**République Algérienne Démocratique et Populaire**
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**
**Université Yahia Farès de Médéa**
**Département de Mathématiques et Informatique**

# MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications

par

Salah Eddine Fillali

# Méthode de sous et sur-solutions faibles pour certains problèmes elliptiques de type Dirichlet

Soutenu publiquement le 23 Juin 2022 devant le jury composé de

| | | | |
|---|---|---|---|
| *Président :* | H. AYADI | *M.C.A* | Université Médéa |
| *Examinateur :* | N. BENAICHOUCHE | *M.A.A* | Université Médéa |
| *Encadreur :* | R. SOUILAH | *M.C.A* | Université Médéa |

**Année universitaire : 2021-2022**

# Table des matières

**Remerciements** **II**

**Notation** **IV**

**Introduction** **V**

**1 Préliminaires** **1**
1.1 Espaces de Lebesgue . . . . . 1
1.2 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ . . . . . 3
1.3 Théorème de sous-suite . . . . . 6
1.4 Théorèmes du point fixe . . . . . 6
1.5 0pérateurs monotones . . . . . 6

**2 Problèmes elliptiques linéaires de type Dirichlet** **8**
2.1 Existence de solutions faibles . . . . . 9
2.2 Régularités de solutions faibles du problème (2.1) . . . . . 12

**3 Problème elliptique semi-linéaire** **13**
3.1 Position du problème . . . . . 13

**4 Problème elliptique quasi-linéaire** **20**
4.1 Position du problème . . . . . 20
4.2 Énoncé du résultat principal . . . . . 21
4.3 Approximation . . . . . 21
4.4 Estimations à priori . . . . . 25
4.5 Convergence forte de la suite $u_n$ dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ . . . . . 26
4.6 Passage à la limite . . . . . 27

# Remerciements

Tout d'abord, je remercie **ALLAH**, le clément et le miséricordieux de m'avoir donné la force et le courage de mener à bien ce modeste travail.

Mes premiers remerciements sont adressés à Monsieur **R. SOUILAH**, qui a dirigé mes travaux de recherches avec beaucoup de patience et de gentillesse.

Je voudrais présenter mes sentiments très sincères à Monsieur **N. BENAICHOUCHE**, président du jury qui a accepté de relire ce travail.

Je remercie vivement Monsieur **H. AYADI** qui m'a fait honneur en acceptant d'examiner mon travail avec intérêt.

Mes remerciements vont également à l'ensemble des enseignants du département de mathématiques qui ont contribué à notre formation.

Je remercie également ma famille, surtout mes parents qui m'ont soutenu tout au long de mon parcours.

Afin de n'oublier personne, mes vifs remerciements s'adressent à tous ceux qui m'ont aidée à la réalisation de ce modeste travail de prés ou de loin.

# Résumé

Dans ce mémoire de master, on va utiliser la méthode de sous et sur-solutions faibles pour démontrer l'existence de solutions faibles pour certains problèmes elliptiques de type Dirichlet.

**Mots clés :** Sous-solutions faibles, sur-solutions faibles, point fixe de Schauder, problème de Dirichlet pour les équations elliptiques.

# Notation

| | |
|---|---|
| $\Omega$ | un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ |
| $\partial\Omega$ | frontière topologique de $\Omega$ |
| $\|\Omega\|$ | mesure de Lebesgue du l'ensemble $\Omega$ |
| $x=(x_1,\cdots,x_N)$ | point générique de $\mathbb{R}^N$ |
| $dx=dx_1dx_2\cdots dx_N$ | mesure de Lebesgue sur $\Omega$ |
| $\overline{\Omega}$ | l'adhérence de l'ensemble $\Omega$ |
| $\rightharpoonup$ | la convergence faible |
| p.p. | presque partout |
| $V$ | un espace de Banach |
| $H$ | un espace de Hilbert |
| $V'$ | le dual topologique de $V$ |
| $\langle .,. \rangle_{V'\times V}$ | le crochet de dualité entre l'espace $V$ et son dual topologique $V'$ |
| $\|.\|$ | la norme sur l'espace de Banach $V$ |
| $(.,.)$ | le produit scalaire sur l'espace de Hilbert $H$ |
| $\|.\|$ | la norme sur l'espace de Hilbert $H$ |
| $\mathbb{R}^{m\times N}$ | l'espace des matrices réelles. |
| Id | désigne la matrice d'identité. |
| $f^+=\max(f,0)$, $f^-=\max(-f,0)$ | la partie positive et négative de la fonction $f$ |
| $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ | l'espace des fonctions continues |
| $\partial_i$ | La i-i ème dérivée partielle; $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$. |
| $\partial^\alpha$ | La dérivée d'ordre $\alpha$; $\partial^\alpha=\frac{\partial^{\|\alpha\|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_N^{\alpha_N}}$. |
| $\nabla u=(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_N})$ | gradient de $v:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ |
| div $v$ | La divergence du vecteur $v=(v_1,...,v_N)$ div $v=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+...+\frac{\partial v_N}{\partial x_N}$ |

# Introduction

Dans ce mémoire, on a utilisé la méthode de sous et sur-solutions faibles pour démontrer l'existence de solutions faibles pour certains problèmes elliptiques de type Dirichlet. Cette méthode a utilisé pour la première fois Par P. Hess (voir [14]), où il a démonter l'existence de solutions pour le problème elliptique semi-linéaires :

$$(\mathscr{P}_1) \quad \begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) + g(x,u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = l(x) & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N > 2$, et $M$ est une matrice elliptique bornée.
P. Hess et J. Deuel ([9]) ont généralisé cette méthode pour le problème elliptique quasi-linéaire :

$$(\mathscr{P}_2) \begin{cases} -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u)) + g(x,u,\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = l(x) & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $A(u) = -\mathrm{div}(a(x,u,\nabla u))$ est un opérateur de type Leray-Lions(voir [23, 21]), agissant de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual, et $g$ est une fonction de Carathéodory ayant une croissance d'ordre $p-1$ par rapport au gradient de la solution. La généralisation au cas où $g$ a une croissance naturelle (c-à-d, d'ordre $p$) a été effectuées par L. Boccardo, F. Murat, et J. P. Puel (voir [6]). Le développement de cette méthode a été effectué dans les articles [19, 18].

Ce mémoire est composé de quatre chapitres. Le premier est entièrement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaires pour la suite de ce travail. On va tout d'abord rappeler, sans démonstration, quelques résultats de base sur les espace fonctionnels, ensuite on va donner quelques définitions et résultats sur les opérateurs monotones.

Le chapitre 2 est une introduction au problème elliptique linéaire de type Dirichlet.
L'objectif du troisième chapitre est de présenter un résultat d'existence pour le problème $\mathscr{P}_1$ avec $l = 0$.

Dans le quatrième chapitré, on a étudié le problème $\mathscr{P}_2$ avec $l = 0$, l'opérateur $A$ est remplacé par un opérateur linéaire, et $g$ a une croissance quadratique.

CHAPITRE

# 1 Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et rappels des résultats nécessaires pour la suite de ce travail. nous introduisons quelques définitions, lemmes et quelques théorèmes sur les espaces fonctionnels, ensuite nous donnons quelques définitions et résultats sur les opérateurs monotones.

## 1.1 Espaces de Lebesgue

**Définition 1.1** *On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :*
*Pour* $1 \leq p < +\infty$

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad mesurable, \quad \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty \right\},$$

*mini de la norme*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Pour* $p = +\infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad mesurable, \quad \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)| < +\infty \right\},$$

*muni de la norme*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess|u(x)|.$$

$L^p(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leq p \leq \infty$ *et de Hilbert Pour* $p = 2$ *muni de produit scalaire*

$$(f, g) = \int_\Omega f(x) g(x) \, dx.$$

**Proposition 1.1 (Séparabilité, réflexivité et dual de $L^p(\Omega)$)**

1. $L^p(\Omega)$ *est séparable pour* $1 \leq p < +\infty$ *et réflexif pour* $1 < p < +\infty$.
2. *Le dual de* $L^p(\Omega)$ *pour* $1 \leq p < +\infty$ *est isomorphe à* $L^{p'}(\Omega)$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
3. $L^1(\Omega)$ *est séparable, ni réflexif et son dual est* $L^\infty(\Omega)$.
4. $L^\infty(\Omega)$ *ni séparable, ni réflexif et son dual est contient strictement* $L^1(\Omega)$.

