République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Dr. Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences



MÉMOIRE

présentée en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse Mathématique et Applications (AMA)

par

ABADA Abderrahmane

Titre :

Méthodes spectrales et ses applications

Date de soutenance : 26-06-2021

Composition du Jury :

Président :	BENTERKI Abdessalem	Maître de Conférences	UYFM
Examinateur :	Mekdache Noureddine	Maître de Assistant	UYFM
Rapporteur :	Hamza BIBI	Maître de Conférences	UYFM

Année Universitaire : 2020/2021

Remerciements

Je remercie Allah avant tout car à lui seul revient les louanges .
Le docteur BIBI Hamza a accepté d'être mon directeur de mémoire et m'a dirigé avec passion et enthousiasme. Il m'a initié à la recherche et m'a soutenu pendant toute la durée de ce travail. Qu'il soit assuré de trouver ici ma profonde reconnaissance.

Le docteur BENTERKI Abdessalem m'a fait l'honneur et le plaisir de présider mon jury de soutenance. Je lui exprime toute ma gratitude.

Je remercie vont à Mr Mekdache Noureddine d'avoir accepté de lire mon travail. Je tiens à exprimer aussi ma profonde reconnaissance à tous mes enseignants qui m'ont accompagné tout au long de mes études. Sans eux, ce travail n'aurait certainement jamais pu voir le jour.

Je tiens à saluer tout les membres de ma promotion .
A toute ma famille .
A tous mes amis .

Dédicace

Je dédie ce travail à :
A mes parents
A mes frères Youcef et Ahmed
A ma soeur ,et toute la famille Abada
-Je tiens à remercier tous les membres de ma promotion et tout amies .
-Et a tous mes professeurs

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements **i**

Dédicase **ii**

Notations **v**

Introduction Générale **1**

1 PRÉLIMINAIRES **3**
1.1 Espace de Banach . . . 3
1.2 Espaces de Hilbert . . . 3
1.3 Espace de Sobolev . . . 4
1.4 Généralités sur les équations aux dérivées partielles . . . 6

2 Polynômes orthogonaux **10**

Polynômes orthogonaux **10**
2.1 Définition . . . 10
2.2 Les polynômes orthogonaux classiques . . . 10
2.2.1 Polynômes de Tchebyshev . . . 10
2.2.2 Polynômes de Legendre . . . 11
2.2.3 Polynômes de Laguerre . . . 13
2.2.4 Polynômes de Hermite . . . 14
2.3 Polynômes trigonométriques . . . 15
2.3.1 Séries de Fourier . . . 15
2.3.2 Polynômes trigonométriques continus . . . 16
2.3.3 Polynômes trigonométriques discrets . . . 18
2.4 Formules de quadrature . . . 21
2.4.1 Expréssion de la Formule quadrature . . . 22
2.4.2 Règle de quadrature de Gauss . . . 23
2.4.3 Formule de Gauss-Lobatto . . . 23

3 Méthodes spectrales **24**

Méthodes spectrales **24**
3.1 Introduction . . . 24
3.2 Principe des méthodes spectrales . . . 24
3.3 Méthodes spectrales . . . 25

3.3.1 Méthode de Galerkin 25
3.3.2 Méthode de Tau 30
3.3.3 Méthode de Collocation 31
3.3.4 Méthode de Tau-Collocation 34

4 Applications **37**

Applications **37**
4.1 Méthode de Fourier-Galerkin 37
4.1.1 Stabilité de la méthode de Fourier-Galerkin 40
4.2 Méthode de Fourier-Collocation 43
4.2.1 Stabilité de la méthode de Fourier-Collocation 47

Conclusion **54**

Bibliographie **55**

Notations

- **EDO** — **Équation différentielle ordinaire.**
- **EDP** — **Équation différentielle partielle.**
- P_N, $\mathcal{P}_N$ — **Opérateurs de projection.**
- R_N — **Fonction résiduelle.**
- $T_n(x)$ — **Polynôme de Chebychev de la première espèce.**
- $P_n(x)$ — **Polynôme de Legendre d'ordre** n**.**
- $L_n(x)$ — **Polynôme de Laguerre d'ordre** n**.**
- $H(x)$ — **Polynôme de Hirmite d'ordre** n**.**
- $w(x)$ — **Fonction poids.**
- $\langle u, v\rangle$ — **Produit scalaire de** u **et** v**.**
- $\delta_{i,j}$ — **Delta de Kronecker** $= \begin{cases} 0 & i \neq j, \\ 1 & i = j. \end{cases}$
- $u_N(x)$ — **Approximation spectrale.**
- $\widetilde{u}_k$ — k^{ieme} **coefficient spectral**
- $\widetilde{u}_k^{(1)}$ — k^{ieme} **coefficient spectral de la première dérivée.**
- $\widetilde{u}_k^{(2)}$ — k^{ieme} **coefficient spectral de la deuxième dérivée.**
- $a_N(t)$ — **Coefficient spectral dépend du temps.**
- $(\varphi_k)_{k=1,\ldots,\infty}$ — **Base spectrale.**
- $\mathcal{H}$ — **Espace de Hilbert.**
- Ω — **Domaine borné de** $\mathbb{R}^2$**.**

- $\partial\Omega$ **Frontière de Ω.**
- B **Opérateur de trace.**
- $\mathcal{B}$ **Sous espace fonctionnel de $\mathcal{H}$.**
- B_N **Espace engendré par les N première fonctions de base.**
- $\mathcal{P}_N^{\perp}$ **Projection orthogonale de $\mathcal{H}$ sur B_N.**
- $\mathcal{M}$ **Matrice de collocation : $\mathcal{M} = (\varphi_n(x_i))$.**
- δ_p **Espace spectral.**
- $\Im_h$ **Espace physique.**
- Γ **Cercle unité $[0, 2\pi]$.**
- $\mathcal{L}^2(\Gamma, \mathbb{C})$ **Espace de fonctions de carrées intégrables de Γ à valeur complexe.**
- $\psi_k(x)$ **Fonction test.**
- $\phi_k(x)$ **Fonction d'essai.**
- $\mathcal{M}_u$ **Opérateur (linéaire ou non-linéaire).**
- $\mathcal{L}$ **Opérateurs de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.**
- $\mathcal{L}^*$ **L'adjoint de l'opérateur $\mathcal{L}$.**
- $i.e.$ **signifie "c'est à dire".**
- **resp** **respectivement.**
- $\mathcal{L}(X, Y)$ **Espace fes fonctions $f : X \to Y$ linéaires continues .**
- $\|.\|$ **norme sur un espace de Banach .**

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont des objets centraux des mathématiques appliquées, elle sont utilisées dans la modélisation mathématique des sciences naturelles et sociales (diffusion de la chaleur, propagation du son, mécanique, thermodynamique, électromagnétisme ...). De plus chaque type d'équations requit une méthode particulière de résolution. Par-suite, la résolution de la plupart de ces équations nécessite l'utilisation de méthodes numériques, par exemple : la méthode des différences finies, la méthode des volumes finis et les méthodes spectrales, Ces dernières méthodes semblent être compétitives avec les différences finies et les éléments finis méthodes et elles doivent être résolument préférées aux dernières chaque fois que le solution est très régulière et la dimension géométrique du domaine devient grande. De plus, par ces méthodes, il est possible de contrôler facilement la solution (filtrage) de ces problèmes numériques affectés par l'oscillation et l'instabilité phénomènes.

Les méthodes spectrales ont été initialement proposées en 1944 par *Blinova*, d'abord mis en oeuvre en 1954 par *Silberman*, cependant, cette méthode n'est pas devenue pratique pour la résolution des problèmes non linéaires alors pratiquement abandonné au milieu des années 1960, ressuscité en $1969-1970$ par *Orszag* et par *Eliason*, *Machenhauer* et *Rasmussen*, développé pour des applications spécialisées dans les années 1970, doté des premières fondements mathématiques par les travaux séminaux de *Gottlieb* et *Orszag* en 1977, élargi à une classe plus large de problèmes dans les années 1980, et est entré dans le courant dominant du calcul scientifique en 1990.

Les méthodes spectrales consistent une classe de la discrétisation spatiale des équations différentielles, elles cherchent des solutions en termes d'une série de fonctions connues, régulières (les fonctions de base). A partir de ses fonctions on peut distinguer trois types de méthodes, à savoir Galerkin, Tau et Collocation Les éléments clés pour leur formulation sont les fonctions d'essai (également appelées fonctions d'expansion ou d'approximation) et les fonctions de test (également appelées fonctions de poids), Les fonctions d'essai, qui sont des combinaisons linéaires de fonctions de base d'essai appropriées, sont utilisées pour fournir la représentation approximative de la solution. Les fonctions de test sont utilisées pour s'assurer que l'équation différentielle et peut-être certaines conditions aux limites sont satisfaites aussi étroitement que possible par l'expansion en série tronquée. Ceci est réalisé en minimisant, par rapport à une norme appropriée, le résidu produit en utilisant l'approximation tronquée au lieu de la solution exacte. Les résidus représentent l'équation différentielle et parfois les conditions aux limites.

L'approche de *Galerkin* possède la caractéristique esthétique que les fonctions d'essai et les fonctions de test sont les mêmes et que la discrétisation est dérivée d'une forme faible du problème mathématique. De plus, la première application sérieuse des méthodes spectrales aux **EDP** - celle de *Silberman* (1954) pour la modélisation météorologique - était une méthode de *Galerkin*. *Orszag* $(1969-1970)$ et *Eliasen, Machenhauer et Rasmussen* (1970) ont développé des méthodes de trans-

formation pour évaluer les sommes de convolution résultant des non linéarités quadratiques pour les problèmes contenant des termes non linéaires plus compliqués, les méthodes spectrales de *Galerkin* à haute résolution restent peu pratiques.

L'approche *Tau* est une modification de la méthode de *Galerkin* applicable aux problèmes avec conditions aux limites non périodiques. Elle peut être considérée comme un cas particulier de la méthode dite de *Petrov-Galerkin. Lanczos* (1938) a développé la méthode spectrale *tau*, et l'application de la méthode *Chebyshev-tau* par *Orszag* (1971) pour produire des solutions très précises aux problèmes de stabilité linéaire de la dynamique des fluides a inspirée une utilisation considérable de cette technique pour le calcule des valeurs propres.

L'approche *Collocation* a été utilisée par *Slater* (1934) et par *Kan-torovic* (1934) dans des applications spécifiques, *Frazer, Jones et Skan* (1937) l'ont développée comme une méthode générale pour résoudre des **EDOs**, ils ont utilisé une variété de fonctions de base et une distribution arbitraire des points de Collocation.

Le but de ce travail, basé essentiellement sur la lecture des documents [3] et [10], est partagé en quatre parties :

Chapitre 1 : Un petit rappel sur les espaces et sur les équations aux dérivées partielles.

Chapitre 2 : A été consacré pour présenter les polynômes orthogonaux et les formules de quadrature .

Chapitre 3 : On décrit quelques méthodes spectrales (la méthodes de *Galerkin* et la méthode de *Tau-Lanczos*) et d'autres méthodes qu'on appelle les méthodes *pseudo-spectrales* (la méthode de *collocation* et de *Tau-collocation*). Ces techniques sont couramment utilisées pour la résolution d'un large éventail d'équations aux dérivées partielles. On essaye d'exposer à la fois la formulation intrinsèque de ces méthodes et leur application pratique à l'aide d'exemples.

Chapitre 4 : On traite l'application des méthodes de Fourier-Galerkin et de Fourier-Collocation pour la résolution numérique des équations aux dérivées partielles, et on montre sa stabilité pour des problèmes hyperboliques et paraboliques.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

On commence par donner des définitions, ainsi que quelques résultats connus qui nous seront utiles dans la suite de notre travail.

1.1 Espace de Banach

Définition 1.1.1 ([1]). *On appelle $(X, \|.\|)$ espace de Banach, tout espace vectoriel normé complet muni de la norme $\|.\|$*

Exemples 1.1.1. .

1. *$E = \mathbb{R}^n$ est un espace de Banach pour la norme $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ tout les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes .*

2. *L'espace vectoriel $E = ([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, $f \in E$ est un espace de Banach .*

Corollaire 1.1.1 ([1]). .

1. *Toutes les normes sont équivalentes dans les espaces de dimension finie.*

2. *Tout espace normé de dimension finie est de Banach.*

3. *Si (X, d) est un espace métrique et $(E, \|.\|_E)$ est un espace de Banach ,alors $C_b(X, E)$ est un espace de Banach .*

4. *Si F est de Banach alors Alors l'ensemble des applications linéaires dans $L(E, F)$ est de Banach.*

Définition 1.1.2. *On dit qu'une ensemble A d'un espace de Banach a la propriété de point fixe si toute application continue de A dans A admet un point fixe.*

1.2 Espaces de Hilbert

Définition 1.2.1 ([1]). .
• *Soit $\mathcal{H}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.*

On dit que $(.,.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{H}$, si les propriétés suivantes sont vérifiées pour tout $u, v, w \in \mathcal{H}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

i)- $\langle \alpha u + \beta v, w\rangle = \alpha\langle u, w\rangle + \beta\langle v, w\rangle$ *et* $\langle u, \alpha v + \beta w\rangle = \overline{\alpha}\langle u, v\rangle + \overline{\beta}\langle u, w\rangle$ *(Sesquilinéaire).*

ii)- $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ *(Hermitienne).*

iii)- $\langle u, u\rangle \geq 0$ *et* $\langle u, u\rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$ *(définie positive).*

- *Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.*

Lemme 1.2.1 ([1])**.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace préhilbertien*

- ***(Inégalité de Cauchy-Schwarz)*** *pour tout $u, v \in \mathcal{H}$ on a :*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

- ***(Norme induite par un produit scalaire)***
  $u \in \mathcal{H}$: $\|u\| = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}$ est la norme induite par le produit scalaire $\langle ., .\rangle$ sur $\mathcal{H}$.

- ***(L'identité du parallélogramme)*** *$\forall\, u, v \in \mathcal{H}$:*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Définition 1.2.2 (Espace de Hilbert)**.** *Soit $\mathcal{H}$ un espace préhilbertien. On dit que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert si il est complet par rapport à la norme associée.*

1.3 Espace de Sobolev

Définition 1.3.1. *(Les espaces L^p)[1]*
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq P < 1$, on définit $L^P(\Omega)$ Lebesgue par :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^n, f \text{ est mesurable et} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

pour $1 < P < \infty$ on définit $\|f\|_p$ par :

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f\|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

Si $P = \infty$, nous avons :

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}^n, f \text{ est mesurable ,il existe une constante } c \text{ telle que} \|f(x)\| \leq c\, p, p \text{ sur } \Omega \}.$$

On note

$$\|f\|_\infty = \inf \{ c, \|f(x)\| \leq c \}.$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $1 \leq P < \infty$.

Théorème 1.3.1 ([1]). .

- ***(Inégalité de Hölder)***
  Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$,alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

- ***(Inégalité de Young)***
  Soient $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq \infty \quad , \quad 1 \leq q \leq \infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geq 0$ avec $r \neq 0$, Alors

$$f \star g \in L^r(\mathbb{R}),$$

et

$$\|f \star g\|_{L^r(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})}.$$

Définition 1.3.2. *(L'espace $W^{1,p}(\Omega)$)[1] .*
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et un ouvert et soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$
On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \ \mid \ \exists\, g_1, \ldots, N \ \in L^p(\Omega) \text{ tels que } \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \ = - \int_\Omega g_i \varphi \ \ \forall \varphi \in \mathbb{C}_c^\infty(\Omega) \ , \ \forall i = 1, 2, \ldots, N \right\}.$$

On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega),$$

Pour $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on note

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad et \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Remarque :
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}.$$

Définition 1.3.3 ([1]). *Soit Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et m un entier naturel. On appelle espace de Sobolev d'ordre m et on note $H^m(\Omega)$, L'ensemble :*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq m \right\},$$

où $\dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha 1} \ldots \partial x_n^{\alpha n}}$ désigne la dérivée d'ordre α au sens des distributions avec $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$,
et $\|\alpha\| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Exemple 1.3.1. *Pour $m = 1$*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq m \right\},$$

et la norme associée à ce produit scalaire

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_2^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On munit l'espace $H^m(\Omega)$ du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} \quad , \quad \forall u, v \in H^m(\Omega).$$

L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2}.$$

Remarque 1.3.1. *En d'autre terme, $W^{1,p}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions*
$u : \Omega \to \mathbb{R}$, $u \in L^p(\Omega)$
dont les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, prises au sens faible, sont dans $L^p(\Omega)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$

1.4 Généralités sur les équations aux dérivées partielles

Définitions[[12]]
En calcul différentielles, une **équation aux dérivées partielles** (EDP) est une équation dont les solutions sont des fonctions vérifiant certaines conditions concernant leurs dérivées partielles.
Le caractère particulier d'une équation aux dérivées partielles (EDP) est de mettre en jeu des fonctions de plusieurs variables

$$(x, y, \ldots) \longmapsto u(x, y, \ldots).$$

Une (EDP) est alors une relation entre les variables et les dérivées partielles de u.

