $z \in \mathbb{BC}$:

- $z = (x_1 + x_2i) + j(x_3 + x_4i) := z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC} = \mathbb{C}_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_j$

  $z_1 = x_1 + x_2i$; $z_2 = x_3 + x_4i \in \mathbb{C}_i$,

- $z = (x_1 + x_3j) + i(x_2 + x_4j) := z_1 + iz_2 \in \mathbb{BC} = \mathbb{C}_j \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_i$

  $z_1 = x_1 + x_3j$; $z_2 = x_2 + x_4j \in \mathbb{C}_j$,

- $z = (x_1 + x_4ij) + i(x_2 - x_3ij) := z_1 + iz_2 \in \mathbb{BC} = \mathbb{C}_{ij} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_i$

  $z_1 = x_1 + x_4ij$; $z_2 = x_2 - x_3ij \in \mathbb{C}_{ij}$,

- $z = (x_1 + x_4ij) + j(x_3 - x_2ij) := z_1 + jz_2 \in \mathbb{BC} = \mathbb{C}_{ij} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_j$

  $z_1 = x_1 + x_4ij$; $z_2 = x_3 - x_2ij \in \mathbb{C}_{ij}$,

- $z = (x_1 + x_2i) + ij(x_4 - x_3i) := z_1 + ijz_2 \in \mathbb{BC} = \mathbb{C}_i \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_{ij}$

  $z_1 = x_1 + x_2i$; $z_2 = x_4 - x_3i \in \mathbb{C}_i$,

- $z = (x_1 + x_3j) + ij(x_4 - x_2j) := z_1 + ijz_2 \in \mathbb{BC} = \mathbb{C}_j \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}_{ij}$

  $z_1 = x_1 + x_3j$; $z_2 = x_4 - x_2j \in \mathbb{C}_j$,

$\mathbb{C}_i = \{z_1 + j0\} \in \mathbb{BC}$, $\quad \mathbb{C}_j = \{z_1 + jz_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$, $\quad \mathbb{C}_{ij} = \{z_1 + ijz_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$.

$\otimes_{\mathbb{R}}$:= le produit tenseur.

Pour plus de détails voir [19].

1.7 Matrice bicomplexe

Définition 1.11 *Soit $A = [\zeta_{mn}]_{mn}$, une matrice bicomplexe, c'est-à-dire une matrice ayant comme éléments des nombres bicomplexes :*

$$A = \begin{bmatrix} \zeta_{11} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{1m} & \cdots & \zeta_{mn} \end{bmatrix}$$

où $\zeta_{pq} \in \mathbb{BC}, 1 \leq p \leq m,$ et $1 \leq q \leq n,$

$$A = \begin{bmatrix} z_{11}+jw_{11} & z_{12}+jw_{12} & \cdots & \cdots & z_{1n}+jw_{1n} \\ z_{21}+jw_{21} & z_{22}+jw_{22} & \cdots & \cdots & z_{2n}+jw_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{m1}+jw_{m1} & z_{m2}+jw_{m2} & \cdots & \cdots & z_{mn}+jw_{mn} \end{bmatrix},$$

on peut la décomposer dans l'espace comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & \cdots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & \cdots & z_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{m1} & z_{m2} & \cdots & \cdots & z_{mn} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & \cdots & w_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w_{m1} & w_{m2} & \cdots & \cdots & w_{mn} \end{bmatrix}$$

où z_{nm} et $w_{nm} \in \mathbb{C},$

$$A = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix}$$

$$+j \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} + ij \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & \cdots & v_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix}.$$

Avec x_{mn}, y_{mn}, u_{mn} et $v_{mn} \in \mathbb{R}$ et $z_{pq} = x_{pq} + iy_{pq}$ et $w_{pq} = u_{pq} + iv_{pq}.$

Toute matrice bicomplexe $A = [\zeta_{mn}]_{m \times n}$ peut être exprimée d'une maniére unique comme :

$$\mathcal{A}_1 e_1 + \mathcal{A}_2 e_2,$$

où

$$\mathcal{A}_1 = [\zeta_{1mn}]$$

et

$$\mathcal{A}_2 = [\zeta_{2mn}].$$

Pour plud de détails voir [3].

1.8 Polynôme bicomplexe

Définition 1.12 *Le polynôme de la forme.*

$$P(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \zeta^k,$$

où $\alpha_k, \zeta^k \in \mathbb{BC}$ *est appelé polynôme bicomplexe en* $\mathbb{BC}$.

On dit que ζ_0 *est un zéro de polynôme bicomplexe* $P(\zeta)$ *si :*

$$P(\zeta_0) = 0 \qquad \textit{pour } \zeta_0.$$

1.8.1 Théorème fondamental de l'algèbre bicomplexe

Théorème 1.13 *Un polynôme bicomplexe de degré* n *non singulier à coefficient directeur a exactement* $2n$ *racines comptées avec leurs multiplicités. On peut voir [3] pour plus de détails.*

Démonstration. Soit $P_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \zeta^k$, $\alpha_n \neq 0$ est un polynôme de degré n si :

$$\alpha_k = \alpha_{1_k} e_1 + \alpha_{2_k} e_2, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Les racines du polynôme $P_n(\zeta)$ seront donc les solutions de l'équation $P_n(\zeta) = 0$,
de manière équivalente de l'équation

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \zeta^k = 0.$$

L'équation idempotente est :

$$P_n(\zeta) = P_{1_n}(\zeta_1) e_1 + P_{2_n}(\zeta_2) e_2,$$

avec

$$P_{1_n}(\zeta_1) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{1_k} \zeta_1^k$$

et

$$P_{2_n}(\zeta_2) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{2_k} \zeta_2^k.$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{1_k} \zeta_1^k \; e_1 + \sum_{k=0}^{n} \alpha_{2_k} \zeta_2^k \; e_2 = 0.$$

Comme e_1 et e_2 sont linéairement indépendants par rapport aux coefficients complexes, alors

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{1_k} \zeta_1^k = \alpha_{1_n} (\zeta_1)^n + \alpha_{1_{n-1}} (\zeta_1)^{n-1} + \ldots + \alpha_{1_1} (\zeta_1) + \alpha_{1_0} = 0 \tag{1.4}$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{2_k} \zeta_2^k = \alpha_{2_n}(\zeta_2)^n + \alpha_{2_{n-1}}(\zeta_2)^{n-1} + \ldots + \alpha_{2_1}(\zeta_2) + \alpha_{2_0} = 0. \tag{1.5}$$

Comme $\alpha_n \neq 0$ alors $\alpha_{1_n} \neq 0$ et $\alpha_{2_n} \neq 0$. Ainsi les polynômes en (1.4) et (1.5) sont de degré n. Par le théorème fondamental de l'algèbre complexe, ils ont précisément n racines chacune. ∎

Théorème 1.14 *Le théorème fondamental de l'algèbre, théorème des équations prouvé par* ***Carl Friedrich Gauss*** *en* 1799. *Il indique que chaque équation polynomiale de degré n avec des coefficients de nombres complexes a n racines, ou solutions dans les nombres complexes. Les racines ont parfois une multiplicité plus grande que zéro.*

$$\forall P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, \qquad \exists\ \alpha \textit{ telque} \qquad P(\alpha) = 0$$

Pour plus de détails voir [2].

Démonstration. pour la démonstration voir [2]. ∎

Remarque 1.15 *D'après les propriétés des unités e_1 et e_2, les calculs des nombres bicomplexes sont devenus plus faciles, où lieu de fait les calculs en dimension 4 on fait ça en dimension 2. D'autre part d'aprèsles propriétés algébrique des nombres bicomplexes on a la libertine de choisir la forme de z. Le résulta et la forme générale de nôtre nombre bicomplexe reste vraie.*

À travers la base à laquelle appartient le nombre z, on remarque quelques changements arithmétiques mais ces changements sont toujours cachés derrière la méthode de calcul que nous utilisons à laide de e_1 et e_2, les résultats restent toujours vrais parceque i et j ont les mêmes propriétés chacun dans sa base. À partir de cette simplification de calculs les unités e_1 et e_2 sont très importantes dans l'algèbre commutative des nombres bicomplexes.

Chapitre 2

Suites récurrentes linéaires

2.1 Suites récurrentes

Définition 2.1 *Une suite est un ensemble E d'éléments indexés par les entiers naturels. Elle peut-être assimilée à une application de $\mathbb{N}$ dans E. Les relations de récurrences sont des règles de définition de suites d'éléments : chaque élément étant défini en fonction des précédents.*

Remarque 2.2 *Pour construire une telle suite, il faut donc :*
1. Une série de valeurs de départ (suffisamment pour initialiser la suite) appelées conditions initiales.
2. Une relation permettant de calculer chaque terme en fonction des précédents, appelée relation de récurrence de la suite.

Formellement, on a $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n,\ u_{n-1},\ \cdots), \\ u_0,\ u_1,\ \cdots \text{ conditions initiales.} \end{cases}$$

Par ailleurs, l'ordre d'une suite récurrente donnée est le nombre de termes nécessaires au calcul d'un terme supplémentaire. Cet ordre correspond également au nombre de conditions initiales nécessaire à l'initialisation de la suite.

Exemple 2.3 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par :*

$$\begin{cases} u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n, & n \geq 0, \\ u_0 = 1, u_1 = 3, \end{cases}$$

alors : $u_2 = 3u_1 - 2u_0 = 7,$ $u_3 = 3u_2 - 2u_1 = 15,$ $u_4 = 3u_3 - 2u_2 = 31.$

2.2 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

Les suites récurrentes linéaires à coefficients constants sont les suites récurrentes $(u_n)_{n\geq 0}$ dont la relation de récurrence est linéaire en (u_i).

$$u_n = \sum_{i\leq k} a_i u_{n-i} \qquad \text{avec : } n, i, k \in \mathbb{N} \text{ et } i \leq k \leq n.$$

2.2.1 Suites récurrentes linéaires d'ordre 1

Une suite récurrente linéaire d'ordre 1 est une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant :

$$u_{n+1} = au_n + b,$$

pour $a \neq 0,\ b \in \mathbb{R}$ donnés.

On remarque que les suites arithmétiques et géométriques ne sont qu'un cas particulier de ce type de suites pour $a = 1$, on retrouve les suites arithmétiques et pour $b = 0$, on retrouve les suites géométriques.

Ces suites sont parfois appelées suites arithmético-géométriques. Pour plus des informations de cette partie, voir [5].

