République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Par

LARBAGUI Asma HAOUARI Noura

Thème :

CONTRIBUTION Á L'ETUDE DES [1,2]-ENSEMBLES INDÉPENDANTS DANS LES GRAPHES

Devant le jury composé de :

Mr.	A.SAHRAOUI	Maître assistant	UYF Médéa	Président
Mr.	A.BENKACI	Maître assistant	UYF Médéa	Examinateur
Mr.	M.ZEMIR	Maître assistant	UYF Médéa	Examinateur
Mr.	A.BOUCHOU	Maître de conférence	UYF Médéa	Promoteur

Soutenue le 24/06/2024

RÉSUMÉ

Un sous-ensemble $S \subseteq V$ dans un graphe $G = (V, E)$ est un $[1, 2]$-ensemble, si pour tout sommet $v \in V - S$, $1 \leq |N(v) \cap S| \leq 2$, c'est-à-dire chaque sommet $v \in V - S$ est adjacent à au moins un mais pas plus de 2 sommets dans S. Nous considérons ici des $[1, 2]$-ensembles qui sont également indépendants, et notons qu'il y a des graphes qui n'ont pas d'ensemble indépendant. D'abord nous donnons des conditions pour l'existence des $[1, 2]$-ensembles indépendants pour les graphes scindés et les chenilles. Pour les graphes ayant un $[1, 2]$-ensemble indépendant, nous définissons les nombres de $[1, 2]$-indépendance inférieurs ($i_{[1,2]}(G)$) et supérieurs ($\alpha_{[1,2]}(G)$), et nous déterminons des bornes pour ces paramètres, et nous caractérisons les graphes atteignant ces bornes. Enfin nous donnons des relations de type Nordhaus–Gaddum sur $\alpha_{[1,2]}(G)$.

ABSTRACT

In a graph $G = (V, E)$, a set $S \subseteq V$ is an independent $[1, 2]$-set, if for every vertex $v \in V - S$, $1 \leq |N(v) \cap S| \leq 2$, that is any vertex $v \in V - S$ is adjacent to at least one but not more than 2 vertices in S. We consider $[1, 2]$-sets which are also independent, note that there are graphs have no independent set. First, we give necessary and sufficient conditions for the existence of independent $[1, 2]$-sets for split graphs and caterpillars. For graphs having an independent $[1, 2]$-set, we define the lower $[1, 2]$-independence number $i_{[1,2]}(G)$ and upper $[1, 2]$-independence number $\alpha_{[1,2]}(G)$, and we determine bounds for these parameters and characterize the graphs attaining these bounds. Finally, we provide Nordhaus-Gaddum-type relations for $\alpha_{[1,2]}(G)$.

REMERCIEMENTS

Louange a Allah le Seigneur des mondes.

Nous rendons Allah tout puissant de nous avoir donné le courage et la volonté ainsi que la patience pour bien mener ce travail.

Nous tenons, avant tout, à remercier chaleureusement notre promoteur Monsieur **Ahmed BOUCHOU**, Maître de conférences à l'université **Dr. YAHIA FARES** de Médéa, pour avoir accepté de nous encadré. Ainsi, de nous avoir orientées, aidées et conseillées.

Nous remercions également Monsieur **Abdelkader SAHRAOUI**, maître assistant à l'université **Dr. YAHIA FARES** de Médéa, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider le jury de soutenance.

Nous remercions également Monsieur **Azzedine BENKACI**, maître assistant à l'université **Dr. YAHIA FARES** de Médéa, pour avoir accepté de juger notre travail.

Nous remercions également Monsieur **Mohamed ZEMIR**, maître assistant à l'université **Dr. YAHIA FARES** de Médéa, pour avoir accepté de juger notre travail.

Nous tenons, également à exprimer notre gratitude à l'ensemble des enseignants du département **M.I** de l'université **Dr. YAHIA FARES de Médéa**.

Enfin, il est important pour nous de remercier nos parents d'avoir fait de leur mieux pour que nous puissions accomplir ce mémoire dans les meilleures conditions.

Nous remercions nos soeurs et nos frère sans oublier nos chères amies qui étaient toujours présentes.

Table des matières

RÉSUMÉ **i**

ABSTRACT **ii**

REMERCIEMENTS **iii**

INTRODUCTION **1**

1 Notions générales sur les graphes **3**

1.1 Concepts fondamentaux 3

1.1.1 Définitions 3

1.1.2 Quelques graphes particuliers 4

1.2 Quelques opérations sur les graphes 9

1.3 Connexité 11

1.4 La domination dans les graphes 12

1.5 L'indépendance dans les graphes 13

2 Quelques résultats sur les $[1, k]$-ensembles indépendants **14**

2.1 Définitions et propriétés 14

2.2 $[1, k]$-ensembles indépendant 15

2.3 Bornes sur $\alpha_{[1,k]}(G)$ 17

3 Résultats sur les $[1,2]$-ensembles indépendants **19**

3.1 Existence des $[1,2]$-ensembles indépendants 20

3.1.1 Existence des $[1,2]$-ensembles indépendants dans les graphes scindés 20

3.1.2 Existance des $[1,2]$-ensembles indépendants dans les chenilles 21

3.2 Bornes sur $\alpha_{[1,2]}(G)$ et $i_{[1,2]}(G)$ 25

3.3 Relation de type Nordhaus–Gaddum sur $\alpha_{[1,2]}$ 28

Conclusion **31**

Bibliographie **32**

Table des figures

1.1 Sommets particuliers dans un graphes G 4

1.2 H est sous-graphe induit de G. 5

1.3 H est un graphe partiel de G. 5

1.4 Un graphe G et $\overline{G}$ 6

1.5 Le graphe complet K_4 et le graphe discret $\overline{K_4}$. 6

1.6 Le graphe biparti complet $K_{2,3}$ 6

1.7 Un graphe biparti 2-semi-régulier. 7

1.8 la chaîne P_5 7

1.9 Un exemple d'un arbre T 7

1.10 L'étoile $K_{1,n}$ 8

1.11 Double étoile $S_{r,s}$ 8

1.12 La chenille $c(2,0,1)$ 8

1.13 Un graphe 2-régulier d'ordre 4. 9

1.14 Le cycle C_4 9

1.15 Un graphe scindé 9

1.16 La couronne d'un C_5 10

1.17 Le graphe joint de G_1 et G_2. 10

1.18 La grille $P_r \boxdot P_c$ 11

1.19 L'étoile subdivisée $S_{1,q}$. 11

1.20 Exemple d'un graphe connexe et d'un graphe non connexe 11

1.21 Exemple d'un graphe G tel que $\gamma(G) = 2$ 12

1.22 Un graphe biparti complet $K_{2,3}$, $\alpha(K_{2,3}) = 3$. 13

2.1 Graphe bipartie $K_{k+1,k+1}$ 16

2.2 Double étoile $S_{k,k+1}$ 16

2.3 Un arbre T_{2t} pour $t = 3$, tel que $i_{[1,2]}(G) = 6$ et $\alpha_{[1,2]}(G) = 9$. 17

3.1 Un graphe biparti complet $K_{2,3}$, $\alpha_{[1,2]}(K_{2,3}) = 2$. 19

3.2 Un graphe scindé, tel que $i_{[1,2]}(G) = 2$, $\alpha_{[1,2]}(G) = 3$. 21

3.3 la chenille T , tel que $\alpha_{[1,2]}(T) = i_{[1,2]}(T) = p_1 + p_2 + p_3 = 9$. 23

3.4 La chenille T, tel que $i_{[1,2]}(T) = p_1 + p_2 + p_3 = 9$. 24

3.5 La chenille T, tel que $i_{[1,2]}(T) = \alpha_{[1,2]}(T) = p_1 + 2p_2 + p_3 = 9$. 24

3.6 Un graphe biparti tel que $\alpha_{[1,2]}(G) = n - \frac{2m}{\Delta+2} = 4$ 27

3.7 Les graphes 30

INTRODUCTION

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au XVIIIe siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Konigsberg, les jeus d'échèque, les problèmes de coloriage de la carte géographique. La théorie des graphes s'est développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales, réseaux de communication, réseaux routiers, circuits éléctriques, ...

La théorie des graphes représente une branche très importante de la recherche opérationnelle, elle est devenue aujourd'hui une des branches les plus florissantes de l'algèbre moderne. Elle regroupe généralement des problèmes assez variés qui ont tous comme caractéristique commune de pouvoir être représentés par un schéma. Ce schéma appelé graphe est constitué par un ensemble de points (sommets) noté par V représentant des individus, des objets, des situations, etc,... et qui sont reliés par des lignes (arêtes).

Parmi les problèmes dans la théorie des graphes, le problème de $[j,k]$-ensemble tels que j et k sont des entiers positifs avec $j \leq k$. Cette notion a été introduite par Chellali et al. [3], en 2013.
Dans un graphe $G = (V, E)$, un sous ensemble D de V est dit $[j,k]$-ensemble si pour tout sommets $y \in V - D$, $j \leq |N(y) \cap D| \leq k$.
Plus tard, Chellali et al [4] ont poursuivi l'étude des $[j,k]$-ensembles, dans le cas $j = 1$, et que le $[1,k]$-ensemble soit indépendant, c'est la $[1,k]$-indépendance.

Dans ce mémoire, nous nous intérissons à l'étude des $[1,k]$-ensemles indépendants dans les graphes, pour $k = 2$.

La détermination des paramètres liés aux $[1,k]$-ensembles indépendants dans les graphes, généralement, est un problème $\mathcal{NP}$-complet. Nous nous penchons sur les conditions pour les graphes

possèdant un $[1,2]$-ensemble indépendant, la détermination de bornes à ces paramètres qui les encadrent le plus étroitement possible, et sur la détermination de leurs valeurs exactes dans des classes particulières de graphes. De plus, nous nous concentrons sur les graphes extrémaux en lien avec les bornes élaborées. Ce mémoire s'articule sur trois chapitres :

Le premier chapitre contient les concepts fondamentaux de la théorie des graphes essentiels à la compréhension de ce mémoire.