— Une (EDP) à souvent de très nombreuses solutions, les conditions aux limites restreignent l'ensemble des solutions.
Une équation différentielle très simple est : $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$,oú u est une fonction inconnue de x et y, cette relation implique que les valeurs $u(x, y)$ sont indépendantes de x.
Les solutions de cette équation sont $u(x, y) = f(y)$.
L'équation ordinaire : $\frac{du}{dx} = 0$ a pour solution $u(x) = c$, avec c une valeur constante (indépendante de x).

• Ces deux exemples illustrent qu'en général, la solution d'une (EDO) met en jeu une constante arbitraire, tandis que les (EDP) mettent en jeu des fonctions arbitraires.

• Dans le cas de deux variables, une (EDP) **d'ordre 1** s'écrit sous la forme

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right) = 0.$$

• Une équation du **second ordre** s'écrit comme

$$F\left(x, y, u(x, y), \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Plus généralement, on peut considérer des équations mettant en jeu des dérivées $\partial_x^{m_j} \partial_y^{n_j} u$

• **L'ordre** d'une (EDP) est alors le plus grand ordre de dérivation $m_j + n_j$ qui apparaît dans l'équation.

• **Résoudre** une (EDP) dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^d$ (d est le nombre de variables), c'est de trouver une fonction suffisamment différentiable dans Ω , telle que l'équation soit satisfaite pour toutes les valeurs des variables dans Ω.

• Comme pour les (EDO), on parle d'(EDP) **linéaires** ou **non-linéaires**. Pour mieux comprendre de quoi il s'agit, il est commode de parler de l'opérateur aux dérivées partielles associé à une (EDP). Il s'agit de l'application qui à une fonction u associe le membre de gauche de l'(EDP).

On dit que l'(EDP) est **linéaire** lorsque l'opérateur P qui lui est associé l'est, c'est à dire que, pour toutes fonctions u, v « gentilles » et

$$\forall\ \alpha\,,\ \beta\ \in\ \mathbb{R}\ ,\quad P(\alpha u + \beta v) = \alpha P(u) + \beta P(v).$$

• On parle également d'(EDP) linéaire **homogène** lorsque la fonction nulle $u = 0$ est solution. En d'autres termes tous les termes de l'équation contiennent la fonction inconnue ou l'une de ses dérivées partielles.

• Comme pour les (EDO), les (EDP) linéaires homogènes ont une propriété particulière, communément appelé **principe de superposition** : toute combinaison linéaire de solutions est encore une solution.

• Enfin lorsque l'on ajoute à une solution d'une (EDP) linéaire **non homogène** une solution quelconque de l'(EDP) homogène associée, on obtient encore une solution de l'(EDP) non homogène.

Classification des (EDP) linéaires du second ordre :([[9]],[[12]])
Nous allons contenter d'(EDP) linéaires du second ordre.
On pose $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, une équation aux dérivées partielles du second ordre sera de la forme

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}(X)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(X) + \sum_{i=1}^{n} B_i(X)\frac{\partial u}{\partial x_i} + C\,u = G(x),$$

avec $A_{i,j}, B_i, C, G$ des fonctions indépendantes de u ne s'annulant pas toutes simultanément dans $\mathbb{R}^n$. Si nous nous limitons dans $\mathbb{R}^2$, c'est à dire $X = (x, y)\ \in\ \mathbb{R}^2$ l'égalité précédemment posée prend la forme de

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + F\,u = G(x, y),$$

la classe d'une telle équation est déterminée par le calcul de

$$\Delta = B^2(x_0, y_0) -\ 4\,A(x_0, y_0)C(x_0, y_0).$$

1. Si $\Delta < 0$, on parle d'une équation **elliptique**.
2. Si $\Delta = 0$, l'(EDP) est dite **parabolique**.
3. Si $\Delta > 0$, on a une équation **hyperbolique**.

Remarque 1.4.1. *la terminologie utilisée dans cette définition est basée sur la classification des coniques du plan. On rappelle que la conique d'équation*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

est une hyperbole (resp. une parabole, une ellipse) si et seulement si $B^2 - 4AC$ est positif (resp. nul, négatif) (voir [9])

Équations elliptiques

Les équations elliptiques régissent les problèmes stationnaires, d'équilibre, généralement définis sur un domaine spatial borné Ω de frontière Γ sur laquelle l'inconnue est soumise à des conditions aux limites, le plus souvent de type Dirichlet ou Neumann. Le problème elliptique type est celui fourni par l'équation de Laplace (ou de Poisson) soumise à des conditions aux limites, par exemple de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0, & \text{dans } \Gamma. \end{cases}$$

Équations paraboliques

Les équations paraboliques régissent les problèmes d'évolution ou instationnaires dans lesquels intervient le mécanisme de diffusion ou de dissipation. Ces problèmes sont généralement définis sur un domaine spatial borné Ω de frontière Γ sur laquelle l'inconnue est soumise à des conditions aux limites du même type qu'en elliptique (quelquefois elles-mêmes instationnaires), ainsi qu'à des conditions initiales.
Le problème elliptique type est celui fourni par l'équation de la chaleur soumise à des conditions aux limites, par exemple de Dirichlet, ainsi qu'à des conditions initiales :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = v\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} & \text{dans } \Omega, \\ T = T_0, & \text{dans } \Gamma, \\ T(x,0) = f(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Équations hyperboliques

Les équations hyperboliques modélisent la propagation d'ondes sans dissipation.

En linéaire, c'est par exemple la propagation du son dans un milieu homogène. En électromagnétisme, les équations de Maxwell sont hyperboliques et linéaires.

En linéaire, les équations hyperboliques sont l'expression de lois de conservation. Par exemple, les équations d'Euler expriment la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale dans un fluide parfait compressible.

Exemples d'équations aux dérivées partielles

Voici quelques exemples d'équations sur lesquelles peuvent facilement être testées les méthodes dont il sera question dans les chapitres suivants [34]

• Équation de Poisson

En analyse vectorielle, l'équation de Poisson [1] est l'équation aux dérivées partielles du second ordre suivante

$$\Delta\, u \;=\; f$$

Δ est l'opérateur laplacien .
f est une fonction généralement donnée. Sur un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ et de frontière régulière.
le problème de trouver u à partir de f et satisfaisant certaines conditions aux limites appropriées est un problème bien posé (la solution existe et unique).

• Equation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v\Delta u + f.$$

1. Nommée en l'honneur du mathématicien et physicien français Siméon Denis Poisson

• **Equation des ondes**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f.$$

• **Équation de Laplace**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

où $u(x, y, z)$ désigne la fonction inconnue.

• **Equation de Burgers**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f.$$

• **Equation de Kuramoto**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + f.$$

• **Equations de Navier-Stokes**

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\Delta u = -\nabla p + v\Delta u + f \quad , \\ \\ \text{div} u = 0. \end{cases}$$

• **Equation de Klein-Gordon non linéaire**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = E(u).$$

Voici quelques exemples de domaines spatiaux et de condition aux limites :

a)- Equation de la chaleur avec conditions aux limites périodiques :
$x \in \Gamma$ cercle unité paramétré par $x \in [0, 2\pi]$, $u(0) = u(2\pi)$.

b)- Equation de la chaleur avec $x \in [0, \pi]$:

$$u(0) = g_1 \ , \ u(\pi) = g_2.$$

c)- Equation de Kuramoto avec $x \in [-1, 1]$, avec quatre conditions aux limites, par exemple :

$$\begin{cases} u(-1) = u(1) = 0 \qquad , \\ \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-1) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1) = 0 \quad , \end{cases}$$

d)- Equation de réaction-diffusion avec :

$$x \in [0, \pi] \quad \text{et} \quad u(0) = g_1.$$

Remarques 1.4.1. *:*

1. *Les fonctions définies sur* Γ *sont identifées aux fonctions d'une variable réelle* 2π*-périodiques.*
2. *À noter qu'il faut ajouter une condition initiale à savoir*

$$u(x, 0) = u_0(x).$$

pour toutes les équations données précédemment.

CHAPITRE 2

POLYNÔMES ORTHOGONAUX

Les polynômes orthogonaux jouent un rôle important dans la résolution des équations aux dérivées partielles, Ils interviennent notamment dans les méthodes spectrales, où ils sont utilisés dans la construction de certaines bases pour l'approximation des solutions. On introduit quelques propriétés utiles pour la suite de ce travail.

2.1 Définition

Une suite de polynôme orthogonaux est une suite infinie de polynômes $P_0(x), P_1(x), P_2(x), ...$ à coefficients réels, dans laquelle chaque $P_n(x)$ est de degré n, et tell que les polynômes de la suite sont orthogonaux deux à deux pour un produit scalaire donné.
Le produit scalaire de fonctions le plus simple est l'intégrale du produit de ces fonctions, sur un intervalle borné

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Plus généralement, on peut introduire "une fonction poids" $w(x)$ dans l'intégrale (sur un intervalle d'intégration $]a, b[$ w doit être à valeurs finies et strictement positives, et l'intégral du produit de la fonction poids par un polynôme doit être fini, les bornes a, b peuvent être infinies).

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx.$$

avec cette définition du produit scalaire, deux fonctions sont orthogonaux entre elles si leur produit scalaire est égale à zéro. L'intervalle d'intégration est appelé intervalle d'orthogonalité [12].

2.2 Les polynômes orthogonaux classiques

Nous souhaitons rappeler dans ce chapitre les notions de base concernant les polynômes orthogonaux à une variable (définition, formule de Rodriguez, équation différentielle, ...) [[4],[10],[12]]

2.2.1 Polynômes de Tchebyshev

Soit n un entier naturel. Il existe un et un seul polynôme noté T_n tel que

$$\forall\theta \in \mathbb{R}, T_n(cos\theta) = cos(n\theta).$$

et on à aussi

$$T_n(x) = \cos[n \arccos(x)], \forall n \in \mathbb{N}.$$

T_n est déterminé sur $[-1, 1]$ qui est infini et donc uniquement déterminé.

Orthogonalité Les polynômes T_n, orthogonaux sur l'intervalle de de support $[-1, 1]$ avec la fonction poids $w(x)$ définie par

$$w(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1. \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & -1 \leq x \leq 1. \\ 0 & x \geq 1. \end{cases}$$

et sont normalisés par l'exigence que $T_n(1) = 1$.
T_n satisfait la relation de récurrence à trois termes suivante
pour $n \geq 1$ $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$
avec les valeurs de départ
$T_0(x) = 1$.
$T_1(x) = x$.
$T_2(x) = 2x^2 - 1$.
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$.



(a) pair. (b) impair.

FIGURE 2.1 – les premiers polynômes de Tchebyshev [12].

Relations de récurrence les polynômes de Tchebyshev vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$c_n T_{n+1}(x) + d_n T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \quad n \in \mathbb{N}$$

et

$$c_n \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} - d_{n-2} \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1} = 2T_n(x) \quad n \in \mathbb{N}$$

avec

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < 0. \\ 2 & \text{si} \quad n = 0. \\ 1 & \text{si} \quad n > 0. \end{cases} \quad , \; et \quad d_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n < 0. \\ 1 & \text{si} \quad n \geq 0. \end{cases}$$

2.2.2 Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre définient sur $[-1, 1]$, avec la fonction de poids $w(x) = 1$. notés par P_n (n entier positif)
Formule de P_n :
Les polynômes de Legendre $P_n(x)$ de degré n sont donnés par la formule de Rodrigues

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n].$$

$P_n(x)$ donnés aussi par la formule

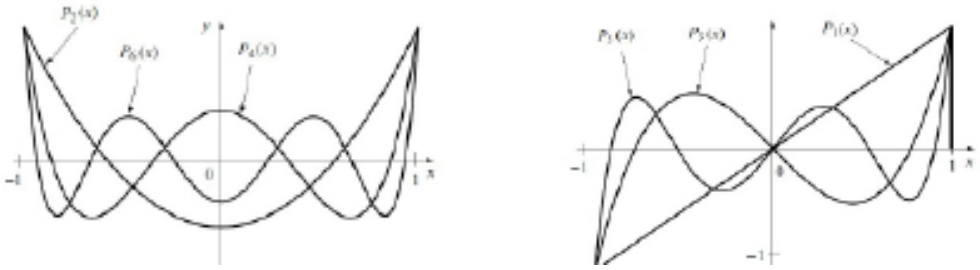
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{n!}{k!(n-k)!} \right)^2 (x-1)^k (x+1)^{n-k}$$

Les polynômes de Legendre sont un cas particulier $\alpha = \beta = 0$ des polynômes de Jacobi

$$P_n(x) = J_n^{(0,0)}(x) \,.\, n \geq 1 \,,\, x \in [-1, 1].$$

les premiers polynômes de Legendre :

$P_0(x) = 1.$
$P_1(x) = x.$
$P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}.$
$P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}.$
$P_4(x) = \frac{35x^4-30x^2+3}{8}$
$P_5(x) = \frac{63x^5-70x^3+15x}{8}$
$P_6(x) = \frac{231x^6-315x^4+105x^2-5}{16}.$



(a) pair. (b) impair.

FIGURE 2.2 – les premiers polynômes de Legendre [12].

Équation différentielle de Legendre

Les polynômes de Legendre satisfait l'équation différentielle

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n + 1)y = 0,$$

définit sur l'intervalle $[-1, 1]$ avec $n = 0, 1, 2, \ldots$

Relation d'orthogonalité pour les P_n

Les polynômes de Legendre sont donnée par la relation d'orthogonalité suivant :

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{pour} \quad m = n \end{cases} \qquad n, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Relations de récurrences satisfaites par les P_n

1. $(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x).$
2. On a

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)\frac{d}{dx}P_n(x) &= nxP_n(x) - nP_{n-1}(x). \\ &= \frac{n(n + 1)}{2n + 1}[P_{n+1}(x) - nP_{n-1}(x).] \end{aligned}$$

3. $\frac{d}{dx}[P_{n+1}(x)] - x\frac{d}{dx}[P_n(x)] = (n + 1)P_n(x).$
4. $x\frac{d}{dx}[P_n(x)] - \frac{d}{dx}[P_{n-1}(x)] = nP_n(x).$

5. $\frac{d}{dx}[P_{n+1}(x)] - [P_{n-1}(x)] = (2n+1)P_n(x)$.

Propriètés :

- Les P_n sont définis dans $[-1, 1]$.
- Toutes les racines de $P_n \in [-1, 1]$.
- Toutes les racines sont réelles.
- Toutes les polynômes P_n sont orthogonaux deux à deux.

2.2.3 Polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre définient sur $[0, +\infty]$, avec la fonction de poids $w(x) = e^{-x}$. notés par L_n (n entier positif)

Formule de Rodrigues pour les L_n

Les polynômes de Laguerre $L_n(x)$ de degré n sont donnés par la formule de Rodrigues

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}x^n].$$

les premiers polynômes de Laguerre :

$L_0(x) = 1$.
$L_1(x) = 1 - x$.
$L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}$.
$L_3(x) = 1 - 3x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$.
$L_4(x) = 1 - 4x + 3x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{3}$.
$L_5(x) = 1 - 5x + 5x^2 - \frac{5x^3}{3} + \frac{5x^4}{24} - \frac{x^5}{120}$.
$L_6(x) = 1 - 6x + \frac{15x^2}{2} - \frac{10x^3}{3} + \frac{5x^4}{8} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^6}{720}$.

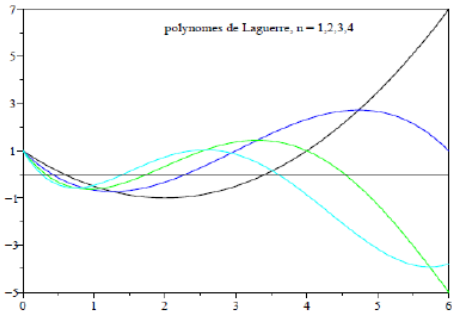


FIGURE 2.3 – les premiers polynômes de Laguerre.

Équation différentielle satisfaite par les L_n

Les polynômes de Laguerre satisfaisaient l'équation différentielle

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - (1-x)\frac{dy}{dx} + ny = 0.$$

définit sur l'intervalle $[0, \infty]$, avec $n = 0, 1, 2, \ldots$

Relation d'orthogonalité pour les L_n

la relation d'orthogonalité est :

$$\int_{-1}^{1} e^{-x}L_m(x)L_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad m \neq n \\ 1 & \text{pour} \quad m = n \end{cases} \qquad n, m = 0, 1, 2, \ldots$$

Relations de récurrences satisfaites par les L_n

1. $(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1_x)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$.
2. $x\frac{d}{dx}[L_n(x)] = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$.