Exemple 2.4 *La suite des entiers pairs est définie comme suit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *:*

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2, & n \geq 0, \\ u_0 = 0. \end{cases}$$

2.2.2 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est une suite $(v_n)_{n\geq 0}$ pour $a \neq 0$, vérifiant :

$$v_{n+2} = av_{n+1} + bv_n\ , \qquad a,\ b\ \in \mathbb{R}$$

ou plus généralement

$$av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Remarque 2.5 *Pour définir complètement une telle suite, il faut donner également les deux premiers termes* v_0 *et* v_1 *dits les termes initiaux de la suite.*

Exemple 2.6 *Fibonacci est une suite récurrente d'ordre* 2 *dont les coefficients sont* $a = b = 1$ *et de la forme* $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ *les premiers termes sont* $F_0 = 0, F_1 = 1$.

Il existe une méthode permettant d'obtenir la forme explicite d'une telle suite en fonction de a et b. On pourra noter que la démarche et les conclusions sont très proches de ce que l'on fait et obtient lors de la résolution d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants (2.7).

Remarque 2.7 *Les suites récurrentes sont l'analogue discret des systèmes différentiels*
par exemple :
la récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ *s'écrit :* $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$,
ou encore

$$\Delta u_n = g(u_n), \qquad \textit{telque} \ : \ g(x) = f(x) - x.$$

Elle à un lien direct avec l'équation différentielle :

$$y'(t) = f(t) - t.$$

Cette analogie aide parfois à deviner le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.
Pour les lecteurs intéressés par ce domaine, voir [10].

2.2.3 Suites récurrentes linéaires d'ordre k

Définition 2.8 *On appelle une suite récurrente linéaire d'ordre* k*, toute suite à valeurs dans un corps commutatif* $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$)*, définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, par une relation de récurrence linéaire de la forme suivante :*

$$u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + a_{k-2}u_{n+k-2} + \cdots + a_0 u_n, \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq k, \tag{2.1}$$

avec les conditions initiales $u_0 = r_0; u_1 = r_1; \ldots; u_{k-1} = r_{k-1}$ *et* $a_0; a_1; \ldots; a_k$ *scalaires de* $\mathbb{K}$.

2.2.4 Polynôme caractéristique des suites récurrentes linéaires

Le polynôme caractéristique associé a une suite vérifiant la relation de récurrence (2.1) est donné par

$$P(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

son degré est ainsi égale à l'ordre de la relation de récurrence .

2.2.5 Séries génératrices des suites récurrentes linéaires

Définition 2.9 *Les séries génératrices sont un outil algébrique qui permet de reformuler des problèmes de combinatoire afin de les transformer en des problèmes de manipulation d'expressions algébriques. Souvent de déterminer le nombre d'objets d'un certain type qui sont de taille* n*, ce qui donne lieu à une*

suite $(u_n)_{n\geq 0}$ dont on cherche à déterminer le n^{ime} terme. La fonction génératrice associée à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est la série "somme infinie" formelle :

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots = \sum_{k\geq 0} u_k x^k.$$

Pour les lecteurs intéressés voir [20].

Soit $u = (u_n)_{n_\geq 0}$ une suite des éléments d'un corps $\mathbb{K}$. Nous noterons $G(X)$ sa série génératrice, c'est-à-dire la série formelle de $\mathbb{K}[[X]]$ définie par :

$$G(X) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n.$$

Par exemple, la suite constante égale à 1 a une série génératrice :

$$1 + X + X^2 + \cdots = \frac{1}{1-X}.$$

La suite (2.1) vérifie une récurrence linéaire d'ordre k. Alors sa fonction génératrice vérifie :

$$G(X) = P(X) + G(X)(a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_k X^k),$$

où $P(X)$ est un polynôme de degré $k-1$ dépendant des a_i et des valeurs initiales $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$

Proposition 2.10 *La fonction génératrice d'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ peut être exprimée comme un quotient de deux polynômes, si et seulement si, la suite est une suite récurrente linéaire c'est à dire :*

$$G(X) = \frac{P(X)}{1 - a_1 X - a_2 X^2 - \cdots - a_k X^k}.$$

Démonstration. Soit la suite récurrente linéaire donné par (2.1), en multipliant cette suite par X^n pour $n \geq k$:

$$\begin{aligned} u_n X^n &= a_1 u_{n-1} X^n + a_2 u_{n-2} X^n + \cdots + a_k u_{n-k} X^n \\ &= a_1 X u_{n-1} X^{n-1} + a_2 X^2 u_{n-2} X^{n-2} + \cdots + a_k X^k u_{n-k} X^{n-k}. \end{aligned}$$

En sommant sur $n \geq m$:

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq k} u_n X^n &= a_1 X \sum_{n\geq k} u_{n-1} X^{n-1} + a_2 X^2 \sum_{n\geq k} u_{n-2} X^{n-2} + \cdots + a_k X^k \sum_{n\geq k} u_{n-k} X^{n-k} \\ &= a_1 X \sum_{n\geq k-1} u_n X^n + a_2 X^2 \sum_{n\geq k-2} u_n X^n + \cdots + a_k X^k \sum_{n\geq 0} u_n X^n. \end{aligned}$$

En posant

$$P_i(X) = u_0 + u_1 X + \cdots + u_i X^i, \quad i = 0, 1, \cdots, k-1,$$

on obtient :

$$\sum_{n\geq 0} u_n X^n - P_{k-1}(X) = a_1 X \left(\sum_{n\geq 0} u_n X^n - P_{k-2} \right) + \cdots$$
$$\cdots + a_{k-1} X^{k-1} \left(\sum_{n\geq 0} u_n X^n - P_0 \right) + a_k X^k \sum_{n\geq 0} u_n X^n,$$

donc $$G(X) - P_{k-1}(X) = a_1 X (G(X) - P_{k-2}) + \cdots + a_{k-1} X^{k-1} (G(X) - P_0) + a_k X^k G(X),$$

avec $$G(X) = \frac{P_{k-1}(X) - a_1 X P_{k-2}(X) - \cdots - a_{k-1} X^{k-1} P_0(X)}{1 - a_1 X - a_2 X^2 - \cdots - a_k X^k}$$
$$= \frac{P(X)}{1 - a_1 X - a_2 X^2 - \cdots - a_k X^k},$$

ce qui doit être prouvé. ■

2.2.6 Formules de Binet des suites récurrentes linéaires

Définition 2.11 *La formule de Binet d'une suite récurrente linéaires est une formule explicite qui s'écrit en fonction des racines du polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence.*

On considère l'équation homogène d'ordre k à coefficients constants, réels ou complexes suivante :

$$u_{n+k} + a_{k-1} u_{n+k-1} + \cdots + a_0 u_n = 0 \qquad n \geq k, \tag{2.2}$$

avec $u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}$ les conditions initiales.

Définition 2.12 *Le polynôme caractéristique $\Pi \in \mathbb{P}_K$ associé à (2.2) est défini par :*

$$\Pi(x) = x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.3}$$

2.2.7 Représentation matricielle des suites récurrentes linéaires

Chaque suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par la relation (2.1) a la représentation matricielle suivante :

$$U_{n+1} = A U_n, \qquad n \geq 0,$$

où $U_n \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbb{K})$ sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_k \end{pmatrix}, \qquad U_n = \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-k} \end{pmatrix},$$

La matrice A est appelée matrice compagnon du polynôme caractéristique (2.3) de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. Cette écriture matricielle nous permet d'obtenir le terme général de l'écriture matricielle par récurrence on a :

$$U_n = AU_0, \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

où

$$U_0 = \begin{pmatrix} u_n \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix}.$$

2.2.8 Forme explicite des suites récurrentes linéaires

2.2.8.1 Cas des racines simples du polynôme caractéristique des suites récurrentes linéaires

Le polynôme caractéristique défini par (2.3) associé de l'équation (2.2) avec :

$$\alpha_j : j = 1 \cdots d,\ d \leq k.$$

Les différentes racines de (2.3) sont donnée par le théorème suivant :

Théorème 2.13 *Si toutes les racines de* (2.3) *sont simples, alors toutes les solutions de* (2.2) *peuvent être mises sous la forme*

$$u_n = \sum_{1\leq i\leq k} \lambda_i \alpha_i^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

est la solution de l'équation (2.2) *c'est la forme explicite de la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$*, On peut déterminer les coefficients* $\lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1}$ *en imposant les* k *conditions initiales* $u_0, \cdots, u_{k-1}$.

Démonstration. Soit le polynôme caractéristique associé de l'équation (2.2) défini par,

$$\Pi(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Toutes ses racines sont simples, donc toutes les solutions de (2.2) s'écrivent,

$$u_n = \lambda_1 \alpha_1^n + \cdots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1}^n$$

avec

$$\begin{cases} u_0 & = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{k-1}, \\ u_1 & = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1}, \\ u_2 & = \lambda_1\alpha_1^2 + \lambda_2\alpha_2^2 + \cdots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1}^2, \\ \vdots & \vdots \ \vdots \\ u_{k-1} & = \lambda_1\alpha_1^{k-1} + \lambda_2\alpha_2^{k-1} + \cdots + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1}^{k-1}, \end{cases} \tag{2.4}$$

l'écriture matricielle correspondante de (2.4) est

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{k-1} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_{k-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_{k-1} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

On trouve donc le système $U_k = AV_k$,

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{k-1} \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_{k-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1^{k-1} & \alpha_2^{k-1} & \cdots & \alpha_{k-1}^{k-1} \end{pmatrix} \quad V_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_{k-1} \end{pmatrix} \quad U_k = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{k-1} \end{pmatrix},$$

puisque les k-racines sont simples, donc la matrice A dite de Vandermonde, est inversible alors la solution théorique de (2.5) est $V_k = A^{-1}U_k$. ∎

2.2.8.2 Cas des racines multiples du polynôme caractéristique des suites récurrentes linéaires

Théorème 2.14 *Soit $\Pi(x)$ définie par (2.3) admet des racines $\alpha_j(1, 2, \cdots, p$ telque $p < k)$ ayant des ordres de multiplication $m_j \geq 2$ respectifs telque :*

$$\sum_{j=1}^{p} mj = k,$$

alors les k suites,

$$\{(\alpha_j^n), (n\alpha_j^n), \cdots, (n^{m-1}\alpha_j^n) \mid j = 1, \cdots, \quad p, \ n \in \mathbb{N}\},$$

forment une base de l'espace vectoriel des solutions. la solution unique de (2.2) est donc de la forme

$$\sum_{1\leq j\leq p} Q_j(n)\alpha_j^n,$$

où $Q_j(n)$ *est un polynôme en* n *de degré* $\leq m_j - 1$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est en détail dans [17] ∎

2.3 Suites des nombres de Fibonacci

Définition 2.15 *On définit la suite des nombres de Fibonacci, notée* $(F_n)_{n\geq 0}$ *par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \ n = 0, 1, 2, \dots \\ F_0 = 0, F_1 = 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Les premiers termes de cette suite sont $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots\}$.