Dans le deuxième chapitre, nous fournissons un aperçu sur le concept de $[1,k]$-ensembles indépendants dans les graphes. Nous présentons quelques résultats existants dans la littérature.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude des $[1,2]$-ensembles indépendants dans les graphes. Nous présentons une condition pour les graphes scindés et les chenilles possèdant un $[1,2]$-ensemble indépendant. De plus, nous caractérisons les graphes scindés et les chenilles ayant un tel ensemble. Nous déterminons également des bornes pour $\alpha_{[1,2]}(G)$ et $i_{[1,2]}(G)$, et établions des relations de type Nordhaus-Gaddum sur $\alpha_{[1,2]}(G)$, en fournissant une caractérisation des graphes extrêmaux.

Nous clôturons ce mémoire par une conclusion générale et quelques perspectives pour les travaux futurs.

Chapitre 1

Notions générales sur les graphes

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions et la terminologie utilisées dans l'ensemble de ce document. Dans la première partie, nous rappelons quelques définitions de base de la théorie des graphes, et nous donnons un petit aperçu sur les paramètres structurels d'un graphe. Ensuite nous citons quelques invariants des graphes. Les notions propres à un chapitre seront données et définies dans le chapitre en question. Enfin, nous rappelons brièvement la notion de la domination et de l'independance dans les graphes.

Pour plus de détails sur la terminologie utilisée dans ce mémoire, nous invitons le lecteur à se référer aux ouvrages de Berge *[1]*, Haynes, Hedetniemi et Slater *[6]*.

1.1 Concepts fondamentaux

1.1.1 Définitions

Graphe

Un *graphe* $G = (V, E)$ est la donnée de deux ensembles finis, un ensemble des *sommets* V et un ensemble d'*arêtes* E. Le cardinal de V est appelé l'*ordre* de G, noté par $n(G)$, et le cardinal de E est appelé la *taille* de G, noté par $m(G)$. Une arête $e \in E$ est une paire de sommets $\{u, v\}$ notée par $e = uv$, où u et v sont les *extrémités* de e. On dira dans ce cas que u et v sont *adjacent* et

que e est *incidente* à u et v. Une *boucle* est une arête dont les deux extrémités sont confondues. Un graphe est dit simple s'il est sans boucles et sans arêtes multiples. Tous les graphes considérés dans ce mémoire sont simples et finis.

Voisinage

Le voisinage ouvert d'un sommet v est $N_G(v) = \{u \in V : uv \in E\}$ et le voisinage fermé de v est $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le voisinage ouvert est $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N(v)$ et le voisinage fermé $N_G[S] = \bigcup_{v \in S} N(v) \cup S$.

Degré

Le degré d'un sommet $x \in V(G)$, noté $d_G(x)$ est égal au cardinal de son voisinage ouvert c-à-d $d_G(x) = |N_G(x)|$. On notera par $\Delta(G)$ et $\delta(G)$, respectivement, le *degré maximum* et le *degré minimum* dans G.

Sommets particuliers

Un sommet de degré nul sera dit un sommet *isolé*, un sommet de degré égal à un sera dit sommet *pendant* et un sommet adjacent à un sommet pendant sera dit sommet *support*.

Dans ce graphe, on a x est un sommet pendant , y est un sommet support, u est un sommet isolé.

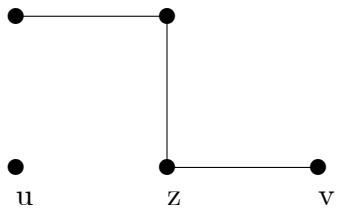


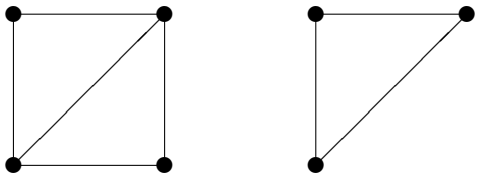
FIG. 1.1 – Sommets particuliers dans un graphes G

1.1.2 Quelques graphes particuliers

Sous-graphe et sous-graphe induit

Le graphe H est dit sous-graphe d'un graphe G lorsque $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$.

Un sous-graphe H de G est dit induit si $E(H)$ contient toutes les arêtes de G dont les deux extrémités sont dans $V(H)$. Pour définir un sous-graphe induit de G il suffit de considérer un sous-ensemble A de V, le sous-graphe induit sera désigné par $G[A]$ (voir Figure 1.2). Soit v un sommet de V. On notera $G - v$ le sous-graphe $G[V - \{v\}]$.

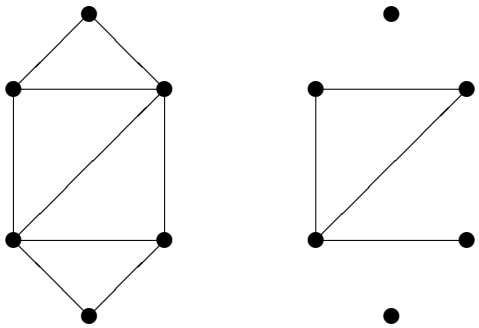


$G = (V, E)$ $\qquad$ $H = (V(H), E(H))$

FIG. 1.2 – H est sous-graphe induit de G.

Graphe partiel

On appelle graphe partiel de $G = (V, E)$ tout graphe $H = (V, E')$ tel que $E' \subseteq E$. Un sous-graphe d'un graphe partiel de G est appelé sous-graphe partiel de G (voir Figure 1.3).



G $\qquad$ H

FIG. 1.3 – H est un graphe partiel de G.

Graphe complémentaire d'un graphe

Le graphe *complémentaire* du graphe G noté $\overline{G}$ est un graphe ayant le même ensemble de sommets que G et une arête est dans $\overline{G}$ si elle n'est pas dans G (voir Figure 1.4).

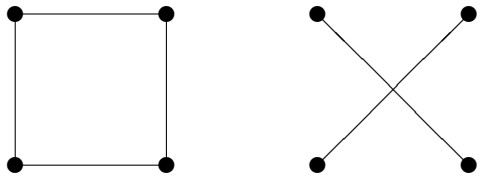


FIG. 1.4 – Un graphe G et $\overline{G}$

Graphe complet

Un graphe *complet* est un graphe où chaque sommet est adjacent a tous les autres sommets. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe chaque sommet est de degré $n-1$ (voir Figure 1.5).

Graphe discret

On dit qu'un graphe G est *discret* ou nul s'il ne contient aucune arête, c'est a dire que $E = \varnothing$ et noté $\overline{K_n}$ (voir Figure 1.5).

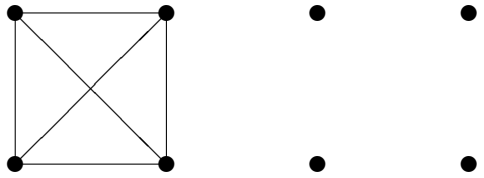


FIG. 1.5 – Le graphe complet K_4 et le graphe discret $\overline{K_4}$.

Graphe biparti

Un graphe *biparti* G est un graphe d'ordre $n \geq 2$, dont l'ensemble des sommets est partitionné en deux **stables** X et Y. Un graphe biparti complet est un graphe biparti maximal en terme de nombre d'arêtes, alors $|E| = |X|.|Y|$, et il est noté $K_{p,q}$ avec $p = |X|$ et $q = |Y|$ (voir Figure 1.6).

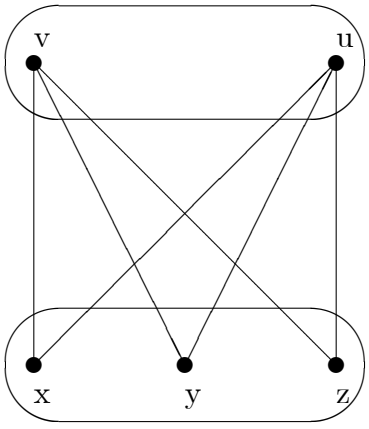


FIG. 1.6 – Le graphe biparti complet $K_{2,3}$

Graphe biparti k-semi-régulier

Un graphe biparti k-semi-régulier est un graphe G d'ordre $n \geq 2$, dont l'ensemble des sommets est partitionné en deux stables X et Y , avec chaque sommet de l'une de deux parties est de degré k (voir Figure 1.7).

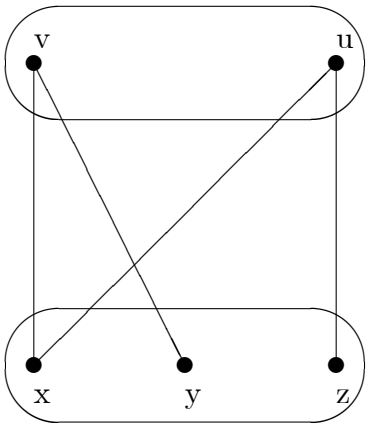


FIG. 1.7 – Un graphe biparti 2-semi-régulier.

Chaînes

Une *chaîne* est une suite alternée des sommets et d'arêtes de la forme $(v_1, v_2, ..., v_k)$ où k est un entier positif. L'entier $k-1$ est la longueur de la chaîne (voir Figure 1.8).



FIG. 1.8 – la chaîne P_5

Arbres

Un *arbre* est un graphe connexe ayant exactement $n-1$ arêtes (voir Figure 1.9)

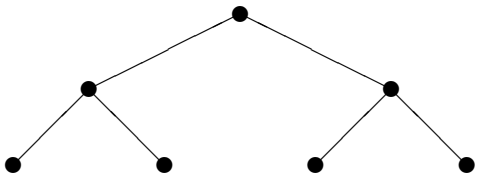


FIG. 1.9 – Un exemple d'un arbre T

Etoiles

On appelle *étoile*, et on note par $K_{1,n}$, l'arbre d'ordre $n+1$ ayant n sommets pondants.

le sommet de degré n est appelé centre (voir Figure 1.10).