2.2.4 Polynômes de Hermite

Les polynômes de Hermite définient sur $[-\infty, +\infty]$, avec la fonction de poids $w(x) = e^{-x^2}$. notés par H_n (n entier positif)

Formule de Rodrigues pour les H_n
Les polynômes de Hermite $H_n(x)$ de degré n sont donnés par la formule de Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}]$$

Les premiers polynômes de Hermite sont :
$H_0(x) = 1.$
$H_1(x) = 2x.$
$H_2(x) = 4x^2 - 2.$
$H_3(x) = 8x^3 - 12x.$
$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$
$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$
$H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120.$

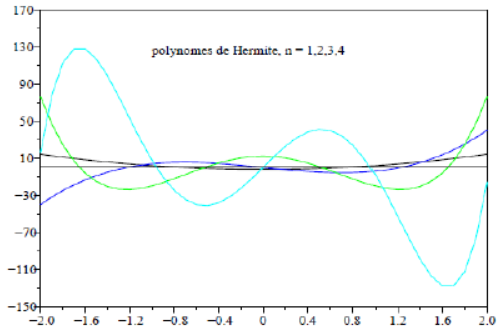


FIGURE 2.4 – les premiers polynômes de Hermite.

Équation différentielle satisfaite par les H_n
Les polynômes de Hermite H_n satisfait l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2nx = 0,$$

définit sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$, tel que $n = 0, 1, 2, \ldots$

Relation d'orthogonalité pour les H_n
La relation d'orthogonalité est :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad m \neq n, \\ \sqrt{\pi}2^n n! & \text{pour} \quad m = n \end{cases}$$

Relations de récurrences satisfaites par les H_n

1. $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$.
2. $\frac{d}{dx}[H_n(x)] = 2nH_{n-1}(x)$.
3. $nH_n(x) = -n\frac{d}{dx}[H_{n-1}(x)] + x\frac{d}{dx}[H_n(x)]$.
4. $2xH_{n-1}(x) - \frac{d}{dx}[H_{n-1}(x)]$.

2.3 Polynômes trigonométriques

2.3.1 Séries de Fourier

Définition 2.3.1 ([5],[11])**.** .
La série de Fourier d'une fonction générale $u \in L^2[0, 2\pi]$, est

$$F(u(x)) = \hat{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{b}_n \sin(nx) \tag{2.3.1}$$

où les coefficients sont

$$\hat{a}_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x)dx.$$

$$\hat{a}_n = \frac{1}{\gamma_n} \langle u(x), \cos(nx) \rangle_{L^2[0,2\pi]} = \frac{1}{c_n \pi} \int_0^{2\pi} u(x) \cos(nx)dx.$$

avec

$$c_n = \begin{cases} 2 & n = 0, \\ 1 & n > 0. \end{cases}$$

et

$$\hat{b}_n = \frac{1}{\gamma_n} \langle u(x), \sin(nx) \rangle_{L^2[0,2\pi]} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \sin(nx)dx.$$

Cela suit immédiatement l'orthogonalité de la trigonométrie fonctions dans le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L^2[0,2\pi]} = \int_0^{2\pi} u(x)\overline{v}(x)\, dx,$$

avec la norme associée

$$\|u\|_{L^2[0,2\pi]} = \left(\int_0^{2\pi} |u(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Première note
puisque les **sinus** et **cosinus** sont des fonctions périodiques de période 2π, on peut aussi calculer le développement de Fourier dans un intervalle $x \in [0, 2\pi]$. La seule modification est que les limites de l'intégration sont également modifiés de $[-\pi, \pi]$ à $[0, 2\pi]$.

Deuxième note
On rappel que la série de Fourier peut s'exprimer différemment par

$$\phi(x) = \exp(inx),$$

Clairement, cet ensemble de fonctions est un système orthogonal sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, par rapport à une fonction de poids unitaire. En introduisant le complexe coefficients

$$\hat{u}_n = \begin{cases} \hat{u}_0 = a_0 & n = 0, \\ (\hat{a}_n - i\hat{b}_n)/2 & , \ n > 0, \\ (\hat{a}_n + i\hat{b}_n)/2 & , \ n < 0. \end{cases} \tag{2.3.2}$$

la série trigonométrique dans l'équation (2.3.1), est équivalente à

$$F(u(x)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}_n \phi(x). \tag{2.3.3}$$

où les coefficients sont

$$\hat{u}_n = \frac{1}{\gamma_n} \langle u, \exp(inx) \rangle_{L^2[0,2\pi]} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \exp(-inx) dx.$$

2.3.2 Polynômes trigonométriques continus

Les coefficients de Fourier :
Les coefficients de Fourier sont définis par

$$\hat{u}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) \exp(-inx) dx.$$

où
$*$ $u(x)$ est une fonction réelle.
$*$ nous récupérons ce $\hat{a}_n$ ainsi que $\hat{b}_n$ sont des nombres réels et par conséquent $\hat{u}_{-n} = \overline{\hat{u}}_n$.
$*$ Dans le cas où la fonction est paire c'est-à-dire $u(x) = u(-x)$, nous avoir $\hat{b}_n$ pour toutes les valeurs de n , Par conséquent, il suffit de considérer la série de cosinus.
$*$ Dans le cas où la fonction est impaire, c'est-à-dire $u(x) = -u(-x)$, on obtient $\hat{a}_n$ pour tout n, en retrouvant la série sinus.
Convergence du séries de fourier :

On considère

$$P_N u(x) = \sum_{|n| \le N/2} \hat{u}_n \exp(inx),$$

où $u(x) \in L^[0, 2\pi]$, On cherche une approximation de $u(x)$ dans le sous-espace dimensionel B_N ,défini comme

$$B_N = span\{\exp(inx) \ |n| \le N/2\} \ , \qquad \dim(B_N) = N + 1.$$

$P_N\, u$ est la projection orthogonale de $u(x)$ sur B_N

Définition 2.3.2 ((Periodicity)). .
Une fonction $u(x)$, $x \in [0, 2\pi]$ est périodique si $u(0)$ et $u(2\pi)$ exist et $u(0) = u(2\pi)$.

Puisque $P_N\, u$ est périodique , une condition suffisante pour une convergence uniforme est que $u(x) \in L^2[0, 2\pi]$ soit lui-même périodique et possède un minimum de régularité

Théorème 2.3.1 ([11]). .
Chaque fonction $u(x) \in C_p^1[0, 2\pi]$ a une série de Fourier uniformément convergente

$$\|u - P_N\, u\|_{L^\infty[0,2\pi]} \to 0 \quad comme \quad N \to \infty.$$

La condition de régularité est nécessaire pour garantir que

$$\sum_{|n|\leq\infty} |\hat{u}_n| < \infty.$$

Théorème 2.3.2 ([11]). .
Chaque fonction continue $u(x) \in L^2[0, 2\pi]$, peut être développé dans une série de Fourier, qui est convergente dans la moyenne

$$\|u - P_N\, u\|_{L^2[0,2\pi]} \to 0 \quad comme \quad N \to \infty.$$

Cela équivaut à la déclaration de $L^2[0, 2\pi]$ l'exhaustivité de la base de Fourier et implique l'existence de l'identité de Parseval comme

$$\|u\|^2_{L^2[0,2\pi]} = 2\pi \sum_{|n|\leq\infty} |\hat{u}_n|^2. \tag{2.3.4}$$

pour $u(x) \in L^2[0, 2\pi]$ la somme à droite côté main est garanti de converger.
*En utilisant l'équation (*2.3.3*) et l'orthogonalité, nous trouvons l'erreur de troncature introduite par l'expansion finie comme*

$$\|u - P_N\, u\|^2_{L^2[0,2\pi]} = 2\pi \sum_{|n|>N/2} |\hat{u}_n|^2.$$

De plus, si $u(x) \in C_p^1[0, 2\pi]$ le théorème ? et l'inégalité triangulaire impliquent

$$\|u - P_N\, u\|_{L^2[0,2\pi]} \leq 2\pi \sum_{|n|>N/2} |\hat{u}_n|.$$

Différenciation de l'expansion continue :
On considère l'expansion suivante

$$u(x) = \sum_{|n|\leq\infty} \hat{u}_n \exp(inx).$$

pour obtenir les coefficients d'expansion $\hat{u}_n^{(q)}$, tels que

$$\frac{d^q}{dx^q} u(x) = \sum_{|n|\leq\infty} \hat{u}_n^{(q)} \exp(inx).$$

toutefois, récupéré directement à partir de l'équation (2.6.2) comme

$$\begin{aligned} \hat{u}^{(q)}(x) &= \sum_{|n|\leq\infty} \hat{u}_n \frac{d^q}{dx^q} \exp(inx), \\ &= \sum_{|n|\leq\infty} (in)^q \hat{u}_n \exp(inx), \\ &= \sum_{|n|\leq\infty} \hat{u}_n^{(q)} \exp(inx). \end{aligned}$$

à condition que $u(q)(x) \in C_p^1[0, 2\pi]$ pour permettre l'échange des opérateurs.
Comme les fonctions de base sont mutuellement orthogonales, on a

$$\hat{u}_n^{(q)} = (in)^q \hat{u}_n.$$

Aussi

$$P_N \frac{d^q}{dx^q}\, u = \frac{d^q}{dx^q} P_N\, u.$$

Ceci implique l'erreur

$$P_N \mathcal{L}(\mathcal{I} - P_N)\, u.$$

2.3.3 Polynômes trigonométriques discrets

Pour définir les coefficients de Fourier dans ce cas, on fait appel à la formule quadratique.
Cette formule est basée sur le choix d'un nombre de points, pair ou impair, pour cela on définit deux expressions :
L'expression pair : Soit $x_j \in [0, 2\pi]$, est donné par :

$$x_i = \frac{2\pi\, j}{N} \ , \quad j \in [0, \ldots, N-1].$$

Comme toujours, on suppose que N est pair.
nous utilisons les valeurs de $u(x)$ aux points de grille N pour obtenir une approximation $\widetilde{u}_n$ à $\hat{u}_n$ comme

$$\hat{u}_n \simeq \widetilde{u}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) \exp(-inx_j).$$

Théorème 2.3.3 ([11])**.** *La formule quadratique*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x)dx = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j). \tag{2.3.5}$$

est exacte pour tout $u(x) \in B_{2N-1}$.

Preuve :
Supposons que $u(x) \in C_p^1[0, 2\pi]$. Alors $u(x)$ a une représentation unique sous la forme

$$u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(x)_n + \exp(inx).$$

Considérons d'abord l'intégrale du théorème (2.3.5)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{u}(x)_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(inx)dx = \hat{u}_0.$$

en raison de l'orthogonalité de $exp(inx)$. puisque $u(x) \in C_p^1[0, 2\pi]$ suffit pour garantir que la somme innfinie est bornée.
On considère l'autre partie du théorème, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{|n| \le \infty} \hat{u}_n \exp\left[in \frac{2\pi j}{N} \right] \right), \\
&= \sum_{|n| \le \infty} \hat{u}_n \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) \exp\left[in \frac{2\pi j}{N} \right] \right), \\
&= \hat{u}_0 + \sum_{\substack{|m| \le \infty \\ m \ne 0}} \hat{u}_{Nm}, \qquad \text{on a } \hat{u}_{Nm} \equiv 0, \text{ for } m \ne 0. \\
&= \hat{u}_0.
\end{aligned}$$

donc $u(x) \in B_{2N-1}$.

Définition 2.3.3 ([11]). .
L'interpolation de $u \in L^2[0, 2\pi]$ sur l'espace $B_N = \{\exp(inx),\ n \in [-N/2, \ldots, N/2]\}$ est donnée par :

$$\mathcal{I}_N u(x) = \sum_{|n| \leq N/2} \hat{u}_n \exp(inx). \tag{2.3.6}$$

avec

$$\widetilde{u}_n = \frac{1}{N\widetilde{c}_n} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) \exp(-inx_j). \tag{2.3.7}$$

où

$$\widetilde{c}_n = \begin{cases} 2 & |n| = N/2. \\ 1 & |n| < N/2. \end{cases}$$

Théorème 2.3.4 ([11]). .
Soit la transformation de Fourier discrète définie par (2.3.6) et (2.3.7), pour toutes les fonction périodiques $u \in C_p^0[0, 2\pi]$, on a

$$\forall x_j = \frac{2\pi}{N} j \qquad\qquad \mathcal{I}u(x_j) = u(x_j).$$

Démonstration
En substituant l'Eq (2.3.6) dans l'Eq (2.3.7), on obtient

$$\mathcal{I}_N u(x) = \sum_{|n| \leq N/2} \left(\frac{1}{N\widetilde{c}_n} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) \exp(-inx_j) \right).$$

En échangeant l'ordre des sommations, on obtient

$$\mathcal{I}_N u(x) = \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) g_j(x).$$

où

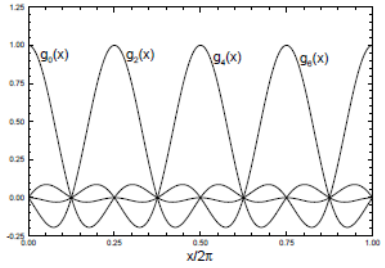


FIGURE 2.5 – Le polynôme d'interpolation $g_j(x)$, avec $N = 8$ pour différentes valeurs valeurs de j

$$\begin{aligned} g_j(x) &= \sum_{|n| \leq N/2} \frac{1}{N} \widetilde{c}_n \exp[in(x - x_j)], \\ &= \frac{1}{N} \sin\left[N\frac{x - x_j}{2}\right] \cot\left[\frac{x - x_j}{2}\right]. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $g_j(x_i) = \delta_{ij}$ comme le montrent également les exemples de $g_j(x)$ pour $N = 8$ montrés à la Figure (2.5)

Nous devons encore montrer que $g_j(x) \in B_N$, il est clair que $g_j(x) \in B_N$ car $g_j(x)$ est un polynôme de degré $N = 2$. puisque

$$\frac{1}{2}\exp\left(-i\frac{N}{2}x_j\right) = \frac{1}{2}\exp\left(i\frac{N}{2}x_j\right) = (-1)^j.$$

et par convention $\widetilde{u}_{-N/2} = \widetilde{u}_{N/2}$, nous n'obtenons aucune contribution du terme $\sin(\frac{N}{2x})$, donc $g_j(x) \in B_N$.

L'expression impair :

Les coefficients de Fourier $\widetilde{u}_n$ sont donnés par :

$$\widetilde{u}_n = \frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N} u(x_j)\exp(-inx_j).$$

avec

$$x_j = \frac{2\pi}{N+1}j \qquad\qquad j \in [0,\ldots,N].$$

Théorème 2.3.5 ([11])**.** *La formule quadratique*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x)dx = \frac{1}{N+1}\sum_{j=0}^{N} u(x_j),$$

est exacte pour tout $u(x) \in B_{2N-1}$.

Définition 2.3.4. *On peut définir l'interpolation de u par :*

$$\mathcal{I}_N u(x) = \sum_{j=0}^{N} u(x_j)h_j(x).$$

avec h_j *est le polynôme trigonometrique d'interpolation de Lagrange défini par :*

$$h_j(x) = \frac{1}{N+1}\frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}(x-x_j)\right)}{\left(\sin\frac{x-x_j}{2}\right)}.$$

Différenciation des expansions discrètes

il y a deux méthodes

1)− Utilisation des coefficients d'expansion :

On considère $\hat{u}^{(q)} \in C_p^1[0,2\pi]$,pour obtenir les coefficients d'expansion $\widetilde{u}_n^{(q)}$, tels que

$$\mathcal{I}\left(\frac{d^q}{dx^q}u(x)\right) = \sum_{|n|\le N/2}\widetilde{u}_n^{(q)}\exp(inx_j).$$

En suivant la même approche que pour l'expansion continue, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}\widetilde{u}^{(q)}(x) &= \sum_{|n|\le N/2}\widetilde{u}_n^{(q)}\exp(inx),\\
&\simeq \sum_{|n|\le N/2}\widetilde{u}_n^{(q)}\frac{d^q}{dx^q}\exp(inx),\\
&= \sum_{|n|\le N/2}(in)^q\widetilde{u}_n\exp(inx),\\
&= \frac{d^q}{dx^q}\mathcal{I}_N\, u.
\end{aligned}$$

Puisque les fonctions exponentielles discrètes sont mutuellement orthogonales jusqu'à l'erreur de repliement, nous récupérons

$$\widetilde{u}_n^{(q)} \simeq (in)^q \widetilde{u}_n.$$

Aussi

$$\mathcal{I}_N \frac{d}{dx} u \neq \mathcal{I}_N \frac{d}{dx} \mathcal{I}_N u.$$

à moins que $u(x) \in \mathcal{B}_N$.
2)− La méthode matricielle :
Considérons l'approche pour le calcul des dérivés en utilisant la formulation alternative ,i.e par l'utilisation des polynômes d'interpolation de lagrange , Si nous considérons la méthode paire, nous avons

$$\mathcal{I}_N u(x) = \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) g_j(x),$$

où

$$\frac{1}{N} \sin\left[N \frac{x - x_j}{2}\right] \cot\left[\frac{x - x_j}{2}\right].$$

L'approximation de la dérivée de u en x_i est donnée sous forme matricielle suivante :

$$\frac{d}{dx} \mathcal{I}_N u(x)|_{x_i} = \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) \frac{d}{dx} g_j(x)|_{x_i}$$

Les entrées de l'opérateur différentiel sont données par

$$D_{ij} = \frac{d}{dx} g_j(x)|_{x_i} = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+j}}{2} \cot\left[\frac{x_i - x_j}{2}\right] & \text{si } i \neq j, \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

On définit la matrice de différentiation d'ordre 2 par :

$$D_{ij}^2 = \frac{d^2}{dx^2} g_j(x)|_{x_i} = \begin{cases} -\frac{(-1)^{i+j}}{2} \left[\sin \frac{x_i - x_j}{2}\right]^{-2} & \text{si } i \neq j, \\ -\frac{N^2+2}{12} & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Lemme 2.3.1. .