**Preuve.** Voir [7]. ■

**Lemme 1.1 (Inégalité de Young)** *Soient $p$ et $q$ deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ . pour tout réel positif $a$ et $b$ , on a*

$$a\,b \leq \frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{q}\,b^q$$

**Théorème 1.2 (Inégalité de Hölder)** *Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $1 \leq p \leq \infty$ alors $f\,g \in L^1$ et*

$$\int |f\,g| \leq \|f\|_{L^p}\,\|g\|_{L^q}$$

**Preuve.** Voir [7, page 92]. ■

**Corollaire 1.3** *Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, Si $|\Omega| < +\infty$ alors $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.*

**Définition 1.2 (Convergence forte, convergence faible dans $L^p(\Omega)$)** *Soient $p \in [1,\infty[$ ,et $\{f_n, f\}$ une famille de $L^p(\Omega)$.*

- *on dit que $f_n$ converge fortement vers $f$ dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \to f$ dans $L^p(\Omega)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ .*
- *on dit que $f_n$ converge faiblement vers $f$ dans $L^p(\Omega)$ et on note $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^p(\Omega)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_\Omega (f_n - f).g = 0,\ \forall g \in L^{p'}$ .*
- *on dit que $f_n$ converge faible $*$ vers $f$ dans $L^\infty(\Omega)$ et on note $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ dans $L^\infty(\Omega)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_\Omega (f_n - f).g = 0,\ \forall g \in L^1$.*

**Lemme 1.2 (Lemme de Fatou)** *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction mesurable, à valeurs dans $[0,+\infty[$ on a*

$$\int\limits_\Omega \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\,dx \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int\limits_\Omega f_n(x)\,dx.$$

**Preuve.** Voir [20]. ■

**Théorème 1.4 (Théorème de convergence dominée)** *Soit $1 \leq p < +\infty$ et $(f_n)_n \subset L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$. On suppose que,*

1. *$f_n \longrightarrow f \quad p.p \quad dans\,\Omega$.*
2. *il existe $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_n| \leq g \quad p.p \quad dans\,\Omega$ .*

*Alors*

$$f_n \longrightarrow f \quad dans \quad L^p(\Omega).$$

**Preuve.** Voir [20]. ■

**Définition 1.3 (Equi-intégrabilité)** *Soit $1 \leq p < \infty$ ,on dit qu'une suite de fonction $(f_n)_n$ de $L^p(\Omega)$ est equi-intégrable, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall E \subset \Omega$ mesurable , avec $|E| < \delta$ on a $\int\limits_E |f_n|^p < \varepsilon$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

**Théorème 1.5 (Théorème de Vitali )** *Soient $1 \leq p < \infty$ , et une suite de fonction $(f_n)_n$ dans $L^p(\Omega)$,on suppose que*

1. $f_n \longrightarrow f \quad p.p \quad dans\, \Omega.$
2. $(f_n)_n$ *est equi-intégrable.*

*Alors*

$$f \in L^p(\Omega) \quad et \quad f_n \longrightarrow f \quad dans \quad L^p(\Omega)$$

**Preuve.** Voir [22, Theorem B.101, page 674]. ■

**Définition 1.4 (Fonction de Carathéodory)** *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dite que $f$ est de Carathéodory si :*

1. $f(.,s) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad$ *mesurable pour tout $s \in \mathbb{R}$.*
2. $f(x,.) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad$ *continue $p.p$, $x \in \Omega$.*

**Définition 1.5 (Opérateur de Nemitski)** *Soient $u : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. l'opérateur $N_f$ défini par $(N_f u)(x) = f(x, u(x))$ est appelé opérateur de Nemitski relatif à $f$.*

***Théorème 1.6*** *Si $f$ est de carathéodory et elle existe une fonction positive $a \in L^q(\Omega)$ et une constante $b > 0$, tels que*

$$|f(x,t)| \leq a(x) + b|t|^{\frac{p}{q}}$$

*alors l'opérateur de Nemitski est continu de $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.*

## 1.2 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

**Définition 1.6** *[7]. On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, pour $1 \leq p \leq +\infty$ par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \quad \nabla u \in (L^p(\Omega))^N\}$$

*muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} & si \quad 1 \leq p < \infty \\ \max\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega)}\right) & si \quad p = \infty \end{cases}$$

*pour $p = 2$, l'espace $W^{1,2}(\Omega)$ noté $H^1(\Omega)$ est de Hilbert muni du produit scalaire*

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

*et de la norme*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Proposition 1.7** *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach, et séparable pour $1 \leq p < +\infty$, et réflexif pour $1 < p < +\infty$.*

**Preuve.** Voir [7, Proposition 9.1.]. ■

**Définition 1.7 ([10])** . *Soit* $1 \leq p < +\infty$.
*On note* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *la fermeture de* $\mathscr{D}(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$, *(c'est-à-dire* $W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{\mathscr{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$*). Si on suppose de plus que* $\partial\Omega$ *est de classe* $\mathscr{C}^1$, *on a la caractérisation suivante de l'espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *:*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega), \quad u_{|\partial\Omega} = 0\}.$$

*Si* $p > 1$ , *on note* $W^{-1,p'}(\Omega)$ *le dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

**Définition 1.8 (Convergence faible, convergence forte dans $W^{1,p}(\Omega)$)**
*Soient* $p \in [1, +\infty[$ *et* $\{f_n, f\}$ *une famille de* $W^{1,p}(\Omega)$.

- *On dit que* $f_n$ *converge fortement vers* $f$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *et on note* $f_n \to f$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *si*
$$f_n \to f \text{ dans } L^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \to \nabla f \text{ dans } L^p(\Omega)$$
- *On dit que* $f_n$ *converge faiblement vers* $f$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *et on note* $f_n \rightharpoonup f$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *si*
$$f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^p(\Omega) \quad et \quad \nabla f_n \rightharpoonup \nabla f \text{ dans } L^p(\Omega)$$

**Théorème 1.8 (Rellich-Kondrachov)**
*Soit* $\Omega$ *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$. *L'injection* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *dans* $L^p(\Omega)$ *est compacte pour tout* $1 \leq p \leq +\infty$.

**Preuve.** Voir [30, Lemma 11.2, page 56]. ■

**Théorème 1.9 (Inégalité de Poincaré)** *Soit* $1 \leq p < +\infty$, *on suppose que* $\Omega$ *est un ouvert borné dans une direction de* $\mathbb{R}^N$ *alors, il existe une constante positive* $C = C(p, N, \Omega)$ *telle que :*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|\nabla u\|_{L^p}, \qquad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

*Par conséquence l'application* $u \mapsto \|\nabla u\|_{L^p}$ *définie une norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$, *équivalente à la norme usuelle.*

**Preuve.** Voir [16, page 48]. ■

**Théorème 1.10 (Stampacchia)** *Soient* $1 \leq p \leq +\infty$, *et* $\varphi$ *une fonction de* $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *vérifiant* $\varphi(0) = 0$ , *de dérivée bornée, alors pour tout* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *on a :*

$$\varphi(u) \in W^{1,p}(\Omega) \quad et \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi \circ u) = (\varphi' \circ u)\frac{\partial}{\partial x_i} \quad p.p \text{ dans} \Omega$$

**Preuve.** Voir [10, Theorem 4]. ■

**Définition 1.9 ([20])** *Soit* $u \in L^1(\Omega)$, *et* $c \in \mathbb{R}$. *On pose*

$$E_c(u) = \left\{ x \in \Omega; \quad \frac{1}{|B(x,\rho)|} \int_{B(x,\rho)} |u(y) - c| dy \to 0, \quad quand\, \rho \to 0 \right\}.$$

**Théorème 1.11** *Soit* $\varphi$ *une fonction Lipschitzienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ *par morceaux, et avec seulement un nombre fini de points de non dérivabilité* $c_1, c_2, \cdots, c_k$. *Si* $|\Omega| = +\infty$, *on suppose en plus que* $\varphi(0) = 0$. *Alors pour tout* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *on a :*

1. $\varphi(u) W^{1,p}(\Omega)$,

2. $\nabla\varphi(u)=\varphi'(u)\nabla u$ *sur* $\Omega\setminus\cup_{i=1}^{k}E_{c_i}(u)$, *et* $\nabla\varphi(u)$ *sur* $\cup_{i=1}^{k}E_{c_i}(u)$.

**Preuve.** Voir [20, Theorem 3.3]. ■

**Théorème 1.12** *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 1.11, l'application* $u\mapsto\varphi(u)$ *est*

1. *continu de* $W^{1,p}(\Omega)$ *fort dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *fort pour tout* $p<+\infty$,
2. *séquentiellement continu de* $W^{1,p}(\Omega)$ *faible dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *faible (ou faible* $*$ *pour* $p=+\infty$*).*

**Preuve.** Voir [20, Theorem 3.4]. ■

**Théorème 1.13 (Dérivation d'un produit)** *Soient* $u,v\in W^{1,p}(\Omega)\cap L^{\infty}(\Omega)$ *avec* $1\le p\le+\infty$ *alors* $uv\in W^{1,p}(\Omega)\cap L^{\infty}(\Omega)$

$$et\quad\forall i,\ 1\le i\le N,\ \frac{\partial}{\partial x_i}(uv)=\frac{\partial u}{\partial x_i}v+u\frac{\partial v}{\partial x_i}\qquad p.p\ dans\ \Omega$$

**Preuve.** Voir [10, Theorem 4]. ■

**Définition 1.10 (Fonction de troncature)** *Pour tout* $k>0$, *la fonction troncature de niveau* $k$ *est la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$T_k(s)=\begin{cases}-k, & si\quad s<-k,\\ s, & si\quad |s|\le k,\\ k, & si\quad s>k.\end{cases}$$

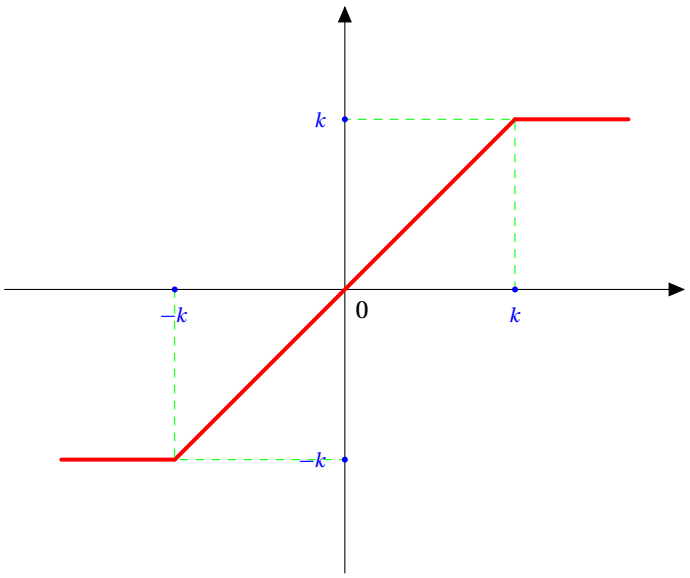



FIGURE 1.1 – Graphe de la fonction $T_k$

**Théorème 1.14**

1. *Si* $u\in L^p(\Omega)$ *donc* $T_k(u)\to u$ *dans* $L^p(\Omega)$ *quand* $k\to+\infty$.
2. *Si* $u\in W^{1,p}(\Omega)$ *donc* $T_k(u)\to u$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *quand* $k\to+\infty$.