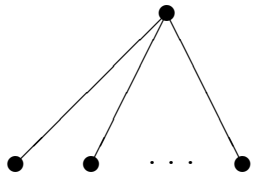


FIG. 1.10 – L'étoile $K_{1,n}$

Étoile double

Une *double étoile* est un graphe obtenu par deux étoiles $K_{1,r}$ et $K_{1,s}$ en ajoutant une arête reliant les deux centres, notée $S_{r,s}$ (voir Figure 1.11).

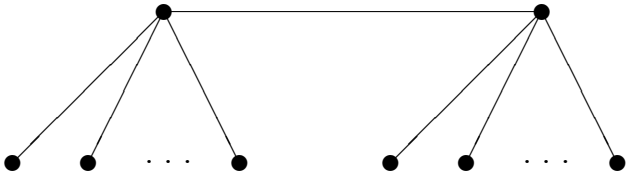


FIG. 1.11 – Double étoile $S_{r,s}$

Chenille

Une *chenille* est un arbre dont la supression de ses sommets pendants produit une chaîne $u_1, u_2, ..., u_s$ appelée la *colonne vertébrale* de la chenille, et noté $C(t_1, t_2, ..., t_s)$ tel que t_i est le nombre de sommets pendants adjacents à u_i tel que $i \in \{1, 2, ..., s\}$ (voir Figure 1.12).

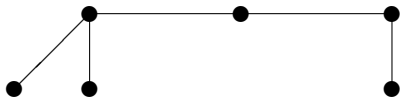


FIG. 1.12 – La chenille $c(2, 0, 1)$

Graphe r-régulier

Un graphe dont tous les sommets sont de même degré r est appelé un graphe *r-régulier*, c-à-d $d_G(x) = r$ pour tout $x \in V$ (voir Figure 1.13).

Cycles

Le *cycle* de longueur n, noté C_n, est le seul graphe 2-régulier connexe à n sommets. On peut désigner le cycle par la suite de ses sommets $(v_1, v_2, v_3, ..., v_n)$, ses arêtes étant $v_i v_{i+1} \in E(C_n)$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$ et l'arête $v_n v_1 \in E(C_n)$ (voir Figure 1.14).

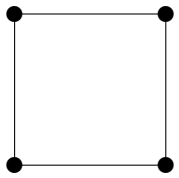


FIG. 1.13 – Un graphe 2-régulier d'ordre 4.

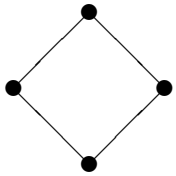


FIG. 1.14 – Le cycle C_4

Graphe scindé

Un graphe G est un graphe *scindé* si son ensemble de sommets peut être partitionné en deux ensembles, dont l'un est un ensemble **indépendant** S et l'autre est une clique K (voir Figure 1.15).

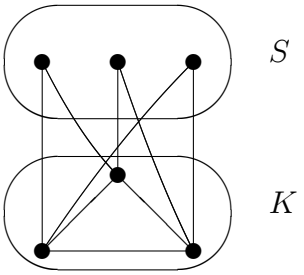


FIG. 1.15 – Un graphe scindé

1.2 Quelques opérations sur les graphes

Couronne d'un graphe

Etant donné deux graphes $G = (V, E)$ et $H = (V', E')$ avec $V \cap V' = \emptyset$.

La *H-couronne* de G, c'est le graphe $G \circ H$ obtenu d'une copie de G et $|V|$ copies de H où le $i^{ième}$ sommet de G est adjacent à tous les sommets de la $i^{ième}$ copie de H. Lorsque H est la clique K_1, $G \circ K_1$ est appelé la *couronne* du graphe G. Il est à noter que l'ordre de $G \circ K_1$ est $2|V|$ (voir Figure 1.16).

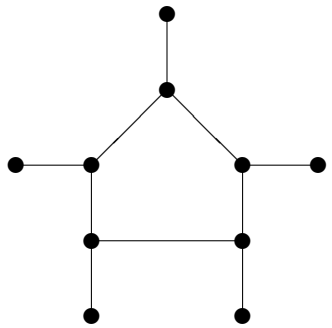


FIG. 1.16 – La couronne d'un C_5

Union de deux graphes

L'union des graphes G_1 et G_2 est le graphe $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Joint de deux graphes

Le joint des graphes G_1 et G_2 est le graphe $G_1 + G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup E_{1,2})$ où $E_{1,2} = \{xy : x \in V_1, y \in V_2\}$(voir Figure 1.17).

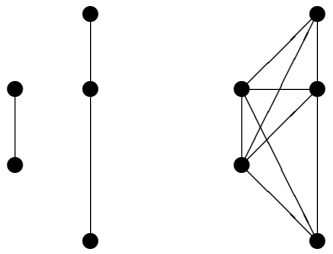


FIG. 1.17 – Le graphe joint de G_1 et G_2.

Produit cartésien de deux graphes

Le produit cartésien des graphes G_1 et G_2 est le graphe $G = (V, E)$, noté $G_1 \square G_2$ tel que $V = \{(u, v) : u \in V_1 \text{ et } v \in V_2\}$ et deux sommets (u_1, u_2) et (v_1, v_2) sont adjacents si $u_1 = v_1$ et $u_2v_2 \in E(G_2)$ ou $u_2 = v_2$ et $u_1v_1 \in E(G_2)$.

Grille

Soient P_r et P_c deux chaines d'ordre, respectivement, r et c. Le produit cartésien de P_r et P_c est appelé grille, noté $P_r \boxdot P_c$ (voir Figure 1.18).

Subdivision

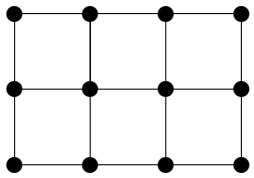


FIG. 1.18 – La grille $P_r \boxdot P_c$

Une *subdivision* $S(G)$ d'un graphe G est le graphe obtenu en remplaçant chaque arête uv de G par un sommet w et les deux arêtes uw et wv (voir Figure 1.19).

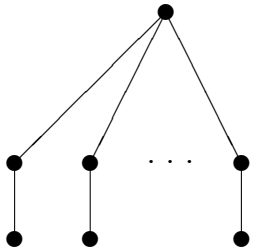
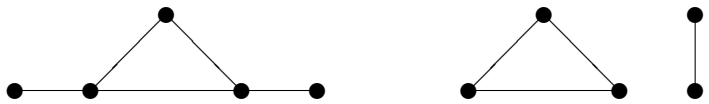


FIG. 1.19 – L'étoile subdivisée $S_{1,q}$.

1.3 Connexité

La relation $\sim$ entre les sommets d'un graphe G est définie comme suit : $u \sim v$ si et seulement s'il existe dans G une chaîne reliant u à v. La relation $\sim$ est une relation d'équivalence. Les sous-graphes induits par les classes d'équivalence de $\sim$ sont appelés composantes connexes de G. Le graphe G est dit connexe s'il possède une seule composante connexe.

Si G est connexe, alors $\overline{G}$ est dit co-connexe. Les complémentaires des composantes connexes de $\overline{G}$ sont appelées composantes co-connexes de G. Il est bien connu que pour tout graphe G, l'un de G ou $\overline{G}$ est connexe (voir Figure 1.20).



G H

FIG. 1.20 – Exemple d'un graphe connexe et d'un graphe non connexe

1.4 La domination dans les graphes

Soit $G = (V, E)$ un graphe simple.

Un sous ensemble de sommets $D \subseteq V$ de G est dit ensemble dominant si tout sommet de $V - D$ á aumoins un voisin dans D.

Un ensemble dominant D est dit dominant minimal si aucun sous ensemble propre de D n'est pas un ensemble dominant.

Le nombre de domination inférieur (appelé nombre de domination), noté$\gamma(G)$, d'un graphe G représente la cardinalité minimum d'un ensemble dominant de G.

Un ensemble dominant minimum avec une telle cardinalité est appelé$\gamma(G)$-ensemble, on note qu'un graphe G peut avoir plusieurs$\gamma(G)$-ensembles.

La cardinalité maximum d'un ensemble dominant minimal est appelée nombre de domination supérieur, et est noté par $\Gamma(G)$.

Dans la littérature, il existe d'autres définitions équivalentes aux ensembles dominants dans les graphes. En voici des exemples :

Un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V$, $|N(v) \cap D| \geq 1$, un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si pour tout $v \in V - D$, $|N(v) \cap D| \geq 1$, un ensemble $D \subseteq V$ est un dominant si $N(D) = V$.

Par exemple pour le graphe $K_{2;3}$ (voir Figure 1.21).

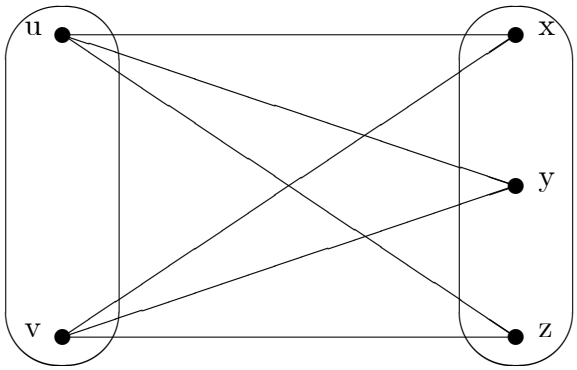


FIG. 1.21 – Exemple d'un graphe G tel que $\gamma(G) = 2$

1.5 L'indépendance dans les graphes

Un sous ensemble de sommets $S \subseteq V$ d'un graphe G est appelé indépendant s'il n'existe pas deux sommets adjacents dans S.

Un ensemble indépendant S est dit maximal si aucun sur-ensemble de S n'est un ensemble indépendant.

Le cardinal maximum (resp. minimum) d'un ensemble indépendant maximal est appelé le nombre d'indépendance supérieur (resp. le nombre d'indépendance inférieur) de G, noté par $\alpha(G)$ (resp. $i(G)$).