- $$\mathcal{L}_N^1 = \mathcal{I}_N \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{I}_N = D^{(2)}.$$
- $$\mathcal{L}_N^2 = \mathcal{I}_N \frac{d}{dx} \mathcal{I}_N \frac{d}{dx} \mathcal{I}_N = DD.$$
- $$D^q = \mathcal{I}_N \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{I}_N \begin{cases} = (D)^q & \textit{pour } q \textit{ impair}, \\ \simeq (D)^q & \textit{pour } q \textit{ pair}. \end{cases}$$

2.4 Formules de quadrature

Dans le domaine mathématique de l'analyse numérique, les méthodes de quadrature sont des approximations de la valeur numérique d'une intégrale. En générale, on remplace le calcul d'une intégrale par une somme pondérée prise en un certain nombre de points du domaine d'intégration.

2.4.1 Expréssion de la Formule quadrature

On dispose de la valeur de f sur $n+1$ points $x_0, \ldots, x_n$ et on cherche à approcher l'intégrale de f :

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

Comme $f(x)$ est compliquée alors en peut ecrire $f(x) = p(x) + E(x)$, avec p est un polynôme d'interpolation, et d'intégrer :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,dx + \int_a^b E(x)\,dx$$

Si p_n est le polynôme d'interpolation, alors pn peut s'écrire dans la base de Lagrange $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) l_i(x)$ et donc :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)\,dx + E_Q(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i) + E_Q$$

Définition 2.4.1. *On dit que la formule de quadrature :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i) + E_Q,$$

est ***exacte*** *sur l'ensemble E si et seulement si : $E_Q = 0\ \forall f \in E$.*

Définition 2.4.2. *On dit qu'une formule de quadrature est d'ordre m si m est le plus grand entier tel que la formule soit exacte sur p_m , autrement dit tel que :*

$$I(p) = Q(p)\ ;\ \ \forall p \in P_m.$$

avec

$$Q(p) = \sum_{i=0}^{n} A_i\, p(x_i)$$

Estimations d'erreurs :
Si f est assez régulière, nous pouvons directement donner une estimation de l'erreur de quadrature en majorant l'intégrale de l'erreur d'interpolation. Plus précisément, pour $f \in C^{(n+1)}([a,b])$ nous avons :

$$E_n(f) = |I(f) - Q(f)| \leq \int_a^b (f(x) - p(x))dx \leq \int_a^b |f(x) - p(x)|dx \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!} \int_a^b |\prod_{i=1}^{n+1}(x - x_i)|dx$$

On cherchera plus présisèment des formules de type :

$$\int_a^b p_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx = h^{p+1}\, k\, f^p(\xi) \text{ avec } \xi \in [a,b].$$

Cela permetta, comme on le verra par la suite, d'inspirer de nouvelle méthodes de quadrature. Le degré d'interpolation et la fonction sont les deux principales données pour obtenir de telles formules.

2.4.2 Règle de quadrature de Gauss

On considère les intégrales de type :

$$\int_b^a f(x)\, w(x)dx$$

ou $w(x) > 0, \forall x \in [a,b]$, w est intégrable sur $]a,b[$ $(a,b$ peuvent être infinies). La méthode de Gauss à déterminer les coefficients (ou les poids) A_i et les noeuds x_i de telle façon que la méthode de quadrature :

$$\int_b^a f(x)\, w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i) + E_Q$$

soit exacte sur p_{2n+1}

Preuve. (voir [[13]] p : 58)

Définition 2.4.3 ([13])**.** *La règle de quadrature de Gauss est une méthode d'approximation d'une intégrale définie. Elle s'écrit sous la forme :*

$$\int_b^a f(x)\, w(x)dx = \sum_{i=0}^{n} A_i\, f(x_i)$$

2.4.3 Formule de Gauss-Lobatto

la formule de quadrature :

$$\int_{-1}^{1} \Phi(\xi)\, d\xi = \sum_{i=0}^{n} \Phi(\xi_j)\, w_j$$

est appelée la formule de quadrature de Gauss de type Legendre à N points. Il reste à donner une expression des points $w_j, 1 \leq j \leq N$. Le plus simple est d'utiliser la formule de Christoffel-Darboux avec η égle à ξ_j , on obtient :

$$L_0^*(\xi)L_0^*(\xi_j) + \cdots + L_{N-1}^*(\xi)L_{N-1}^*(\xi_j) = \frac{L_{N-1}^*(\xi)}{L_N^*(\xi)} \frac{L_N^*(\xi)L_{N-1}^*(\xi_j)}{\xi - \xi_j}$$

On intégrons cette équation, on obtient :

$$\int_{-1}^{1} L_0^*(\xi)L_0^*(\xi_j) + \cdots + L_{N-1}^*(\xi)L_{N-1}^*(\xi_j)\, d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{L_{N-1}^*(\xi)}{L_N^*(\xi)} \frac{L_N^*(\xi)L_{N-1}^*(\xi_j)}{\xi - \xi_j}\, d\xi$$

$$1 = \frac{L_{N-1}^*(\xi)}{L_N^*(\xi)} L_{N-1}^*(\xi_j) \int_{-1}^{1} \frac{L_N^*(\xi)}{\xi - \xi_j}\, d\xi$$

puis on calculons l'intégrale grâce à la formule de quadrature

$$1 = \frac{L_{N-1}^*(\xi)}{L_N^*(\xi)} L_N^{*'}(\xi_j) L_{N-1}^*(\xi_j)\, w_j$$

en déduit finalement l'expression :

$$w_j = \frac{2}{N L_N(\xi_j) L_{N-1}(\xi_j)}$$

voir [11]

CHAPITRE 3

MÉTHODES SPECTRALES

3.1 Introduction

les méthodes spectrales sont des méthodes d'approximations des fonctions solutions d'équations différentielles et équations aux dérivées partielles.
Pour les fonctions périodiques on utilise les séries de fourier, et pour les fonctions non périodiques on utilise les polynômes orthogonaux :
les polynômes de jacobi, Legendre et Tchebychev dans $[a, b]$.
les polynômes d'Hermite et les fonctions sinc dans $[-\infty, +\infty]$.
les polynômes de laguerre sont utiles dans $[0, +\infty]$.

En général l'approximation spectrale est de la forme :

$$u_N(x) = \sum_{i=0}^{N} \widetilde{u}_i \varphi_i(x)$$

où les coefficients $\widetilde{u}_i$ sont à chercher
une méthode spectrale est caractérisée par une manière spécifique pour déterminer ces coefficients.

Pour la détermination des coefficients d'approximations par les méthodes spectrale, il y a en général trois techniques basées sur les méthodes d'approximation qui sont : la méthode d'approximation de Tau, la méthode d'approximation de Galerkin et la méthode d'approximation pseudo-spectrale (méthode de collocation). ([3],[9])

3.2 Principe des méthodes spectrales

Une formulation générale d'un problème d'EDP : [3]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = F(u)(x,t) + f(x,t) & x \in \Omega \quad t \geq 0. \\ Bu(x,t) = g(t) & x \in \partial\Omega \quad t > 0. \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

• Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$.
• On cherche $u(x,t)$ fonction du temps à valeur dans un espaces de Hilbert $\mathcal{H}$ muni d'une norme $\|.\|$.
• f : un élément de $\mathcal{H}$.

- F : une fonction de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.
- B : un opérateur de trace, déterminant les conditions aux limites, on l'omettra si le domaine est périodique.
- $u_0(x)$: une condition initiale.

Les méthodes spectrales consistent à décomposé les éléments de $\mathcal{H}$ sur une base de fonctions $(\varphi_k)_{k=1\cdots\infty}$.
On cherche :

$$u_N(x,t) = \sum_{K=1}^{N} \widetilde{u}_k \varphi_k(x)$$

élément de l'espace B_N engendré par les N premières fonctions de base, de telle sorte que cette fonction approxime la vraie solution du problème.
On défini le résidu associé à l'approximation u_N par

$$R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} - F(u_N) - f$$

ce résidu est nul si u_N est la vraie solution. On cherche donc à le rendre "petit". Pour cela on impose que R_N soit nul en projection sur un sous-espace de $\mathcal{H}$ de dimension N. Cette projection $\mathcal{P}_N$ dépend de la méthode spectrale employée .
On a donc remplacé le problème initial par le problème approché

$$\text{Trouver} \quad u_N \in B_N \quad \text{tel que} \quad \mathcal{P}_N \; R_N = 0$$

On est alors ramené notre problème à la résolution de N équations différentielles en temps dont les inconnues sont les $\widetilde{u}_k$.

Exemples de fonctions de base utilisées :

a- Dans $\mathcal{H} = L^2[\Gamma, \mathcal{C}]$ $\quad (\varphi_k(x))_{k\in\mathbb{Z}} = (\exp(ikx))_{k\in\mathbb{Z}}$.
b- Dans $\mathcal{H} = L^2[0,\pi]$ $\quad (\varphi_n(x))_{n\geq 1} = (\sin(nx))_{n\geq 1}$ ou $(\varphi_n(x))_{n\geq 0} = (\cos(nx))_{n\geq 0}$.
c- Dans $\mathcal{H} = L^2([-1,1], dx/\sqrt{1-x^2})$ $\quad (\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = (T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

3.3 Méthodes spectrales

3.3.1 Méthode de Galerkin

En mathématiques, dans le domaine de l'analyse numérique, les méthodes de Galerkin forment une classe de méthodes permettant de transformer un problème continu (par exemple une équation différentielle) en un problème discret. Cette approche est attribuée aux ingénieurs russes Ivan Boubnov [1] (1911) et Boris Galerkin [2](1913) ([6]-[7]-[12].)
Principe de la méthode :
La méthode de Galerkin est applicable pour les équations avec des conditions aux limites périodiques ou homogènes.

Soit $B = \{ v \in \mathcal{H} \, , \, B\, v = 0 \}$ le sous-espace des fonctions de $\mathcal{H}$ vérifiant les conditions aux limites. Dans cette méthode les $(\varphi_k)_{k=1,\cdots,\infty}$ forment une base de B.

En cherchant

$$u_N = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{u}_k \, \varphi_k$$

1. Ivan Grigorievitch Boubnov (18 janvier 1872 à Nijni Novgorod - 13 mars 1919 à Pétrograd), ingénieur naval de la marine militaire russe, est le principal concepteur des premiers sous-marins russes.

2. Boris Galerkine (Boris Grigorievitch Galiorkin), né le 20 février 1871 à Polotsk (Biélorussie) et mort le 12 juillet 1945, est un mathématicien et un ingénieur russe. Son nom reste lié à une méthode de résolution approchée des structures élastiques.

dans B_N engendré par les $(\varphi_k)_{k=1\cdots N}$, on est sûr de trouver une fonction (une solution) vérifiant les conditions aux limites.
Soit $\mathcal{P}_N^{\perp}$ la projection orthogonale de $\mathcal{H}$ sur B_N.

La méthode de Galerkin consiste à résoudre le problème approché suivant

$$\text{Trouver} \quad u_N = \sum_{K=1}^{N} \widetilde{u}_k \, \varphi_k \;\in\; B_N \;\text{ tel que }\; \mathcal{P}_N^{\perp} R_N \;=\; 0$$

$$avec \;\; R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} - F(u_N) - f.$$

Remarques 3.3.1. *:*

1. *Pour des conditions aux limites non homogènes, B n'est plus un espace vectoriel mais un espace affine.*
2. *Dans le cas où F est linéaire, on peut se ramener au cas homogène en retranchant une solution particulière.*

Exemple 3.3.1. *Équation de la chaleur avec des conditions périodiques aux bords (de type Dirichlet).*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & [x \in 0, 2\pi], \\ \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \forall\ t > 0, \\ \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(0,\pi)$ *avec les fonctions de base*

$$\varphi_k(x) = \sin kx \ , \ k = 1, \ldots \infty,$$

qui vérifier les conditions aux limites.

- *On a*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin kx \, ,$$

- *et on cherche*

$$u_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \widetilde{u}_k(t) \sin kx \, ,$$

- *Calculons le résidu*

$$\begin{aligned} R_N &= \frac{\partial u_N}{\partial t} - v\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} - f \\ &= \sum_{k=1}^{N} (\frac{d\widetilde{u}_k}{dt} + k^2 \widetilde{u}_k) \sin kx - \sum_{k=1}^{N} f_k \sin kx. \end{aligned}$$

- *Dire que R_N est orthogonal à B_N revient à poser les N équations :*

$$\frac{d\widetilde{u}_k}{dt} = -k^2 \widetilde{u}_k + f_k \qquad k = 1, \ldots N. \tag{3.3.1}$$

- *On décompose*

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{u}_k^0 \sin kx,$$

ce qui donne N conditions initiales

$$\widetilde{u}_k(0) = \widetilde{u}_k^0 \qquad pour \qquad k = 1, \dots N.$$

. On résoud alors ces N équations différentielles, soit par un schéma numérique, soit analytiquement lorsque cela est simple comme ici :
*Résolution des équations (*3.3.1*) sans second membre*

$$\begin{aligned}
\frac{d\widetilde{u}_k}{dt} = -k^2\widetilde{u}_k \quad &\Rightarrow \quad \frac{dt}{\widetilde{u}_k}\frac{d\widetilde{u}_k}{dt} = -k^2\widetilde{u}_k\frac{dt}{\widetilde{u}_k} \\
&\Rightarrow \quad \frac{d\widetilde{u}_k}{\widetilde{u}_k} = -k^2 dt \\
&\Rightarrow \quad \ln\widetilde{u}_k(t) = -k^2 + c \quad \textit{avec } c \textit{ constante} \\
&\Rightarrow \quad \widetilde{u}_k(t) = K\exp(-k^2 t) \quad (\textit{avec ici } K = \widetilde{u}_k(0)).
\end{aligned}$$

En fait varier la constante K, en posant :

$$\widetilde{u}_k(t) = K(t)\exp(-k^2 t) \Rightarrow \frac{d\widetilde{u}_k}{dt} = \frac{dK}{dt}\exp(-k^2 t) - k^2 K(t)\exp(-k^2(t))$$

*. On remplace dans (*3.3.1*) on obtient*

$$\begin{aligned}
\frac{dK}{dt}\exp(-k^2 t) &= f_k \\
\frac{dK}{dt} &= f_k\exp(-k^2 t) \\
K(t) &= \frac{f_k}{k^2}(\exp(k^2(t) - 1).
\end{aligned}$$

d'où

$$\widetilde{u}_k(t) = \widetilde{u}_k(0)\exp(-k^2(t) + \frac{f_k}{k^2}(1 - \exp(-k^2(t)) \qquad n = 1, \dots, N.$$

Remarque 3.3.1. *Remarquons que la vraie solution*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{u}_k(t)\sin kx,$$

se décompose avec les mêmes coefficients que ceux de la solution approchée u_N, par conséquent c'est la projection orthogonale de u sur B_N. Ce n'est pas le cas lorsque F est non linéaire comme dans l'exemple suivant.