**Preuve.** voir [20, page 88]. ■

## 1.3 Théorème de sous-suite

**Théorème 1.15** *Soit $X$ un espace topologique et $x_n$ une suite de cet espace qui a la propriété qu'il existe $x \in X$ tel que de toute sous-suite de cette suite, on peut extraire une nouvelle sous-suite qui converge vers $x$. Alors la suite entière $x_n$ converge vers $x$.*

**Preuve.** Voir [20, Lemma 1.1]. ■

**Théorème 1.16**

- *Soit $E$ un espace de Banach réflexif (i.e. $E$ est isomorphe à $E''$), alors toute suite bornée de $E$, on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans $E$.*
- *Soit $E$ un espace de Banach séparable (i.e. qui admet une partie dénombrable dense), alors toute suite bornée de $E'$, on peut extraire une sous suite qui converge $\star$-faible dans $E'$.*

## 1.4 Théorèmes du point fixe

**Théorème 1.17 (Théorème du point fixe de Schauder)** *Soit $X$ un espace de Banach, $K$ un convexe fermé de $X$ et $S$ une application continue de $K$ dans $K$ telle que $S(K)$ est relativement compact, alors $S$ admet un point fixe.*

**Preuve.** voir [27, page 303]. ■

## 1.5 0pérateurs monotones

Dans ce qui suit, $V$ est un espace de Banach réflexif et séparable, $A$ est un opérateur de $V$ dans $V'$ (en général non linéaire).

**Définition 1.11 (Opérateur borné)** *On dit que l'opérateur $A$ est borné, s'il transforme les bornés de $V$ en bornés de $V'$.*

**Définition 1.12 (Opérateur monotone)** *On dit que l'opérateur $A$ est monotone si*

$$\forall u, v \in V, \qquad \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0. \tag{1.1}$$

*On dit que $A$ est strictement monotone si de plus $\langle A(u) - A(v), u - v \rangle = 0$ implique $u = v$*

**Définition 1.13 (Opérateur hémicontinu)** *On dit que l'opérateur $A$ est hémicontinu si $\forall u, v, w \in V$, l'application $t \mapsto \langle A(u + tv), w \rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

**Définition 1.14 (Opérateur fortement continu)** *On dit que l'opérateur $A$ est fortement continu (ou totalement continu) si $A$ est continu de $V$ faible dans $V'$, c-à-d., si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $V$, alors $A(u_n) \longrightarrow A(u)$ fortement dans $V'$.*

**Théorème 1.18** *Soit $A$ un opérateur borné, hémicontinu et monotone. Alors $A$ est continu de $V$ fort dans $V'$ faible.*

**Preuve.** Voir le livre Le dret [20]. ■

**Définition 1.15 (Opérateur coercif)** *On dit que l'opérateur $A$ est coercif si*

$$\exists \zeta : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ : \lim_{s \longrightarrow +\infty} \zeta(s) = +\infty \text{ et } \langle A(u), u\rangle \geq \zeta(\|u\|)\|u\|.$$

*En d'autres termes, $A$ est coercif si*

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|} = +\infty. \tag{1.2}$$

**Théorème 1.19** *Soit $A : V \longrightarrow V'$ un opérateur borné, hémicontinu, monotone et coercif. Alors $A$ est surjectif.*

**Preuve.** Voir [23, théorème 2.1, p. 171] ■

**Définition 1.16 (Opérateur pseudo-monotone)** *On dit que l'opérateur $A$ est pseudo-monotone si*

*(i) $A$ est borné,*

*(ii) lorsque $u_n \rightharpoonup u$ dans $V$ faiblement et $\limsup_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$ alors*

$$\liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle \qquad \forall v \in V. \tag{1.3}$$

La proposition suivante donne une caractérisation de la pseudo-monotonie.

**Proposition 1.20** *Soit $A : V \longrightarrow V'$. l'opérateur $A$ est pseudo-monotone si et seulement si $A$ est borné et satisfait la condition suivante :*

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } V \\ \\ \text{et } \limsup_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0 \end{array}\right\} \text{ alors } \left\{\begin{array}{l} A(u_n) \rightharpoonup A(u) \text{ faiblement dans } V' \\ \\ \text{et } \lim_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle = 0. \end{array}\right.$$

**Preuve.** Voir [24, Proposition 3.66, page 85] ■

**Proposition 1.21** *Si $A : V \longrightarrow V'$ est un opérateur pseudo-monotone, alors les propriétés suivantes sont satisfaites :*

*(i) Si $u_n \rightharpoonup u$ faiblement dans $V$ et $A(u_n) \rightharpoonup \psi$ faiblement dans $V'$ avec*

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n\rangle \leq \langle \psi, u\rangle,$$

*alors $\psi = A(u)$.*

*(ii) Si $u_n \to u$ dans $V$, alors $A(u_n) \rightharpoonup A(u)$ faiblement dans $V'$.*

**Proposition 1.22** *Soit $A, B : V \longrightarrow V'$ deux opérateurs. Les assertions suivantes sont vraies*

1. *Si $A$ est borné, hémicontinu et monotone, alors $A$ est pseudo-monotone.*
2. *Si $A$ et $B$ sont pseudo-monotones, alors $A+B$ est pseudo-monotone.*
3. *Si $A$ est pseudo-monotone et $B$ est fortement continu, alors $A+B$ est pseudo-monotone.*

**Preuve.** Voir [31, Proposition 27.6, page 586] et [24, Proposition 3.70, page 87]. ■

**Théorème 1.23 (Leray-Lions)** *Tout opérateur $A$ pseudo-monotone et coercif est surjectif; cela signifie, pour tout $f \in V'$, il y a au moins une solution à l'équation*

$$A(u) = f \tag{1.4}$$

**Preuve.** Voir [23, Théorème 2.7., p. 180]. ■

CHAPITRE

# 2 Problèmes elliptiques linéaires de type Dirichlet

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $N > 2$, et $M$ est une matrice elliptique bornée; c-à-d., il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\alpha|\xi|^2 \leq M(x)\xi \cdot \xi, \qquad |M(x)| \leq \beta, \tag{2.2}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$ et presque partout $x \in \Omega$. De plus, on suppose que la fonction $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$.

**Définition 2.1** *On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une sur-solution faible du problème (2.1), si pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\varphi \geq 0$ dans $\Omega$, on a :*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx \geq \int_\Omega f\varphi \, dx. \tag{2.3}$$

**Définition 2.2** *On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une sous-solution faible du problème (2.1), si pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ avec $\varphi \geq 0$ dans $\Omega$, on a :*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx \leq \int_\Omega f\varphi \, dx. \tag{2.4}$$

**Définition 2.3** *On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (2.1), si*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.5}$$

**Remarque 1** *l'intégrale $\int_\Omega f\varphi \, dx$ est bien défini ,en effet :*

*L'inégalité de Hölder avec les exposants $2^* = \frac{2N}{N-2}$ et $2^{*'} = \frac{2N}{N+2}$ implique*

$$\left|\int_\Omega f\varphi \, dx\right| \leq \| f \|_{L^{2^{*'}}(\Omega)} \| \varphi \|_{L^{2^*}(\Omega)}$$

*et on a déjà dit que $f \in L^{2^{*'}}$ et $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ , et comme $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ donc $\varphi \in L^{2^*}(\Omega)$.*

## 2.1 Existence de solutions faibles

**Théorème 2.1** *On suppose que l'hypothèse* (2.2) *est satisfaite, et que* $f \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$. *Alors le problème* (2.1) *admet une unique solution faible.*

Tout d'abord, on va démontrer l'existence. Pour cela on va utiliser deux méthodes : la première en utilisant le théorème de Lax-Milgram (représentation de Riesz), et la deuxième est dite méthode de monotonie (théorème de surjectivité de Leray-Lions 1.23), qui est basée sur la théorie des opérateurs monotones.

Avant de commencer la preuve, on énonce le théorème de Lax-Milgram.

**Théorème 2.2 (Lax-Milgram)** *Soit* $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme bilineaire, continue et coercive, et soit* $L \in H'$, *donc il existe un unique élément* $u$ *de* $H$ *tel que :*

$$a(u,\varphi) = L(\varphi) \qquad \forall \varphi \in H$$

**Preuve.**

1. **Existence via le théorème de Lax-Milgram.**

on définit la forme linéaire continue $L : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$L(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \, dx$$

et on définit la forme bilineaire $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$a(u,\varphi) = \langle A(u), \varphi \rangle = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx$$

d'abord, on montre que $a$ est coercive et continue.