L'interprétation matricielle de la relation de récurrence (2.6) est donnée par :

$$M^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix},$$

où

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

on a $F_0 = 0, F_1 = 1$ alors :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

2.3.1 Formule de Binet pour les nombres de Fibonacci

Théorème 2.16 *Le terme général de la suite des nombres de Fibonacci est donné par la formule suivante :*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.9}$$

Démonstration. La formule de Binet est obtenue en diagonalisant la matrice M définie par (2.7).

$$X_{n+1} = MX_n, \qquad n \in \mathbb{N}^*,$$

où

$$X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence on obtient :

$$X_n = M^n X_0 \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Le calcul de M^n deviendra facile si nous diagonalisons la matrice M, les valeurs propres de M sont les racines du polynôme caractéristique $x^2 - x - 1$ associée à (2.6).

On a le polynôme caractéristique de la relation (2.9) est :

$$P(X) = X^2 - X - 1.$$

Qui admet deux racines simples :

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

donc d'après le théorème 2.13, la solution générale s'écrit sous la forme :

$$F_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Les constantes c_1, c_2 sont déterminées par les valeurs initiales comme suit :

$$\begin{cases} F_0 = c_1 + c_2 = 0, \\ F_1 = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1. \end{cases}$$

En résolvant ce système on obtient :

$$\left\{ c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \right\},$$

alors

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Ce qui doit être prouvé ■

D'autre part, $M = PDP^{-1}$ avec D est la matrice diagonale et P la matrice de passage. On a

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{\beta - \alpha} \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{aligned} M^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha}\begin{pmatrix}1 & 1\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta & -1\\ -\alpha & 1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\beta-\alpha}\begin{pmatrix}\beta^{n-1}-\alpha^{n-1} & \beta^n-\alpha^n\\ \beta^n-\alpha^n & \beta^{n-1}-\alpha^{n-1}\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

comme $X_n = M^nX_0$ on obtient :

$$F_n = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta},$$

d'où

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}. \tag{2.10}$$

2.3.2 Fonction génératrice de la suite de Fibonacci

Théorème 2.17 *La suite des nombres de Fibonacci est générée par la fonction :*

$$G(X) = \frac{X}{1-X-X^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_nX^n.$$

Démonstration. On pose

$$g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} u_nX^n,$$

puis

$$\frac{g(\alpha X)-g(\beta X)}{\alpha-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta})X^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_nF_nX^n.$$

En particulier, si $u_n = 1$ alors

$$g(X) = \frac{1}{1-X},$$

donc

$$\begin{aligned} G(X) &= \frac{1}{\alpha-\beta}(\frac{1}{1-\alpha X} - \frac{1}{1-\beta X}) \\ &= \frac{X}{1-X-X^2}. \end{aligned}$$

Ce qui doit être prouvé. ∎

2.3.3 Identité de Cassini de la suite de Fibonacci

C'est l'une des plus anciennes identités impliquant les nombres de Fibonacci. Découvert en 1680 par Jean-Dominique Cassini un astronome français. L'identité de Cassini indique que pour 3 nombres consécutifs de Fibonacci on a

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n, \qquad n \geq 0.$$

2.3.4 Identité de Catalan de la suite de Fibonacci

L'identité de Catalan pour les nombres de Fibonacci a été trouvée en 1879 par Eugene Charles Catalan un mathématicien belge qui a travaillé pour l'Académie belge des Sciences dans le domaine de la théorie des nombres. Pour les lecteurs intéressés, voir [15].
L'identité de Catalan pour les nombres de Fibonacci est définie par :

$$F_n^2 - F_{n-m}F_{n+m} = (-1)^{n-m}F_m^2, \qquad n \geq m.$$

2.3.5 Identité de D'Ocagne de la suite de Fibonacci

C'est une identité importante liée à l'identité de Cassini. $n, r \in \mathbb{N}$ on a :

$$F_{n+r}F_{n+1} - F_{n+r+1}F_n = (-1)^n F_r.$$

2.4 Suites des nombres de Lucas

Définition 2.18 *On définit la suite de Lucas, notée $(L_n)_{n\geq 0}$ par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} L_{n+2} = L_{n+1} + L_n, & n = 0, 1, \dots \\ L_0 = 2, \ L_1 = 1. \end{cases} \tag{2.11}$$

Les premiers termes de cette suite sont $\{2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \cdots\}$.
Dans [1] on trouve plus d'information.

2.4.1 Formule de Binet des suites des nombres de Lucas

Théorème 2.19 *Le terme général de la suite de Lucas est donnée par la formule suivante :*

$$L_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{2.12}$$

Démonstration. L'équation du polynôme caractéristique de la relation (2.12) est :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1, \tag{2.13}$$

l'équation (2.13) admet deux racines simples :

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

d'après le théorème 2.13, la solution générale s'écrit sous forme :

$$L_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Les constantes c_1, c_2 sont déterminées par les valeurs initiales comme suite :

$$L_0 = c_1 + c_2 = 2,$$
$$L_1 = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 1.$$

En résolvant ce système, on obtient $c_1 = c_2 = 1$. Ainsi

$$L_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \alpha^n + \beta^n.$$

Ce qui doit être prouvé. ∎

2.4.2 La fonction génératrice de la suite de Lucas

La fonction génératrice de la suite de Lucas est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 2.20 *La fonction génératrice du suite de Lucas est*

$$G(X) = \frac{2-X}{1-X-X^2} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n X^n.$$

Démonstration. On pose

$$g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n,$$

puis :

$$g(\alpha X) + g(\beta X) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\alpha^n + \beta^n)X^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n L_n X^n,$$

en particulier, si $u_n = 1$, alors

$$g(X) = \frac{1}{1-X},$$

donc :

$$G(X) = \frac{1}{1-\alpha X} + \frac{1}{\beta X} = \frac{2-X}{1-X-X^2}.$$

Ce qui doit être prouvé. ∎

2.4.3 Identité de Cassini de la suite de Lucas

L'identité de Cassini des nombres du Lucas est :

$$L_{n-1}L_{n+1} - L_n^2 = 5(-1)^{n-1}, \qquad n \geq 0$$

2.4.4 Identité de Catalan de la suite de Lucas

L'identité de Catalan pour les nombres de Lucas est :

$$L_{n-m}L_{n+m} - L_n^2 = 5F_m^2(-1)^{n-m}, \qquad n \geq m.$$

2.4.5 Identité de D'Ocagne de la suite de Lucas

L'identité D'Ocagne pour les nombres de Lucas est :

$$L_m L_{n+1} - L_{m+1}L_n = (-1)^m L_{n-m+1} - (-1)^n L_{m-n+1}. \qquad n \geq m.$$

Les suites de Fibonacci et de Lucas sont des cas particulier de la suite plus générale définit par la relation de récurrence linéaire d'ordre 2, dite suite de Horadam qui nous présentons dans la partie suivante :

2.5 Suite des nombres de Horadam

La suite de Horadam est une généralisation des deux suites de Fibonacci et de Lucas, qu'on peut retrouver en prenant les cas particuliers des valeurs initiales appropriées voir [23].

Définition 2.21 *Pour* a, b *et* $p, q \in \mathbb{Z}$ *:*
les nombres de Horadam notée $(W_n)_{n\geq 0}$ *sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} W_n(a,b;p,q) = pW_{n-1} + qW_{n-2} & n \geq 2, \\ W_0 = a, W_1 = b, \end{cases}$$

2.5.1 Formule de Binet de la suite de Horadam

L'équation caractéristique de la suite de Horadam est donnée par

$$x^2 - px + q = 0. \tag{2.14}$$

Soit α et β les deux racines de l'équation (2.14), pour $p^2 - 4q \neq 0$.

La formule de Binet de la suite de Horadam est donnée par la relation suivant :

$$W_n = A\alpha^n + B\beta^n, \tag{2.15}$$

où

$$\left\{ A = \frac{W_1 - W_0\beta}{\alpha - \beta}, \qquad B = \frac{W_0\alpha - W_1}{\alpha - \beta} \right\}.$$

2.5.2 Fonction génératrice de la suite de Horadam

La fonction génératrice de la suite de Horadam est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 2.22 *La fonction génératrice de la suite de Horadam $W_n(a, b, p, q)$ est :*

$$G(X) = \frac{a + (b - pq)X}{1 - pX + qX^2}.$$

Pour plus d'informations on peut voir [24].

Démonstration. La preuve est identique aux preuves précédents des fonctions génératrices des suites de Fibonacci et de Lucas. ∎

Remarque 2.23 *La suite de Horadam est une généralisation deux suites de Fibonacci et Lucas, qu'on peut retrouver en prenant les cas particuliers des valeurs initiales appropriées. En changeant les termes initiaux $W_0 = a = 0$ et $W_1 = b = 1$ par a et b deux réels.*

Donc la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ généralise la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$F_n = W_n(0, 1; 1, 1),$$

$(W_n)_{n\geq 0}$ généralise la suite de Lucas $(L_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$L_n = W_n(2, 1; 1, 1).$$

Chapitre 3

Suites bicomplexes de Fibonacci et de Lucas

3.1 Suites bicomplexes de Fibonacci

Définition 3.1 *La suite bicomplexe de Fibonacci, notée* $\mathbb{BC}_{F_n}$, *pour* $n \geq 0$ *est définit par,*

$$\mathbb{BC}_{F_n} = F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + ijF_{n+3}, \tag{3.1}$$

avec $(F_n)_{n\geq 0}$ *est la suite de Fibonacci .*

Il existe une autre manière d'écrire les nombres bicomplexes et selon les propriétés algébrique des nombres bicomplexes, La suite bicomplexe de Fibonacci $\mathbb{BC}_{F_n}$ définie :

Définition 3.2 *La suite bicomplexe de Fibonacci* $\mathbb{BC}_{F_n}$, *pour* $n \geq 0$ *est définie par la formule suivante :*

$$\mathbb{BC}_{F_n} = \{f_n + jf_{n+2} \mid \ f_n = F_n + iF_{n+1},\ j^2 = -1\},$$

la définition est dans [8].