Pour le graphe $K_{2,3}$, représenté dans la Figure 1.22 , les deux ensembles de sommets, $\{u, v\}$ et $\{x, y, z\}$ sont des ensemble indépendant maximaux.

L'ensemble $\{x, y, z\}$ est l'ensemble indépendant maximal le plus large, il s'ensuit que $\alpha(K_{2,3}) = 3$, et l'ensemble indépendant maximal le plus petit est $\{u, v\}$, et donc $i(K_{2,3}) = 2$.

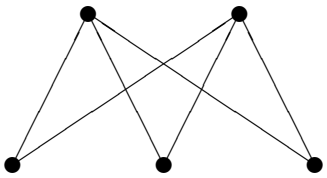


FIG. 1.22 – Un graphe biparti complet $K_{2,3}$, $\alpha(K_{2,3}) = 3$.

Chapitre 2

Quelques résultats sur les $[1, k]$-ensembles indépendants

2.1 Définitions et propriétés

En 2013, Chellali et al [3] ont introduit une généralisation de la notion de domination dans les graphes, á savoir la $[j, k]$-ensemble.

Définition 2.1.1 *Soit $G = (V, E)$ et j, k deux entiers positifs tels que $j \leq k$. Un sous ensemble D de V est dit $[j, k]$-ensemble si pour tout sommets $y \in V - D$, $j \leq |N(y) \cap D| \leq k$.*

Plus tard, Chellali et al [4] ont poursuivi l'étude des $[j, k]$-ensembles, dans le cas $j = 1$, et que le $[1, k]$-ensemble soit indépendant. Le papier contient des définitions, des propriétés et des bornes sur le $[1, k]$-ensemble independant. A notré qu'il y a quelques papiers qui sont apparus sur $[1, k]$-ensemble, voir par exemple ; [2, 3, 7].

Observation 2.1.1 ([4]) *Tout $[1, k]$-ensemble indépendant S de G est minimal puisque $S - S'$ n'est pas dominant pour tout sous-ensemble non vide $S' \subseteq S$, et maximal puisque $S \cup S''$ n'est pas indépendant pour tout sous-ensemble non vide $S'' \in V - S$.*

Observation 2.1.2 ([4]) *Tout $[1, k]$-ensemble indépendant est un $[1, k]$-ensemble indépendant pour chaque $k' > k$.*

Un graphe G peut ne pas avoir $[1,k]$-ensemble indépendant pour un entier positif k. Par exemple pour la domination efficace ($k=1$) il y a des graphes qui n'ont pas d'ensemble dominant efficace (voir C_4). Toute fois, chaque graphe G avec $\Delta(G)=\Delta$ a un $[1,\Delta]$ ensemble indépendant, puisque tout ensemble dominant indépendant est un tel ensemble. On définit $\varphi(G)$ comme l'entier positif minimal k telque G admet un $[1,k]$-ensemble inépendant. Par l'Observation 2.1.2, G a un $[1,k]$-ensemble indépendant pour chaque $k \geq \varphi(G)$. Pour tous les $k \geq \varphi(G)$, on définit le nombre de $[1,k]$-ensemble indépendant inférieur et le nombre de $[1,k]$-ensemble indépendant supérieur comme suit. Soit $i_{[1,k]}(G)$ égal au cardinal minimum d'un $[1,k]$-ensemble indépendant de G, et $\alpha_{[1,k]}(G)$ le cardinal maximum d'un $[1,k]$-ensemble indépendant de G. L'observation suivante est immédiate.

Observation 2.1.3 ([4]) *Pour tout graphe G, on a :*

$$i(G) = i_{[1,\Delta]}(G) \leq i_{[1,\Delta-1]}(G) \leq ... \leq i_{[1,\varphi]}(G) \leq \alpha_{[1,\varphi]}(G) \leq ... \leq \alpha_{[1,\Delta-1]}(G) \leq \alpha_{[1,\Delta]}(G) = \alpha(G).$$

2.2 $[1,k]$-ensembles indépendant

Comme mentionné précédemment, il y a des graphes qui n'ont pas de $[1,k]$-ensemble indépendant pour un entier positif k donné. Par exemple, pour le graphe bipartite complet $K_{3,3}$, et la double étoile $S_{2,3}$, chacun a un $[1,3]$-ensemble indépendant , qui n'y a pas de $[1,2]$-ensemble indépendant. Ceci soulève le problème suivant :

Problème 2.2.1 ([4]) *Caractériser les graphes G avec des $[1,k]$-ensembles indépendants pour un entier positif donné k.*

Un autre problème est de déterminer le plus petit ordre des graphes qui n'ont pas de $[1,k]$-ensembles indépendants. Le résultat suivant, donné par Chellali et al.[4] est résout ce problème et montre, que $K_{3,3}$ a l'ordre minimum d'un graphe qui n'admet pas de $[1,2]$-ensemble indépendant, et la double étoile $S_{2,3}$ a l'ordre minimum pour un arbre qui n'admet pas de $[1,2]$-ensemble indépendant.

Théorème 2.2.1 ([4]) *(i) Pour tout $k \geq 1$, tout graphe d'ordre $n \leq 2k+1$ a un $[1,k]$-ensemble*

indépendant, et il existe un graphe connexe d'ordre $n = 2k + 2$ *qui n'a pas de* $[1, k]$*-ensemble indépendant (voir Figure 2.1).*

(ii) Pour tout $k \geq 1$*, tout arbre d'ordre* $n \leq 2k + 2$ *a un* $[1, k]$*-ensemble indépendant, et il existe un arbre d'ordre* $n = 2k + 3$ *qui n'a pas de* $[1, k]$*-ensemble indépendant (voir Figure 2.2).*

Exemple 2.2.1 $K_{k+1,k+1}$ *et* $S_{k,k+1}$.

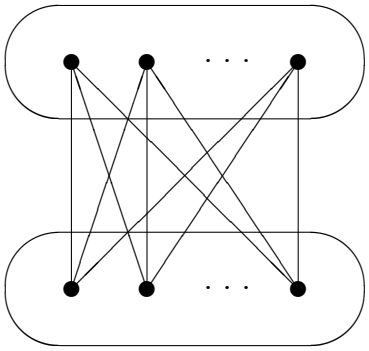


FIG. 2.1 – Graphe bipartie $K_{k+1,k+1}$

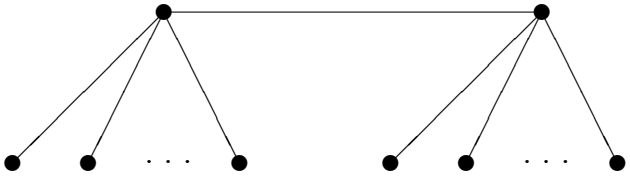


FIG. 2.2 – Double étoile $S_{k,k+1}$

Corollaire 2.2.1 ([4]) *Les plus petits ordres d'un graphe connexe et d'un arbre n'ayant pas de* $[1, k]$*-ensemble indépendant sont respectivement* $2k + 2$ *et* $2k + 3$*.*

Le résultat suivant montre qu'il n'y a pas de caractérisation de sous-graphe interdite de graphe avec des $[1, k]$-ensembles indépendants.

Proposition 2.2.1 ([4]) *Tout graphe* G *est un sous-graphe induit d'un graphe ayant un* $[1, 1]$*-ensemble indépendant, et donc un* $[1, k]$*-ensemble indépendant pour* $k \geq 1$*.*

Proposition 2.2.2 ([4]) *Soit* k *un entier positif et* $G \circ H$ *la couronne des graphes* G *et* H*. Alors* $G \circ H$ *a un* $[1, k]$*-ensemble indépendant si et seulement si chaque composante de* G *est un sommet isolé ou* $i(H) \leq k$*.*

Théorème 2.2.2 ([4]) *Si G est un graphe sans $K_{1,k+1}$, alors chaque ensemble dominant indépendant est un $[1,k]$-ensemble indépendant.*

Exemple 2.2.2 *Pour le graphe $G = C_4$ et $k = 2$, alors G est sans la griffe donc chaque ensemble dominant indépendant est un $[1,2]$-ensemble indépendant.*

Corollaire 2.2.2 ([4]) *Si G est un graphe sans $K_{1,k+1}$, alors $i_{[1,k]}(G) = i(G)$ et $\alpha_{[1,k]}(G) = \alpha(G)$.*

On note que la différence entre $i_{[1,k]}(G)$ et $\alpha_{[1,k]}(G)$ peut être arbitrairement grand. Pour voir cela, considérons l'arbre T_{2t} formé par une chaine P_{2t} de $2t$ sommets, où pour chaque sommet v de P_{2t}, on ajoute deux nouveaux sommets v' et v'' avec les arêtes $vv\prime$ et $v'v''$. Il est facile de voir que pour tout entier positif $k \geq 2$, $i_{[1,k]}(G) = i_{[1,2]}(G) = 2t$ et $\alpha_{[1,k]}(G) = \alpha_{[1,2]}(G) = 3t$.

Exemple 2.2.3

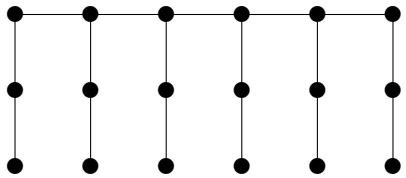


FIG. 2.3 – Un arbre T_{2t} pour $t = 3$, tel que $i_{[1,2]}(G) = 6$ et $\alpha_{[1,2]}(G) = 9$.

2.3 Bornes sur $\alpha_{[1,k]}(G)$

Dans cette section, on détermine des bornes supérieures sur les nombres $[1,k]$-indépendance pour les graphes ayant des $[1,k]$-ensembles indépendants. On définit les familles $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}$ comme suit : Les graphes $G' \in \mathcal{L}'$ sont bipartites avec les parties S et $V - S$, où $|S| = \frac{kq}{\delta}$ et $|V - S| = q$, tel que q est un entier positif et δ divise kq. De plus, $d_{G'}(v) = \delta$ pour tout $v \in S$ et $d_{G'}(v) = k$ pour tout $v \in V - S$.