(a). $a$ **est coercive.**
en utilisant l'hypothèse (2.2) ,on obtient pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\langle A(u), u \rangle = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla u \, dx &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \\ &= \alpha \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

par suite, on obtient

$$\frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq c \, \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

d'où $\frac{\langle A(u),u \rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \longrightarrow +\infty$ si $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow +\infty$.

(b). *a* **est continue.**
en utilisant l'hypothèse (2.2) et l'inégalité de Hölder, on obtient, pour tout $u, \varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}|\langle A(u), \varphi \rangle| = |\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx| &\leq \beta \int_\Omega |\nabla u \nabla \varphi| \, dx \\ &\leq \beta \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \beta \, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

2. **Existence via la méthode de monotonie.**
On considère l'opérateur $A$ défini par :

$$\begin{aligned} A : \ V = H_0^1(\Omega) &\longrightarrow V' = H^{-1}(\Omega) \\ u &\longmapsto A(u), \end{aligned} \tag{2.6}$$

avec

$$\langle A(u), \varphi \rangle = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Nous allons montrer que l'opérateur $A$ est coercif et pseudo-monotone .le résultat découlera du théorème 1.23.

(a). *A* **est coercif.**
en utilisant l'hypothèse (2.2) ,on obtient pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\langle A(u), u \rangle = \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla u \, dx &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \\ &= \alpha \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

par suite, on obtient

$$\frac{\langle A(u), u \rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \geq c \, \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

d'où $\frac{\langle A(u),u \rangle}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}} \longrightarrow +\infty$ si $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \longrightarrow +\infty$ .

(b). *A* **est pseudo-monotone.**

(i) On montre que l'opérateur $A$ est borné :
Soient $u, \varphi \in H_0^1$, en utilisant l'hypothèse (2.2) et l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}|\langle A(u), \varphi \rangle| = |\int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx| &\leq \beta \int_\Omega |\nabla u \nabla \varphi| \, dx \\ &\leq \beta \, \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \beta \, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

et on a

$$\|A(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} = Sup \left\{ \left| \langle A(u), \varphi \rangle \right| ; \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1 \right\} \leq \beta \|u\|_{H_0^1(\Omega)}$$

donc $\|A(u)\|_{H^{-1}(\Omega)}$ est borné si $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ est borné.

(ii) On suppose que $u_n \rightharpoonup u$ dans $V = H_0^1(\Omega)$ faiblement
et

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0 \tag{2.7}$$

et on montre que $\liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - w\rangle \geq \langle A(u), u - w\rangle \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega).$

On va d'abord montrer que $A$ est monotone :
soient $u, v \in H_0^1$, en utilisant l'hypothèse (2.2), on obtient

$$\begin{aligned}\langle A(u) - A(v), u - v\rangle &= \langle A(u - v), u - v\rangle \\ &= \int_\Omega M(x)\nabla(u - v)\cdot\nabla(u - v) \\ &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla(u - v)|^2 \geq 0\end{aligned}$$

Comme l'opérateur $A$ est monotone, alors

$$\langle A(u_n), u_n - u\rangle \geq \langle A(u), u_n - u\rangle$$

En passant à la limite inférieure , et en utilisant le fait que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle \geq 0 \tag{2.8}$$

De (2.7) et (2.8), en déduit que

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle = 0 = \liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle$$

et par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - u\rangle = 0 \tag{2.9}$$

Soit $w \in H_0^1(\Omega)$, en posant $v = u + t(w - u)$, pour $t \in ]0, 1[$.
En utilisant la monotonie du l'opérateur $A$, on obtient

$$\langle A(u_n) - A(v), u_n - v\rangle \geq 0$$

et par conséquent

$$\langle A(u_n) - A(v), u_n - u - t(w - u)\rangle \geq 0$$

d'où

$$t\langle A(u_n), u - w\rangle \geq -\langle A(u_n), u_n - u\rangle + \langle A(v), u_n - u\rangle + t\langle A(v), u - w\rangle$$

et par suite

$$t\langle A(u_n), u_n - w\rangle + t\langle A(u_n), u - u_n\rangle \geq -\langle A(u_n), u_n - u\rangle + \langle A(v), u_n - u\rangle + t\langle A(v), u - w\rangle \tag{2.10}$$

En utilisant (2.9) et le fait que $u_n \rightharpoonup u$, et en passant à la limite inférieure quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité (2.10), on obtient

$$t \liminf_{n\to+\infty} \langle A(u_n), u_n - w\rangle \geq t\langle A(v), u - w\rangle$$

En divisant par $t$, on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - w\rangle \geq \langle A(v), u - w\rangle \tag{2.11}$$

comme l'opérateur $A$ est linéaire, alors $A(v) = A(u + t(w-u)) = (1-t)A(u) + tA(w)$
En substituant dans (2.11),il vient

$$\liminf_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - w\rangle \geq (1-t)\langle A(u), u - w\rangle + t\langle A(w), u - w\rangle$$

En passant à la limite quand $t$ tend vers 0, on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty}\langle A(u_n), u_n - w\rangle \geq \langle A(u), u - w\rangle \qquad \forall w \in H_0^1(\Omega).$$

■

- **Démonstration de l'unicité**.
  On suppose que le problème (2.1) admet deux solutions $u_1$ et $u_2$, donc on a

$$\int_\Omega M(x)\nabla(u_1 - u_2)\cdot\nabla\varphi = 0, \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{2.12}$$

  En prenant $\varphi = u_1 - u_2$ dans (2.12) et en utilisant l'hypothèse (2.2), on obtient

$$0 \leq \alpha \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 \leq \int_\Omega M(x)\nabla(u_1 - u_2)\cdot\nabla(u_1 - u_2) = 0$$

  Alors, en déduit que $u_1 = u_2$.

## 2.2 Régularités de solutions faibles du problème (2.1)

Avant d'énoncer les résultats de régularité, on va rappeler un lemme d'analyse, dû à G. Stampacchia [25].

**Lemme 2.1 (Lemme de Stampacchia.)** *soit $\psi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction décroissante telle que :*

$$\psi(h) \leq \frac{M\psi(k)^\delta}{(h-k)^\gamma}, \qquad \forall h > k > 0$$

*où $M > 0$, $\delta > 1$ et $\gamma > 0$, donc $\exists\, d$ tel que $\psi(d) = 0$.*

**Preuve.** Voir [25, Lemma 2.2, page 24]. ■

**Théorème 2.3** *On suppose que l'hypothèse (2.2) est satisfaite, et que $f \in L^m(\Omega)$ avec $m > \frac{N}{2}$. Alors la solution $u$ du problème (2.1) appartient l'espace $L^\infty(\Omega)$.*

**Preuve.** Voir [25]. ■

CHAPITRE

# 3 Problème elliptique semi-linéaire

## 3.1 Position du problème

Dans ce chapitre on va étudier le problème suivant

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla u)+g(x,u)=f & \text{dans } \Omega, \\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $M$ est une matrice elliptique bornée ; c-à-d., il existe $\alpha>0$ et $\beta>0$ tels que

$$\alpha|\xi|^2 \le M(x)\xi\cdot\xi, \qquad |M(x)|\le\beta, \tag{3.2}$$

pour tout $\xi\in\mathbb{R}^n$ et $x\in\Omega$ presque partout. On suppose en outre que

$$f\in H^{-1}(\Omega), \tag{3.3}$$

et $g:\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory.

**Définition 3.1** *Une solution du problème* (3.1) *est une fonction* $u\in H_0^1(\Omega)$ *telle que* $g(x,u)\in L^2(\Omega)$ *et de plus* $u$ *satisfait :*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla v\,dx+\int_\Omega g(x,u)\,v\,dx=\int_\Omega f\,v\,dx, \quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{3.4}$$

**Définition 3.2** *Une fonction* $\psi\in H^1(\Omega)$ *est dit sur-solution faible du problème* (3.1) *si*

$$\begin{cases} g(x,\psi)\in L^2(\Omega), & \\ \psi\ge 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega M(x)\nabla\psi\nabla v\,dx+\int_\Omega g(x,\psi)v\,dx\ge\int_\Omega f\,v\,dx & \forall v\in H_0^1(\Omega), \quad v\ge 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.5}$$

**Définition 3.3** *Une fonction* $\phi\in H^1(\Omega)$ *est dit sous-solution faible du problème* (3.1) *si*

$$\begin{cases} g(x,\phi)\in L^2(\Omega), & \\ \phi\le 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_\Omega M(x)\nabla\phi\nabla v\,dx+\int_\Omega g(x,\phi)v\,dx\le\int_\Omega f\,v\,dx & \forall v\in H_0^1(\Omega), \quad v\ge 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

**Théorème 3.1** *On suppose que $\phi$ et $\psi$ sont respectivement sous-solution et sur-solution faible du problème (3.1), avec $\phi \le \psi$ dans $\Omega$. On suppose de plus que :*

$$\int_\Omega \sup_{\phi(x)\le s\le\psi(x)} |g(x,t)|^2\, dx < \infty. \tag{3.7}$$

*Alors le problème (3.1) admet une solution $u$ avec $\phi \le u \le \psi$ dans $\Omega$.*