Nous écrivons ces suites comme suit :

$$\mathbb{BC}_{F_n} = \{Q_0, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, \cdots\}.$$

Ensuite, nous pouvons exprimer tout élément Q_n de $\mathbb{BC}_{F_n}$, par :

$$Q_n = \gamma_n e_1 + \delta_n e_2, \tag{3.2}$$

où

$$\gamma_n = f_n - if_{n+2}, \qquad \delta_n = f_n + if_{n+2}. \tag{3.3}$$

La représentation idempotente (3.2) de l'élément Q_n est unique dans $\mathbb{BC}_{F_n}$.

Les opérations algébriques à effectuer sur $\mathbb{BC}_{F_n}$, se font facilement avec l'aide d'une représentation idempotente.

De plus, il est également plus facile d'examiner les propriétés de $\mathbb{BC}_{F_n}$ à l'aide de cette notation.

Dans l'article [9], **Halici** a défini les quaternions définition 1.6 avec le coefficient de Fibonacci pour la première fois, et obtenu la formule de Binet pour ces quaternions.

Puisque les deux nombres bicomplexes de Fibonacci et les quaternions de Fibonacci ont la même relation de récurrence.

Notons qu'en utilisant les représentations idempotentes de Q_n, Q_m et les propriétés algébrique de e_1, e_2, il est facile de voir que les équations suivantes sont satisfaites.

$$Q_n + Q_m = (\gamma_n + \gamma_m)e_1 + (\delta_n + \delta_m)e_2,$$
$$Q_n Q_m = (\gamma_n \gamma_m)e_1 + (\delta_n \delta_m)e_2,$$
$$Q_n^m = \gamma_n^m e_1 + \delta_n^m e_2.$$

Pour les curieux de ce domaine ils peuvent voir [8].

Proposition 3.3 *La relation de récurrence entre les éléments de $\mathbb{BC}_{F_n}$ pour $n \geq 0$, est donne par :*

$$Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n. \tag{3.4}$$

où

$$Q_0 = \gamma_0 e_1 + \delta_0 e_2, \quad Q_1 = \gamma_1 e_1 + \delta_1 e_2,$$

Démonstration. En utilisant les équations (3.2) et (3.3) pour l'élément Q_n, nous avons

$$Q_n = f_n + j f_{n+2} = (f_n - i f_{n+2})e_1 + (f_n + i f_{n+2})e_2.$$

Alors :

$$Q_n = \gamma_n e_1 + \delta_n e_2.$$

D'après la relation (3.3) nous utilisons les coefficients γ_n et δ_n dans l'équation (3.4) on obtient :

$$Q_{n+2} = \gamma_{n+2} e_1 + \delta_{n+2} e_2.$$

En utilisant les relations de récurrence de f_n ; on a :

$$\begin{aligned} Q_{n+2} &= \gamma_{n+2} e_1 + \delta_{n+2} e_2 \\ &= (\gamma_{n+1} + \gamma_n)e_1 + (\delta_{n+1} + \delta_n)e_2 \\ &= \gamma_{n+1} e_1 + \delta_{n+1} e_2 + \gamma_n e_1 + \delta_n e_2 \\ &= Q_{n+1} + Q_n. \end{aligned}$$

Pour $n \geq 0$ La relation de récurrence entre les éléments de $\mathbb{BC}_{F_n}$ est de la forme :

$$Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n.$$

Ce qui doit être prouvé. ■

Proposition 3.4 *Les conjugués du n^{ime} nombre bicomplexe de Fibonacci, par rapport aux unités i, j, ij peuvent être définis comme suit :*

$$(i)\ (\overline{Q_n})_i = \overline{\delta_n}e_1 + \overline{\gamma_n}e_2,$$
$$(ii)\ (\overline{Q_n})_j = \delta_n e_1 + \gamma_n e_2,$$
$$(iii)\ (\overline{Q_n})_{ij} = \overline{\gamma_n}e_1 + \overline{\delta_n}e_2.$$

Démonstration. En utilisant la définition 1.8, la définition 1.9 et la définition 1.10 pour trouver les conjugués du n^{ime} nombre bicomplexe de Fibonacci, par rapport aux unités i, j et ij. ■

Remarque 3.5 *Soit un nombre bicomplexe de Fibonacci* (3.2)*, le module i, le module j et le module ij sont définis comme suit :*

$$\begin{aligned}(i)\ |Q_n|_i^2 = Q_n(\overline{Q_n})_i &= (\gamma_n e_1 + \delta_n e_2)(\overline{\delta_n}e_1 + \overline{\gamma_n}e_2)\\ &= \gamma_n\overline{\delta_n}e_1^2 + \gamma_n\overline{\gamma_n}e_1e_2 + \delta_n\overline{\delta_n}e_1e_2 + \delta_n\overline{\gamma_n}e_2^2\\ &= \gamma_n\overline{\gamma_n}e_1 + \delta_n\overline{\gamma_n}e_2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(ii)\ |Q_n|_j^2 = Q_n(\overline{Q_n})_j &= (\gamma_n e_1 + \delta_n e_2)(\delta_n e_1 + \gamma_n e_2)\\ &= \gamma_n\delta_n e_1^2 + \gamma_n^2 e_1e_2 + \delta_n^2 e_1e_2 + \gamma_n\delta_n e_2^2\\ &= \gamma_n\delta_n(e_1 + e_2)\\ &= \gamma_n\delta_n.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(iii)\ \ |Q_n|_{ij}^2 = Q_n(\overline{Q_n})_{ij} &= (\gamma_n e_1 + \delta_n e_2)(\overline{\gamma_n}e_1 + \overline{\delta_n}e_2)\\ &= \gamma_n\overline{\gamma_n}e_1^2 + \delta_n\overline{\delta_n}e_2^2\\ &= |\gamma_n|^2 e_1 + |\delta_n|^2 e_2.\end{aligned}$$

3.1.1 Formules de Binet des suites bicomplexes de Fibonacci

Nous avons obtenu dans (2.10) le résultat suivante

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

telque :

$$\left\{\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

Pour plus de détails voir [13]

Théorème 3.6 *La formule de Binet pour La suite bicomplexe de Fibonacci $\mathbb{BC}_{F_n}$ est donnée par relation suivant :*

$$\mathbb{BC}_{F_n} = \frac{\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n}{\alpha - \beta},$$

où

$$\alpha^* = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + ij\alpha^3$$

et

$$\beta^* = 1 + i\beta + j\beta^2 + ij\beta^3.$$

Démonstration. En utilisant la formule de Binet de la suite de Fibonacci (2.10) on trouve le résultat clairement comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{BC}_{F_n} &= F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + ijF_{n+3} \\
&= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + i\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + j\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} + ij\frac{\alpha^{n+3} - \beta^{n+3}}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^n(1 + i\alpha + j\alpha^2 + ij\alpha^3) - \beta^n(1 + i\beta + j\beta^2 + ij\beta^3)}{\alpha - \beta} \\
&= \frac{\alpha^*\alpha^n - \beta^*\beta^n}{\alpha - \beta},
\end{aligned}$$

pour :

$$\alpha^* = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + ij\alpha^3$$

et

$$\beta^* = 1 + i\beta + j\beta^2 + ij\beta^3.$$

En plus de détail voir [11]. ∎

D'autre part la formule de Binet de la suite bicomplexe de Fibonacci est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.7 *Pour les éléments Q_n de la suite bicomplexe de Fibonacci $\mathbb{BC}_{F_n}$*

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(A_1\alpha^n + B_1\beta^n)e_1 + (A_2\alpha^n + B_2\beta^n)e_2], \tag{3.5}$$

telque les valeurs α et β sont les racines de l'équation caractéristique dans (3.2) où :

$A_1 = \gamma_1 - \gamma_0\beta$, $B_1 = -\gamma_1 - \gamma_0\alpha$, $A_2 = \delta_1 - \delta_0\beta$ *et* $B_2 = \delta_1 - \delta_0\alpha$.

En plus de détail voir [8].

Démonstration. En utilisant les relations :

$$\gamma_{n+2} = \gamma_{n+1} + \gamma_n, \delta_{n+2} = \delta_{n+1} + \delta_n,$$

qui ont le même rapport que Q_{n+2}

$$Q_{n+2} = \gamma_{n+2}e_1 + \delta_{n+2}e_2$$

nous obtenons les formules de Binet pour γ_n et δ_n comme suit ;

$$\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(A_1\alpha^n + B_1\beta^n) \tag{3.6}$$

où $\gamma_0 = 2$ et $\gamma_1 = 4 - i$ sont les valeurs initiales de (3.6) et de même,

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(A_2\alpha^n + B_2\beta^n) \tag{3.7}$$

où $\delta_0 = 2i - 2$ et $\delta_1 = 3i - 2$.

Ainsi, en utilisant les égalités de γ_n et δ_n qui sont les valeurs initiales de (3.7) on obtient :

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(A_1\alpha^n + B_1\beta^n)e_1 + (A_2\alpha^n + B_2\beta^n)e_2].$$

Ce qui doit être prouvé. ∎

3.1.2 Fonction génératrice de la suite bicomplexe de Fibonacci

Théorème 3.8 *La fonction génératrice de la suite bicomplexe de Fibonacci $\mathbb{BC}_{F_n}$ est donnée par la relation :*

$$G(t) = \frac{t + i + j(1 + t) + ij(2 + t)}{1 - t - t^2}. \tag{3.8}$$

Démonstration. En utilisant les élément Q_n, de la suite bicomplexe de Fibonacci $\mathbb{BC}_{F_n}$ pour facilité les calculés, on a : la fonction génératrice $G(t)$ est donnée par la relation :

$$G(t) = (\gamma_0 e_1 + \delta_0 e_2) + (\gamma_1 e_1 + \delta_1 e_2)t + \cdots + (\gamma_n e_1 + \delta_n e_2)t^n + \cdots,$$

nous multiplions cette équation par $-t$ et $-t^2$ on obtient :

$$-tG_t = -t(\gamma_0 e_1 + \delta_0 e_2) - (\gamma_1 e_1 + \delta_1 e_2)t^2 - \cdots - (\gamma_n e_1 + \delta_n e_2)t^{n+1} - \cdots$$

$$-t^2G_t = -t^2(\gamma_0 e_1 + \delta_0 e_2) - (\gamma_1 e_1 + \delta_1 e_2)t^3 - \cdots - (\gamma_n e_1 + \delta_n e_2)t^{n+2} - \cdots,$$

puis, en faisant les pas nécessaires pour trouver $G(t)$ à l'aide de la relation de récurrence

$$Q_{n+2} - Q_{n+1} - Q_n = 0,$$

on obtient

$$G(t)(1-t-t^2) = Q_0 + (Q_1 - Q_0)t,$$

$$G(t)(1-t-t^2) = (\gamma_0 e_1 + \delta_0 e_2) + (\gamma_1 e_1 + \delta_1 e_2 - \gamma_0 e_1 + \delta_0 e_2)t,$$

$$G(t) = \frac{(\gamma_0 e_1 + \delta_0 e_2) + (\gamma_1 e_1 + \delta_1 e_2 - \gamma_0 e_1 + \delta_0 e_2)t}{1-t-t^2},$$

avec $\gamma_0 = 2$ et $\gamma_1 = 4 - i$. $\delta_0 = 2i - 2$ et $\delta_1 = 3i - 2$.

