République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministére de l'Enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Yahia Farès de Médéa
Faculté des Sciences
Département des Mathématiques et de L'informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse et Modélisation Mathématique

par

Brahimi Ossama

EXISTENCE DE SOLUTIONS D'INCLUSIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES DE PREMIER ORDRE

Soutenu publiquement le 07 septembre 2017 devant le jury composé de

Président :	Maaloum.K	*M.A.A*	Université de Médéa
Examinateur :	Boukhari.A	*M.A.A*	Université de Médéa
Encadreur :	Mekdache.N	*M.A.A*	Université de Médéa

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2016-2017

Dédicace

∇

♠♡♢♣*Je dédie ce travail*

à mes très chers parents, dont

le sacrifice, la tendresse, l'amour, la patience,

le soutien, l'aide et les encouragements sont le secret de ma réussite.

Sans eux, je ne serais pas ce que je suis aujourd'hui. Je dédie ce travail également

à tout mes enseignants, du primaire au niveau supérieur.

A tous mes amis♠♡♢♣

$\int$

Brahimi Ossama

Remerciements

Louange à Allah,
le miséricordieux , sans Lui rien
de tout cela n'aurait pu être. Nous
remercions Allah qui nous a orienté
au chemin du savoir et les portes de la science. accordé
je remercie mon encadreur ***Mekdache Noureddine*** *, en premier pour*
ses encouragements et la confiance qu'il m'a accorder et
d'avoir accepter de m'encadrer, ainsi pour ses conseils judicieux qui m'ont
été d'une très grande utilité et son suivi pour terminer ce travail.
Je tiens à remercier également les membres de
jury pour d'avoir accepté de jurer ce mémoire.
Mes remerciements les plus sincères sont
adressés à mes enseignants, qui ont
contribué durant nos études à
notre formation et tous les
enseignants de l'Université
YAHIA Farès de Médéa
Enfin, merci à
ma famille, pour son
amour et son soutien
constant.

Résumé

Dans ce mémoire, on a étudié l'existence de solution d'inclusion différentielle ordinaire de première ordre (problème de Cauchy), on utilisant quelque applications de méthodes topologiques et plusieurs théorèmes (théorèmes d'existences de sélection continue d'un multifonction, théorèmes de Cauchy-Lipschitz...), et on a deux cas de multifonctions sont distinguées (multifonction sci, multifonction scs), et on étudie l'existence de solutions d'inclusion différentielle ordinaire de première ordre dans l'espace $\mathbb{R}^n$et dans l'espace de Hilbert, et enfin dans l'espace de Banach de dimension finie.

Mots-clés :

Problème de Cauchy, Inclusion différentielle ordinaire, Multifonction, Sélection, Scs, Sci.

Abstract

In this dissertation, we study the existence of a first-order ordinary differential inclusion solution (Cauchy problem), and we use some applications of topological methods and several theorems (theorems of existences of continuous selection of a multifunction, theorems Of Cauchy-Lipschitz ...), and we have two cases of multifunctionals are distinguished (multifunction usc, multifunction lsc), and we study the existence of solutions of differential inclusion of first order in the space $\mathbb{R}^n$ and in the Hilbert space, and at the end in the Banach space of finite dimension.

Key word :

Cauchy Problem, Ordinary Differential Inclusion, Multifonction, Selection, Usc, Lsc.

Table des matières

Résumé 4

Introduction 9

1 Quelque outils de mathématique 12

1.1 Les opérateurs sur les espaces de Banach 12

1.1.1 Continuité des opérateurs 14

1.2 Multifonction 15

1.2.1 Fonctions à valeurs multiples ou multifonctions 15

1.2.2 Concepts de continuité pour les multifonctions 16

1.2.3 Multifonctions Lipschitziennes 18

1.2.4 Multifonction fermées-compacts 18

1.2.5 Multifonctions convexes 19

1.2.6 Quelques propriétés des multifonctions convexes 19

1.3 Quelque théorèmes et définitions 20

2 Problème de Cauchy d'équation différentielles ordinaire de premier ordre 23

2.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaire de première ordre 23

2.1.1 Théorème d'existence et d'unicité 1 25

2.1.2 Théorème d'existence et d'unicité 2 28

2.2 La relation entre l'inclusion différentielle et l'équation différentielle . . . 29

3 Théorèmes d'existence de solutions d'inclusion différentielles ordinaire de premier ordre 31

3.1 Les sélections d'une multifonction 31

3.2 Existence de solution d'inclusion différentielle ordinaire de première ordre 39
3.2.1 Cas de muttifonction sci 39
3.2.2 Cas de multifonction scs 40
3.3 Inclusions différentielles dans les espaces de Banach 41