**Preuve.** En raisonnant comme [14, Theorem 1, page 463], on considère la fonction $\tilde{g}$ : $\Omega\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x,s) &= \begin{cases} g(x,\psi(x)), & s \ge \psi(x),\\ g(x,s), & \phi(x)\le s\le\psi(x),\\ g(x,\phi(x)), & s\le\phi(x).\end{cases}\\ &= g(x,T(s)).\end{aligned} \tag{3.8}$$

où

$$T(s)(x) = \begin{cases} \psi(x), & s \ge \psi(x),\\ s, & \phi(x)\le s\le\psi(x),\\ \phi(x), & s\le\phi(x).\end{cases} \tag{3.9}$$

En vertu de (3.7), il existe une constante positive $c_0$ telle que :

$$\Big|\int_\Omega \tilde{g}(.,u)v\, dx\Big| \le c_0\|v\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u,\, v\in L^2(\Omega). \tag{3.10}$$

On pose

$$b(x,s) = \begin{cases} s-\psi(x), & s\ge\psi(x),\\ 0, & \phi(x)\le s\le\psi(x),\\ s-\phi(x), & s\le\phi(x).\end{cases} \tag{3.11}$$

pour $x\in\Omega$ et $s\in\mathbb{R}$. Soit $\mu>0$. On considère le problème perturbé suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u)+\tilde{g}(x,u)+\mu\, b(x,u) = f & \text{dans } \Omega,\\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega,\end{cases} \tag{3.12}$$

**Lemme 3.1** *Le problème (3.12) admet au-moins une solution.*

**Preuve.** Le problème (3.12) équivaut au problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} u\in H_0^1(\Omega),\\ A(u)=f,\end{cases} \tag{3.13}$$

où $\mathscr{A}$ : $V=H_0^1(\Omega)\longrightarrow V'=H^{-1}(\Omega)$ est l'opérateur défini par :

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{A}(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} &= \int_\Omega M(x)\nabla w\nabla v\, dx + \int_\Omega \tilde{g}(x,w)v\, dx\\ &\quad +\mu\int_\Omega b(x,u)v\, dx.\end{aligned} \tag{3.14}$$

Pour démontrer que le problème (3.13) admet au-moins une solution, il suffit de démontrer, moyennant du théorème 1.23, que l'opérateur $\mathscr{A}$ est pseudo-monotone et coercif. D'après le théorème 1.22, il suffit de montrer que l'opérateur $\mathscr{A}$ est une somme de trois opérateurs dont l'un est pseudo-monotone et les autres sont fortement continus. Pour cela, on pose $\mathscr{A} = A + B + G$ où

$$\begin{aligned}
\langle A(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} &= \int_\Omega M(x)\nabla u \nabla v \, dx, \\
\langle B(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} &= \mu \int_\Omega b(x,u)v \, dx, \\
\langle G(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} &= \int_\Omega \tilde{g}(x,u)v \, dx.
\end{aligned}$$

1. **$\mathscr{A}$ est pseudo-monotone.**

On a déjà démontrer dans le chapitre 2 que l'opérateur $A$ est pseudo-monotone. Il reste à prouver que les opérateur $B$ et $G$ sont fortement continus.

**Lemme 3.2** *les opérateurs $B$ et $G$ sont fortement continus.*

**Preuve.**

(a). **$B$ est fortement continu**. Soit $u_n$ une suite de $H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \tag{3.15}$$

On doit démontrer que la suite $B(u_n)$ converge fortement vers $B(u)$ dans l'espace $H^{-1}(\Omega)$. Soit $u_{n'}$ une sous-suite de $u_n$. En vertu de (3.15), la suite $u_{n'}$ admet une sous-suite, notée encore $u_{n'}$, telle que :

$$u_{n'} \longrightarrow u \quad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{3.16}$$

et

$$u_{n'} \longrightarrow u \quad \text{p.p dans } \Omega. \tag{3.17}$$

Puisque $b$ est continue par rapport au deuxième argument, on a

$$b(x, u_{n'}) \longrightarrow b(x,u) \quad \text{p.p dans } \Omega. \tag{3.18}$$

En utilisant (3.16) et (3.18), il s'en suit du théorème de convergence dominée :

$$b(x, u_{n'}) \longrightarrow b(x,u) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{3.19}$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. En utilisant l'inégalité de Hölder, puis l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\langle B(u_{n'}) - B(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\right| &\le \mu \int_\Omega |b(x,u_{n'}) - b(x,u)||v| \, dx \\
&\le \mu \|b(x,u_{n'}) - b(x,u)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le \mu C_\Omega \|b(x,u_{n'}) - b(x,u)\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

De (3.20), on en déduit que

$$\|B(u_{n'}) - B(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \le \mu C_\Omega \|b(x,u_{n'}) - b(x,u)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.21}$$

Passant à la limite dans (3.21), en utilisant (3.19), on en déduit que

$$B(u_{n'}) \longrightarrow B(u) \quad \text{fortement dans } H^{-1}(\Omega).$$

Par conséquent, en utilisant le théorème 1.15, on en déduit que

$$B(u_n) \longrightarrow B(u) \quad \text{fortement dans } H^{-1}(\Omega). \tag{3.22}$$

(b). **$G$ est fortement continu.** Soit $u_n$ une suite de $H_0^1(\Omega)$ telle que :

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \tag{3.23}$$

Soit $u_{n'}$ une sous-suite de $u_n$. En utilisant le fait que l'application $T$ (définie en (3.9)) est séquentiellement continu de $H^1(\Omega)$ faible dans $H^1(\Omega)$ faible (voir le théorème 1.12), il s'en suit que

$$Tu_{n'} \rightharpoonup Tu \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega) \tag{3.24}$$

En vertu de (3.24), la suite $u_{n'}$ admet une sous-suite, notée encore $u_{n'}$, telle que :

$$Tu_{n'} \longrightarrow Tu \quad \text{dans } L^2(\Omega). \tag{3.25}$$

et

$$Tu_{n'} \longrightarrow Tu \quad \text{p.p dans } \Omega. \tag{3.26}$$

Comme $g$ est continue par rapport au deuxième argument, alors

$$g(x, Tu_{n'}) \longrightarrow g(x, Tu) \quad \text{p.p dans } \Omega. \tag{3.27}$$

Soit $E$ un sous ensemble mesurable de $\Omega$. En utilisant (3.7), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_E |g(x, Tu_{n'})|\, dx &= \int_{E\cap\{u_{n'}<\phi\}} |g(x,\phi)|\, dx + \int_{E\cap\{u_{n'}>\psi\}} |g(x,\psi)|\, dx \\
&\quad + \int_{E\cap\{\phi\le u_{n'}\le\psi\}} |g(x, u_{n'})|\, dx \\
&\le \int_E |g(x,\phi)|\, dx + \int_E |g(x,\psi)|\, dx \\
&\quad + \int_{E\cap\{\phi\le u_{n'}\le\psi\}} |g(x, u_{n'})|\, dx \\
&\le \left[C + \|g(x,\phi)\|_{L^2(\Omega)} + \|g(x,\psi)\|_{L^2(\Omega)}\right] |E|^{\frac{1}{2}},
\end{aligned} \tag{3.28}$$

où $C$ est une constante positive ne dépend pas de $|E|$. De (3.28), il découle que

$$\lim_{|E|\to 0} \int_E |g(x, Tu_{n'})|\, dx = 0. \tag{3.29}$$

Ce qui prouve bien que la suite $g(x, Tu_{n'})$ est équi-intégrable, donc par le théorème de Vitali (voir 1.5), on en déduit que

$$g(x, Tu_{n'}) \longrightarrow g(x, Tu) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{3.30}$$

Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. En utilisant l'inégalité de Hölder, puis l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\langle G(u_{n'})-G(u), v\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}\right| &\leq \int_\Omega |g(x,Tu_{n'})-g(x,Tu)||v|\,dx \\ &\leq \|g(x,Tu_{n'})-g(x,Tu)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_\Omega\|g(x,Tu_{n'})-g(x,Tu)\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.31}$$

De (3.31), on en déduit que

$$\|G(u_{n'})-G(u)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C_\Omega\|g(x,Tu_{n'})-g(x,Tu)\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.32}$$

Passant à la limite dans (3.32), en utilisant (3.30), on en déduit que

$$G(u_{n'}) \longrightarrow G(u) \quad \text{fortement dans } H^{-1}(\Omega).$$

Par conséquent, en utilisant le théorème 1.15, on en déduit que

$$G(u_n) \longrightarrow G(u) \quad \text{fortement dans } H^{-1}(\Omega). \tag{3.33}$$

■

2. $\mathscr{A}$ **est coercif.** Tout d'abord, on montre qu'il existe deux constantes positive $c_1$ et $c_2$ telles que

$$\langle B(u), u\rangle \geq c_1\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - c_2, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{3.34}$$

En effet, pour $u \in H_0^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\langle B(u), u\rangle &= \mu\int_{\{u>\psi\}}(u-\psi)u\,dx + \mu\int_{\{u<\phi\}}(u-\phi)u\,dx \\ &\geq \mu\int_\Omega |u|^2\,dx - \mu\int_{\{\phi<u<\psi\}}|u|^2\,dx\,dx - \mu\int_{\{u>\psi\}}\psi u\,dx - \mu\int_{\{u<\phi\}}\phi u\,dx \\ &\geq \mu\int_\Omega |u|^2\,dx - \mu\int_\Omega \left[|\phi|^2+|\psi|^2\right]dx - \mu\int_\Omega \left[|\phi|+|\psi|\right]|u|\,dx \\ &\geq \frac{\mu}{2}\int_\Omega |u|^2\,dx - \mu\int_\Omega \left[|\phi|^2+|\psi|^2\right]dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega \left[|\phi|+|\psi|\right]^2\,dx \\ &\geq c_1\|u\|_{L^2(\Omega)} - c_2.\end{aligned} \tag{3.35}$$

En utilisant (3.2), (3.10), et (3.35), il vient pour $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{A}(u), u\rangle &= \int_\Omega M(x)\nabla w\nabla v\,dx + \int_\Omega \tilde{g}(x,w)v\,dx \\ &\quad + \mu\int_\Omega b(x,u)v\,dx \\ &\geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} + [c_1-c_0]\|u\|_{L^2(\Omega)} - c_2 \\ &\geq \alpha\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} - c_3\|u\|_{H_0^1(\Omega)} - c_2.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Par conséquent

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{\langle \mathscr{A}(u), u\rangle}{\|u\|} = +\infty.$$

Ce qui prouve bien la coercivité de l'opérateur $\mathscr{A}$.