En faisant les calculs nécessaires nous avons :

$$G(t) = \frac{t + i + j(1+t) + ij(2+t)}{1-t-t^2}.$$

Ce qui doit être prouvé. ■

3.1.3 Identité de Cassini de la suite bicomplexe de Fibonacci

Théorème 3.9 *L'identité de Cassini de la suite bicomplexe de Fibonacci $\mathbb{BC}_{F_n}$ donnée par la relation :*

$$Q_{n-1}Q_{n+1} - Q_n^2 = 3j(-1)^n(2+i), \qquad n \geq 1. \tag{3.9}$$

Démonstration. En utilisant la formule de Binet associée à la suite bicomplexe de Fibonacci pour les substituons Q_{n-1}, Q_n, Q_{n+1} dans la formule (3.9)

on a :

$$\begin{aligned} Q_{n-1}Q_{n+1} - Q_n^2 &= (\gamma_{n-1} + \gamma_{n+1})e_1 + (\delta_{n-1} + \delta_{n+1})e_2 - (\gamma_n^2)e_1 + (\delta_n^2)e_2 \\ &= (\gamma_{n-1} + \gamma_{n+1} - \gamma_n^2)e_1 + (\delta_{n-1} + \delta_{n+1} - \delta_n^2)e_2, \end{aligned}$$

d'après la formule de Binet de la suite bicomplexe de Fibonacci on a :

$$Q_{n-1}Q_{n+1} - Q_n^2 = \frac{1}{5}A_1B_1(\alpha^{n-1}\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^{n-1} - 2(-1)^n)e_1 + \frac{1}{5}A_2B_2(\alpha^{n-1}\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^{n-1} - 2(-1)^n)e_2.$$

Considérant les relations entre α et β et en particulier $\alpha = -\beta^{-1}$.

Nous pouvons réarrangez la dernière équation comme suit ;

$$A_1B_1(-1)^n e_1 + A_2B_2(-1)^n e_2.$$

Après avoir calculé les valeurs A_1B_1 et A_2B_2, nous avons

$$\begin{aligned} Q_{n-1}Q_{n+1} - Q_n^2 &= (-1)^n\left[(-3+6i)\,e_1 + (3-6i)\,e_2\right] \\ &= 3j(-1)^n(2+i). \end{aligned}$$

ce qui doit être prouvé Pour plus de détails, voir [8]. ∎

Nous présentons une autre méthode de démonstration :

Démonstration. On considère

$$Q_{n-1}Q_{n+1} - Q_n^2 = (F_{n+1} + F_{n+2}i + F_{n+3}j + F_{n+4}ij)(F_{n-1} + F_ni + F_{n+1}j + F_{n+2}ij) - (F_n + F_{n+1}i + F_{n+2}j + F_{n+}ij)^2.$$

En utilisant l'identité

$$F_mF_{n+1} - F_{m+1}F_n = (-1)^nF_{m-n}$$

et

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n,$$

dans l'équation ci-dessus on obtient

$$\begin{aligned} Q_{n-1}Q_{n+1} - Q_n^2 &= [2(-1)^{n+2}]3j + [3(-1)^{n+2}]ij \\ &= 3(-1)^n(2j + ij). \end{aligned}$$

Pour plus de détails nous référons les lecteurs à voir [12, 4]. ∎

Remarque 3.10 *L'identité de Cassini a deux généralisations importantes, l'identité de Catalan et l'autre est l'identité de D'Ocagne. Ces identités représentent le fait qu'il existe une relation étroite entre les relations de récurrences et la théorie des matrices, voir [13].*

3.1.4 Identité de Catalan de la suite bicomplexe de Fibonacci

Théorème 3.11 *L'identité de Catalan de la suite bicomplexe de Fibonacci est donnée par la relation :*

$$Q_{n+m}Q_{n-m} - Q_n^2 = 3j(-1)^{n-m+1}F_m^2(2 + i), \qquad n > m. \tag{3.10}$$

Démonstration. En utilisant la formule de Binet associé à la suite bicomplexe de Fibonacci pour les éléments de Q_n (3.5) on a

$$Q_{n+m} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(A_1\alpha^{n+m} + B_1\beta^{n+m}\right)e_1 + \left(A_2\alpha^{n+m} + B_2\beta^{n+m}\right)e_2\right]$$

et

$$Q_{n-m} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(A_1\alpha^{n-m} + B_1\beta^{n-m}\right)e_1 + \left(A_2\alpha^{n-m} + B_2\beta^{n-m}\right)e_2\right],$$

le côté gauche de l'équation de (3.10) devient

$$\begin{aligned}
Q_{n+m}Q_{n-m} - Q_n^2 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(A_1B_1(\alpha^{n+m}\beta^{n-m} + \alpha^{n-m}\beta^{n+m} - 2(-1)^n)e_1\right) \\
&+ \left(A_2B_2(\alpha^{n+m}\beta^{n-m} + \alpha^{n-m}\beta^{n+m} - 2(-1)^n)e_2\right)] \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}A_1B_1\left[(-1)^n(-1)^{-m}(\alpha^m - \beta^m)^2\right]e_1 \\
&+ \frac{1}{\sqrt{5}}A_2B_2\left[(-1)^n(-1)^{-m}(\alpha^m - \beta^m)^2\right]e_2 \\
&= (-1)^{n-m+1}A_1B_1F_m^2e_1 + A_2B_2F_m^2e_2 \\
&= (-1)^{n-m+1}F_m^2\left(A_1B_1e_1 + A_2B_2e_2\right).
\end{aligned}$$

En calculons les valeurs A_1B_1 et A_2B_2 et les écrivons dans la dernière équation, alors nous obtt-nons

$$Q_{n+m}Q_{n-m} - Q_n^2 = 3j(-1)^{n-m+1}F_m^2(2+i).$$

Ce qui doit être prouvé. ∎

3.1.5 Identité de D'Ocagne de la suite bicomplexe de Fibonacci

Théorème 3.12 *Pour des entiers positifs distincts n et m l'équation suivante est vraie*

$$Q_mQ_{n+1} - Q_nQ_{m+1} = 3j(-1)^mQn - m(2+i), \qquad n \geq m.$$

Démonstration. En utilisant la formule de binet de Q_n et Q_m

$$\begin{aligned}
Q_mQ_{n+1} - Q_nQ_{m+1} = \frac{1}{5}&\left[((A_1\alpha^m + B_1\beta^m)e_1 + (A_2\alpha^m + B_1\beta^m)e_2) \times\right. \\
&\left.\left((A_1\alpha^{n+1} + B_1\beta^{n+1})e_1 + (A_2\alpha^{n+1} + B_1\beta^{n+1})e_2\right)\right] \\
-\frac{1}{5}&\left[((A_1\alpha^n + B_1\beta^n)e_1 + (A_2\alpha^n + B_1\beta^n)e_2) \times\right. \\
&\left.\left((A_1\alpha^{m+1} + B_1\beta^{m+1})e_1 + (A_2\alpha^{m+1} + B_1\beta^{m+1})e_2\right)\right],
\end{aligned}$$

nous faisons les calculs nécessaires, alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
Q_mQ_{n+1} - Q_nQ_{m+1} = \frac{1}{5}&\left[A_1B_1(\alpha^m\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^m - \alpha^n\beta^{m+1})e_1\right. \\
&\left.+A_2B_2(\alpha^m\beta^{n+1} + \alpha^{n+1}\beta^m - \alpha^n\beta^{m+1})e_2\right].
\end{aligned}$$

En utilisant les relations entre les racines de l'équation caractéristique, on obtient

$$\begin{aligned}
Q_mQ_{n+1} - Q_nQ_{m+1} = \frac{1}{5}&\left[A_1B_1(-1)^m(\alpha - \beta)(\alpha^{n-m} - \beta^{n-m})e_1\right. \\
&\left.+ A_2B_2(-1)^m(\alpha - \beta)(\alpha^{n-m} - \beta^{n-m})e_2\right].
\end{aligned}$$

Après quelques simplifications, en utilisant la formule :

$$\alpha^{n-m} - \beta^{n-m} = \sqrt{5}Q_{n-m},$$

nous obtenons que :

$$\begin{aligned} Q_m Q_{n+1} - Q_n Q_{m+1} &= (-1)^m Q_{n-m}(A_1 B_1 e_1 + A_2 B_2 e_2) \\ &= 3j(-1)^m Qn - m(2+i), \end{aligned}$$

ce qui doit être prouvé. ■

Pour ceux qui veulent s'approfondir voir [8].