Conclusion **44**

Notation

$\mathbb{R}$	l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$	l'ensemble des nombres entiers naturels.
$\overline{U}$	fermeture de sous-ensemble$U$.
∂U	frontière de cette sous-ensemble$U$.
$\|x\|_0$	$\max\{\|x(t)\| : t \in I\}$.
$C^k(I,E)$	l'espace de Banach des fonctions k-fois continûment différentiables, muni de la norme : $\|x\|_k = max\{\|x\|_0, ...\|x^{(k)}\|_0\}$.
$C_0^k(I,E)$	$\{x \in C^k(I,E) : x(t_0) = x_0,$ (la fonction x vérifier la condition initiale)$\}$.
$\mathcal{L}(J,X)$	l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J de $\mathbb{R}$ dans l'espace de Banach X.
L^p	L'espace de Lebesgue, de toutes les fonction mesurable et p-eme intégrables sur Ω.
$W^{1,p}$	L'espace de Sobolev.
$dom(F)$	Le domaine de définition de la multifonction$F$.
$Rang(F)$	Le rang de F est : $R(F) = F(X) = \bigcup_{x\in X} F(x)$ tel que $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction.
$Lip(f)$	La plus petite constante $M \geq 0$ vérifiant cette inégalité : $d'(f(x), f(y)) \leq Md(x,y), \forall x, y \in X$.
$e(A,B)$	$\sup_{x\in A} d(x,B)$, $d(x,B) = \inf_{y\in B} d(x,y)$.
$e(B,A)$	$\sup_{y\in B} d(y,A)$, $d(y,A) = \inf_{x\in A} d(y,x)$.
d_H	distance de Hausdorff.
$\vartheta(x_0)$	l'ensemble des voisinages ouverts dex_0.

X'	L'espace dual de X.
$B(X,Y)$	l'ensemble des applications linéaires et bornées de X de$Y$
$P(B)$	l'ensemble des parties de$B$.
$graph(F)$	le graph de la multifonction$F$.
$<,>$	produit scalaire dans la dualité$E^{'}, E$.
scs	semi-continue supérieurement.
sci	semi-continue inférieurement.
$p.p.$	presque partout.
$i.e$	c'est-à-dire.

Introduction

Le problème d'existence de solution d'inclusion différentielles est une partie de mathématique basée sur le problème d'existence de sélections continue de la multifonction étudie, et résoud le problème de Cauchy classique.

Le problème d'existence de solution d'inclusion différentielles dans sa généralité a été étudier à partir des années 1980 par différents mathématiciens, en particulière cette proche de mathématique est développées par Daccrogna-Marcellini et par Muller-Svernk.

Dans ce mémoire, on présente quelques méthodes topologiques, pour étudier l'existence de solution de problème de Cauchy d'inclusion différentielles ordinaire de premier ordre suivant :

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t, x(t)). \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{0.1}$$

où $x(t)$ est une fonction continument dérivable qu'on cherche, et F est une multifonction (multivoque ou fonction à valeur multiple...) et t variable d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Le principe de ce travaille est appliqué des théorèmes pour que la multifonction F admet une sélection continue, en utilisant deux théorèmes principales, le premier théorème (théorème 3.2.1) pour le cas F est sci d'espace $\mathbb{R}^n$, ce théorème est basé sur le théorème de sélection de Michael, et le deuxième théorème (théorème 3.2.2) pour le cas F est scs d'espace de Hilbert, ce théorème et basé sur le théorème de sélection approximative.