■

**Lemme 3.3** *La solution $u$ du problème perturbé (3.12) satisfait*

$$\phi(x) \le u(x) \le \psi(x), \quad p.p\ x \in \Omega.$$

**Preuve.**

1. **On montre que $u(x) \le \psi(x)$, p.p $x \in \Omega$.**
   De (3.5) et (3.12), il résulte que

$$\int_\Omega M(x)\nabla(u-\psi)\nabla v\, dx + \mu \int_\Omega b(x,u)v\, dx \le \int_\Omega \big[g(x,\psi)-\tilde{g}(x,u)\big]v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.37}$$

   En prenant $\big(u-\psi\big)^+$ comme fonction test dans (3.37), il vient

$$\begin{aligned}\int_\Omega M(x)\nabla(u-\psi)\nabla(u-\psi)^+\, dx + \mu \int_\Omega b(x,u)(u-\psi)^+\, dx \\ \le \int_\Omega \big[g(x,\psi)-\tilde{g}(x,u)\big](u-\psi)^+\, dx.\end{aligned} \tag{3.38}$$

   En utilisant (3.2), le fait que $\tilde{g}(x,u) = g(x,\psi)$ sur l'ensemble $\{x \in \Omega, \quad u > \psi\}$, et le fait que le deuxième terme du membre gauche de l'inégalité (3.38) est positif, on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla(u-\psi)^+|^2\, dx \le 0. \tag{3.39}$$

   De (3.39), il s'en suit que $(u-\psi)^+ = 0$, et par conséquent

$$u(x) \le \psi(x), \quad \text{p.p } x \in \Omega. \tag{3.40}$$

2. **On montre que $\phi(x) \le u(x)$, p.p $x \in \Omega$.**
   De (3.6) et (3.12), il résulte que

$$\int_\Omega M(x)\nabla(u-\phi)\nabla v\, dx + \mu \int_\Omega b(x,u)v\, dx \ge \int_\Omega \big[g(x,\phi)-\tilde{g}(x,u)\big]v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.41}$$

   En prenant $-\big(\phi-u\big)^+$ comme fonction test dans (3.37), il vient

$$\begin{aligned}-\int_\Omega M(x)\nabla(u-\phi)\nabla(\phi-u)^+\, dx - \mu \int_\Omega b(x,u)(\phi-u)^+\, dx \\ \le \int_\Omega \big[\tilde{g}(x,u)-g(x,\psi)\big](\phi-u)^+\, dx.\end{aligned} \tag{3.42}$$

   En utilisant (3.2), le fait que $\tilde{g}(x,u) = g(x,\phi)$ sur l'ensemble $\{x \in \Omega, \quad u < \phi\}$, et le fait que le deuxième terme du membre gauche de l'inégalité (3.42) est positif, on obtient

$$\alpha \int_{\Omega} |\nabla(\phi - u)^+|^2 \, dx \leq 0. \tag{3.43}$$

De (3.43), il s'en suit que $(\phi - u)^+ = 0$, et par conséquent

$$u(x) \geq \phi(x), \quad \text{p.p } x \in \Omega. \tag{3.44}$$

■ En utilisant les lemmes 3.1 et 3.3, on en déduit que la solution $u$ du problème perturbé (3.12) est également est une solution du problème (3.1). Ainsi le théorème 3.1 est démontré.
■

CHAPITRE

# 4 Problème elliptique quasi-linéaire à croissance quadratique

## 4.1 Position du problème

Dans ce chapitre on va étudier le problème suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = g(x,u,\nabla u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $M$ est une matrice elliptique bornée ; c-à-d., il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\alpha|\xi|^2 \le M(x)\xi\cdot\xi, \qquad |M(x)| \le \beta, \tag{4.2}$$

pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \Omega$ presque partout. On suppose en outre que $g : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory satisfaisant la condition de croissance suivante : il existe deux constante $c_0 > 0$, et $C_1 >$ telles que

$$|g(x,s,\xi)| \le C_0 + C_1|\xi|^2, \tag{4.3}$$

pour p.p $x \in \Omega$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^N$.

**Définition 4.1** *Une solution du problème* (4.1) *est une fonction* $u \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ *telle que :*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega g(x,u,\nabla u)\,v\,dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega). \tag{4.4}$$

**Définition 4.2** *Une fonction* $\psi \in W^{1,\infty}(\Omega)$ *est dit sur-solution faible du problème* (4.1) *si*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(M(x)\nabla\psi\big) \ge g(x,\psi,\nabla\psi) & \text{au sens de } \mathscr{D}'(\Omega), \\ \psi \ge 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Définition 4.3** *Une fonction* $\phi \in W^{1,\infty}(\Omega)$ *est dit sous-solution faible du problème* (4.1) *si*

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(M(x)\nabla\phi\big) \le g(x,\phi,\nabla\phi) & \text{au sens de } \mathscr{D}'(\Omega), \\ \phi \le 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En raisonnant comme [6, Theorem 2.1, page 217], on considère la fonction $\tilde{g} : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\tilde{g}(x,s,\xi) = \begin{cases} g(x,\psi(x),\nabla\psi), & s \geq \psi(x), \\ g(x,s,\xi), & \phi(x) \leq s \leq \psi(x), \\ g(x,\phi(x),\nabla\phi), & s \leq \phi(x). \end{cases}$$

Maintenant On considère le problème perturbé suivant :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u) = \tilde{g}(x,u,\nabla u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.5}$$

## 4.2 Énoncé du résultat principal

**Théorème 4.1** *On suppose que $\phi$ et $\psi$ sont respectivement sous-solution et sur-solution faible du problème (4.1), avec $\phi \leq \psi$ dans $\Omega$.*
*Alors le problème (4.1) admet une solution $u$ avec $\phi \leq u \leq \psi$ dans $\Omega$.*

Pour prouver le théorème précédent, tout d'abord, on va approcher le problème (4.5), ensuite, on va montrer des estimations uniformes sur la suite de solutions approchées. Enfin, on passe à la limite dans le problème approche afin d'obtenir une solution du problème initial.

## 4.3 Approximation

On considère le problème approché suivant

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(M(x)\nabla u_n) = \tilde{g}_n(x,u_n,\nabla u_n) & \text{dans } \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.6}$$

où

$$\tilde{g}_n(x,u_n,\nabla u_n) = T_n\big(\tilde{g}(x,u_n,\nabla u_n)\big). \tag{4.7}$$

Notant que la fonctions $\tilde{g}_n$ satisfait les conditions suivantes : pour tout $s \in \mathbb{R}$, tout $\mathbb{R}^N$, et pour p.p $x \in \Omega$, on a :

$$|\tilde{g}_n(x,s,\xi)| \leq n, \tag{4.8}$$

$$|\tilde{g}_n(x,s,\xi)| \leq |g(x,s,\xi)|. \tag{4.9}$$

**Lemme 4.1** *Le problème approché (4.6) admet au-moins une solution $u_n \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ dans le sens faible suivant :*

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \nabla\varphi = \int_\Omega \tilde{g}_n(x,u_n,\nabla u_n)\varphi. \tag{4.10}$$

**Preuve.**

1. **Existence.**
En utilisant le théorème du point fixe de Schauder. On définit l'opérateur du point fixe

$$\begin{array}{rccc} S: & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & H_0^1(\Omega) \\ & v & \longmapsto & S(v)=w, \end{array} \tag{4.11}$$

où $w$ est la solution unique du problème linéaire suivant [1] :

$$(P_v)\begin{cases} -\operatorname{div}(M(x)\nabla w)=\tilde{g}_n(x,v,\nabla v) & \text{dans } \Omega, \\ w=0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

On va maintenant vérifier que l'application $S$ satisfait les hypothèses du théorème du point fixe de Schauder 1.17.

(a). *$S$* **fixe une certaine boule** *$K$*.
En prenant $w$ comme une fonction test dans le problème $P_v$, et en utilisant l'hypothèse (2.2), et (4.8), il vient

$$\begin{aligned} \alpha\int_\Omega |\nabla w|^2 &\le \int_\Omega \tilde{g}_n(x,v,\nabla v)\,w \\ &\le \int_\Omega \left|\tilde{g}_n(x,v,\nabla v)\right||w| \\ &\le n\int_\Omega |w| \end{aligned} \tag{4.12}$$

Par suite, en utilisant l'inégalité de Hölder 1.2, puis l'inégalité de Poincaré 1.9 sur le côté droit de (4.12), on obtient

$$\begin{aligned} \alpha\int_\Omega |\nabla w|^2 &\le n|\Omega|^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega |w|^2\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\le nC_\Omega|\Omega|^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega |\nabla w|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

En utilisant l'inégalité de Young 1.1 sur le côté droit de (4.13), il s'en suit que

$$\alpha\int_\Omega |\nabla w|^2 \le \frac{n^2C_\Omega^2|\Omega|}{2\alpha}+\frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\nabla w|^2. \tag{4.14}$$

De (4.14), on en déduit que

$$\|w\|_{H_0^1(\Omega)} \le R=\frac{n^2C_\Omega|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{\alpha}.$$

Par conséquent la boule $K=\bar{B}(0,R)$ de $H_0^1(\Omega)$ est invariante pour $S$.