Définition 3.13 *On utilisons les propriétés algébrique des nombres bicomplexes pour définie la suite bicomplexe de Fibonacci $\mathbb{BC}_{F_n}$ avec la forme :*

$$\mathbb{BC}_{F_n} = \{f_n + if_{n+1} \ \ | f_n = F_n + jF_{n+2}; \qquad i^2 = -1\},$$

$$\mathbb{BC}_{F_n} = \{Q_0, Q_1, Q_2, \cdots, Q_n, \cdots\}.$$

Ensuite, nous pouvons exprimer tout élément Q_n de la suite bicomplexe de Fibonacci $\mathbb{BC}_{F_n}$, par :

$$Q_n = \gamma_n e_1 + \delta_n e_2, \tag{3.11}$$

où

$$\gamma_n = f_n - jf_{n+1}, \qquad \delta_n = f_n + jf_{n+1}. \tag{3.12}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} Q_n + Q_m &= (\gamma_n + \gamma_m)e_1 + (\delta_n + \delta_m)e_2, \\ Q_n Q_m &= (\gamma_n \gamma_m)e_1 + (\delta_n \delta_m)e_2, \\ Q_n^m &= \gamma_n^m e_1 + \delta_n^m e_2. \end{aligned}$$

Théorème 3.14 *Pour $n \geq 2$, la relation de récurrence suivante entre les éléments de la suite bicomplexe de Fibonacci $\mathbb{BC}_{F_n}$:*

$$Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n, \tag{3.13}$$

avec

$$Q_0 = \gamma_0 e_1 + \delta_0 e_2, \ \ Q_1 = \gamma_1 e_1 + \delta_1 e_2.$$

Démonstration. En utilisant les equations (3.11) et (3.12) pour l'élément Q_n de la suite bicomplexe de Fibonacci nous obtenons :

$$Q_n = f_n + if_{n+1} = (f_n - jf_{n+1})e_1 + (f_n + jf_{n+1})e_2.$$

Puisque les coefficients γ_n et δ_n dans l'équation

$$Q_{n+2} = \gamma_{n+2}e_1 + \delta_{n+2}e_2.$$

En utilisant la relation de récurrence relative à l'élément f_n, la suite bicomplexe de Fibonacci devient :

$$\begin{aligned} Q_{n+2} &= \gamma_{n+2}e_1 + \delta_{n+2}e_2 \\ &= (\gamma_{n+1} + \gamma_n)e_1 + (\delta_{n+1} + \delta_n)e_2 \\ &= \gamma_{n+1}e_1 + \delta_{n+1}e_2 + \gamma_n e_1 + \delta_n e_2 \\ &= Q_{n+1} + Q_n. \end{aligned}$$

Parmi les éléments de la suite bicomplexe de Fibonacci $\mathbb{BC}_{F_n}$, on obtient :

$$Q_{n+2} = Q_{n+1} + Q_n \qquad n \geq 0.$$

Ce qui doit être prouvé. ■

3.2 Suites bicomplexes de Lucas

Définition 3.15 *La suite bicomplexe de Lucas, notée $\mathbb{BC}_{L_n}$, est définit par,*

$$\mathbb{BC}_{L_n} = L_n + iL_{n+1} + jL_{n+2} + ijL_{n+3}, \qquad n \geq 0, \tag{3.14}$$

avec $(L_n)_{n\geq 0}$ est la suite de Lucas.

L'autre définition des nombres bicomplexe apartir des propriétés algébrique des nombres bicomplexes données des définitions équivalente de la suite bicomplexe de Lucas $\mathbb{BC}_{L_n}$.

Définition 3.16 *La suite bicomplexe de Lucas $\mathbb{BC}_{L_n}$ est définie par la nouvelle relation :*

$$\mathbb{BC}_{L_n} = \{l_n + jl_{n+2} \mid \ l_n = L_n + iL_{n+1},\ j^2 = -1\}.$$

Il y a des détails intéressants dans[8].

Nous écrivons ces suites comme suit :

$$\mathbb{BC}_{L_n} = \{K_0, K_1, K_2, \cdots, K_n, \cdots\}. \tag{3.15}$$

Ensuite, nous pouvons exprimer tout élément K_n de $\mathbb{BC}_{L_n}$:

$$K_n = \mu_n e_1 + \nu_n e_2, \tag{3.16}$$

où

$$\mu_n = l_n - il_{n+2}, \qquad \nu_n = l_n + il_{n+2}. \tag{3.17}$$

Théorème 3.17 *La relation de récurrence entre les éléments de la suite bicomplexe de Lucas $\mathbb{BC}_{L_n}$ est réalisée*

$$K_{n+2} = K_{n+1} + K_n, \qquad n > 0, \tag{3.18}$$

où

$$K_0 = \mu_0 e_1 + \nu_0 e_2 \qquad K_1 = \mu_1 e_1 + \nu_1 e_2.$$

Démonstration. À partir de la définition des suites bicomplexes de Lucas, la formule suivante peut être écrite :

$$\begin{aligned} K_n &= l_n + jl_{n+2} \\ &= (l_n - il_{n+2})e_1 + (l_n + il_{n+2})e_2 \\ &= \mu e_1 + \nu e_2. \end{aligned}$$

Pour les coefficients μ_n et ν_n, on a

$$\mu_{n+2} = \mu_{n+1} + \mu_n, \qquad \nu_{n+2} = \nu_{n+1} + \nu_n,$$

où

$$\mu_0 = 6 - 2i, \qquad \mu_1 = 8 - i, \qquad \nu_0 = -2 + 4i, \qquad \nu_1 = -6 + 7i.$$

Alors :

$$\begin{aligned} K_{n+2} &= \mu_{n+2} e_1 + \nu_{n+2} e_2 \\ &= K_{n+1} + K_n. \end{aligned}$$

Ce qui doit être prouvé. ∎

3.2.1 Formule de Binet de la suite bicomplexe de Lucas

La formule de Binet pour la suite bicomplexe de Lucas est donnée comme suit,

$$\mathbb{BC}_{L_n} = \alpha^*\alpha^n + \beta^*\beta^n,$$

où

$$\alpha^* = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + ij\alpha^3 \qquad \text{et} \qquad \beta^* = 1 + i\beta + j\beta^2 + ij\beta^3.$$

Pour les éléments K_n de la suite $\mathbb{BC}_{L_n}$, pour les lecteurs intéressés voir [8].

De autre part la formule de Binet de la suite bicomplexe de Lucas $\mathbb{BC}_{L_n}$ est donnée dans le théorème suivent :

Théorème 3.18 *Pour l'élément de la suite bicomplexe de Lucas $\mathbb{BC}_{L_n}$ nous avons :*

$$K_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{(\mu_1 - \beta\mu_0)\alpha^n + (\alpha\mu_0 - \mu_1)\beta^n\right\} e_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\{(\nu_1 - \beta\nu_0)\alpha^n + (\alpha\nu_0 - \nu_1)\beta^n\}e_2. \tag{3.19}$$

Pour plus des détails, voir [6].

Démonstration. En utilisant l'équation (3.18) la solution générale de la relation de récurrence de μ_n est la suivante :

$$\mu_n = S\alpha^n + T\beta^n,$$

telque :

$$S = \frac{\mu_1 - \beta\mu_0}{\alpha - \beta}$$

et

$$T = \frac{\alpha\mu_0 - \mu_1}{\alpha - \beta}.$$

Si ces valeurs sont remplacées dans la solution générale de μ_n, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned}\mu_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\mu_1 - \beta\mu_0)\,\alpha^n + (\alpha\mu_0 - \mu_1)\,\beta^n\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(S_1\alpha^n + T_1\beta^n),\end{aligned} \tag{3.20}$$

avec les valeurs initiales de l'équation (3.20) sont

$$\mu_0 = 6 - 2i, \qquad \mu_1 = 8 - i.$$

$$\nu_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(S_2\alpha^n + T_2\beta^n), \tag{3.21}$$

avec

$$\nu_0 = -2 + 4i \qquad \nu_1 = -6 + 7i,$$

$$K_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(S_1\alpha^n + T_1\beta^n)e_1 + (S_2\alpha^n + T_2\beta^n)e_2].$$

Ce qui doit être prouvé. ∎

3.2.2 Fonction génératrice de la suite bicomplexe de Lucas

Théorème 3.19 *La fonction génératrice pour la suite bicomplexe de Lucas est donnée par la relation :*

$$g(t) = \frac{2 + i + 3j + 4ij + (-1 + 2i + j + 3ij)t}{1 - t - t^2}. \tag{3.22}$$

Démonstration. Soit $g(t)$ la fonction génératrice de la suite bicomplexe de Lucas :

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{BC}_{L_n} t^n.$$

En utilisant $g(t)$, $tg(t)$ et $t^2g(t)$ nous obtenons les équations suivantes

$$tg(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{BC}_{L_n} t^{n+1},$$

$$t^2g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{BC}_{L_n} t^{n+2},$$

En utilisant la relation de récurrence

$$K_{n+2} - K_{n+1} - K_n = 0.$$

Après les calculs nécessaires, la fonction génératrice pour les nombres bicomplexes de Lucas sont obtenus comme suit :

$$g(t) = \frac{K_0 + (K_1 - K_0)t}{1 - t - t^2},$$

d'où

$$g(t) = \frac{2 + i + 3j + 4ij + (-1 + 2i + j + 3ij)t}{1 - t - t^2}.$$

Ce qui doit être prouvé. ∎

Pour plus des détails, voir [7].

L'identité de Catalan est l'une des identités célèbres qui généralise l'identité de Cassini.

3.2.3 Identité de Cassini de la suite bicomplexe de Lucas

Théorème 3.20 *L'identité de Cassini de la suite bicomplexe de Lucas $\mathbb{BC}_{L_n}$ est donnée par*

$$K_{n-1}K_{n+1} - K_n^2 = 15j(-1)^n(2 + i).$$

Démonstration. En appliquant la formule de Binet de la suite bicomplexe de Lucas $\mathbb{BC}_{L_n}$, (3.19) pour les substituons K_n alors :

$$K_{n-1}K_{n+1} - K_n^2$$

deviennent :

$$K_{n-1}K_{n+1} - K_n^2 = \frac{1}{5}[\left((S_1\alpha^{n-1} + T_1\beta^{n-1})(S_1\alpha^{n+1} + T_1\beta^{n+1}) - (S_1\alpha^n + T_1\beta^n)^2\right) e_1 + \left((S_2\alpha^{n-1} + T_2\beta^{n-1})(S_2\alpha^{n+1} + T_2\beta^{n+1}) - (S_2\alpha^n + T_2\beta^n)^2\right) e_2].$$

En prenant les simplifications nécessaires, on obtient l'équation suivante :

$$K_{n-1}K_{n+1}-K_n^2 = \frac{1}{5}[S_1T_1(\alpha^{n-1}\beta^{n+1}+\alpha^{n+1}\beta^{n-1}-2\alpha^n\beta^n)e_1+S_2T_2(\alpha^{n-1}\beta^{n+1}+\alpha^{n+1}\beta^{n-1}-2\alpha^n\beta^n)e_2].$$

Apres le calculs des valeurs de S_1T_1 et S_2T_2, on obtient l'équation suivante :

$$K_{n-1}K_{n+1} - K_n^2 = 15j(-1)^n(2+i).$$

■

3.2.4 Identité de Catalan de la suite bicomplexe de Lucas

Théorème 3.21 *L'identité de Catalan de suite bicomplexe de Lucas $\mathbb{BC}_{L_n}$, est donnée par la relation :*

$$K_{n+m}K_{n-m} - K_n^2 = 15j(-1)^{n-m}F_m^2(2+i). \qquad n \geq m$$

Démonstration. En appliquant la formule de Binet de la suite bicomplexe de Lucas $\mathbb{BC}_{L_n}$ (3.19)

$$K_{n+m}K_{n-m} - K_n^2$$

devient :

$$K_{n+m}K_{n-m} - K_n^2 = \frac{1}{5}[\left((S_1\alpha^{n+m} + T_1\beta^{n+m})(S_1\alpha^{n-m} + T_1\beta^{n-m}) - (S_1\alpha^n + T_1\beta^n)^2\right) e_1 + \left((S_2\alpha^{n+m} + T_2\beta^{n+m})(S_2\alpha^{n-m} + T_2\beta^{n-m}) - (S_2\alpha^n + T_2\beta^n)^2\right) e_2].$$