Un graphe G appartient à $\mathcal{L}$ s'il est obtenu à partir d'un graphe G' de $\mathcal{L}'$ en ajoutant éventuellement des arêtes entre les sommets de $V - S$ de telle sorte que $d_G(v) \geq \delta$ pour tout $v \in V - S$.

Théorème 2.3.1 ([4]) *Soit G un graphe d'ordre n sans sommets isolés. Si $k \geq \varphi(G)$, alors $i_{[1,k]}(G) \leq \alpha_{[1,k]}(G) \leq \frac{kn}{\delta+k}$. L'égalité $\alpha_{[1,k]}(G) = \frac{kn}{\delta+k}$ est atteinte si et seulement si $G \in \mathcal{L}$.*

Exemple 2.3.1 *Pour le graphe complet K_n, on a : $\varphi(G) = 1$ et $\delta = n-1$ et $i_{[1,k]}(K_n) = \alpha_{[1,k]}(K_n) = \frac{kn}{\delta+k} = \frac{n}{n-1+1} = 1$.*

Théorème 2.3.2 ([4]) *Soit G un graphe d'ordre n de degré minimum $\delta(G) = 1$. Si G a un $[1,k]$-ensemble indépendant, alors les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) $\alpha_{[1,k]}(G) = \frac{kn}{k+1}$ si et seulement si G est la couronne $H \circ K$, où H est un graphe quelconque.

(ii) Si $\alpha_{[1,k]}(G) = \frac{kn}{k+1}$ et aucune composante de G n'est une étoile $K_{1,k}$, alors $i_{[1,k]}(G) = \alpha_{[1,k]}(G)$.

Exemple 2.3.2 *Pour $k = 1$ et pour graphe $G = C_4 \circ K_1$, on a $\alpha_{[1,1]}(G) = \frac{8}{2} = 4$ et aucune composante de G n'est une étoile $K_{1,1}$, alors $i_{[1,1]}(G) = \alpha_{[1,1]}(G) = 4$.*

Théorème 2.3.3 ([4]) *Soit G un graphe d'ordre n et de taille m. Si G a un $[1,k]$-ensemble indépendant, alors*

$$i_{[1,k]}(G) \leq \alpha_{[1,k]}(G) \leq \frac{2n + 2k - 1 - \sqrt{8m + (2k-1)^2}}{2}.$$

Exemple 2.3.3 *Pour $k = 1$, le graphe $G = K_4$, $i_{[1,1]}(G) = \alpha_{[1,1]}(G) = \frac{9-\sqrt{49}}{2} = \frac{2}{2} = 1$.*

Chapitre 3

Résultats sur les $[1,2]$-ensembles indépendants

Dans ce chapitre, d'abord, nous présentons des conditions pour l'existence des $[1,2]$-ensembles indépendants pour les graphes scindés, puis les chenilles, en donnant les valeurs exactes des paramétres $\alpha_{[1,2]}$ et $i_{[1,2]}$ pour ces graphes. Ensuite, nous donnons des bornes sur $\alpha_{[1,2]}(G)$ et $i_{[1,2]}(G)$. Enfin, nous donnons des relations de type Nordhaus–Gaddum sur $\alpha_{[1,2]}(G)$. Nous rappelons la définition d'un $[1,2]$-ensemble indépendant ;

Définition 3.0.1 *Soit $G=(V,E)$ et k un entier positif. Un sous ensemble S de V est dit $[1,k]$-ensemble indépendant si pour tout sommets $y \in V-S$, $1 \leq |N(y) \cap S| \leq k$, et S est indépendant.*

Exemple

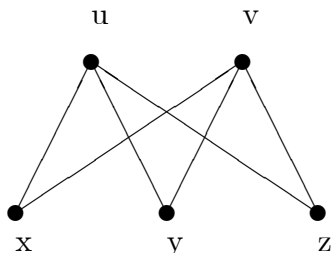


FIG. 3.1 – Un graphe biparti complet $K_{2,3}$, $\alpha_{[1,2]}(K_{2,3}) = 2$.

– L'ensemble $\{u,v\}$ est $[1,2]$-ensemble indépendant.

– L'ensemble $\{x,y,z\}$ est indépendant mais n'est pas $[1,2]$-ensemble.

– L'ensemble $\{u,y\}$ est un $[1,2]$-ensemble mais n'est pas indépendant.

3.1 Existence des $[1,2]$-ensembles indépendants

Dans cette section, on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des $[1,2]$-ensembles indépendants pour certains graphes particuliers.

3.1.1 Existence des $[1,2]$-ensembles indépendants dans les graphes scindés

Dans cette sous-section, on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des $[1,2]$-ensembles indépendants pour tout graphe scindé G, en donnant les valeurs exactes de $\alpha_{[1,2]}(G)$ et $i_{[1,2]}(G)$.

Proposition 3.1.1 *Soit G un graphe scindé partitionné en une clique minimal Q et un stable I, avec $|Q| = q$ et $|I| = p$. Alors G admet un $[1,2]$-ensemble indépendant si seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

1. $\Delta(G) \leq q+1$.
2. $\exists\ v \in Q\ ;\ |N_G(y) \cap (I - N_G(v))| \leq 1$ *pour tout* $y \in Q - \{v\}$.

Preuve. Soit G un graphe scindé partitionné en une clique minimal Q et un stable I, et soit S un $[1,2]$-ensemble indépendant. Il est clair que Q contient un sommet de degré maximum et $|S \cap Q| \leq 1$. Si $S \cap Q = \emptyset$, alors $S = I$, et puisque S est un $[1,2]$-ensemble, alors chaque sommet y de Q a au plus deux voisins dans I, et donc $d_G(y) \leq 2 + q - 1 = q + 1$. D'où $\Delta(G) \leq q+1$. Maintenant si $S \cap Q$ contient un seul sommet, disant v, alors $S = (I - N_G(v)) \cup \{v\}$. Puisque S est un $[1,2]$-ensemble, alors chaque sommet y de $Q - \{v\}$ a au plus un voisin dans $I - N_G(v)$.

Soit G un graphe scindé partitionné en une clique minimal Q et un stable I, vérifiant les conditions de la proposition 3.1.1. Supposons que $\Delta(G) \leq q+1$. Alors $\forall y \in Q$, $q \leq d_G(y) \leq q+1$, car Q est minimal et contient un sommet de degré maximum, et donc chaque sommet de Q a au moins un sommet et au plus deux sommets dans I qui est independent. D'où I est un $[1,2]$-ensemble indépendant. Maintenant supposons qu'il existe un sommet $v \in Q$ tel que $|N_G(y) \cap (I - N_G(v))| \leq$

1 pour tout $y \in Q - \{v\}$. Il est clair que $I' = (I - N_G(v)) \cup \{v\}$ est indépendant et chaque sommet dans $N_G(v) \cap I$ a exactement un voisin dans I'qui est v. D'autre part, chaque sommet de $Q - \{v\}$ est adjacent à v et au plus à un sommet de $I - N_G(v)$, et donc chaque sommet de $Q - \{v\}$ à au moins un voisin et au plus deux voisins dans I'. Par conséquent, I' est un $[1,2]$-ensemble indépendant. ■

Corollaire 3.1.1 *Soit G un graphe scindé partitionné en une clique minimal Q et un stable I, avec $|Q| = q$ et $|I| = p$. Alors*

1. *Si $\Delta(G) \leq q+1$ et $\forall\ v \in Q$, $\exists y \in Q - \{v\}$; $|N_G(y) \cap (I - N_G(v))| \geq 2$, alors $i_{[1,2]}(G) = \alpha_{[1,2]}(G) = p$.*
2. *Si $\Delta(G) \leq q+1$ et $\exists\ v \in Q$, $\forall y \in Q - \{v\}$; $|N_G(y) \cap (I - N_G(v))| \leq 1$, alors $i_{[1,2]}(G) = p - \max_{v \in Q'} |N_G(v) \cap I|$ et $\alpha_{[1,2]}(G) = p$.*
3. *Si $\forall y \in Q - \{v\}$; $|N_G(y) \cap (I - N_G(v))| \leq 1$ et $\Delta(G) \geq q+1$,alors $i_{[1,2]}(G) = p - \max_{v \in Q'} |N_G(v) \cap I|$ et $\alpha_{[1,2]}(G) = p - \min_{v \in Q'} |N_G(v) \cap I|$.*

Un exemple de graphe scindé vérifiant la 1ère condition du corollaire précédent.

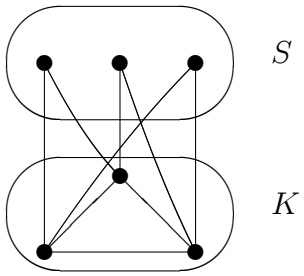


FIG. 3.2 – Un graphe scindé, tel que $i_{[1,2]}(G) = 2$, $\alpha_{[1,2]}(G) = 3$.

3.1.2 Existance des $[1,2]$-ensembles indépendants dans les chenilles

Dans cette sous-section, nous avons donné des conditions pour l'existence des $[1,2]$-ensembles indépendants pour toute chenille T, en donnant des bornes sur $\alpha_{[1,2]}(T)$ et $i_{[1,2]}(T)$.

Soit $T = C(t_1, t_2, ..., t_s)$ une chenille avec $t_i \geq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., s\}$, et soit p_1, p_2 et p_3 les nombres des sommets x_i qui ont, respectivement, $t_i = 1$, $t_i = 2$ et $t_i \geq 3$ sommets pendants.