(b). *$S$* **est continue.**
Comme $w_\varepsilon=S(v_\varepsilon)$ et $w=S(v)$ sont respectivement solutions du problèmes $(P_{v_\varepsilon})$ et $(P_v)$, alors

1. 1 Le problème $(P_v)$ admet une unique solution via le théorème 2.2

$$\int_\Omega M(x)\nabla w_\varepsilon \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega \tilde{g}_n(x, v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon)\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \tag{4.15}$$

et

$$\int_\Omega M(x)\nabla w \cdot \nabla \varphi = \int_\Omega \tilde{g}_n(x, v, \nabla v)\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{4.16}$$

En soustrayant l'égalité (4.16) à l'égalité (4.15), il vient :

$$\int_\Omega M(x)\nabla(w_\varepsilon - w)\cdot \nabla \varphi = \int_\Omega \left[\tilde{g}_n(x, v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon) - \tilde{g}_n(x, v, \nabla v)\right]\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{4.17}$$

En prenant $w_\varepsilon - w$ comme fonction test dans (4.17), et en utilisant l'hypothèse (2.2), on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla(w_\varepsilon - w)|^2 \leq \int_\Omega \left[\tilde{g}_n(x, v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon) - \tilde{g}_n(x, v, \nabla v)\right](w_\varepsilon - w). \tag{4.18}$$

L'inégalité de Hölder sur le côté droit de l'inégalité (4.18) implique que

$$\alpha \|w_\varepsilon - w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \|w_\varepsilon - w\|_{L^2(\Omega)} \left[\int_\Omega \left|\tilde{g}_n(x, v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon) - \tilde{g}_n(x, v, \nabla v)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.19}$$

Avec l'inégalité de Young, on trouve

$$\|w_\varepsilon - w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|\tilde{g}_n(x, v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon) - \tilde{g}_n(x, v, \nabla v)\|_{L^2(\Omega)}, \tag{4.20}$$

où $C$ est une constante positive ne dépend pas de $\varepsilon$. En utilisant le fait que

$$v_\varepsilon \longrightarrow v \quad \text{fortement dans} \quad H_0^1(\Omega), \tag{4.21}$$

alors on peut extraire une sous suite, notée encore $v_\varepsilon$, telle que

$$\nabla v_\varepsilon \longrightarrow \nabla v \quad \text{p.p dans} \quad \Omega, \tag{4.22}$$

$$v_\varepsilon \longrightarrow v \quad \text{p.p dans} \quad \Omega. \tag{4.23}$$

Puisque $\tilde{g}_\varepsilon$ est continue par rapport aux deux derniers arguments, on a

$$\tilde{g}_n(x, v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon) \longrightarrow \tilde{g}_n(x, v, \nabla v) \quad \text{p.p dans} \quad \Omega. \tag{4.24}$$

En utilisant (4.24) et (4.8), on en déduit par le théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\tilde{g}_n(x, v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon) \longrightarrow \tilde{g}_n(x, v, \nabla v) \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\Omega). \tag{4.25}$$

En faisant tendre $\varepsilon$ vers zéro dans l'inégalité (4.20), on conclut que $w_\varepsilon$ converge, à sous suite près, vers $w$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$. Par conséquent, en utilisant le théorème 1.15, la suite $w_\varepsilon$ converge vers $w$ fortement dans $H_0^1(\Omega)$.

(c). $S(K)$ **est relativement compact.**
Soit $w_\varepsilon = S(v_\varepsilon)$ une suite de $S(K)$. Comme $w_\varepsilon$ est bornée dans $H_0^1(\Omega)$, alors il existe une fonction $w$ appartient à $H_0^1(\Omega)$ telle que, à sous suite près,

$$w_\varepsilon \longrightarrow w \quad \text{faiblemnt dans} \quad H_0^1(\Omega), \tag{4.26}$$

et par suite

$$w_\varepsilon \longrightarrow w \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\Omega), \tag{4.27}$$

$$w_\varepsilon \longrightarrow w \quad \text{p.p dans} \quad \Omega. \tag{4.28}$$

Comme $w_\varepsilon$ est une solution du problème $(P_{v_\varepsilon})$, alors

$$\int_\Omega M(x)\nabla w_\varepsilon \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega \tilde{g}_n(x, v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon)\,\varphi. \tag{4.29}$$

En utilisant $w_\varepsilon - w$ comme fonction test dans (4.29), il vient

$$\int_\Omega M(x)\nabla w_\varepsilon \cdot \nabla(w_\varepsilon - w) = \int_\Omega \tilde{g}_n(x, v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon)(w_\varepsilon - w). \tag{4.30}$$

De (4.30), il s'en suit

$$\int_\Omega M(x)\nabla(w_\varepsilon - w)\cdot\nabla(w_\varepsilon - w) = \int_\Omega \tilde{g}_n(x, v_\varepsilon, \nabla v_\varepsilon)(w_\varepsilon - w) - \int_\Omega M(x)\nabla w \cdot \nabla(w_\varepsilon - w).$$

Par conséquent, en utilisant (4.2) et (4.8), on obtient

$$\alpha \int_\Omega |\nabla(w_\varepsilon - w)|^2 \le n \int_\Omega |w_\varepsilon - w| + \langle \operatorname{div}(M(x)\nabla w), w_\varepsilon - w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}. \tag{4.31}$$

L'inégalité de Hölder sur le côté droit de (4.31) implique que

$$\alpha \|w_\varepsilon - w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le n|\Omega|^{\frac{1}{2}} \|w_\varepsilon - w\|_{L^2(\Omega)} + \langle \operatorname{div}(M(x)\nabla w), w_\varepsilon - w\rangle_{H^{-1}(\Omega)\times H_0^1(\Omega)}. \tag{4.32}$$

En faisant $n$ tendre vers l'infinie dans (4.32), et en utilisant (4.26) and (4.27), on en déduit que la suite $w_\varepsilon$ est fortement convergent vers $w$. Les hypothèses du théorème du point fixe de Schauder sont remplies, et par conséquent le problème (4.6) admet au moins une solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

2. **Estimation** $L^\infty(\Omega)$**.** En utilisant le fait que

$$|\tilde{g}_n(x, u_n, \nabla u_n)| \le n,$$

alors par le théorème (2.3), la solution $u_n$ du problème (4.6) est bornée.

■

## 4.4 Estimations à priori

### 4.4.1 Estimation uniforme dans l'espace $L^\infty(\Omega)$

On pose

$$m_0 = \sup\big[g\big(x,\phi,\nabla\phi\big), g\big(x,\psi,\nabla\psi\big)\big] \tag{4.33}$$

Utilisant (4.2) et (4.33), il vient

**Lemme 4.2** *Si $n \geq m_0$, la solution $u_n$ du problème (4.6) vérifie $\phi \leq u_n \leq \psi$ p.p., dans $\Omega$.*

**Preuve.**

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\big(M(x)\nabla(u_n-\psi)\big) \leq \tilde{g}_n(x,u_n,\nabla u_n) - g_n\big(x,\psi,\nabla\psi\big) & \text{au sens de } \mathscr{D}'(\Omega) \\ u_n - \psi \leq 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.34}$$

En prenant $(u_n-\psi)^+$ comme fonction test dans (4.34), on obtient

$$\int_\Omega M(x)\nabla(u_n-\psi)^+ \cdot \nabla(u_n-\psi)^+ \leq \int_\Omega \big[\tilde{g}_n(x,u_n,\nabla u_n) - g_n\big(x,\psi,\nabla\psi\big)\big](u_n-\psi)^+. \tag{4.35}$$

En utilisant (2.2), et le fait que $\tilde{g}_n(x,u_n,\nabla u_n) = g_n\big(x,\psi,\nabla\psi\big)$ sur l'ensemble $\big[u \geq \psi\big]$, il s'en suit que

$$\alpha \int_\Omega |\nabla(u_n-\psi)^+|^2 \leq 0. \tag{4.36}$$

L'inégalité (4.36) implique que

$$u_n(x) \leq \psi \quad \text{p.p } x \in \Omega. \tag{4.37}$$

En utilisant $(\phi - u_n)^+$ comme fonction test, et en raisonnant de façon similaire, il résulte que

$$u_n(x) \geq \phi \quad \text{p.p } x \in \Omega. \tag{4.38}$$

De (4.37) et (4.38), on en déduit que

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M = \sup\big[\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\psi\|_{L^\infty(\Omega)}\big]. \tag{4.39}$$

■

### 4.4.2 Estimation uniforme dans l'espace $H_0^1(\Omega)$

**Lemme 4.3** *La suite $u_n$ est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega)$.*

**Preuve.** On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & s & \longmapsto & \phi(s) = s e^{\beta s^2}, \end{array} \tag{4.40}$$

où $\beta$ est une constante à choisir ultérieurement.
En prenant $h(u_n)$ comme fonction test dans (4.10), on obtient