En prenant les simplifications nécessaires, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} K_{n+m}K_{n-m} - K_n^2 &= \frac{1}{5}[S_1T_1(-1)^{n-m}(\alpha^m - \beta^m)^2e_1 + S_2T_2(-1)^{n-m}(\alpha^m - \beta^m)^2e_2], \\ &= 15j(-1)^{n-m}F_m^2(2+i). \end{aligned}$$

Pour plus de détails voir [6]. ■

3.2.5 Identité de D'Ocagne de la suite bicomplexe de Lucas

Théorème 3.22 *L'identité de D'Ocagne de la suite bicomplexe de Lucas $\mathbb{BC}_{L_n}$ est donnée par la relation :*

$$K_mK_{n+1} - K_nK_{m+1} = F_{n-m}(-1)^m 15j(2+i). \qquad n \geq m$$

Démonstration. On applique la formule de Binet de la suite bicomplexe de Lucas $\mathbb{BC}_{L_n}$, (3.19) pour les substituons K_n alors :

$$K_mK_{n+1} - K_nK_{m+1},$$

devinent :

$$\begin{aligned} K_mK_{n+1} - K_nK_{m+1} &= \frac{1}{5}[(S_1\alpha^m + T_1\beta^m)(S_1\alpha^{n+1} + T_1\beta^{n+1})e_1 + (S_2\alpha^m + T_2\beta^m)(S_2\alpha^{n+1} + T_2\beta^{n+1})e_2] \\ &\quad - \frac{1}{5}[(S_1\alpha^n + T_1\beta^n)(S_1\alpha^{m+1} + T_1\beta^{m+1})e_1 + (S_2\alpha^n + T_2\beta^n)(S_2\alpha^{m+1} + T_2\beta^{m+1})e_2], \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} K_mK_{n+1} - K_nK_{m+1} &= \frac{1}{5}(-1)^m[S_1T_1(\alpha-\beta)(\alpha^{n-m} - \beta^{n-m})e_1 + S_2T_2(\alpha-\beta)(\alpha^{n-m} - \beta^{n-m})e_2] \\ &= F_{n-m}(-1)^m 15j(2+i). \end{aligned}$$

Pour avoir un aperçu voir [6] ∎

3.2.6 Relations entre Q_n et K_n

Théorème 3.23 *Les relations suivantes existent entre Q_n et K_n :*

$$\begin{aligned} Q_n + K_n &= 2Q_{n+1}. \\ K_{n-1} + K_{n+1} &= 5Q_n. \\ 5Q_n^2 - K_n^2 &= 12(-1)^{n+1}(2j+k). \end{aligned}$$

Corollaire 3.24 *Pour certaines formules de sommations des nombres bicomplexes de Lucas $\mathbb{BC}_{L_n}$, on a K_n, K_m (3.15)*

$$\begin{aligned} (i) \quad \sum_{i=1}^{n} K_{2i-1} &= K_{2n} - K_0, \\ (ii) \quad \sum_{i=1}^{n} K_i &= K_{n+2} - K_2, \\ (iii) \quad \sum_{i=1}^{n} K_{2i} &= K_{2i+1} - K_1. \end{aligned}$$

Le lecteur intéréssé peut voir [8].

Théorème 3.25 *Pour les éléments de la suite bicomplexe de Lucas K_n et K_m, on a l'égalité suivante.*

$$K_nK_m + K_{n+1}K_{m+1} = 5(2Q_{n+m+1} + 2F_{n+m+4} - F_{n+m+1} - 2F_{n+m+6}i - 2F_{n+m+5}j + 2F_{n+m+4}ij).$$

Démonstration. Nous utilisons l'identité

$$L_nL_m + L_{n+1}L_{m+1} = 5F_{m+n+1},$$

on obtient

$$\begin{aligned}
K_nK_m + K_{n+1}K_{m+1} = &[(L_nL_m + L_{n+1}L_{m+1}) - (L_{n+1}L_{m+1} + L_{n+2}L_{m+2}) \\
&- (L_{n+2}L_{m+2} + L_{n+3}L_{m+3}) + (L_{n+3}L_{m+3} + L_{n+4}L_{m+4})] \\
&+ [(L_nL_{m+1} + L_{n+1}L_m) - (L_{n+2}L_{m+3} + L_{n+3}L_{m+2}) \\
&+ (L_{n+1}L_{m+2} + L_{n+2}L_{m+1}) - (L_{n+3}L_{m+4} + L_{n+4}L_{m+3})]i \\
&+ [(L_nL_{m+2} + L_{n+2}L_m) - (L_{n+1}L_{m+3} + L_{n+3}L_{m+1}) \\
&+ (L_{n+1}L_{m+3} + L_{n+3}L_{m+1}) - (L_{n+2}L_{m+4} + L_{n+4}L_{m+2})]j \\
&+ [(L_nL_{m+3} + L_{n+3}L_m) + (L_{n+1}L_{m+2} + L_{n+2}L_{m+1}) \\
&+ (L_{n+1}L_{m+4} + L_{n+4}L_{m+1}) + (L_{n+2}L_{m+3} + L_{n+3}L_{m+2})]ij,
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
K_nK_m + K_{n+1}K_{m+1} = &5(F_{m+n+1} - F_{m+n+3} - F_{m+n+5} + F_{m+n+7}) \\
&+ 5(F_{m+n+2} + F_{m+n+2} - F_{m+n+6} - F_{m+n+6})i \\
&+ 5(F_{m+n+3} + F_{m+n+3} - F_{m+n+5} - F_{m+n+5})j \\
&+ 5(F_{m+n+4} + F_{m+n+4} + F_{m+n+4} + F_{m+n+4})ij
\end{aligned}$$

$$K_nK_m + K_{n+1}K_{m+1} = 5(2Q_{n+m+1} + 2F_{n+m+4} - F_{n+m+1} - 2F_{n+m+6}i - 2F_{n+m+5}j + 2F_{n+m+4}ij).$$

Pour plus de connaissances sur le sujet, voir [8]. ∎

Chapitre 4

Suites bicomplexes de Horadam

Définition 4.1 *Les suites bicomplexes de Horadam sont définies par :*

$$\mathbb{BC}_{W_n} = W_n + iW_{n+1} + jW_{n+2} + ijW_{n+3}. \tag{4.1}$$

où W_n est bien définie en définition 2.21.

Il existe une autre méthode pour définir les nombres bicomplexes apartir des propriétés algébrique des nombres bicomplexes, donc on peut définir autrement la suite bicomplexe de Horadam $\mathbb{BC}_{W_n}$:

Définition 4.2 *La suite bicomplexe de Horadam $\mathbb{BC}_{W_n}$ donnée par la relation :*

$$\mathbb{BC}_{W_n} = \{w_n + jw_{n+2} \mid w_n = W_n + iW_{n+1} \mid i^2 = j^2 = -1\}.$$

Nous écrivons ces suites comme suit

$$\mathbb{BC}_{W_n} = \{H_0, H_1, H_2, \cdots, H_n, \cdots\}.$$

Ensuite, nous pouvons exprimer tout élément H_n de la suite bicomplexe de Horadam $\mathbb{BC}_{W_n}$ par

$$H_n = \rho_n e_1 + \varrho_n e_2. \tag{4.2}$$

où

$$\rho_n = w_n - iw_{n+2}\ , \quad \varrho_n = w_n + iw_{n+2}. \tag{4.3}$$

Proposition 4.3 *d'après la définition 4.1 on a*

$$\mathbb{BC}_{W_{n+2}} = W_{n+2} + iW_{n+3} + jW_{n+4} + ijW_{n+5}.$$

Prouvons que les suites bicomplexes de Horadam verifient la relation de récurrence

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathbb{BC}_{Wn+2} &= W_{n+2} + iW_{n+3} + jW_{n+4} + ijW_{n+5}\\ &= pW_{n+1} + qW_n + i(pW_{n+2} + qW_{n+1}) + j(pW_{n+3} + qW_{n+2}) + ij(pW_{n+4} + qW_{n+3})\\ &= p(W_{n+1} + iW_{n+2} + jW_{n+3} + ijW_{n+4}) + q(W_n + iW_{n+1} + jW_{n+2} + ijW_{n+3})\\ &= p\mathbb{BC}_{W_{n+1}} + q\mathbb{BC}_{W_n}.\end{aligned}$$

Ce qui doit être prouvé. ∎

On a

$$BW_{C0} = a + bi + j(pb + qa) + ij(p^2b + pqa + qb), \tag{4.4}$$

$$BW_{C1} = b + i(pb + qa) + j(p^2b + pqa + qb) + ij(p^3b + p^2qa + 2pqb + q^2a), \tag{4.5}$$

respectivement. Si on choisissons les valeurs $a = 0, b = p = q = 1$ dans les équations (4.1), on obtenons alors les nombres bicomplexes de Fibonacci et si nous choisissons les valeurs $a = 2, b = p = q = 1$ dans les équations ci-dessus (4.1), on obtenons alors les nombres bicomplexes Lucas.