Donc si la multifonction F admet une sélection continue alors le problème précédent est de la forme suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \in F(t, x(t)). \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{0.2}$$

où f est une sélection continue de la multifonction F. Pour que le problème devient un problème de Cauchy d'équation différentielle d'espace $\mathbb{R}^n$ et d'espace de Hilbert.

En fin, on résoud le problème de Cauchy d'inclusions différentielles ordinaires de premier ordre d'espace de Banach.

Ce mémoire est constitué de trois chapitres répartis comme suit :

Chapitre 1 : C'est un rappel de quelques définitions et notions de base de l'analyse fonctionnelle(espaces,opérateurs, Multifonction...).

Dans ce texte, on présente quelques applications de méthodes topologiques permettant d'obtenir l'existence de solutions d'inclusions différentielles ordinaires de premier ordre.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre sont présentés et étudies l'existence et l'unicité de solution de problème de Cauchy d'équation différentielle ordinaire de premier ordre d'espace $\mathbb{R}^n$ et dans l'espace de Banach (théorème de Cauchy-Lipschitz), avec un rappel sur les équations différentielle ordinaires de premier ordre (quelques définitions et remarques).

Et enfin donner la relation entre l'équation différentielle et l'inclusion différentielle.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre sont présentés, discutés et commontés les résultats sur l'existence de solutions de problème de Cauchy d'inclusions différentielles ordinaire de premier ordre, et on a deux cas des multifonction à valeurs non vide, fermés et convexes, 1^{er} cas F est sci dans l'espace $\mathbb{R}^n$ et 2^{me} cas F est scs dans l'espace de Hilbert pour l'inclusion différentielle suivant :

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t, x(t)). \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{0.3}$$

Et enfin on étudié l'existence de solution d'inclusion différentielle dans l'espace de Banach.

Chapitre 1

Quelque outils de mathématique

1.1 Les opérateurs sur les espaces de Banach

Soit X et Y,deux espaces de Banach

Définition 1.1.1 *Soit $(x_n)_n$ une suite de X et $x_0 \in X$.*

On dit que $(x_n)_n$ converge vers x_0 (en norme) si

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n - x_0\|_X = 0,$$

et on écrit $x_n \longrightarrow x_0$ dans X.

Soit $\mathcal{L}(J, X)$ l'espace des fonctions continues d'un intervalle compact J de $\mathbb{R}$ dans l'espace de Banach X et soit K un sous ensemble de $\mathcal{L}(J, X)$.

Définition 1.1.2 *(Ensemble équicontinu)*

K est dit équicontinu si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall t_1, t_2 \in J, \|t_1 - t_2\| \leq \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon\ \forall f \in K.$$

Définition 1.1.3 *(Ensemble uniformément borné)*

K est dit uniformément borné si :

$$\exists\, c > 0 :\ \|f(t)\| \leq c\ \forall t \in J\ et\ \forall\ f \in K.$$

Définition 1.1.4 *(Ensemble relativement compact)*

K est dit relativement compact si $\overline{K}$(adhérence de K) est compact.

Théorème 1.1.1 *(Ascoli-Arzela)voir [3]*

K est relativement compact si et seulement si :

1. K est uniformément borné ;

2. K est équicontinu

Définition 1.1.5 ***(Opérateur borné)***

On dit qu'un opérateur $T : X \to Y$ est borné si l'image de tout borné dans X par T est un borné de Y . i.e : pour tout ensemble D borné dans X ,T (D) est borné dans Y.

On note $B(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires et bornées de X dans Y . Le cas $Y = \mathbb{R}$ est très important par la suite.

Soit T' un opérateur défini d'un espace de Banach X dans lui- même.

Définition 1.1.6 *(Opérateur compact)*

L'opérateur T' est dit compact si l'image de X par T', i.e. l'ensemble $T'(X)$ est relativement compact.

Définition 1.1.7 *(Opérateur totalement borné)*

L'opérateur T' est dit totalement borné si pour tout sous ensemble borné B de l'espace X, l'image de B par T', i.e. l'ensemble $T'(B)$ est relativement compact.