Théorème 3.1.1 *Soit $T = C(t_1, t_2, ..., t_s)$ une chenille avec $t_i \geq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., s\}$. Alors T a un $[1,2]$-ensemble indépendant si seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. Si $t_i = 1$ pour certain $i \in \{1, 2, ..., s\}$, alors $t_{i-1} \leq 2$ ou $t_{i+1} \leq 2$.
2. Si $t_i = 2$ pour certain $i \in \{1, 2, ..., s\}$, alors $t_{i-1} \leq 2$ et $t_{i+1} \leq 2$.
3. Si $t_i \geq 3$ pour certain $i \in \{1, 2, ..., s\}$, alors $t_{i-1} = 1$ et $t_{i+1} = 1$.

Preuve. Soit $T = C(t_1, t_2, ..., t_s)$ une chenille avec $t_i \geq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., s\}$ tels que $x_1, x_2, ..., x_s$ sont les sommets de la colonne vertébrale de T adjacent, respectivement, à t_1, t_2,...,t_s sommets pendants, et soit S un $[1, 2]$-ensemble indépendant de T. On distingue trois cas selon les valeurs de t_i :

Cas 1. $t_i = 1$ pour certain $i \in \{1, 2, ..., s\}$. Supposons que $t_{i-1} \geq 3$ et $t_{i+1} \geq 3$. Il est clair que x_{i-1} et $x_{i+1} \in S$. Pour dominer le seul sommet pendant y_i de x_i, il faut que y_i ou x_i soit dans S. Si $x_i \in S$, alors on a une contradiction avec l'indépendance de S, et si $y_i \in S$, alors x_i aurait trois voisins dans S, ce qui contredit le fait que S est un $[1, 2]$-ensemble. D'où $t_{i-1} \leq 3$ ou $t_{i+1} \leq 3$.

Cas 2. $t_i = 2$ pour certain $i \in \{1, 2, ..., s\}$. Sans perte de généralité, supposons que $t_{i+1} \geq 3$. Il est clair que $x_{i+1} \in S$. Pour dominer les deux sommets pendants y_i et y'_i de x_i, il faut que y_i et y'_i, ou x_i soit dans S. Si $x_i \in S$, alors on a une contradiction avec l'indépendance de S, et si y_i et $y'_i \in S$, alors x_i aurait trois voisins dans S, ce qui contredit le fait que S est un $[1, 2]$-ensemble. D'où $t_{i-1} \leq 2$ et $t_{i+1} \leq 2$.

Cas 3. $t_i \geq 3$ pour certain $i \in \{1, 2, ..., s\}$. Sans perte de généralité, supposons que $t_{i+1} \geq 2$. Il est clair que $x_i \in S$. Pour dominer les sommets pendants de x_{i+1}, il faut que les sommets pendants adjacents á x_{i+1}, ou x_{i+1} soient dans S. Si $x_{i+1} \in S$, alors on a une contradiction avec l'indépendance de S, et si les sommets pendants adjacents à x_{i+1} sont dans S, alors x_i a au moins trois voisins dans S, ce qui contredit encore le fait que S est un $[1, 2]$-ensemble. D'où $t_{i-1} = 1$ et $t_{i+1} = 1$.

Inversement, soit A l'ensemble des sommets x_j de $\{x_1, x_2, ..., x_s\}$ tels que $t_j \geq 3$, et B sont l'ensemble des sommets pendants adjacents aux sommets x_l de $\{x_1, x_2, ..., x_s\}$ tels que $t_l \leq 2$. Montrons que $S = A \cup B$ est un $[1, 2]$-ensemble indépendant de T. Il est clair que B est indépendant et n'a aucun sommet adjacent á un sommet de A, et d'aprés la condition (3) A est indépendant et donc S est indépendant. D'autre part, il facile de voir que chaque sommet pendant adjacents á un

sommet de A a exactement un voisin dans S, et d'après les conditions (1) et (2) chaque sommet x_l de $\{x_1, x_2, ..., x_s\}$ tels que $t_l \leq 2$ a au moins un voisin et au plus deux voisins dans S. D'où S est un $[1,2]$-ensemble indépendant de T. ■

Observation 3.1.1 *Soit $T = C(t_1, t_2, ..., t_s)$ une chenille avec $t_i \geq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., s\}$. Si T a un $[1,2]$-ensemble indépendant S, alors*

$$p_1 + p_2 + p_3 \leq i_{[1,2]}(T) \leq |S| \leq \alpha_{[1,2]}(T) \leq p_1 + 2p_2 + p_3.$$

Proposition 3.1.2 *Soit $T = C(t_1, t_2, ..., t_s)$ une chenille avec $t_i \geq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., s\}$. Si T a un $[1,2]$-ensemble indépendant, alors*

$$\alpha_{[1,2]}(T) = p_1 + 2p_2 + p_3.$$

Preuve. Soit S un $\alpha_{[1,2]}(T)$-ensemble de T. Si $t_i = 1$ il est clair que x_i ou le seul sommet pendant de x_i appartient á S. Si $t_i = 2$ il est clair que x_i ou les deux sommets pendants de x_i appartiennent á S, et pour avoir le maximum des sommets dans S, S doit contenir les deux sommets pendants de x_i. Si $t_i \geq 3$ il est clair que $x_i \in S$. Par conséquent, $|S| = p_1 + 2p_2 + p_3$. ■

Corollaire 3.1.2 *Soit $T = C(t_1, t_2, ..., t_s)$ une chenille avec $t_i \geq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., s\}$. Si T a un $[1,2]$-ensemble indépendant, alors $\alpha_{[1,2]}(T) = i_{[1,2]}(T) = p_1 + p_2 + p_3$ si seulement si $p_2 = 0$.*

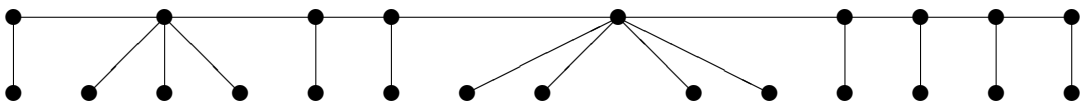


FIG. 3.3 – la chenille T , tel que $\alpha_{[1,2]}(T) = i_{[1,2]}(T) = p_1 + p_2 + p_3 = 9$.

Proposition 3.1.3 *Soit $T = C(t_1, t_2, ..., t_s)$ une chenille avec $t_i \geq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., s\}$. Si T a un $[1,2]$-ensemble indépendant, alors $i_{[1,2]}(T) = p_1 + p_2 + p_3$ si seulement si $t_i \geq 2$ pour certain $i \in \{1, 2, ..., s\}$, alors $t_{i-2} = t_{i-1} = t_{i+1} = t_{i+2} = 1$.*

Preuve. Soit $T = C(t_1, t_2, ..., t_s)$ une chenille avec $t_i \geq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., s\}$. Supposons que $i_{[1,2]}(T) = p_1 + p_2 + p_3$, et soit S un $i_{[1,2]}(T)$-ensemble de T. Pour avoir $|S| = p_1 + p_2 + p_3$, il faut que tous les x_i ayant deux sommets pendants ou plus soient dans S. Puisque S est indépendant, x_{i-1} et x_{i+1} ont chacun un seul sommet pendant, qui est dans S. En plus x_{i-2} et x_{i+2} ont aussi chacun un seul sommet pendant (sinon x_{i-1} ou x_{i+1} ont trois voisins dans S).

Inversement, si $t_i \geq 2$ pour certain $i \in \{1, 2, ..., s\}$ et $t_{i-2} = t_{i-1} = t_{i+1} = t_{i+2} = 1$. Il est facile de voir que l'ensemble formé par les sommets qui ont au moins deux sommets pendants et les autres sommets pendants, est un $[1, 2]$-ensemble indépendant de cardinal $p_1 + p_2 + p_3$. ■

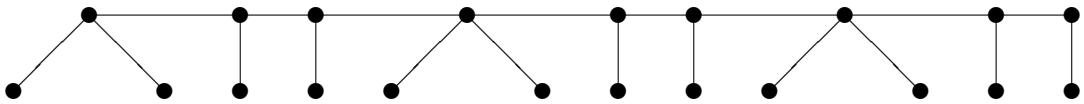


FIG. 3.4 – La chenille T, tel que $i_{[1,2]}(T) = p_1 + p_2 + p_3 = 9$.

Proposition 3.1.4 *Soit $T = C(t_1, t_2, ..., t_s)$ une chenille avec $t_i \geq 1$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., s\}$. Si T a un $[1, 2]$-ensemble indépendant, alors $i_{[1,2]}(T) = \alpha_{[1,2]}(T) = p_1 + 2p_2 + p_3$ si seulement si $t_i = 2$ pour certain $i \in \{1, 2, ..., s\}$, alors $t_{i-1} = 1$ et $t_{i-2} \geq 3$, ou $t_{i+1} = 1$ et $t_{i+2} \geq 3$, ou $t_{i-1} = 2$, ou $t_{i+1} = 2$.*

Preuve. Supposons que $i_{[1,2]}(T) = \alpha_{[1,2]}(T) = p_1 + 2p_2 + p_3$, et soit S un $i_{[1,2]}(T)$-ensemble de T pour avoir $|S| = p_1 + 2p_2 + p_3$, il faut que tous les sommets pendants adjacents aux sommets x_i de la colonne vertibrale ayant $t_i = 2$ soient dans S. Si $t_{i-1} = 2$ ou $t_{i+1} = 2$, alors x_{i-1}, $x_{i+1} \notin S$ car S est un $[1, 2]$-ensemble. Si $t_{i-1} = 1$ et $t_{i+1} = 1$, alors x_{i-2} ou $x_{i+2} \in S$, sinon x_i peut être dans S. Donc $t_{i-2} \geq 3$, ou $t_{i+2} \geq 3$. Par conséquent $t_{i-1} = 1$ et $t_{i-2} \geq 3$, ou $t_{i+1} = 1$ et $t_{i+2} \geq 3$, ou $t_{i-1} = 2$, ou $t_{i+1} = 2$. Inversement, est simple à vérifier. ■

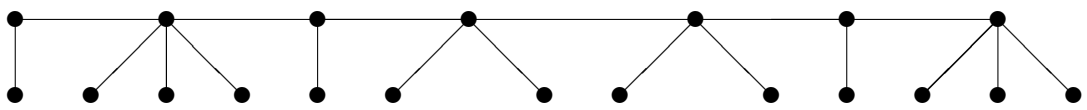


FIG. 3.5 – La chenille T, tel que $i_{[1,2]}(T) = \alpha_{[1,2]}(T) = p_1 + 2p_2 + p_3 = 9$.