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n \cdot \nabla u_n h'(u_n) = \int_\Omega \tilde{g}_n(x,u_n,\nabla u_n)\, h(u_n). \tag{4.41}$$

En utilisant (2.2), (4.3), (4.9), (4.39), et le fait que $h$ est une fonction strictement croissante, on trouve

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \big[\alpha h'(u_n) - C_1 |h(u_n)|\big] \le C_0 h(M)|\Omega|. \tag{4.42}$$

En choisissant $\beta = \frac{C_1^2}{\alpha^2}$, on obtient

$$\alpha\phi'(s) - C_1|\phi(s)| \ge \frac{\alpha}{2}. \tag{4.43}$$

De (4.42) et (4.43), on en déduit que

$$\|u_n\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \frac{2C_0 h(M)}{\alpha}|\Omega|. \tag{4.44}$$

L'inégalité (4.44) montre que la suite $u_n$ est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega)$. ■

## 4.5 Convergence forte de la suite $u_n$ dans l'espace $H_0^1(\Omega)$

Par le lemme 4.3, la suite $u_n$ est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et par conséquent, il existe une fonction $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{faiblement dans} \quad H_0^1(\Omega), \tag{4.45}$$

et par suite

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{fortement dans} \quad L^2(\Omega), \tag{4.46}$$

et

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{p.p dans} \quad \Omega. \tag{4.47}$$

**Lemme 4.4** *La suite $u_n$ est fortement convergente vers $u$ dans $H_0^1(\Omega)$.*

**Preuve.**
En prenant $h(u_n - u)$ comme fonction test dans (4.10), on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega M(x)\nabla(u_n-u)\cdot\nabla(u_n-u)h'(u_n-u) &= \int_\Omega g_n(x,u_n,\nabla u_n)\, h(u_n-u) \\ &\quad - \int_\Omega M(x)\nabla u \cdot \nabla(u_n-u)h'(u_n-u).\end{aligned} \tag{4.48}$$

En utilisant (4.2), (4.3), (4.9), et (4.39), on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2\big[\alpha h'(u_n-u) - C_1|h(u_n-u)|\big] &\le C_0 \int_\Omega |h(u_n-u)| \\ &\quad + \langle \operatorname{div}(M(x)\nabla u), h(u_n-u)\rangle.\end{aligned} \tag{4.49}$$

De (4.43) et (4.49), on en déduit que

$$\frac{\alpha}{2}\|u_n-u\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq C_0 \int_\Omega h(u_n-u)+\langle \operatorname{div}(M(x)\nabla u), h(u_n-u)\rangle. \tag{4.50}$$

En utilisant (4.47), et le fait que $h$ est une fonction continue, il vient

$$h(u_n-u)\longrightarrow 0 \quad \text{p.p dans } \Omega. \tag{4.51}$$

Par conséquent, en appliquant le théorème de convergence dominée, il s'en suit que

$$h(u_n-u)\longrightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega). \tag{4.52}$$

En utilisant (4.39), (4.47), et le fait que la suite $u_n$ est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega)$, il en découle que la suite $h(u_n-u)$ est uniformément bornée dans $H_0^1(\Omega)$, et par conséquent

$$h(u_n-u)\longrightarrow 0 \quad \text{faiblement dans } H_0^1(\Omega). \tag{4.53}$$

Passant à la limite dans (4.50), et en utilisant (4.52) et (4.53), on en déduit la convergence forte de la suite $u_n$ vert $u$ dans $H_0^1(\Omega)$. ■

## 4.6 Passage à la limite

Du lemme 4.4, on en déduit, à une sous-suite près, que

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{fortement dans } H_0^1(\Omega), \text{ et p.p dans } \Omega, \tag{4.54}$$

et

$$\nabla u_n \longrightarrow \nabla u \quad \text{p.p dans } \Omega. \tag{4.55}$$

Puisque $g$ est continue par rapport aux deux derniers arguments, on a

$$g_n(x,u_n,\nabla u_n)\longrightarrow g(x,u,\nabla u) \quad \text{p.p dans } \Omega. \tag{4.56}$$

Soit $E$ un sous ensemble mesurable de $\Omega$. En utilisant (4.9) et (4.3), on obtient

$$\begin{aligned}\int_E |g_n(x,u_n,\nabla u_n)\,dx| &\leq \int_E \left[C_0+C_1|\nabla u_n|^2\right]dx \\ &\leq C_0|E|+C_1\int_E |\nabla u_n|^2\,dx.\end{aligned} \tag{4.57}$$

Puisque la suite $\nabla u_n$ converge fortement dans $\left(L^2(\Omega)\right)^N$, (4.57) implique l'équi-intégrabilité de la suite $g_n(x,u_n,\nabla u_n)$. Maintenant (4.56) et le théorème de Vitali donnent

$$g_n(x,u_n,\nabla u_n)\longrightarrow g(x,u,\nabla u) \quad \text{fortement dans } L^1(\Omega). \tag{4.58}$$

En raison de (4.54) et (4.58), il est facile de passer à la limite dans

$$\int_\Omega M(x)\nabla u_n\nabla\varphi = \int_\Omega g_n(x,u_n,\nabla u_n)\varphi,$$

pour obtenir

$$\int_\Omega M(x)\nabla u\nabla\varphi = \int_\Omega g(x,u,\nabla u)\varphi, \quad \forall \varphi\in H_0^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega).$$

Ainsi le théorème 4.1 est démontré.

# Bibliographie


[1] L. Boccardo, and L. Orsina, *Semilinear elliptic equations with singular nonlinearities.* Calculus of Variations and Partial Differential Equations 37.3-4 (2010) : 363-380.

[2] L. Boccardo, *The summability of solutions to variational problems since Guido Stampacchia.* Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A Math. RACSAM 97.3 (2003) : 413-421.

[3] L. Boccardo, and T. Gallouet, *Nonlinear elliptic equations with right hand side measures.* Comm. Partial Differential Equations, 17, 641–655.

[4] L. Boccardo, and T. Gallouët, *Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data.* Journal of Functional Analysis 87.1 (1989) 149-169.

[5] L. Boccardo, and G. Croce, *Elliptic partial differential equations : existence and regularity of distributional solutions.* Vol. 55. Walter de Gruyter, 2013.

[6] L. Boccardo, F. Murat, and J. P. Puel, *Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilinéaires.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze 11.2 (1984) : 213-235.

[7] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Masson, Paris, 1983.

[8] C. De Coster, and P. Habets, *Two-point boundary value problems : lower and upper solutions.* Elsevier, 2006.

[9] J. Deuel, and P. Hess. *A Criterion for the Existence of Solutions of Non-linear Elliptic Boundary Value Problems.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics 74 (1976) : 49-54.

[10] L. C. Evans, and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions.* Chapman and Hall/CRC, 2015.

[11] T. Gallouët, and R. Herbin, *Master 2 de mathématiques Equations aux dérivées partielles.* 2020.

[12] L. Gasinski, and N. S. Papageorgiou, *Nonsmooth critical point theory and nonlinear boundary value problems*. Chapman and Hall/CRC, 2004.

[13] D. Gilbarg, and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 1998.

[14] P. Hess, *On the solvability of nonlinear elliptic boundary value problems*. Indiana University Mathematics Journal 25.5 (1976) : 461-466.

[15] J. Jost, *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag New York, 2013.

[16] J.Kinnunen, *Sobolev Spaces*.Déparetement of mathematics and Systems Analysis, Aalto University, 2017.

[17] M. T. Lacroix-Sonrier, *Distributions, espaces de Sobolev : applications*. Ellipses, 1998.

[18] V. K. Le, *On some equivalent properties of sub-and supersolutions in second order quasilinear elliptic equations*. Hiroshima Mathematical Journal 28.2 (1998) : 373-380.

[19] V. K. Le, and K. Schmitt. *Some general concepts of sub-and supersolutions for nonlinear elliptic problems*. Topological Methods in Nonlinear Analysis 28.1 (2006) : 87-103.

[20] H. Le Dret, *Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations*. Springer International Publishing :, 2018.

[21] J. Leray, and J. L. Lions. *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*. Séminaire Jean Leray 1 (1964) : 1-19.

[22] G. Leoni, *A first course in Sobolev spaces*. American Mathematical Soc., 2017.

[23] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. 1969.

[24] S. Migorski, A. Ochal, and M. Sofonea, *Nonlinear inclusions and hemivariational inequalities : models and analysis of contact problems*. Vol. 26. Springer Science and Business Media, 2012.

[25] L. Orsina, *Elliptic equations with measure data*, in Lecture notes of the course Analisi Superiore (2012/2013). http://www1.mat.uniroma1.it/people/orsina/

[26] N.S Papageorgiou, V.D Radulescu and D.D.Repovs, *Nonlinear Analysis : Theory and Methods*.Springer Monographs in Mathematics.

[27] H.K.Pathak, *an introduction to nonlinear analysis and fixed point theory*.springer.

[28] T. Roubicek, *Nonlinear partial differential equations with applications*. Vol. 153. Springer Science and Business Media, 2013.

[29] S. Salsa, *Partial differential equations in action : from modelling to theory*. Vol. 99. Springer, 2016.

[30] L. Tartar, *An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces*. Vol. 3. Springer Science and Business Media, 2007.

[31] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications : II/B : Nonlinear Monotone Operators*. Springer Science and Business Media, 2013.