Définition 1.1.8 *(Opérateur complètement continu)*

L'opérateur T' est dit complètement continu s'il est continu et totalement borné.

Définition 1.1.9 ***(Espace dual)***

La classe des fonctionnelles linéaires et bornées définies sur X,sera noté par X'. On munit X' de la norme

$$\|J\|_{X'} = \sup_{x \in X, \|x\|_X \leq 1} | < J, x > |$$

Pour $J \in X'$, X' muni de cette norme est un espace de Banach et nous avons l'inégalité

$$| < J, x > | \leq \|J\|_{X'} \|x\|_X, \forall J \in X', \forall x \in X$$

Définition 1.1.10 ***(Convergence faible)***.

On dit qu'une suite $(x_n) \subset X$ converge faiblement vers x,si

$$\forall J \in X', < J, x_n > \longrightarrow < J, x >$$

Et on écrit $x_n \rightharpoonup x$.

Définition 1.1.11 *Soit X un espace de Banach. On dit que X est réflexif s'il est le dual de son dual.*

Théorème 1.1.2 *voir [4]*

Un espace de Banach X est réflexif si et seulement si sa boule fermée et faiblement compacte.

Corollaire 1.1.1 *Si X est un espace de Banach réflexif alors toute suite bornée $(x_n) \subset X$ avec $\|x_n\|_X \leq M$,contient une sous suite qui converge faiblement vers un élément $x \in X$ vérifiant $\|x\|_X \leq M$.*

Corollaire 1.1.2 *Soit X un espace de Banach. Alors X est réflexif si et seulement si X' est réflexif.*

1.1.1 Continuité des opérateurs

Nous allons considérer des opérateurs T de X dans Y et nous allons donner une définition concernant les propriétés de la continuité de T . La notion la plus simple est la suivante :

Définition 1.1.12 *L'opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est dit continu en $x \in X$,si pour toute suite $(x_n) \subset X$ telle que*

$$x_n \longrightarrow x \text{ alors } T(x_n) \longrightarrow (x).$$

T est dit continu sur un ensemble $A \subset X$ si T est continu en tout point $x \in A$.

Définition 1.1.13 *Un opérateur $T : X \longrightarrow Y$ est dit compact s'il est continu et a la propriété : Pour toute suite $(x_n)_n$ bornée dans X, la suite $(T(x_n))$ admet une sous suite convergente .*

Remarque 1.1.1 *Si T est un opérateur linéaire alors, le fait que T est continu sur X (qui est équivalent au fait que T est une application bornée de X dans Y) est superflue.*

Dans la plus part des livres, le concept défini précédemment est appelé complète continuité (on dit que l'opérateur est complètement continu).

1.2 Multifonction

1.2.1 Fonctions à valeurs multiples ou multifonctions

Définition 1.2.1 *Soient A et B deux ensembles,une multifonction F de A vers B noteé $F : A \rightrightarrows B$ est une fonction qui associé à chaque point de A une partie de B.*

Donc $F : A \longrightarrow P(B)$ où $P(B)$ l'ensemble des parties de B.

a)Les ensembles $F(A)$ appelés les images ou les valeurs de F.

b)Le domaine de F est l'ensemble :

$$dom(F) = \{x \in A / F(x) \neq \varnothing\}.$$

*c)Si $dom(F) = A$, on dit que F est **strict**,on dit aussi dans ce cas F est à valeur non vide.*

*d)On dit que F est **propre** si $dom(F) \neq \varnothing$.*

e)Soit K une partie non vide de X et $F : K \rightrightarrows Y$ à valeurs non vide,on définit l'extension $F|_K : X \rightrightarrows Y$ par :

$$F|_K(x) = \begin{cases} F(X) & si \quad x \in K \\ \varnothing & si \quad x \notin K \end{cases}$$

On a donc $dom(F|_K) = \{x \in X / F(x) \neq \varnothing\} = K$.

f)Le graph d'une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ est :

$$graph(F) = \{(x, y) \in X \times Y / y \in F(x)\}.$$

g)Le rang de F est :

$$Rang(F) = R(F) = F(X) = \bigcup_{x \in X} F(x)$$

Ainsi si $A \subset X$:

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$$

h)La multifonction inverse $F^{-1} : R(X) \subset Y \rightrightarrows X$ de F est définie par :

$$F^{-1}(y) = \{x \in X / y \in F(x)\}.$$

1.2.2 Concepts de continuité pour les multifonctions

Définition 1.2.2 *(distance de Hausdorff)*

la distance de Hausdorff sur l'ensemble des fermés d'un espace métrique (X,d) est donnée par :

$$d_H(A, B) = max\{e(A, B), e(B, A)\}$$

et

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B) \ \ , d(x, B) = \inf_{y \in B} d(x, y)$$

$$e(B, A) = \sup_{y \in B} d(y, A) \ \ , d(y, A) = \inf_{x \in A} d(y, x)$$

Définition 1.2.3 ***(espace séparé)(e.Hausdorff)***

X est un espace séparé si :

$$\forall x, y \in X : x \neq y. \exists U_x \in \vartheta(x); \exists U_y \in \vartheta(y)$$

tel que :

$$U_x \cap U_y = \varnothing$$

Définition 1.2.4 ***(espace séparable)***

On dit qu'un espace topologique (X, τ) est séparable s'il contient une partie A au plus dénombrable qui est dense dans X.

Définition 1.2.5 ***(continuité d'un espace topologique)***

X espace topologique, f est continue en $x_0 \in X$ si :

$$\forall V \in \vartheta(f(x_0)), \exists U \in \vartheta(x_0) \text{ tel que } f(U) \subset V.$$

Définition 1.2.6 *(**continuité d'un espace métrique**)*

Soient (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction.

On dit que f est continue en un point $a \in X$, si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, d(x,a) \leq \delta \Rightarrow d'(f(x), f(a)) \leq \varepsilon.$$

Définition 1.2.7 *(Fonctions Lipschitziennes, contractantes)*

Soient $(X,d),(Y,d')$ deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction. On dit que f est Lipschitzienne sur X,s'il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$d'(f(x), f(y)) \leq Md(x,y), \forall x, y \in X.$$

On dit aussi que f est M-Lipschitzienne.

La plus petite constante M vérifiant cette inégalité est appelée la constante de Lipschitz de f,notée $Lip(f)$ et vérifie

$$Lip(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d'(f(x), f(y))}{d(x,y)}.$$

On dit que f est contractante si elle vérifie $Lip(f) < 1$.

Lemme 1.2.1 *(Un espace métrique compact est sépaprable)*

Soit E un espace métrique compact.

Alors il existe une partie dénombrable D dans E tel que $D = E$ (on dit que E est séparable).

Proposition 1.2.1 *– Toute fonction uniformément continue est continue.*

– Toute fonction Lipschitzienne est uniformément continue et donc continue.

– Pour tout point $a \in X$,la fonction $x \in X \longmapsto d(x,a)$ est 1-Lipschitzienne,donc en particulier continue.

– Pour toute partie A non vide de X, l'application $x \longmapsto d(x,A)$ est 1-Lipschitzienne.

Définition 1.2.8 *(multifonction semi-continue supérieurement)*

Une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ est appelée semi-continue supérieurement (scs) en x_0, si pour tout ouvert V contenant $F(x_0)$, il existe un voisinage ouvert de x_0 tel que

$$\forall x \in U, F(x) \subset V.$$

F est semi-continue supérieurement en X si elle est scs. en tout point de X.

Définition 1.2.9 *(multifonction semi-continue inférieurement)*

Une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ est dite semi-continue inférieurement (sci) en $x_0 \in X$ si pour chaque ouvert V au voisinage de $F(x_0)$ tq :

$$F(x_0) \cap V \neq \varnothing$$

Il existe un un ouvert U de X contenant x_0 tel que

$$F(x) \cap V \neq \varnothing, \forall x \in U.$$

On dit que F est sci. sur X si elle est sci en tout point de x.

Définition 1.2.10 ***(continuité pour les multifonctions)***

Soit $F : X \rightrightarrows Y$.une multifonction Où X et Y sont deux espaces métriques,

On dit que F est continue en x si elle est à la fois semi-continue supérieurement et semi-continue infèrieurement en x.