Exemple 3.3.2. *Équation de Burgers périodique*

$$\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \qquad x \in \Gamma \textit{ cercle unité } [0, 2\pi], \\
\\
u(x,0) = u_0(x).
\end{cases}$$

$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Gamma, \mathbb{C})$ *avec les fonctions de base* $\varphi_k(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$,

- *On pose $N = 2K + 1$, Soit B_N engendré par $\{e^{ikx}\}_{-K\leq k\leq K}$.*
  On cherche

$$u_N = \sum_{k=-K}^{K} a_k(t)e^{ikx},$$

- *Pour calculer le résidu*

$$R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} + u_N\frac{\partial u_N}{\partial x} - v\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} - f.$$

Il faut effectuer le produit de convolution discret :

$$\begin{aligned} u_N \frac{\partial u_N}{\partial x} &= (\sum_{p=-K}^{K} a_p(t) e^{ipx})(\sum_{q=-K}^{K} iq a_q(t) e^{iqx}) \\ &= \sum_{(p,q)\in\varphi} iq a_p a_q e^{i(p+q)x}. \end{aligned}$$

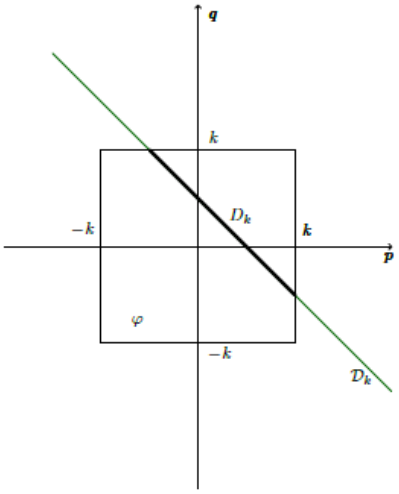


FIGURE 3.1 – Segment de droite D_k dans le carré φ et la droite $\mathcal{D}_k$.[12]

où φ désigne le carré $[-K, K] \times [-K, K]$.
En factorisant e^{ikx} on regroupe les termes $(p, q) \in D_k$ où D_k désigne l'intersection de la droite $p+q = k$ avec le carré : $D_k = \{(p, q) \in \varphi \quad , \quad p + q = k\}$.

$$u_N \frac{\partial u_N}{\partial x} = \sum_{k=-2K}^{2K} \left(\sum_{(p,q)\in D_k} iq a_p a_q \right) e^{ikx}$$

En effectuant la projection orthogonale sur B_N de cette expression il ne reste que les termes , $k \in [-K, K]$ de la sommation.
La méthode de Galerkin conduit donc au système :

$$\frac{da_k}{dt} + \sum_{(p,q)\in D_k} iq a_p a_q = -\nu k^2 a_k + f_k \qquad k \in [-K, K].$$

• *Comparons les coefficients a_k avec ceux de la vraie solution*

$$u(x, t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k(t) i^{ikx}.$$

qui vérifient :

$$\frac{dA_k}{dt} + \sum_{(p,q)\in\mathcal{D}_k} iq A_p A_q = -\nu k^2 A_k + f_k \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

où $\mathcal{D}_k$ désigne la droite de $\mathbb{Z}^2$ $p + q = k$ toute entière.
• *On voit que contrairement au cas où F est linéaire u_N n'est pas la projection orthogonale de u. En effet dans le cas approché le couplage des équations s'effectue par le segment de droite D_k au lieu de la droite toute entière $\mathcal{D}_k$ dans le cas du vrai problème.*

Problèmes non périodiques Pour des problèmes non périodiques, les ensembles de fonctions choisies comme bases des solutions pour certaines équations différentielles, les solutions des problèmes de *Sturm-Liouville singulier*.

Exemple

l'ensemble des polynômes de Chebyshev définis par

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)),$$

sont des solutions de l'équation différentielle suivante dans l'intervalle $[-1, 1]$

$$-(\sqrt{1-x^2}T_k'(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}T_k(x).$$

Il est facile de prouver que ces fonctions sont en effet polynômes, puisque $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$, et à l'aide les identités trigonométriques, on peut arriver à la relation de récurrence

$$T_{k+1} = 2xT_k - T_{k-1}.$$

Le développement prend la forme

$$u_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \widetilde{u}_k T_k(x),$$

avec

$$\widetilde{u}_k = \int_{-1}^{1} u(x)T_k(x)w(x)dx,$$

et

$$w(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Notez que, après le changement de variable $x = \cos(\theta)$, Les polynômes de Chebyshev devenir des fonctions *cosinus*.

Si une fonction u est développée dans la base de Chebyshev comme

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{u}_k T_k(x),$$

la dérivée peut également être exprimée comme une série de Chebyshev

$$u'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{u}_k^{(1)} T_k(x),$$

dont les coefficients $\widetilde{u}_k^{(1)}$ sont calculés à l'aide de la relation de récurrence

$$2T_k(x) = \frac{1}{k+1}T_{k+1}'(x) - \frac{1}{k-1}T_{k-1}'(x), \qquad k \geq 1. \tag{3.3.2}$$

lorsque l'on considère une approximation u_N comme ci-dessus, nous avons de (3.3.2) que

$$2k\widetilde{u}_k = c_{k-1}\widetilde{u}_{k-1}^{(1)} - \widetilde{u}_{k+1}^{(1)}\ , \quad \textit{pour}\ \ k \geq 1$$

avec $c_k = 2$ pour $k = 0, \ldots, N$ et $c_k = 1$ sinon.

Nous avons aussi $\widetilde{u}_k^{(1)} = 0$ pour $k \geq N$, et les coefficients restants peuvent être calculées par ordre décroissant

$$2k\widetilde{u}_k = c_{k-1}\widetilde{u}_{k-1}^{(1)} - \widetilde{u}_{k+1}^{(1)}\ , \quad \textit{pour}\ \ 0 \leq k \leq N-1$$

Cette relation peut être facilement généralisée pour obtenir des dérivés d'ordre supérieur.
Un autre ensemble d'une grande utilité est l'ensemble des polynômes de Legendre, définis comme les solutions du problème de *Sturm-Liouville*

$$-((1-x^2)L_k'(x))' = k(n+1)L_k(x).$$

Les coefficients spectraux du développement

$$u_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{u}_k L_k(x),$$

sont définis comme

$$\widetilde{u}_k = \int_{-1}^{1} u(x)L_k(x)dx.$$

où la fonction de poids $w(x) = 1$ rend beaucoup plus facile à démontrer des théorèmes pour cet ensemble que pour les polynômes de Chebyshev.

3.3.2 Méthode de Tau

Cette méthode, découverte par C. Lanczos [3] , On applique cette méthode aux problèmes avec des conditions aux limites non périodiques. Le Chebyshev méthode de tau (CT en abrégé) se caractérise par le choix suivant : $X \in L^2[(-1,1)]$; et $X_N = \{v \in \mathcal{P}_N | Bv = 0\}$
Soit $(\varphi_n)_{n\geq 1}$une base orthogonale ne vérifiant pas les conditions aux limites, et si F contient des dérivations d'ordre K les conditions aux limites sont au nombre de K.

La méthode consiste à chercher

$$u_N = \sum_{a=1}^{\infty} a_n \varphi_n$$

dans B_N tel que

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{N-K}^{\perp} R_N & = 0 \quad N-K \ \textit{équations} \\ Bu_n & = 0 \quad K \ \textit{équations} \end{cases}$$

- $\mathcal{P}_{N-K}^{\perp} R_N$ désigne la projection orthogonal de H sur B_{N-K}.
- u_N est alors déterminé par N équations différentielles.

Projecteur de la méthode de Tau
On cherche u_N dans l'espace affine de dimension $N-K$ des éléments B_N vérifiant les K conditions aux limites.

Exemple 3.3.3. *Équation de la chaleur avec des conditions non périodiques*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & x \in [-1,1] \ t \geq 0, \\ u(-1,t) = g_1 \ ; u(1,t) = g_2 & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

3. Cornelius Lanczos, (né le 2 février 1893 à Székesfehérvár et décédé le 25 juin 1974 à Budapest) est un mathématicien et physicien hongrois.

$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2([-1,1], dx/\sqrt{1-x^2})$, *avec comme fonctions de base les polynômes de Chebychev* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *On cherche*

$$u_N = \sum_{n=0}^{N} a_n(t) T_n(x),$$

dans B_N *de dimension* $N+1$.
On pose

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n^{(2)}(t) T_n(x).$$

Les coefficients $a_n^{(2)}$ *sont donnée par la formule*

$$a_n^{(2)} = \frac{2}{c_n} \sum_{\substack{p=n+1 \\ \text{step } 2}}^{N} p a_p \quad \text{avec } c_0 = 2 \text{ et } c_n = 1.$$

Donc

$$R_N = \sum_{n=0}^{N} (\frac{da_n}{dt} - v a_n^{(2)}) T_n + \sum_{n=0}^{\infty} f_n T_n.$$

Comme $k = 2$ *on pose nulle la projection de ce résidu sur* B_{N-2} *:*

$$\frac{da_n}{dt} = v a_n^{(2)}) + f_n \quad n = 0, \ldots, N-2. \qquad \text{(N-1 équations)}$$

Les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(-1) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n = g_1, \\ \\ \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(1) = \sum_{n=0}^{N} a_n = g_2. \end{cases} \qquad \text{(2 équations)}$$

Ces $N+1$ *équations permettent de trouver les* $(N+1)$ $a_n(t)$*, en utilisant les conditions initiales*

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^0 T_n(x).$$

3.3.3 Méthode de Collocation

Principe de la méthode :

Comme la méthode de Galerkin, elle est applicable pour les problèmes où les conditions aux limites sont périodiques ou bien homogènes. Et comme pour la méthode de Galerkin les $(\varphi_k)_{k=1,\cdots,\infty}$ forment une base complète de B, et vérifiant donc les conditions aux limites.
On se donne de plus $(x_i)_{i=1,\cdots,N}$ (N points) dits de *collocation* dans Ω tels que la matrice $(\varphi_n(x_i))_{N\times N}$ soit inversible.

La méthode consiste à chercher

$$u_N = \sum_{n=1}^{K} a_n \varphi_n$$

dans B_N (engendré par les N fonctions de base)
tel que son résidu

$$R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} + F(u_N) - f$$

vérifier les N conditions

$$R_N(x_i) = 0 \quad i = 1, \cdots, N.$$

Ces N conditions s'écrivent encore

$$\mathcal{P}_N^c R_N = 0$$

où $\mathcal{P}_N^c$ désigne la projection de Collocation définit comme suit :

Soit $v \in \mathcal{H}$, et $v_i = v(x_i)$, $x = 1, \cdots, N$ les valeurs de cette fonction aux points de Collocation.

Il existe une seule fonction $\mathcal{P}_N^c$ de B_N prenant les mêmes valeurs aux mêmes points de collocation.

En pratique cette projection s'effectue simplement à condition de savoir inverser la matrice

$$\mathcal{M} = (\varphi_n(x_i))$$

Pour en bien comprendre le mécanisme introduisant deux isomorphismes

$$\Phi_{sp} \; : \; B_N \longrightarrow \delta_s = \mathbb{C}^N$$

$$w = \sum_{n=1}^{N} b_n \, \varphi_n \longmapsto (b_1, b_2, \cdots, b_N)$$

et l'autre

$$\Phi_{ph} \; : \; B_N \longrightarrow \Im_h = \mathbb{C}^N$$

$$w \longmapsto (w_1, w_2, \cdots, w_N) \quad \text{avec} \quad w_i = w(x_i)$$

On appelle δ_p "*l'espace spectrale*" et $\Im_h$ "*l'espace physique*".

De ces deux isomorphismes on déduit un troisième de δ_p dans $\Im_h$ définit par :

$$\sum_{n=1}^{N} b_n \, \varphi_n(x_i) = w_i \quad , \quad i = 1, \cdots, N$$

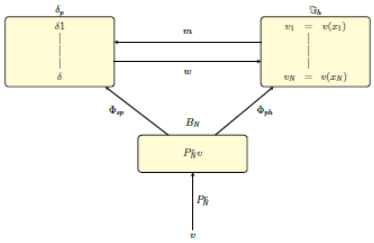


FIGURE 3.2 – Projection de collocation d'une fonction $v \in \mathcal{H}$ [12].

Sa matrice pour les bases canonique est donc

$$\mathcal{M} = (\varphi_n(xi))$$

. Ces isomorphismes $\delta_p \sim B_N \sim \Im_h$ permettent de décomposer la projection de Collocation.

Étant donnée une fonction $v \in \mathcal{H}$, les N valeurs $v_i = v(x_i)$ déterminent la projection $\mathcal{P}_n^c$ dans l'espace physique et en appliquant $\mathcal{M}^{-1}$ on obtient ses coefficients dans l'espace spectral.

• La puissance de la méthode de collocation réside dans la simplicité de la projection des termes non linéaires , de plus toute fonction de B_N se projette en elle même.

Par exemple la projection de Collocation de v^2 est donnée par $(vi)^2_{i=1,\cdots,N}$, celle de sin v par $sin(v_i)_{i=1,\cdots,N}$ etc $\cdots$.

De plus toute fonction de B_N se projette en elle même.

On calcule donc facilement la projection de collocation du résidu R_N en effectuant des allers et retours entre l'espace spectral où sont calculées les dérivations et l'espace physique où sont projetés les termes non linéaires.

Remarque 3.3.2. *On aura donc intérêt à disposer d'algorithmes rapides permettant d'appliquer la matrice M et son inverse à un vecteur, par exemple ; l'algorithme de transformée de Fourier rapide.*

Exemple 3.3.4. *Équation de Burgers périodique*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & x \in \Gamma(\text{ cercle unité}[0, 2\pi]) , \quad t \geq 0, \\ \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Gamma, \mathbb{C})$ *avec les fonctions de base* $\varphi_k(x) = e^{ikx}$, $k \in \mathbb{Z}$,
Soit B_N *engendré par* $\{e^{ikx}\}_{-K \leq k \leq K}$, *alors* $N = 2k + 1$ *Sur* $\Gamma = [0, 2\pi]$.

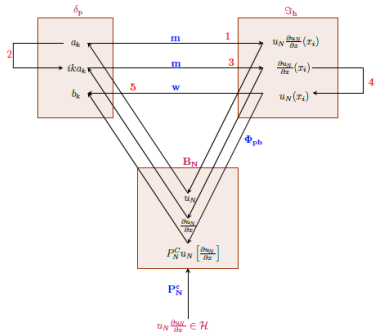


FIGURE 3.3 – Calcul des b_k connaissant les b_K [12].

Les points de collocation sont choisis à intervalles réguliers :

$$x_i = \frac{2\pi i}{N} , \quad i = 1, \ldots, N.$$

On a

$$\mathcal{M} = (\exp^{ikx_i}).$$

matrice $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
L'inconnue est

$$u_N = \sum_{k=-K}^{K} a_x \exp^{ikx}$$

Il faut calculer la projection du résidu

$$R_N = \frac{\partial u_N}{\partial t} - v\frac{\partial^2 u_N}{\partial x^2} - u_N\frac{\partial u_N}{\partial x} - f.$$

Les deux premiers termes appartiennent à B_N *et sont invariants par* $\mathcal{P}_N^c$.
Pour projeter $u_N\frac{\partial u_N}{\partial x}$ *qui n'est pas un élément de* B_N *on procède comme suit :*
Des $(a_k)_{-K \leq k \leq K}$ *coefficients spectraux de* u_N *on déduit très simplement* $(ika_k)_{-K \leq k \leq K}$ *coefficients de* $\frac{\partial u_N}{\partial x}$.
En appliquant la matrice $\mathcal{M}$ *à ces deux vecteurs on en déduit*

$$[u_N(x_i)]_{i=1,\ldots,N}$$

et

$$\left[\frac{\partial u_N}{\partial x}(x_i)\right]_{i=1,\ldots,N}$$

les coefficients de u_N *et* $\frac{\partial u_N}{\partial x}$ *dans l'espace physique.*
Les coefficients de

$$\mathcal{P}_N^c\left(\frac{\partial u_N}{\partial x}\right)$$

. dans l'espace physique sont

$$u_N(x_i)\left[\frac{\partial u_N}{\partial x}(x_i)\right]_{i=1,\dots,N}$$

En y appliquant la matrice $\mathcal{M}^{-1}$ on calcule les $(b_k)_{-K\leq k\leq K}$ coefficients spectraux de cette projection, ce qui a coûté au total deux multiplication par $\mathcal{M}$ et une par $\mathcal{M}^{-1}$
Le problème approché de la méthode de collocation s'écrit alors dans l'espace spectral :

$$\mathcal{P}_N^c R_N = 0 \Rightarrow \frac{da_k}{dt} + b_k = -\nu k^2 a_k + f_k \qquad k = -K, \dots, K.$$

Remarque 3.3.3. *Dans dautres problèmes il faut étudier quel espace nécessaire pour faire le moins d'allers et retours, par exemple les équations de Navier-Stokes doivent être écrites dans l'espace spectral.*

3.3.4 Méthode de Tau-Collocation

Cas d'applications :
Ce sont les mêmes que pour la méthode Tau. Conditions aux limites non périodiques.

Principe de la méthode
• Comme pour la méthode Tau $(\varphi_n)_{n=1,\cdots,N}$ est une base orthogonale ne vérifiant pas les k conditions aux limites.
• Comme pour la méthode de Collocation $(x_i)_{i=1,\cdots,N}$ sont les N points du domaine Ω et l'on sait appliquer rapidement $\mathcal{M} = (\varphi_n(xi))$ et son inverse.
On calcule la projection $\mathcal{P}_N^c R_N$ avec allers et retours entre l'espace spectral et l'espace physique.
Soit $\mathcal{P}_{N-K}^{\perp}$ la projection orthogonale sur B_{N-K}. Les N conditions déterminant $u_N \in B_N$ par cette méthode sont

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{N-K}^{\perp}\mathcal{P}_N^c\, R_N &= 0\\ Bu_N &= 0.\end{aligned}$$

Interprétation intrinsèque
La méthode de Tau-Collocation consiste à chercher u_N dans l'espace affine de dimension $N-K$ des $u_N \in B_N$ vérifiant $B_N\, u = g$ tel que le résidu R_N annule la projection $\mathcal{P}_{N-K}^{\perp}\mathcal{P}_N^c$ de $\mathcal{H}$ sur B_{N-K}.