3.2 Bornes sur $\alpha_{[1,2]}(G)$ et $i_{[1,2]}(G)$

Dans cette section on présente des bornes sur $\alpha_{[1,2]}(G)$ et $i_{[1,2]}(G)$. On commence par une borne donnée par Favaron [5] sur le nombre d'independance $\alpha(G)$.

Théorème 3.2.1 ([5]) *Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum δ. Alors*

$$\alpha(G) \leq n - \delta,$$

Puisque $\alpha_{[1,2]}(G) \leq \alpha(G)$ pour tout graphe G, alors on obtient la borne suivante.

Corollaire 3.2.1 *Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum δ. Alors*

$$\alpha_{[1,2]}(G) \leq n - \delta.$$

Théorème 3.2.2 *Soit G un graphe d'ordre n et de degré minimum δ. Alors $\alpha_{[1,2]}(G) = n - \delta$ si et selement si G est le graphe complet K_n, ou G est le joint de $\overline{K_2}$ et un graphe H tel que $d_H(v) \geq n(H) - 2$ pour tout sommet v de H.*

Preuve. Soit S un $\alpha_{[1,2]}(G)$-ensemble de G. Alors $d_G(v) \leq |V - S|$ pour tout sommet $v \in S$. Puisque $d_G(v) \geq \delta$, alors $\delta \leq d_G(v) \leq |V - S|$. D'où $\alpha_{[1,2]}(G) = |S| \leq n - \delta$.

Maintenant, si $\alpha_{[1,2]}(G) = n - \delta$, alors on a l'égalité sur toute la chaine des inégalités précédantes. Donc $d_G(v) = \delta = |V - S|$ pour tout sommet $v \in S$. Alors G est partitionné en deux sous-ensembles $X = S$ et $Y = V - S$, tel que X est indépendent et chaque sommet de X est adjacent à tous les sommet de Y, et donc chaque sommet de Y est adjacent a tous les sommet de X. Puisque X est un $[1, 2]$-ensemble, alors $1 \leq |X| \leq 2$, on destingue deux cas :

Cas 1. $|X| = 1$. Alors G contient un sommet de degré $\delta = n - 1$. Donc G est le graphe complet K_n.

Cas 2. $|X| = 2$. Alors G contient deux sommets non adjacents de degré $\delta = n - 2$. Donc G est le joint de $\overline{K_2}$ et un graphe H tel que $d_H(v) \geq n(H) - 2$ pour tout sommet v de H.

Inversement, si G est le graphe complet K_n, alors il est clair que $\alpha_{[1,2]}(G) = n-(n-1) = n-\delta = 1$. Maintenant supposons que $G \cong \overline{K_2}\vee H$, tel que $d_H(v) \geq n(H) - 2$ pour tout sommet v de H. Alors il facile de voir que G ne contient aucun stable de taille superieur ou égal à 3. D'où $\alpha_{[1,2]}(G) = n-(n-2) = n-\delta = 2$. ■

Théorème 3.2.3 *Soit G un graphe d'ordre n, de taille m et de degré maximum Δ. Alors*

$$\alpha_{[1,2]}(G) \leq n - \frac{2m}{\Delta+2},$$

avec égalité si selement si G est partitionné en deux sous-ensembles X et Y, tel que X est indépendant et chaque sommet de Y est de degré Δ et a exactement 2 voisins dans X.

Preuve. Soit S un $\alpha_{[1,2]}(G)$-ensemble de G. Alors $m(G[S]) = 0$, $m(G[V-S]) = \frac{1}{2}\sum\limits_{v\in V-S} d_{V-S}(v)$ et $m(V-S,S) = \sum\limits_{v\in V-S} d_S(v)$, et donc

$$\begin{aligned} m &= m(G[S]) + m(G[V-S]) + m(V-S,S) \\ &= \textstyle\sum_{v\in V-S} d_s(v) + \frac{1}{2}\sum_{v\in V-S} d_{V-S}(v) \\ &= \frac{1}{2}\left(\textstyle\sum_{v\in V-S} 2d_s(v) \ + \sum_{v\in V-S} d_{V-S}(v)\right) \\ &= \frac{1}{2}\textstyle\sum_{v\in V-S}\left(2d_s(v) \ + d_{V-S}(v)\right) \\ &= \frac{1}{2}\textstyle\sum_{v\in V-S}\left(d_s(v) + d_G(v)\right) \end{aligned}$$

Puisque $d_G(v) \leq \Delta$ et $d_s(v) \leq 2$, alors $m \leq \frac{1}{2}\sum\limits_{v\in V-S}(2+\Delta)$, et par suite $2m \leq (2+\Delta)|V-S|$. D'oú $\alpha_{[1,2]}(G) = |S| \leq n - \frac{2m}{\Delta+2}$.

Mainetenant, si $\alpha_{[1,2]}(G) = n - \frac{2m}{\Delta+2}$, alors il est facile de voir que $d_v(v) = \Delta$ et $d_s(v) = 2$ pour tout sommet $v \in V-S$. Il clair que G est partitionné en deux sous-ensembles $X = S$ et $Y = V-S$, tel que X est indépendant et chaque sommet de Y est de degré Δ et a exactement 2 voisins dans X.

Inversement, supposons que G est partitionné en deux sous-ensembles X et Y, tel que X est indépendant et chaque sommet de Y est de degré Δ et a exactement 2 voisins dans X. Alors

$$\begin{aligned} m &= m\left(G\left[X\right]\right) + m\left(G\left[Y\right]\right) + m\left(Y, X\right) \\ &= 0 + \frac{\left(\Delta - 2\right)\left|Y\right|}{2} + 2\left|Y\right| \\ &= \frac{\left(\Delta + 2\right)\left|Y\right|}{2}, \end{aligned}$$

Par suite $|X| = n - \frac{2m}{\Delta+2}$. Il est clair que X est un $[1, 2]$-ensemble independant, et donc $\alpha_{[1,2]}(G) \geq |X| = n - \frac{2m}{\Delta+2}$. L'égalité découle du fait que $\alpha_{[1,2]}(G) \leq n - \frac{2m}{\Delta+2}$. ■

Exemple de graphe vérifiant la borne du théorème précédent.

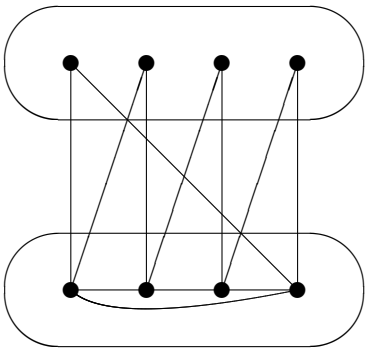


FIG. 3.6 – Un graphe biparti tel que $\alpha_{[1,2]}(G) = n - \frac{2m}{\Delta+2} = 4$.

Théorème 3.2.4 *Soit G un graphe d'ordre n, de taille m et de degré minimum δ . Alors*

$$i_{[1,2]}(G) \geq n - \frac{2m}{\delta + 1},$$

avec égalité si selement si G est partitionné en deux sous-ensembles X et Y, tel que X est indépendant et chaque sommet de Y est de degré δ et a exactement un voisin dans X.

Preuve. Soit S un $i_{[1,2]}(G)$-ensemble de G. Alors $m(G[S]) = 0$, $m(G[V-S]) = \frac{1}{2}\sum\limits_{v\in V-S} d_{V-S}(v)$ et $m(V-S,S) = \sum\limits_{v\in V-S} d_S(v)$, et donc

$$\begin{aligned} m &= m(G[S]) + m(G[V-S]) + m(V-S,S) \\ &= \textstyle\sum_{v\in V-S} d_s(v) + \frac{1}{2}\sum_{v\in V-S} d_{V-S}(v) \\ &= \frac{1}{2}\left(\textstyle\sum_{v\in V-S} 2d_s(v) \ + \sum_{v\in V-S} d_{V-S}(v)\right) \\ &= \frac{1}{2}\textstyle\sum_{v\in V-S}\left(2d_s(v) \ + d_{V-S}(v)\right) \\ &= \frac{1}{2}\textstyle\sum_{v\in V-S}\left(d_s(v) + d_G(v)\right) \end{aligned}$$

Puisque $d_G(v) \geq \delta$ et $d_s(v) \geq 1$, alors $m \geq \frac{1}{2}\sum\limits_{v\in V-S}(1+\delta)$, et par suite $2m \geq (1+\delta)|V-S|$. D'où $i_{[1,2]}(G) = |S| \geq n - \frac{2m}{\delta+1}$.

Mainetenant, si $i_{[1,2]}(G) = n - \frac{2m}{\delta+1}$, alors il est facile de voir que $d_G(v) = \delta$ et $d_s(v) = 1$ pour tout sommet $v \in V-S$. Il clair que G est partitionné en deux sous-ensembles $X = S$ et $Y = V-S$, tel que X est indépendant et chaque sommet de Y est de degré δ et a exactement un voisin dans X.

Inversement, supposons que G est partitionné en deux sous-ensembles X et Y, tel que X est indépendant et chaque sommet de Y est de degré δ et a exactement un voisin dans X. Alors

$$\begin{aligned} m &= m(G[X]) + m(G[Y]) + m(Y,X) \\ &= 0 + \frac{(\delta-1)|Y|}{2} + |Y| \\ &= \frac{(\delta+1)|Y|}{2}, \end{aligned}$$

Par suite $|X| = n - \frac{2m}{\delta+1}$. Il est clair que X est un $[1,2]$-ensemble indépendant, et donc $i_{[1,2]}(G) \leq |X| = n - \frac{2m}{\Delta+2}$. L'égalité découle du fait que $i_{[1,2]}(G) \geq n - \frac{2m}{\Delta+2}$. ■

3.3 Relation de type Nordhaus–Gaddum sur $\alpha_{[1,2]}$

Dans cette section on présente une relation de type Nordhaus–Gaddum pour $\alpha_{[1,2]}(G)$.