On dit que F est continue sur X si elle est continue en tout point $x \in X$.

1.2.3 Multifonctions Lipschitziennes

Définition 1.2.11 *Soient X, Y deux espaces métriques et F une multifonction de X dans Y.*

On dit que F est Lipschitzienne de constante k sur X si

$$\forall x, x' \in X, F(x) \subset B(F(x'), k \times d(x, x')).$$

On dit que F est localement Lipschitzienne de constante k sur X si

$$\forall x \in X, \exists U \in \vartheta(x') \text{ telle que } F \text{ est } k\text{-Lipschitzienne sur } X.$$

1.2.4 Multifonction fermées-compacts

Définition 1.2.12 *Une multifonction $F : X \rightrightarrows Y$ est dite fermée en point $x \in dom(F)$ si pour toute suite (x_n) convergent vers x et pour toute suite (y_n) convergeant vers y telle que :*

$$\text{pour tout } n \in N, y_n \in F(x_n), \text{ on ait } y \in F(x).$$

Remarque 1.2.1 *Si F est fermée en x, alors F(x) est fermé.*

Soit X un espace vectoriel normé. Une multifonction $F : X \rightrightarrows X$ est dite compacte (resp.borné) si son image est compacte (resp.borné).

Elle est dite localement compacte (resp.localement borné) si $\forall x \in dom(F)$, il exite un voisinage U de x tel que la restriction de F sur U soit compacte (resp.borné).

1.2.5 Multifonctions convexes

Définition 1.2.13 ***(fonction convexe)***

On dit qu'une fonction f est convexe sur un intervalle I si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

On dit qu'une fonction f est concave sur un intervalle I si et seulement si $-f$ est convexe.

Définition 1.2.14 *Soient X et Y deux espaces normés et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-fonction.*

· *F est dite convexe si F (x) est convexe, pour tout $x \in X$.*

· *F est dite bornée s'il existe une constante $C > 0$ de telle sorte que*

$$\|F(x)\| \leq C(1 + \|x\|).$$

où

$$\|F(x)\| = \sup_y \{\|y\| : y \in F(x)\}.$$

1.2.6 Quelques propriétés des multifonctions convexes

· Une multifonction F est convexe si son graphe est convexe.

· Une multifonction F est fermée si son graphe est fermé.

· Le domaine d'une multifonction scs est fermé.

Remarque 1.2.2 *Soient E et E_1 des espaces de Banach séparables, X un sous-ensemble fermé, non vide de E_1 , et T un espace mesurable. Soient $G : T \to E$ et $H : X \to E$ deux fonctions multivoques à valeurs fermées, non vides.On dira que*
1) G est mesurable si $\{t \in T : G(t) \cap B \neq \varnothing\}$ est mesurable pour tout $B \subset E$ fermé ;

2) H est semi-continue supérieurement (scs) si $\{x \in X : H(x) \cap B \neq \varnothing\}$ est fermé pour tout $B \subset E$ fermé ;

3) H est semi-continue inférieurement (sci) si $\{x \in X : H(x) \subset B\}$ est fermé pour tout $B \subset E$ fermé ;

4) H est continue si elle est semi-continue inférieurement et supérieurement ;

5) H est lipschitzienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$D(H(x), H(y)) \leq C\|x - y\| \text{ pour } x, y \in X;$$

6) H est contractante si H est lipschitzienne avec une constante $C < 1$.

7) H est dite complètement continue si $H(B)$ continue et relativement compact pour tout ensemble B borné de X.

1.3 Quelque théorèmes et définitions

Théorème 1.3.1 *(théorème de convergence)voir [1]*

Soit F une multifonction semi continue propre d'un espace de Hausdorff X localement convexe aux sous-ensembles convexes fermés d'un espace de Banach Y.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_k et y_k deux fonctions mesurables de I á X et Y satisfaisant respectivement, pour presque tout $t \in I$, pour chaque voisinage ϑ de 0 dans $X \times Y$ $\exists k_0 = k_0(t, \vartheta)$ tel que :

$$\forall k > k_0, (x_k(t), y_k(t)) \in graph(F) + \vartheta.$$

1) $x_k(\cdot)$ converge presque partout vers une fonction $x(\cdot)$de I à X.