Exemple 3.3.5. *Équation de Burgers non-périodique*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f & x \in [-1,1] \quad t \geq 0,\\ u(-1,t) = g_1 \quad u(1,t) = g_2 & t > 0,\\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

$\mathcal{H} = \mathcal{L}^2([-1,1], dx/\sqrt{1-x^2}$, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *base des polynômes de Chebychev.*
En choisissant comme points de collocation les

$$x_j = \cos\left(j\frac{2\pi}{N+1}\right)_{j=0,\dots,N}.$$

et N pair on peut utiliser l'algorithme de Transformée de Fourier Rapide pour appliquer la matrice

$$\mathcal{M} = (T_n x_j)\cos\left(nj\frac{2\pi}{N+1}\right).$$

Les $N+1$ équations du problème approché s'écrivent :
Trouver

$$u_N = \sum_{n=0}^{N} a_n T_n(x),$$

dans B_N (de dimension $N+1$ ici), tel que

$$\begin{cases} \frac{da_n}{dt} + b_n = v a_n^{(2)} + f_n \qquad n = 0, \ldots, N-1, \\ \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n = g_1, \\ \sum_{n=0}^{N} a_n = g_2. \end{cases}$$

avec

$$a_n^{(2)} = \sum_{\substack{p=n+1 \\ step\ 2}}^{N} p a_p.$$

et b_n coefficients spectraux de $\mathcal{P}_N^c \left(u_N \frac{\partial u_N}{\partial x} \right)$.

Quelle méthode utiliser ?

Tableau 3.3.1. *résume les conditions d'application des quatre méthodes spectrales précédentes.*

Méthodes	**Domaines d'application**
Galerkin et collocation	conditions aux limites périodiques ou homogènes.
Tau et Tau-collocation	conditions aux limites non périodiques.

TABLE 3.1 – Domaines d'application des méthodes spectrales.

Tableau 3.3.2. *Donne une indication sur le choix d'une méthode. Ce tableau n'a rien de catégorique et il sert juste à fixer les idées. Lorsque F est linéaire la méthode de Galerkin (resp Tau) est identique à la méthode de Collocation (resp Tau-Collocation).*
Lorsque F est non linéaire[4] *ces dernières sont plus rapides en temps de calcul, à condition de posséder un algorithme de transformation rapide entre espace spectral et espace physique.*

F / C.L	**F linéaire à coefficients constant**	**F quelconque**
Périodiques	Galerkin (exemple : chaleur périodique)	Collocation (exemple : Burgers périodique)
Non périodiques	Tau ou Galerkin (exemple : chaleur non périodique)	Tau-collocation (exemple : Burgers non périodique)

TABLE 3.2 – Essai de classification du choix de la méthode pour des applications pratiques.

4. ou linéaire avec des coefficients dépend de x.

Tableau 3.3.3. *Indique les principales fonctions de bases pour lesquelles il existe de tels algorithmes de transformation. : Orszag a mis au point des algorithmes rapides pour les polynômes de Legendre ou de Laguerre*

Conditions aux limites	**Méthodes**	**Domaines et fonctions de base**
Périodiques	Galerkin et Collocation	$x \in \Gamma$ cercle unité $[0, 2\pi]$ $(\exp^{ikx})_{k\in\mathbb{Z}}$, $\sin(nx)_{n\in\mathbb{N}^*}$, ou $\cos(nx)_{n\in\mathbb{N}}$
Non périodiques	Tau et Tau Collocation	$x \in [-1, 1]$ Polynôme de Chebychev, Legendre ou Laguerre

TABLE 3.3 – Fonctions de bases usuelles.

CHAPITRE 4

APPLICATIONS

Comprendre les propriétés de la série de Fourier, nous sommes maintenant équipés à considérer la formulation de méthodes spectrales de Fourier pour la solution d'équations aux dérivées partielles, alors on va présenter la méthode de Fourier-Galerkin et la méthodes de Fourier-Collocation avec ses applications pratiques, soit pour des problèmes linéaires ou non linéaires ,et on faire une analyse de la stabilité et de convergence de certains schémas semi-discrets discutés .

4.1 Méthode de Fourier-Galerkin

Considérez le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \mathcal{L}u(x,t) & x \in [0,2\pi] \quad t \geq 0, \\ \\ u(x,0) = g(x) & x \in [0,2\pi] \quad t = 0. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

- $u(x,t)$ est la solution.
- $\mathcal{L}(u)$ est un opérateur (linéaire ou non-linéaire) qui contient toutes les dérivées spatiales de u .
- L'équation doit être couplée avec une condition initiale $u(x,0)$ et des conditions aux limites.

Supposons que la solution $u(x;t) \in L^2[0,2\pi]$, est périodique et que

$$u(x,t) = \sum_{|n|\leq\infty} \hat{u}_n(t) \exp(inx).$$

Dans la méthode de Fourier-Galerkin, on cherche des solutions $u_N(x,t) \in B_N$, avec $B_N \in span\{\exp(inx)\}_{|n|\leq N/2}$ à l'équation différentielle partielle de la forme

$$u_N(x,t) = \sum_{|n|\leq N/2} \hat{u}_n(t) \exp(inx).$$

On rappelle que les coefficients du développement par $\hat{u}_n(t)$, sont donnés comme :

$$\hat{u}_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x,t)\ \exp(-inx)\, dx.$$

Remarque 4.1.1. *Les coefficients $\hat{u}_n(t)$ de l'approximation sont différents des coefficients de Fourier, mais ils sont égaux si cette approximation est la solution exacte du problème.*

On a résidu

$$R_n(x,t) = \frac{\partial u_N}{\partial t}(x,t) - \mathcal{L}u(x,t),$$

est orthogonal à B_N , i.e

$$\forall |n| \leq \frac{N}{2} \ , \qquad \frac{1}{2\pi}\langle R_N, \exp(inx)\rangle_{L^2[0,2\pi]} = 0,$$

Les conditions initiales sont :

$$u_N(x,0) = \sum_{|n|\leq N/2} \hat{g}_n \ , \qquad \hat{g}_n = \frac{1}{2\pi}\langle g, \exp(inx)\rangle_{L^2[0,2\pi]}.$$

Autrement dit , si nous exprimons le résidu comme :

$$R_N(x,t) = \sum_{|n|\leq \infty} \hat{R}_n(t)\exp(inx).$$

Alors, les $N+1$ coefficients $\hat{u}_n(t)$ sont déterminés par la résolution de $N+1$ équations différentielles ordinaires

$$\forall |n| \leq \frac{N}{2} \ : \qquad \hat{R}_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_N(x,t)\ \exp(-inx)\,dx \ = \ 0\,.$$

Le point crucial ici est la projection du résidu sur B_N , un processus cela peut être très difficile et même impossible selon a l'équation. on va traiter quelques exemples définis sur $[0, 2\pi]$ de la forme (4.1.1) et obtenir leurs solutions par cette méthode.

Exemple 4.1.1. *On considère le problème du coefficient de constante linéaire*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = a\frac{\partial^q}{\partial x^q}u(x,t)$$

avec l'hypothèse que $g(x) = u(x,0) \in C_p^\infty[0,2\pi]$ *, a est une constante, et* $q \geq 0$ *signifie l'ordre de différenciation.*
Pour récupérer la solution approchée on cherche un polynôme trigonométrique

$$u_N(x,t) = \sum_{|n|\leq N/2} \hat{u}_n(t)\exp(inx),$$

telle que le résidu

$$R_N(x,t) = \frac{\partial u_N}{\partial t}(x,t) - a\frac{\partial^q}{\partial x^q}u_N(x,t),$$

soit orthogonal à B_N*.*
On rappelle que

$$\frac{\partial^q}{\partial x^q}u_N(x,t) = \sum_{|n|\leq N/2} (in)^q\hat{u}_n(t)\exp(inx),$$

et récupérer le résidu directement

$$R_N(x,t) = \sum_{|n|\leq N/2} \left(\frac{d\hat{u}_n(t)}{dt} - a(in)^q\hat{u}_n(t)\right)\exp(inx).$$

Nous observons que $R_N(x,t) \in B_N$ i.e , les premiers $N/2$ termes des équations peut être résolu
Les $N+1$ équations différentielles ordinaires (EDO) décrivant les coefficients de développement $\hat{u}_N$
La méthode de Fourier-Galerkin consiste à résoudre les $N+1$ équations

$$\forall |n| \leq \frac{N}{2} \ : \qquad \hat{R}_N(t) = 0 \ \Rightarrow \ \frac{d\hat{u}_n}{dt} = a(in)^q \hat{u}_n(t).$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}_n(t)}{\hat{u}_n(t)} &= a(in)^q \, dt \qquad && \forall \ |n| \leq \frac{N}{2}, \\ \ln(\hat{u}_n(t)) &= a(in)^q t + c \qquad && \forall \ |n| \leq \frac{N}{2}, \ cconstante, \\ \hat{u}_n(t) &= K \exp(a(in)^q t) \qquad && \forall \ |n| \leq \frac{N}{2}. \end{aligned}$$

avec

$$K = \hat{u}_n(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \exp(-inx) \, dx.$$

D'où, la solution est donnée sous forme

$$u_N(x,t) = \sum_{|n| \leq N/2} \hat{u}_n(t) \exp(inx),$$

et

$$\hat{u}_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \exp(-inx + a(in)^q t) \, dx \qquad \forall \ |n| \leq \frac{N}{2}.$$

Dans ce cas, les coefficients $\hat{u}_n(t)$ de l'approximation sont égaux aux coefficients de Fourier.
De plus, la solution approchée est la projection de la vraie solution, c.à.d.

$$\mathcal{P}_N u(x,t) = u_N(x,t).$$

Exemple 4.1.2. *On considère le problème non linéaire*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = u(x,t) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t),$$

avec des conditions initiales périodiques et régulières.
On cherche la solution sous la forme

$$u_N(x,t) = \sum_{|n| \leq N/2} \hat{u}_n(t) \exp(inx),$$

telle que le résidu

$$R_N(x,t) = \frac{\partial u_N}{\partial t}(x,t) - u_N(x,t) \frac{\partial}{\partial x} u_N(x,t),$$

être orthogonal à B_N.
On considère d'abord la formule quadratique non-linéaire

$$\begin{aligned} u_N(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u_N(x,t) &= \left(\sum_{|i|\le N/2}\hat{u}_i(t)\exp(ilx)\right)\left(\sum_{|k|\le N/2}(ik)\hat{u}_k(t)\exp(ikx)\right), \\ &= \sum_{|i|\le N/2}\sum_{|k|\le N/2}\hat{u}_i(t)(ik)\hat{u}_k(t)\exp[i(l+k)x] \\ &= \sum_{|k|\le N/2}(ik)\hat{u}_k(t)\left(\sum_{|i|\le N/2}\hat{u}_i(t)\exp[i(l+k)x]\right) \end{aligned}$$

si on pose $n = l + k$, alors $l = n - k$ donc on obtient

$$\begin{aligned} u_N(x,t)\frac{\partial}{\partial x}u_N(x,t) &= \sum_{|k|\le N/2}(ik)\hat{u}_k(t)\left(\sum_{n-k=-N/2}^{N/2}\hat{u}_{n-k}(t)\exp(inx)\right), \\ &= \sum_{|k|\le N/2}\sum_{n=-\frac{N}{2}+k}^{\frac{N}{2}+k}(ik)\hat{u}_k(t)\hat{u}_{n-k}(t)\exp(inx). \end{aligned}$$

le résidu $R_N(x,t) \notin B_N$
Cela montre que le résidu $R_N(x,t) \in B_{2N}$ comme un conséquence de la quadratique non-linéaire et le mélange à trois ondes associé
D'où, on a $2N+1$ equations mais peut récupérer $N+1$conditions en exigeant cette $\mathcal{P}_N R_N = 0$ Satisfaire aux premières conditions $N+1$, ce qui se traduit par un ensemble d'EDO de la forme

$$\forall\ |n| \le N/2, \qquad \frac{d\hat{u}_n(t)}{dt} = \sum_{|k|\le N/2}(ik)\hat{u}_{n-k}(t)\hat{u}_k(t).$$

avec

$$\hat{u}_n(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\exp(-inx)\,dx.$$

représentant les premiers $N+1$ coefficients de Fourier de la solution.

4.1.1 Stabilité de la méthode de Fourier-Galerkin

La stabilité de la méthode de Fourier-Galerkin est étroitement liée à la bien posé de l'EDP . Nous

considérons le problème de la valeur limite initiale à une dimension

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u. \tag{4.1.2}$$

où $u(x,t) \in \mathcal{H}$ est supposé des conditions initiales périodiques et régulières , Rappelons que $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle_{L^2[0,2\pi]}$ et la norme associée $\|.\|_{L^2[0,2\pi]}$.
grâce a [11] on a le théoreme suivant :

Théorème 4.1.1 ([11])**.** .
*Si l'opérateur L est semi-borné alors le problème de la valeur limite initiale (*4.1.2*), est bien posé dans un sens énergétique comme*

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2[0,2\pi]} \le \alpha\|u\|^2_{L^2[0,2\pi]}.$$

i.e.

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}^* \le \alpha.$$

dans ce cas, la méthode de Fourier-Galerkin est stable.
preuve

Multiplier l'équation (4.1.2) par $\overline{u}$ pour obtenir

$$\overline{u}\frac{\partial u}{\partial t} = \overline{u}\mathcal{L}u.$$

De même, considérer le complexe conjugué de l'équation (4.1.2) et multiplier par u pour obtenir

$$u\frac{\overline{\partial u}}{\partial t} = u\overline{\mathcal{L}u}.$$

On ajouter les deux expressions et intégrer sur $[0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2[0,2\pi]} &= \langle\frac{du}{dt}, u\rangle_{L^2[0,2\pi]} + \langle u, \frac{du}{dt}\rangle_{L^2[0,2\pi]}, \\
&= \langle\mathcal{L}u, u\rangle_{L^2[0,2\pi]} + \langle u, \mathcal{L}u\rangle_{L^2[0,2\pi]}, \\
&= \langle u, \mathcal{L}^*u\rangle_{L^2[0,2\pi]} + \langle u, \mathcal{L}u\rangle_{L^2[0,2\pi]}, \\
&= \langle u, (\mathcal{L}^* + \mathcal{L})u\rangle_{L^2[0,2\pi]}, \\
&\leq \|u\|\,\|\mathcal{L}^* + \mathcal{L}\|\,\|u\|, \\
&\leq \alpha\|u\|^2_{L^2[0,2\pi]}.
\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que la norme est bornée, en effet :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2[0,2\pi]} \leq \alpha\|u\|_{L^2[0,2\pi]} &\Rightarrow \frac{d(\|u\|)}{\|u\|} \leq \alpha dt, \\
&\Rightarrow \ln(\|u\|) \leq \alpha t + c \qquad (cconstant), \\
&\Rightarrow \|u\| \leq k\exp(\alpha t).
\end{aligned}$$

d'où :

$$\|u(t)\|_{L^2[0,2\pi]} \leq \|u(0)\|_{L^2[0,2\pi]}\exp(\alpha t).$$

donc le problème est bien posé.

Exemple 4.1.3. *Considérons l'operateur :*

$$\mathcal{L} = a(x)\,\frac{\partial}{\partial x}$$

dans $L^2[0, 2\pi]$, où $a(x) \in C^1_p[0, 2\pi]$ est une fonction périodique avec une dérivée bornée périodique. Dans ce cas, L'opérateur adjoint $\mathcal{L}^*$ obtenu par une intégration par parties

$$\begin{aligned}
\langle\mathcal{L}u, v\rangle_{L^2[0,2\pi]} &= \int_0^{2\pi} a(x)\frac{\partial u}{\partial x}\overline{v}\,dx, \\
&= -\int_0^{2\pi} u\frac{\partial}{\partial x}(\overline{a(x)\,v})\,dx, \\
&= -\int_0^{2\pi} u\left[\frac{\partial a}{\partial x}v + a(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right]dx, \\
&= \left\langle u, \left[-a(x)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{da(x)}{dx}\right]v\right\rangle_{L^2[0,2\pi]}, \\
&= \langle u, \mathcal{L}^*v\rangle_{L^2[0,2\pi]}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathcal{L}^* = -a(x)\frac{\partial}{\partial x} - \frac{da(x)}{dx}.$$

La condition de semi-borné est

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}^* = -\frac{da(x)}{dx} \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{da(x)}{dx}\right| \leq A.$$

Exemple 4.1.4. *On considère l'operateur :*

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial x} b(x) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Où $b(x) \in C_p^1[0, 2\pi]$

En procédant comme dans la preuve du théorème (4.1.1)*, on retrouve*

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2[0,2\pi]} = -\left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, (b + \overline{b})\frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle^2_{[0,2\pi]},$$

Si nous obtient que

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, (b + \overline{b})\frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle^2_{[0,2\pi]} \geq \sigma \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{L^2[0,2\pi]}.$$

avec $\sigma > 0$*, alors le problème est clairement bien posé .*

Revenant à la relation entre le bien posé de l'EDP et la stabilité de la méthode de Fourier-Galerkin, on peut maintenant énoncer le résultat comme un théorème .