4.1 Formule de Binet de la suite bicomplexe de Horadam

Théorème 4.4 *La formule de Binet de la suite bicomplexe de Horadam est donnée comme suit on a :*

$$\mathbb{BC}_{W_n} = \frac{A\alpha^*\alpha^n - B\beta^*\beta^n}{\alpha - \beta}, \tag{4.6}$$

avec

$$\begin{aligned}A &= b - a\beta,\\ B &= b - a\alpha,\\ \alpha^* &= 1 + i\alpha + j\alpha^2 + ij\alpha^3,\\ \beta^* &= 1 + i\beta + j\beta^2 + ij\beta^3.\end{aligned}$$

Démonstration. En utilisant les racines de l'équation caractéristique $t^2 - pt - q = 0$, liée aux nombres de Horadam, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2},\\ \beta &= \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}.\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Binet pour les nombre de la suite de Horadam (2.15) On trouve :

$$\mathbb{BC}_{W_n} = \frac{A\alpha^*\alpha^n - B\beta^*\beta^n}{\alpha - \beta}.$$

Ce qui doit être prouvé. ∎

4.2 Fonction génératrice de la suite bicomplexe de Horadam

Théorème 4.5 *La Fonction génératrice $g(t)$ de $\mathbb{BC}_{W_n}$ est donnée par :*

$$g(t) = \frac{BC_{W0} + (BC_{W1} - pBC_0)t}{1 - pt - qt^2}. \tag{4.7}$$

Démonstration. Soit $g(t)$ la fonction génératrice des nombres bicomplexes de Horadam $\mathbb{BC}_{W_n}$

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} BC_{W_n} t^n,$$

pour trouver la forme désirée du $g(t)$ calculons les équations pour $ptg(t)$ et $qt^2g(t)$, alors on obtient

$$ptg(t) = p\sum_{n=0}^{\infty} BC_{W_n} t^{n+1}$$

et

$$qt^2g(t) = q\sum_{n=0}^{\infty} BC_{W_n} t^{n+2}.$$

Aussi, nous utilisons les racines du polynôme caractéristique de ces nombres, $t^2 - pt - q = 0$, on trouve une forme explicite de la fonction génératrice $g(t)$ comme suit :

$$g(t) = \frac{BC_{W0} + (BC_{W1} - pBC_{W0})t}{1 - pt - qt^2}.$$

tel que : BC_{W0} définit (4.4) et BC_{W1} définit (4.5). ∎

4.2.1 Identité de Cassini de la suite bicomplexe de Horadam

Théorème 4.6 *L'identité de Cassini pour les éléments de la suite bicomplexe de Horadam $\mathbb{BC}_{W_n}$ est donnée par la relation :*

$$H_n^2 - H_{n+1}H_{n-1} = AB\alpha^*\beta^*(-q)^{n-1}. \tag{4.8}$$

Démonstration. Nous utilisons la formule de Binet de la suite bicomplexe de Horadam (4.6) pour la partie gauche de l'équation (4.8)

$$H_n^2 - H_{n+1}H_{n-1} = (\frac{A\alpha^*\alpha^n - B\beta^*\beta^n}{\alpha - \beta})^2 - \frac{A\alpha^*\alpha^{n+1} - B\beta^*\beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\frac{A\alpha^*\alpha^{n-1} - B\beta^*\beta^{n-1}}{\alpha - \beta},$$

alors :

$$H_n^2 - H_{n+1}H_{n-1} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}(AB\alpha^*\beta^*(-q)^{n-1})(\alpha-\beta)^2,$$
$$= AB\alpha^*\beta^*(-q)^{n-1}.$$

■ Pour plus de détails voir [8].

4.2.2 Identité de Catalan de la suite bicomplexe de Horadam

Théorème 4.7 *L'identité de Catalan pour les éléments de la suite bicomplexe de Horadam $\mathbb{BC}_{W_n}$ est définie par :*

$$H_n^2 - H_{n+r}H_{n-r} = \frac{AB\alpha^*\beta^*(-q)^{n-r}}{p^2+4q}(\alpha^r-\beta^r)^2, \tag{4.9}$$

Démonstration. à partir de la formule de Binet de la suite bicomplexe de Horadam $\mathbb{BC}_{W_n}$ (4.6) on trouve :

$$H_n^2 - H_{n+r}H_{n-r} = (\frac{A\alpha^*\alpha^n - B\beta^*\beta^n}{\alpha-\beta})^2 - \frac{A\alpha^*\alpha^{n+r} - B\beta^*\beta^{n+r}}{\alpha-\beta}\frac{A\alpha^*\alpha^{n-r} - B\beta^*\beta^{n-r}}{\alpha-\beta},$$

nous faisons quelques calculs dans la dernière équation ci-dessus, alors on obtient la formule suivante :

$$H_n^2 - H_{n+r}H_{n-r} = \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}(AB\alpha^*\beta^*(-q)^{n-r})(\alpha^r-\beta^r)^2,$$

à l'aide des propriétés de α et β, on obtient l'égalité suivante :

$$H_n^2 - H_{n+r}H_{n-r} = \frac{AB\alpha^*\beta^*(-q)^{n-r}}{p^2+4q}(\alpha^r-\beta^r)^2.$$

C'est le résultat recherché. ■

4.2.3 Identité de D'Ocagne de la suite bicomplexe de Horadam

Théorème 4.8 *L'identité de Catalan pour les éléments de la suite bicomplexe de Horadam $\mathbb{BC}_{W_n}$ pour des entiers $m \geq 0$, $n \geq 0$ et $m > n+1$ est définie par :*

$$H_mH_{n+1} - H_{m+1}H_n = \frac{AB\alpha^*\beta^*}{\alpha-\beta}(-q)^n(\alpha^{m-n}-\beta^{m-n}). \tag{4.10}$$

Démonstration. A partir de la formule de Binet de la suite bicomplexe de Horadam $\mathbb{BC}_{W_n}$ (4.6) on a

$$H_mH_{n+1} - H_{m+1}H_n = \left[\frac{A\alpha^*\alpha^m - B\beta^*\beta^m}{\alpha-\beta}\frac{A\alpha^*\alpha^{n+1} - B\beta^*\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right]$$
$$- \left[\frac{A\alpha^*\alpha^{m+1} - B\beta^*\beta^{m+1}}{\alpha-\beta}\frac{A\alpha^*\alpha^n - B\beta^*\beta^n}{\alpha-\beta}\right],$$

on trouve :

$$H_m H_{n+1} - H_{m+1} H_n = \frac{AB\alpha^*\beta^*}{(\alpha-\beta)^2}\left[-\alpha^m\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta^m + \alpha^{m+1}\beta^n + \alpha^n\beta^{m+1}\right],$$

nous faisons quelques calculs dans la dernière équation ci-dessus,
alors on obtient la formule suivante :

$$H_m H_{n+1} - H_{m+1} H_n = \frac{AB\alpha^*\beta^*}{\alpha-\beta}(-q)^n(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}).$$

C'est le résultat demandé. ■

Remarque 4.9 *Dans cette partie du chapitre* 4 *nous avons procédé de la même manière pour compléter les preuves et terminer le travail.*

Conclusion

Dans ce travail, nous avons d'abord décrit les nombres bicomplexes et présenté certaines suites récurrentes linéaires comme la suite de Fibonacci et la suite de Lucas, que nous avons généralisé dans la suite de Horadam.

Nous avons fusionné ces deux notions pour donner naissance à de nouvelles suites, dites suites bicomplexes qui sont des nombres bicomplexes avec des coefficients les termes successifs des suites de Fibonacci et de Lucas. Nous avons étudié et donné des résultats qui tiennent une place importante dans la littérature récentes sur ces nombres. Nous avons enfin utilisé les suites de Horadam pour définir un nouvel ensemble de nombres bicomplexes à coefficients les termes successifs de la suite de Horadam, qui généralise tous ces types de nombres, que nous appelons suites bicomplexes de Horadam. Nous avons donné plusieurs propriétés et quelques identités importantes.

Bibliographie

[1] A. Benmezai, Le q-analogue des suites de Fibonacci et de Lucas, Thèse de Doctorat. Université d'Oran, (2016).

[2] T. Britannica, Editors of encyclopaedia. fundamental theorem of algebra. Encyclopedia Britannica. https ://www.britannica.com/science/fundamental-theorem-of-algebra (2022)

[3] C. Cerroni, From the theory of "congeneric surd equations" to "Segre's bicomplex numbers". Historia Mathematica, 44(3), 232-251. (2017)

[4] P. Chandra, and Weisstein, E. W. Fibonacci number. from mathworld–A wolfram web resource. http ://mathworld. wolfram. com/FibonacciNumber. html. (2018).

[5] Cours de mathématiques ISA BTP, 1 année (2017)

[6] Ş. Çürük, , and Halıcı,S. On important identities with bicomplex Lucas numbers and their idempotent representations. In international marmara sciences congress imascon 2020-autumn (p. 267). (2020)

[7] S. Halici, and Karataş, A. bicomplex Lucas and Horadam numbers. arxiv preprint arXiv :1806.05038 (2018).

[8] S. Halici, Chapter First Online : On bicomplex Fibonacci numbers and their generalization 346 accesses 3 citations Part of the studies in systems, decision and control book series (SSDC,volume 179) (2018)

[9] S. Halici, On Fibonacci quaternions. adv. appl. clifford algebras, 22(2), 321-327. (2012).

[10] P. Jean Hormière, Suites récurrentes.

[11] S. Kaya, Nurkan, and Arslan Güven, İ. "A note on bicomplex Fibonacci and Lucas numbers." arXiv preprint arXiv :1508.03972 . (2015)

[12] D. Knuth, Nega Fibonacci numbers and the hyperbolic plane. In San Jose-Meeting of the mathematical association of America (Vol. 5). (2008).

[13] T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 2. John Wiley and Sons ; (2019) .

[14] W. Mamta, Introduction to bicomplex numbers. (2018).

[15] Y. K. Panwar, Singh,B. , and Gupta,V. K. generalized Fibonacci sequences and its properties. palestine journal of mathematics, 3(1), 141-147. (2014).

[16] G. B. Price, An introduction to multicomplex spaces and functions, Marcel Dekker, Inc. New York, (1991).

[17] A. Quarteroni, R. Sacco, Saleri, F. Méthodes Numériques : Algorithmes, analyse et applications. Springer Science and Business Media ; (2008).

[18] D. Rochon, A generalized mandelbrot set for bicomplex numbers, fractals, 8 , 355–368.(2000)

[19] D. Rochon, and Shapiro, M. On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers. Anal. Univ. Oradea, fasc. math, 11(71), p.110. (2004).

[20] B. Salas-Murillo, Combinatoire auteur : niveau : avancé STAGE : montpellier contenu : cours et exercices Séries génératrices (2013)

[21] C. Segre. Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici. Mathematische Annalen. ;40(3) :413-67. (1892)

[22] M. Shapiro, Rochon, and Dominic, "On algebraic properties of bicomplex and hyperbolic numbers." Anal. Univ. Oradea, fasc. math 11.71 : 110. (2004)

[23] L. Szynal, Anetta. "THE HORADAM HYBRID NUMBERS." Discussiones Mathematicae : General Algebra and Applications 38.1 (2018).

[24] G. Udrea, A note on the sequence $(W_n)_{n\geq 0}$ of AF Horadam. portugaliae mathematica, 53(2), 143-156. (1996).

[25] A. Vajiac, DC. Struppa, ME. Luna-Elizarrarás, M.Shapiro, Bicomplex holomorphic functions : the algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers. Birkhäuser ; (2015).