2) $y_k(\cdot) \in L^1(I, Y)$ et converge faiblement vers $y(\cdot)$ dans $L^1(I, Y)$.

Alors pour presque tout $t \in I$

$$(x(t), y(t)) \in graph(F), \quad i.e. \quad y(t) \in F(x(t)).$$

Théorème 1.3.2 *voir [1]*

Soit X un espace de Banach et soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\mathcal{L}(J, X)$ l'espace des fonctions continues de J à X fourni avec la topologie de la convergence uniforme sur les sous-intervalles compacts de J.

En suite un sous-ensemble K de $\mathcal{L}(J,X)$ satisfaisant

1)K est equicontinue,

2)$\forall t \in J,\ \ K(t) = \{x(t)\}_{x(\cdot)\in K}$ est paracompacte dans $\mathcal{L}(J,X)$.

Définition 1.3.1 *Soit X un espace topologiques et $(c_i)_{i\in I}$ une famille de parties de X la famille $(O_i)_{i\in I}$ est dite recouvrement de X si $\bigcup_{i\in I} o_i = X$*
Un recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ de X est dit recouvrement ouvert si c_i est un ouvert, $\forall i \in I$
Un recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ de X est dite fini si I est fini
Un recouvrement $(O_j)_{j\in J}$ est dite sous recouvrement de $(O_i)_{i\in I}$ si $J \subset I$

Définition 1.3.2 *(rafinement)*

Un recouvrement $(U_l)_{l\in L}$ est dit rafinement d'un recouvrement $(O_i)_{i\in I}$ si :

$$\forall l \in L, \exists i \in I, U_l \subset O_i$$

Une famille $(O_i)_{i\in I}$ de parties de X est dite localement fini si pour tout V_x de x tel que :

$$\{i \in I \setminus O_i \cap V_x \neq \emptyset\}$$

Est fini.
On remarque que si $(O_i)_{i\in I}$ est localement fini, alors pour tout $x \in X$, $\{i \in I \setminus x \in O_i\}$ est fini, on dit que $(O_i)_{i\in I}$est point fini.

Définition 1.3.3 *Un espace topologique X est dit paracompact si tout recouvrement ouvert de X admet un rafinement ouvert et localement fini.*

Proposition 1.3.1 *1) tout fermé d'un paracompact est paracompact.*
2) tout espace compact est paracompact.
3) tout espace métrique est paracompact.

Définition 1.3.4 *(Support de fonction)*

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et f une fonction définit de Ω dans $\mathbb{R}$. Le support de f est :

$$supp(f) = \overline{\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}}.$$

Définition 1.3.5 *(Partition de l'unité lipschitzienne.)*

Une famille $(g_i)_{i\in I}$ de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ est dit partition de l'unité lipschitzienne si :

1) g_i est localement lipschitzienne à valeurs positives, $\forall i \in I$.

2) La famille $\{supp(g_i)/i \in I\}$ est un recouvrement fermé localement fini de X.

3) $\sum_{i\in I} g_i(x) = 1, \forall x \in X$.

Remarque 1.3.1 *On dit que la partition de l'unité lipschitzienne $(g_i)_{i\in I}$ est subordonnée à un recouvrement $(W_i)_{i\in I}$ de X si :*

$$supp(g_i) \subset W_i, \forall i \in I.$$

Chapitre 2

Problème de Cauchy d'équation différentielles ordinaire de premier ordre

Dans ce chapitre, nous vous rappellerons sur les équations différentielles ordinaires de première ordre, et on étudie l'existence et l'unicité de solution de problème de Cauchy d'équation différentielle ordinaire de premier ordre dans l'espace de $\mathbb{R}^n$ et dans l'espace de Banach et sa relation avec le problème de Cauchy d'inclusion différentielle ordinaire de premier ordre.