Théorème 3.3.1 *Soit G un graphe, tel que G et $\bar{G}$ ont des $[1,2]$-ensembles indépendants. Alors*

$$\alpha_{[1,2]}(G) + \alpha_{[1,2]}\left(\overline{G}\right) \leq n+1,$$

avec egalité si selement si $G \cong K_n$, ou $G \cong K_{1,n-1}$, ou G est obtenu d'une clique K_3 en attachant deux sommets isolés chacun à un sommet de K_3, ou G est obtenu d'une clique K_{n-1} en attachant un sommet isolé à au moins un sommet et au plus $n-2$ sommets de K_{n-1}.

Preuve. Soit S un $\alpha_{[1,2]}(G)$-ensemble de G et soit S' un $\alpha_{[1,2]}\left(\overline{G}\right)$-ensemble de $\overline{G}$. On pose $A = S' \cap S$ et $A' = V - (S' \cup S)$. Puisque S est independant et S' est une clique dans G, alors $|A| \leq 1$. En outre on a $|V| = |S| + |S'| - |A| + |A'|$. Il s'en suit que $|V| \geq |S| + |S'| - 1$, car $|A'| \geq 0$ et $|A| \leq 1$. Par conséquent $\alpha_{[1,2]}(G) + \alpha_{[1,2]}\left(\bar{G}\right) \leq n+1$.

Mainetenant, si $\alpha_{[1,2]}(G) + \alpha_{[1,2]}\left(\overline{G}\right) = n+1$, alors $|A'| = 0$ et $|A| = 1$, et donc $A' = \emptyset$ et $A = \{x\}$. Il est clair que G consiste en un graphe scindé partitionner en un stable $I = S$ et une clique $Q = S' - \{x\}$, tel que x est adjacent à tous les sommets de Q, car $x \in S'$ et S' est une clique dans G. Puisque S est un $\alpha_{[1,2]}(G)$-ensemble et tout sommet de Q a exactement $q-1$ voisins dans Q, alors $\forall v \in Q, q \leq d_G(v) \leq q+1$. D'autre part, Puisque S' est un $\alpha_{[1,2]}\left(\overline{G}\right)$-ensemble et tout sommet de $I - \{x\}$ a exactement $p-2$ voisins dans $I - \{x\}$ relativement à $\overline{G}$, alors $\forall v \in I - \{x\}, p-1 \leq d_{\overline{G}}(v) \leq p$, et donc $\forall v \in I - \{x\}, n-1-(p-1) \geq d_G(v) \geq n-1-p$. D'où $\forall v \in I - \{x\}, q-1 \leq d_G(v) \leq q$. Si $q = 1$, alors il est facile que $G \cong K_{1,n-1}$. Maintenant on suppose que $q \geq 2$. Soit $m(Q, I - \{x\})$ le nombre d'arêtes entre Q et $I - \{v\}$. Alors $(q-1)(p-1) \leq m(Q, I - \{x\}) \leq q$, et donc $p \leq 1 + \frac{q}{q-1} = 2 + \frac{1}{q-1}$, on a les cas suivants selon q :

Cas 1. $q = 2$. Alors $p \leq 3$. Si $p = 1$, alors $G \cong K_3$. Si $p = 2$, alors $G \cong K_4 - e$ ou G est obtenu d'une clique K_3 en attachant un sommet isolé à un sommet de K_3. Si $p = 3$, alors G est obtenu d'une clique K_3 en attachant deux sommets isolés chacun à un sommet de K_3.

Cas 2. $q \geq 3$. Alors $p \leq 2$. Si $p = 1$, alors $G \cong K_n$. Si $p = 2$, alors G est obtenu d'une clique K_{n-1} en attachant un sommet isolé à au moins un sommet et au plus $n-2$ sommets de K_{n-1}.

L'inverse est facile à vérifier. ■

Exemples des graphes vérifiant l'égalité dans le théorème précident.

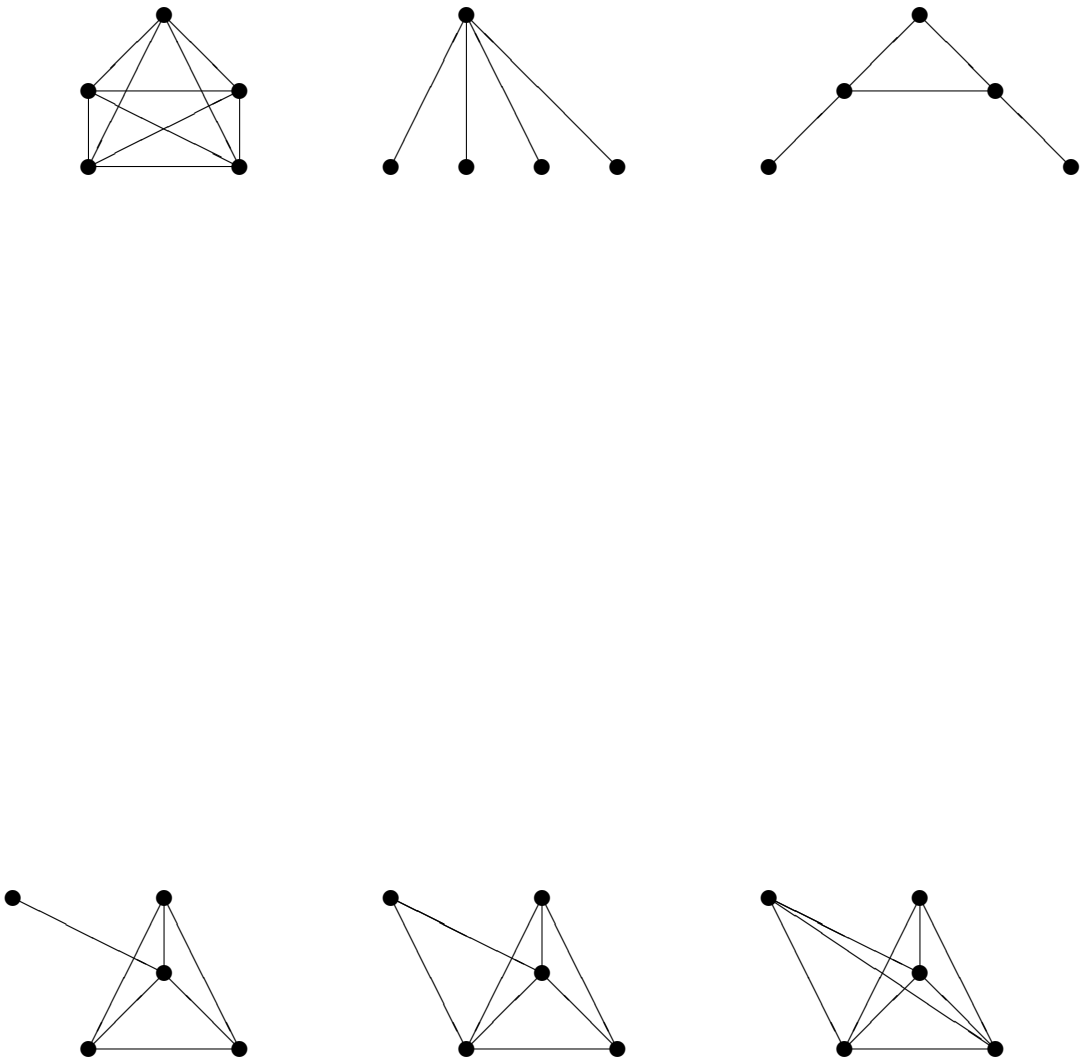


FIG. 3.7 – Les graphes

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressées a l'étude de $[1,2]$-ensemble indépendant. Plus précisément, nous nous sommes focalisés sur trois points importants : En premier lieu, nous avons donné des conditions pour l'existence des $[1,2]$-ensembles indépendants pour tout graphe scindé G, aussi dans les chenilles. Ensuite, nous avons donné des bornes sur $\alpha_{[1,2]}(G)$ et $i_{[1,2]}(G)$ en fonction de n, m, δ et Δ. A la fin, nous avons donné des relations de type Nordhaus–Gaddum sur $\alpha_{[1,2]}(G)$. Les travaux réalisés dans ce mémoire ouvrent plusieurs perspectives. On pose ces problèmes pour les recherches futur.

1. Chercher des conditions pour l'existence des $[1,2]$-ensembles indépendants pour certaines classes de graphes.
2. Chercher d'autres bornes sur $\alpha_{[1,2]}(G)$ et $i_{[1,2]}(G)$, pour tous graphes G.
3. Chercher des algorithmes linéaires pour déterminer $\alpha_{[1,2]}(T)$ et $i_{[1,2]}(T)$ pour tout arbre T ?

Bibliographie

[1] C. Berge,*Graphs and Hypergraphs.* (*North Holland, Amsterdam,* 1973).

[2] F. Beggas, V. Turau, M. Haddad and H. Kheddouci, $[1,2]$-*Domination in generalized Petersen graphs*, Discrete Math. Algorithms and Appl. 11 (5) (2019) 1950058.

[3] M. Chellali, T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi and A. McRae, $[1,2]$-*sets in graphs*, Disc. Appl. Math., 161 (18) (2013) 2885–2893.

[4] M. Chellali, O. Favaron, T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and A. McRae. *Independent* $[1,k]$-*sets in graphs*, Australasian Journal of Combinatorics 59(1) (2014) 144–156.

[5] O. Favaron, *Two relations between the parameters of independence and irredundance,* Discrete Math. 70(1988) 17-20.

[6] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.

[7] X. Yang and B. Wu, $[1,2]$-*domination in graphs,* Disc. Appl. Math., 175 (2014) 79–86.