Théorème 4.1.2. .
Si l'opérateur $\mathcal{L}$ *est semi-borné dans* $L^2[0, 2\pi]$*, alors la méthode de Fourier-Galerkin est stable.*

Démonstration :
Dans la méthode de Fourier-Galerkin, nous employons le développement

$$u_N(x, t) = \sum_{|n| \leq N/2} \hat{u}_n(t) \exp(inx),$$

tel que $u_N(x, t) \in B_N$ *et le résidu définie comme :*

$$R_N(x, t) = \frac{\partial u_N}{\partial t} - \mathcal{L}u_N,$$

En général, on rappel que

$$R_N(x, t) = \sum_{|n| \leq \infty} \hat{R}_n \exp(inx).$$

et $R_N(x, t)$ *n'est généralement pas contenu complètement dans* B_N *, i.e* $\hat{R}_N \neq 0 \ \forall \ |n| \leq N/2$.
Le schéma de Fourier-Galerkin est obtient

$$P_N R_N(x, t) = 0 \Rightarrow \forall |n| \leq N/2 \ : \ \hat{R}_N(t) = 0,$$

qui donne

$$\int_0^{2\pi} P_N R_N(x, t)\overline{u_N(x, t)}\, dx = \int_0^{2\pi} \sum_{|n|>N/2} \hat{R}_n \exp(inx) \sum_{|i|\leq N/2} \overline{\hat{u}_i(t)} \exp(ilx)\, dx = 0.$$

On a donc l'identité

$$\int_0^{2\pi} P_N \left(\frac{\partial u_N}{\partial t} - \mathcal{L} u_N \right) \overline{u_N}\, dx = 0.$$

puisque $P_N R_N(x,t)$ est orthogonal à $u_N(x,t)$ Suite à la preuve du théorème (4.1.1) nous récupérons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|u_N\|^2_{L^2[0,2\pi]} &= \langle u_N, P_N \mathcal{L} u_N \rangle_{L^2[0,2\pi]} + \langle P_N \mathcal{L} u_N, u_N \rangle_{L^2[0,2\pi]}, \\ &= \langle u_N, P_N [\mathcal{L} + \mathcal{L}^*] u_N \rangle_{L^2[0,2\pi]}, \\ &= \alpha \|u_N\|^2_{L^2[0,2\pi]}. \end{aligned}$$

à condition que l'opérateur est semi-borné.

La stabilité suit immédiatement comme

$$\| \exp(\mathcal{L}_N(t)) \|_{L^2[0,2\pi]} \leq \exp(\frac{1}{2}\alpha t).$$

où $\mathcal{L}_N = P_N \mathcal{L} P_N$.
Une condition nécessaire et suffisante, fournir une généralisation du théorème (4.1.1) pour bien-posé peut être indiqué sur le formulaire suivant

Théorème 4.1.3. .
Supposons qu'il existe un opérateur auto-adjoint $\mathcal{H}$, et a une constante, $K > 0$ telle que

$$K^{-1}\|u\|^2_{L^2[0,2\pi]} \leq \langle u, \mathcal{H} u \rangle_{L^2[0,2\pi]} \leq K \|u\|^2_{L^2[0,2\pi]}.$$

Alors la valeur initiale du problème (4.1.2) est bien-posé si et seulement s'il existe une constante α tel que :

$$\langle u, [\mathcal{H}\mathcal{L} + \mathcal{L}^* \mathcal{H}] u \rangle_{L^2[0,2\pi]} \leq \alpha \langle u, \mathcal{H} u \rangle_{L^2[0,2\pi]}.$$

Cela permet une généralisation du théorème (4.1.4) comme

Théorème 4.1.4. .
• *Si l'opérateur est bien posé au sens généralisé de théorème (4.1.3) , alors le schéma de Fourier-Galerkin est stable.*
• *Dans le cas des méthodes de Fourier-Galerkin, il suffit donc de considérer le problème bien-être car*

la stabilité suit directement

4.2 Méthode de Fourier-Collocation

• La méthode de Fourier-Collocation consiste à remplacer l'opérateur de la projection orthogonale $\mathcal{P}_N$ par l'opérateur d'interpolation $\mathcal{I}_N$.
• La méthode de Fourier-Collocation consiste à rendre nul le résidu R_N en quelques points y_j appelés points de collocation.
• Pour définir une méthode de Fourier-Collocation, nous devons introduire les points de collocation y_j
• En général, les points de collocation y_j sont différents des points d'interpolation :

$$x_j = \frac{2\pi}{N}\, j \qquad\qquad j \in [0, \ldots, N-1]\,.$$

où N est supposé pair
On suppose que la solution $u(x,t) \in L^2[0,2\pi]$, est périodique et considérer encore le problème général

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \mathcal{L} u(x,t) & x \in [0,2\pi])\,, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = g(x) & x \in [0,2\pi])\,, \quad t = 0. \end{cases}$$

Dans la méthode de Fourier-Collocation on cherche des solutions $u_N \in B_N$
tel que $B_N = span\left\{\left[(\cos(nx)\ ,\ (0 \leq n \leq \frac{N}{2})\right]\ \cup\ \left[(\sin(nx)\,,\,(1 \leq n \leq \frac{N}{2}-1)\right]\right\}$,
Ces solutions sont données de la forme

$$u_N(x,t) = \sum_{|n|\leq N/2} \widetilde{u}_n(t)\exp(inx),$$

avec les coefficients d'expansion discrets $\widetilde{u}_n(t)$ étant

$$\widetilde{u}_n(t) = \frac{1}{\widetilde{c}_n N}\sum_{n=0}^{N-1} u(x_j,t)\exp(-inx),$$

et on rappel que

$$\begin{cases} \widetilde{c}_{-N/2} = \widetilde{c}_{N/2} = 2, \\ \widetilde{c}_n = 1. \end{cases}$$

D'aprés le section (2.3.3) le polynôme discret a une double expression Sur le formulaire

$$u_N(x,t) = \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j,t)g_j(x).$$

où g_j est le polynôme d'interpolation de Lagrange pour un nombre pair de points.
La méthode de Fourier-Collocation consiste a déterminer u_N dans B_N de telle sorte que le résidu

$$R_N(x,t) = \frac{\partial u_N(x,t)}{\partial t} - \mathcal{L}u_N(x,t),$$

vérifie les N conditions au les points de collocation y_i , i.e

$$\forall\, y_j \quad R_N(y_j,t) = 0 \qquad\qquad j \in [0,\ldots,N-1]\,. \tag{4.2.1}$$

cela revient à résoudre les N équations pour déterminer les N termes $u_N(x_j,t)$ de la solution numérique.
On peut aussi remplacer le système (4.2.1) par le système suivant :

$$\frac{\partial u_N(y_j,t)}{\partial t} - \mathcal{I}_N\mathcal{L}\,u_N(y_j,t) = 0 \qquad\qquad j \in [0,\ldots,N-1]\,. \tag{4.2.2}$$

Exemple 4.2.1. .
Considérons d'abord le problème du coefficient linéaire constant suivant :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}u(x,t) + c\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)$$

avec $u(x,t) \in C_p^{\infty}[0,2\pi]$ *,* a, c *sont des constantes.*
On cherche des solutions de la forme

$$u_N(x,t) \;=\; \sum_{|n|\leq N/2} \widetilde{u}_n(t)\ \exp(inx) \;=\; \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j,t)\,g_j(x). \tag{4.2.3}$$

telle que le résidu

$$R_N(x,t) = \frac{\partial u_N(x,t)}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}u_N(x,t) - c\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_N(x,t),$$

vérifie l'équation (4.2.1)

Supposons d'abord que $y_j = x_j$ *, le résidu doit disparaître aux mêmes points de grille que ceux sur lesquels l'approximation est basée , alors* (4.2.1) *devient :*

$$R_N(x_j,t) = 0 \qquad\qquad j \in [0,\ldots,N-1]\,.$$

Par conséquent, on cherche polynôme u_N *d'ordre* N *, tel que*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_N R_N|_{x_j} &= \mathcal{I}_N\left[\frac{\partial u_N(x,t)}{\partial t} - a\frac{\partial}{\partial x}u_N(x,t) - c\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_N(x,t)\right]\Big|_{x_j}\,,\\ &= \left[\frac{\partial u_N(x,t)}{\partial t} - a\mathcal{I}_N\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{I}_N u_N(x,t) - c\mathcal{I}_N\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{I}_N u_N(x,t)\right]\Big|_{x_j}\end{aligned}$$

Il en résulte N *équations différentielles ordinaires décrivant l'évolution de* $u_N(x_j,t)$ *à résoudre aux points de grille* x_j *sous la forme suivante*

$$\frac{du_N(x_j,t)}{dt} = a\mathcal{I}_N\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{I}_N u_N(x_j,t) + c\mathcal{I}_N\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{I}_N u_N(x_j,t) \tag{4.2.4}$$

où :

$$\frac{d}{dx}\mathcal{I}_N u_N(x_j,t) = \sum_{k=0}^{N-1} u_N(x_k,t)\frac{dg_k(x)}{dx}|_{x_j} = \sum_{k=0}^{N-1} D^{(1)}_{jk}u_N(x_k,t)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathcal{I}_N u_N(x_j,t) = \sum_{k=0}^{N-1} u_N(x_k,t)\frac{d^2g_k(x)}{dx^2}|_{x_j} = \sum_{k=0}^{N-1} D^{(2)}_{jk}u_N(x_k,t)$$

Les $D^{(1)}$ *et* $D^{(2)}$ *sont les matrices de différentiation définies par :*

$$D^{(1)}_{jk} = \frac{d}{dx}\,g_k(x)|_{x_j} = \begin{cases} \frac{(-1)^{j+k}}{2}\cot\left[\frac{x_j-x_k}{2}\right] & si\ j\neq k,\\ 0 & si\ j=k.\end{cases}$$

et

$$D^{(2)}_{jk} = \frac{d^2}{dx^2}\,g_k(x)|_{x_j} = \begin{cases} -\frac{(-1)^{j+k}}{2}\left[\sin\frac{x_j-x_k}{2}\right]^{-2} & si\ j\neq k,\\ -\frac{N^2+2}{12} & si\ j=k.\end{cases}$$

Donc (4.2.4) *devient*

$$\frac{du_N(x_j,t)}{dt} = \sum_{k=0}^{N-1}(aD^{(1)}_{jk} + cD^{(2)}_{jk})u_N(x_k,t) \tag{4.2.5}$$

Si on note par $U(t)$ *le vecteur dont les composantes sont les inconnues* $u_N(x_j,t)$

$$U(t) = (u_N(x_0,t), u_N(x_1,t), u_N(x_2,t), \ldots, u_N(x_{N-1},t))^\top$$

(4.2.5) *devient*

$$\frac{dU(t)}{dt} = D_N^{jk}U(t). \tag{4.2.6}$$

avec :

$$D_N^{jk} = aD^{(1)}_{jk} + cD^{(2)}_{jk} = \begin{cases} a\frac{(-1)^{j+k}}{2}\cot\left[\frac{x_j-x_k}{2}\right] - c\frac{(-1)^{j+k}}{2}\left[\sin\frac{x_j-x_k}{2}\right]^{-2} & si\ j\neq k,\\ -c\frac{N^2+2}{12} & si\ j=k.\end{cases}$$

Et la solution de (4.2.6)

$$U(t) = (\exp(D_N^{jk}t)U(0).$$

et

$$\begin{aligned} U(0) &= (u_N(x_0,0), u_N(x_1,0), u_N(x_2,0), \ldots, u_N(x_{N-1},0))^\top, \\ &= (u_N(x_0), u_N(x_1), u_N(x_2), \ldots, u_N(x_{N-1}))^\top. \end{aligned}$$

d'où

$$u_N(x_j,t) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left[(aD_{jk}^{(1)} + cD_{jk}^{(2)})t\right] u_N(x_j,0).$$

Finalement, la solution du problème est donnée par :

$$u_N(x,t) = \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j,t) g_j(t),$$

avec

$$u_N(x_j,t) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left[(aD_{jk}^{(1)} + cD_{jk}^{(2)})t\right] U(0).$$

Exemple 4.2.2. .
On considère le problème non linéaire (l'équation de Burgers) :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}.$$

où les conditions initiales sont données par $g(x)$ et la solution est régulière et périodique dans toutes ses dérivée.
Encore une fois, on cherche une solution de la forme

$$u_N(x,t) \;=\; \sum_{|n|\le N/2} \widetilde{u}_n(t)\, \exp(inx) \;=\; \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j,t)\, g_j(x).$$

avec la condition que le résidu

$$R_N(x,t) = \frac{\partial u_N(x,t)}{\partial t} - u(x,t)\frac{\partial u_N(x,t)}{\partial x}.$$

disparaît aux points de la grille x_j en tant que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_N R_N|_{x_j} &= \mathcal{I}_N \left[\frac{\partial u_N(x,t)}{\partial t} - u(x,t)\frac{\partial u_N(x,t)}{\partial x}\right]\Big|_{x_j}, \\ &= \left[\frac{\partial u_N(x,t)}{\partial t} - \mathcal{I}_N\left(u_N(x,t)\frac{\partial u_N(x,t)}{\partial x}\right)\right]\Big|_{x_j}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

A partir de cela, nous récupérons N couplées d'ODE :

$$\begin{aligned} \frac{du_N(x_j,t)}{dt} &= u_N(x_j,t) \sum_{|n|\le N/2} in\,\widetilde{u}_n(t)\, \exp(inx_j), \\ &= u_N(x_j,t) \sum_{i=0}^{N-1} D_{ji} u_N(x_i,t). \end{aligned}$$

avec

$$u_N(x_j,0) = u_0(x_j).$$

qui expriment la solution globale de l'équation de Burgers à travers les valeurs des points de grille $u_N(x_j,t)$.

4.2.1 Stabilité de la méthode de Fourier-Collocation

Alors que la question de la stabilité pour la méthode de Fourier-Galerkin est entièrement déterminée par le caractère bien posé de l'équation différentielle partielle, cela ne s'applique pas à la méthode de Fourier-Collocation.

Pour établir la stabilité de la méthode pseudo-spectrale, on exploite les propriétés des matrices de différentiation ou les règles de quadrature pour les polynômes trigonométriques.
Pour la méthode de Collocation discrète, on définisse le produit scalaire discret par :

$$\langle f_N, g_N\rangle_N = \frac{2\pi}{N+1}\sum_{j=0}^{N} f_N(x_j)g_N(x_j),$$

et la norme associée

$$\|f_N\|_N^2 = \langle f_N, f_N\rangle_N$$

où $f_N, g_N \in B_N$ et x_j représente les points de grille impairs. En conséquence de la formule de quadrature pour les fonctions trigonométriques, on a

$$\langle f_N, g_N\rangle_{L^2[0,2\pi]} = \langle f_N, g_N\rangle_N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_N g_N\, dx \qquad \|f_N\|_{L^2[0,2\pi]} = \|f_N\|_N,$$

Donc, dans B_N les produits scalaires continu et discret sont les mêmes.
A noter que la situation est différente pour un nombre pair de points, en effet, si $f_N, g_N \in B_N$ et nous avons un nombre pair de points x_j , le produit scalaire discret n'est pas égal au produit scalaire continu.
En utilisant le fait que $f_N \in L^2[0, 2\pi]$, on peut montrer qu'il existe $K > 0$ tel que

$$K^{-1}\|f_N\|^2_{L^2[0,2\pi]} \leq \|f_N\|_N^2 \leq K\|f_N\|^2_{L^2[0,2\pi]}.$$

par conséquent, les normes continue et discrète sont uniformément équivalentes.

Dans ce qui suit, on s'interrese à la méthode de Fourier-Collocation basée sur un nombre pair de points qui sont les points de collocation, en général ce sont les mêmes points d'interpolation $y_j = x_j$, $j \in [0, \ldots, N-1]$.

Stabilité pour les problèmes hyperboliques

Considérons la stabilité de l'approximation de Fourier pseudo-spectrale au problème hyperbolique

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \ , \\ u(x,0) = g(x) \ . \end{cases} \tag{4.2.7}$$

où $u(x) \in L^2[0, 2\pi]$ et $g(x) \in L^2[0, 2\pi]$ sont supposés périodiques.
Le coefficient a est supposé réel pour l'hyperbolicité tandis que $|a|_x$ doit être borné pour assurer la bien posée , tel que $0 < \frac{1}{k} \leq |a(x)| \leq k$.

Remarque 4.2.1. *On n'a pas forcément la stabilité dans le cas où la fonction a passe par zéro (l'orsque $a(x)$ change de signe).*

Pour cela on va discuter deux cas :
★ **1er cas** : Si $a(x)$ ne change pas de signe ($a(x) > 0$ *ou* $a(x) < 0$)

Théorème 4.2.1 ([11]). *Sous forme scalaire.*
La méthode pseudo-spectrale de Fourier appliquée au problème hyperbolique à coefficients variables (4.2.7) *est stable :*

$$\sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j,t) \;\leq\; k^2 \sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j,0).$$

à condition que $a(x)$ soit strictement borné à partir de zéro ,i.e $0 < \frac{1}{k} \leq |a(x)| \leq k$

Démonstration : Dans la méthode de Collocation, la solution approchée $u_N \in B_N$ vérifie :

$$\frac{\partial u_N}{\partial t}(x_j,t) + a(x_j)\frac{\partial u_N}{\partial x}\Big|_{x_j} = 0. \tag{4.2.8}$$

où x_j représente les points pairs de la grille
Puisque la fonction a est uniformément bornée, a^{-1} existe. On multiplie l'équation (4.2.8) par $a(x_j)^{-1}u_N(x_j,t)$ et on somme sur tous les points de collocation, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} u_N(x_j,t)\frac{d}{dt}u_N(x_j,t) &= -\sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j,t)\frac{\partial u_N}{\partial x}\Big|_{x_j} \\
\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} \frac{d}{dt}u_N^2(x_j,t) &= -\sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j,t)\frac{\partial u_N}{\partial x}\Big|_{x_j} \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} u_N^2(x_j,t) &= -\sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j,t)\frac{\partial u_N}{\partial x}\Big|_{x_j} \\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} u_N^2(x_j,t) &= \frac{-N}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_N(x)\frac{\partial u_N}{\partial x}dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la forme quadratique donnée dans le théorème (2.3.4) pour établir stabilité ainsi que le fait que u_N est périodique.
ainsi, la somme ne change pas par rapport au temps

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} u_N^2(x_j,t) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} u_N^2(x_j,0)$$

Enfin, on constate que puisque $\frac{1}{k} \leq |a(x)| \leq k$ on a

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j,t) \leq \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} u_N^2(x_j,t) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{a(x_j)} u_N^2(x_j,0) \leq k\sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j,0).$$

d'où

$$\sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j,t) \leq k^2 \sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j,0).$$

Donc

$$\|u_N(x,t)\|_N \leq k\|u_N(x,0)\|_N.$$

►
Une autre méthode permettant de prouver la stabilité est basée sur la représentation matricielle de la

méthode de Fourier-Collocation.
L'approximation de Fourier-Collocation pour des problèmes hyperboliques à coefficients variables peut être écrite comme

$$\frac{dU_N(t)}{dt} + ADU_N(t) = 0. \tag{4.2.9}$$

avec U_N le vecteur dans les composantes sont les $u_N(x_j, t)$, et A la matrice diagonale définie par $A_{jj} = a(x_j)$

D est la matrice de différentiation donnée par

$$D_{ij} = \frac{d}{dx} g_j(x)|_{x_j}.$$

avec D est antisymétrique ($D^\top = -D$) c'est le point essentiel pour prouver la stabilité , et indépendamment de l'utilisation d'un nombre pair ou impair des points de collocation.
La solution directe de l'équation (4.2.9) est donnée comme suit

$$\begin{aligned} \frac{dU_N(t)}{dt} = -ADU_N(t) &\Rightarrow \frac{dU_N(t)}{U_N(t)} = -AD\,dt \\ &\Rightarrow \ln(U_N(t)) = -ADt + c \qquad c\text{constante} \\ &\Rightarrow U_N(t) = C\exp(-ADt). \end{aligned}$$

avec $C = U_N(0)$ donc

$$U_N(t) = U_N(0)\exp(-ADt).$$

Dans ce cas, la stabilité signifié que l'exponentielle de la matrice est bornée indépendamment du nombre de points i.e

$$\|\exp(-ADt)\|_{L^2[0,2\pi]} \leq k(t).$$

qui est égal à

$$\exp(-ADt)\exp(-(AD)^\top t) \leq k^2(t).$$

Théorème 4.2.2 ([11])**.** *Sous forme matricielle.*
La méthode pseudo-spectrale de Fourier appliquée au problème hyperbolique à coefficients variables (4.2.7) *avec* $0 < \frac{1}{k} \leq |a(x)| \leq k < \infty$ *est stable :*

$$\|\exp(-ADt)\|_{L^2[0,2\pi]} \leq k.$$

Démonstration : On a $A = A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$ alors $-AD = -A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}$
donc $\exp(-ADt) = A^{\frac{1}{2}}\exp(-A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}t)A^{-\frac{1}{2}}$
Puisque D est antisymétrique on a

$$(A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}})^\top = A^{\frac{1}{2}}D^\top A^{\frac{1}{2}} = -A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}$$

donc

$$\begin{aligned} \|\exp(-A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}t)\|^2_{L^2[0,2\pi]} &= \exp(-A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}t)\exp\left((-A^{-\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}})^\top t\right), \\ &= \exp\left(-A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}} + -A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}\right)t, \\ &= 1. \end{aligned}$$

donc

$$\|\exp(-A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}t)\|_{L^2[0,2\pi]} = 1.$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\exp(-ADt)\|_{L^2[0,2\pi]} &= \|A^{\frac{1}{2}}\exp(-A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}t)A^{-\frac{1}{2}})\|_{L^2[0,2\pi]},\\ &\leq \|A^{\frac{1}{2}}\|_{L^2[0,2\pi]}\|\exp(-A^{\frac{1}{2}}DA^{\frac{1}{2}}t)\|_{L^2[0,2\pi]}\|A^{-\frac{1}{2}}\|_{L^2[0,2\pi]},\\ &\leq \|A^{\frac{1}{2}}\|_{L^2[0,2\pi]}\|A^{-\frac{1}{2}}\|_{L^2[0,2\pi]},\\ &\leq \sqrt{k}\sqrt{k} = k.\end{aligned}$$

Notons que cette preuve de stabilité est valable pour $\exp(ADt)$ c.à.d pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

La même preuve de stabilité pour $\exp(-ADt)$ qui est la solution de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a(x)u}{\partial x} = 0.$$

★ $2^{\textbf{eme}}$ **cas** : Si $a(x)$ change de signe :
En général, la méthode de Fourier-Collocation appliquée à des problèmes hyperboliques à coefficients variables, comme l'équation (4.2.7) avec $a(x)$ qui change de signe, n'est pas stable , mais on peut trouver des techniques pour stabiliser cette méthode.

On considère la forme antisymétrique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}a(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial(a(x)u)}{\partial x} - \frac{1}{2}a_x(x)u(x,t) = 0. \tag{4.2.10}$$

l'approximation de Fourier-Collocation pour cette équation est stable.

Théorème 4.2.3 ([11]). *La méthode pseudo-spectrale de Fourier appliquée au problème hyperbolique à coeᴄ cients variables (*4.2.10*) est stable :*

$$\|u_N(t)\|_N \leq \exp(\alpha t)\|u_N(0)\|_N.$$

où

$$\alpha = \frac{1}{2}\max_{x}|a_x(x)|.$$

Démonstration : Dans la méthode de Fourier-Collocation, on cherche un polynôme, $u_N(x,t) \in B_N$, satisfaisant à l'équation :

$$\frac{\partial u_N}{\partial t}\Big|_{x_j} + \frac{1}{2}a(x_j)\frac{\partial u_N}{\partial x}\Big|_{x_j} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathcal{I}_N[a(x)u_N]}{\partial x} - \frac{1}{2}a_x(x_j)u_N(x_j,t) = 0. \tag{4.2.11}$$

En multipliant (4.2.11) par $u_N(x_j)$ et en sommant sur tous les points de collocation, on obtenant

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{N-1}u_N^2(x_j) = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}a(x_j)u_N(x_j)\frac{\partial u_N}{\partial x}\Big|_{x_j} - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}u_N(x_j)\frac{\partial \mathcal{I}_N[a(x)u_N]}{\partial x}\Big|_{x_j} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}a(x_j)u_N^2(x_j).$$

dans le deuxième terme, on a $\frac{\partial \mathcal{I}_N[a(x)u_N]}{\partial x} \in B_N$, et d'après le théorème (2.3.5) on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}u_N(x_j)\frac{\partial \mathcal{I}_N[a(x)u_N]}{\partial x}\Big|_{x_j} &= \frac{N}{4\pi}\int_0^{2\pi}u_N(x,t)\mathcal{I}_N\frac{\partial \mathcal{I}_N[a(x)u_N]}{\partial x}dx,\\ &= -\frac{N}{4\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{I}_N[a(x)u_N]\mathcal{I}_N\frac{\partial u_N(x)}{\partial x}dx,\\ &= -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1}a(x_j)u_N(x_j)\frac{\partial u_N(x)}{\partial x}\Big|_{x_j}.\end{aligned}$$

en supposant seulement que $a(x)$ et $u_N(x,t)$ sont périodiques.
Par conséquent, nous récupérons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j,t) &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1} a_x(x_j)u_N^2(x_j,t),\\
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_N\|_N^2 &= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N-1} a_x(x_j)u_N^2(x_j,t),\\
&\leq \frac{1}{2}\max_{\mathbf{x}}|a_x(x)|\sum_{j=0}^{N-1} u_N^2(x_j,t),\\
&\leq \frac{1}{2}\max_{\mathbf{x}}|a_x(x)|\|u_N\|_N^2,\\
&\leq \alpha\|u_N\|_N^2.
\end{aligned}$$

ce qui garantit la stabilité à condition que l'équation (4.2.7) soit bien posée.

Stabilité pour les problèmes paraboliques

Considérons le problème parabolique comme :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = b(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ , \\ u(x,0) = g(x)\ . \end{cases} \tag{4.2.12}$$

où $b(x) > 0$ pour une bien-pose et $u(x,t)$ ainsi que $g(x)$ sont supposés être périodique et réguliere.

Théorème 4.2.4 ([11] Méthode 1)**.** *L'approximation de la méthode de Fourier-Collocation pour des problèmes fortement paraboliques* (4.2.12) *est stable car :*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_N\|_N^2 \leq 0,$$

à condition que $b(x)$ soit strictement positif.

Démonstration
l'approximation de Fourier-Collocation au problème parabolique est donnée comme

$$\frac{du(t)}{dt} = BD^{(2)}u(t). \tag{4.2.13}$$

-)x_j représente les points de la grille ,
-)u le vecteur associé dans les composantes sont $u_N(x_j,t)$,
-)B est une matrice diagonale positive avec des entrées $B_{jj} = b(x_j)$,
-)$D^{(2)}$ représente la matrice de différenciation du 2ème ordre est défini par

$$D_{ij}^{(2)} = \frac{d^2}{dx^2}g_j(x)|_{x_j}.$$

pour assurer la stabilité du schéma de Fourier-Collocation , il faut choisir cette matrice comme

$$D^{(2)} = D \cdot D$$

Le problème ne se pose pas lorsqu'on utilise une méthode basée sur un nombre impair de points de grille.
Maintenant on multiplie l'équation (4.2.13) par $u^\top B^{-1}$ pour récupérer

$$\begin{aligned}
u^\top B^{-1}\frac{d}{dt}u &= u^\top D^{(2)}u\\
&= u^\top D\, D\, u\\
&= (D^\top u)^\top (Du)\\
&= -(Du)^\top (Du) \leq 0.
\end{aligned}$$

où nous utilisons que D est antisymétrique. Alors

$$\frac{1}{\max_{\mathbf{x}} b(x)}\|u_N\|_N^2 \leq u^\top B^{-1}u \leq \frac{1}{\min_{\mathbf{x}} b(x)}\|u_N\|_N^2.$$

d'où la stabilité

Théorème 4.2.5 ([11] Méthode 2)**.** *L'approximation de la méthode de Fourier-Collocation pour des problèmes fortement paraboliques* (4.2.12) *est stable car :*

$$\|u_N(x,t)\|_N \leq K\|u_N(x,0)\|_N$$

avec $k = \sqrt{\frac{\max_{\boldsymbol{x}} b(x)}{\min_{\boldsymbol{x}} b(x)}}$,
à condition que $b(x)$ *soit strictement positif.*

Démonstration
La méthode consiste à chercher

$$u_N(x,t) = \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j,t)g_j(x),$$

avec

$$\frac{\partial u_N(x,t)}{\partial t}\Big|_{x_j} = b(x_j)\frac{\partial^2 u_N(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x_j}.$$

On multiplie par $b(x_j)^{-1}u_N(x_j,t)$ et on somme sur tous les points de collocation, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{b(x_j)}u_N^2(x_j,t) = \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j,t)\frac{\partial^2 u_N(x,t)}{\partial x^2}\Big|_{x_j}.$$

On réalise que la sommation du côté droit est un polynôme d'ordre $2N$ qui , et la forme quadratique basée sur un nombre pair des points x_j n'est pas exacte, donc on ne peut pas passer a l'intégrale. Pour résoudre ce problème, nous définissons la dérivée de second ordre comme suit

$$\mathcal{I}_N\frac{d}{dx}\mathcal{I}_N\frac{d}{dx}\mathcal{I}_N$$

similaire à l'approche adoptée dans le théorème (4.2.4). Ceci garantit que

$$\frac{\partial^2 u_N(x,t)}{\partial x^2} = \mathcal{I}_N\frac{d}{dx}\mathcal{I}_N\frac{d}{dx}u_N(x,t) \in B_{N-1}$$

puisque la règle de quadrature est exacte et que nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{b(x_j)}u_N^2(x_j,t) &= \sum_{j=0}^{N-1} u_N(x_j,t)\left(\mathcal{I}_N\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{I}_N\frac{\partial u_N}{\partial x}\Big|_{x_j}\right)\\
&= \frac{N}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_N(x,t)\mathcal{I}_N\left(\mathcal{I}_N\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{I}_N\frac{\partial u_N}{\partial x}\right)dx\\
&= -\frac{N}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathcal{I}_N\frac{\partial u_N}{\partial x}\mathcal{I}_N\frac{\partial u_N}{\partial x}\,dx\\
&= -\sum_{j=0}^{N-1}\left(\frac{\partial u_N}{\partial x}\Big|_{x_j}\right)^2\\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

où nous utilisons l'intégration partielle, périodicité de $u_N(x,t)$, et

$$\mathcal{I}_N \frac{\partial u_N(x,t)}{\partial x}\Big|_{x_j} = \frac{\partial u_N(x,t)}{\partial x}\Big|_{x_j}.$$

comme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{b(x_j)}u_N^2(x_j,t) \leq 0$$

alors

$$\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{b(x_j)}u_N^2(x_j,t) \leq \sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{b(x_j)}u_N^2(x_j,0).$$

avec

$$\frac{1}{\max_{\mathbf{x}} b(x)}\|u_N(x,t)\|_N^2 \leq \sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{b(x_j)}u_N^2(x_j,t) \leq \sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{b(x_j)}u_N^2(x_j,0) \leq \frac{1}{\min_{\mathbf{x}} b(x)}\|u_N(x,0)\|_N^2.$$

alors

$$\|u_N(x,t)\|_N \leq K\|u_N(x,0)\|_N$$

d'où la stabilité .

CONCLUSION

Les méthodes spectrales forment une classe de discrétisations spatiales pour les équations différentielles.

Dand ce mémoire, nous avons étudié les méthodes spéctrales. Les méthodes spectrales consistent à chercher les solutions d'équations différentialles ou d'équations aux dérivées partielles en terme de séries de fonctions régulières connues, ces méthodes ont montré leur stabilité et leur importance dans la résolution numérique des EDPs. Les éléments clés pour leur formulation sont les fonctions d'essai (également appelées fonctions d'expansion ou d'approximation) et les fonctions de test (également appelées fonctions de poids).

"*Spectral methods are like Swiss watch. They work beautifully,*
but a little dust in the gear stops them entirely."
Philip L. Roe, quoted by J P Boyd, SIAM Rev., 46(2004)

BIBLIOGRAPHIE

[1] Haim Brezis, "Functional analysis, sobolev spaces and PDE", Springer

[2] S. Niçaise, Analyse numérique et équations aux dérivées partielles, Dunod, Paris, (2000).

[3] O.Thual, Introduction Aux Méthodes Spectrales, Polycopié (1996), ENS (EEIH), Toulouse.

[4] M. REDAOUI, Résolution numérique d'une équation différentielle par une méthode spectrale , These de Master d'état en Mathématiques, UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA, 2017.

[5] J.P. Boyd, Chebyshev and Fourier spectral methods - 2nd edition, Dover, Mineola (2001).

[6] J-C Cuillière, Introduction à la méthode des éléments finis - 2e édition, Dunod, 2016 (ISBN 978-2100742622), chap. 6.5 (« Hypothèse de Galerkine »), p. 104-112

[7] P. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, avril 2002 (ISBN 9780898715149).

[8] S. Orszag, Numerical analysis of spectral methods, NSF-CBMS Monographe no.26, Soc. Ind. and App1.Math., Philadelphia 1977.

[9] E. Goncalvès da Silva, Résolution numérique des équations d'Euler 1D, Engineering school. Institut Polytechnique de Grenoble, 2008, pp.59.

[10] Mathieu Lavoie, "Polynômes orthogonaux", c Mathieu Lavoie, 2015.

[11] J. Hesthaven, S. Gottlieb and D. Gottlieb, Spectral Methods for Time-Dependent Problems, Cambridge University Press (2007).

[12] Ismahène Sehili , Méthodes spectrales pour les problèmes aux limites , Thèse de Doctorat en Mathématiques , UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER BISKRA (2018).

[13] J. Shen, T. Tang, L.L. Wang Spectral Methods : Algorithms, Analysis and Applications, Series in Computational Mathematics, vol. 41, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2011).