2.1 Rappel sur les équations différentielles ordinaire de première ordre

Soit $J \in E$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $\Omega \subset E$ un ouvert d'un espace de Banach E.

Définition 2.1.1 *Si f est une application continue donnée sur $J \times \Omega$, on appelle équation différentielle (sous forme normale) l'équation notée :*

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{2.1}$$

L'inconnue de cette équation est une fonction $x = g : \begin{cases} J \to E \\ t \mapsto x(t) = g(t) \end{cases}$

qui vérifier :

$$g'(t) = f(t, g(t)).$$

Définition 2.1.2 *(solution de l'équation différentielle.) Une solution de l'équation différentielle (2.1) est une fonction $g : J \to E$ définie et continument dérivable sur J telle que :*

1- $\forall t \in J,\ (t, g(t)) \in J \times \Omega$ *(domaine de définition de f), et*

2- $\forall t \in J,\ g'(t) = f(t, g(t))$*(équation).*

En particulier, on n'oubliera pas de vérifier la première condition (sinon $f(t, g(t))$ n'est pas défini).

Définition 2.1.3 *(Solution maximale) On appelle solution maximale une solution g de (2.1) telle que J soit intervalle maximale , i.e. telle que $g : J \to E$ soit solution et telle qu'il n'existe pas d'intervalle $I \supsetneq J$ (strictement plus grand que J) sur lequel g soit solution.*

Définition 2.1.4 *(Condition initiale.) On appelle condition initiale de l'équation différentielle (2.1) une valeur $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$ telle que l'inconnue cherchée satisfasse à la condition $g(t_0) = x_0$.*

Définition 2.1.5 *(Problème de Cauchy.) Une équation différentielle avec condition initiale s'appelle problème de Cauchy.*

Un problème de Cauchy est donc un problème où, pour $f \in C^0(J \times \Omega; E), t_0 \in J$ et $x_0 \in E$ donnés, il faut trouver une (ou les) solution(s) x de :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

i.e. il faut trouver une (ou des) fonctions(s) g telles que :

$$\begin{cases} g'(t) = f(t, g(t)), \\ g(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

Définition 2.1.6 *(solution unique)*

Pour $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$ donné, une solution du problème (2.2) est dite unique si elle coïncide avec toute autre solution partout où elles sont toutes les deux définies.

Proposition 2.1.1 *Pour tout $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$, le problème (2.2) est équivalent à l'équation intégrale*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Définition 2.1.7 *Soit x une solution de l'équation (2.1) et $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle sur lequel x est définie.*

- Une fonction x est appelée prolongement de x si elle est définie sur un intervalle $\tilde{J}$ contenant strictement J, coïncide avec x sur J, et vérifie la relation (2.1) sur $\tilde{J}$.

- La solution x est dite maximale (on dit aussi no prolongeable) si elle n'admet pas de prolongement ; c'est-à-dire que l'intervalle J est l'intervalle maximal d'existence de la solution x.

Corollaire 2.1.1 *Soient x une solution maximale de l'équation (2.1) et $J =]a, b[$ son intervalle maximal d'existence. Alors $(t, x(t))$ va vers le bord de $J \times \Omega$ lorsque t tend vers a et b.*

2.1.1 Théorème d'existence et d'unicité 1

On considérer le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{dx}{dt} = f(t, x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

où $f : U = J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, avec U ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et $(t_0, x_0) \in U$.

Théorème 2.1.1 *(Existence)voir [3]*

Soient $J \times \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. Pour tout $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$, le problème (2.4) admet au moins une solution.

Théorème 2.1.2 *(Unicité)voir [3]*

Soit $J \times \Omega$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Si $f = f(t, x) : J \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ est continue et localement lipschitzienne en x, alors pour tout $(t_0, x_0) \in J \times \Omega$, le problème(2.4) admet une solution unique.

Définition 2.1.8 *(cylindre de sécurité)*

Soient $T > 0$ et $r_0 > 0$. On dit que $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}(x_0, r_0)$ est un cylindre de sécurité pour (C) si toute solution $x : I \to \mathbb{R}^n$ du problème de Cauchy $x(t_0) = x_0$ avec $I \subset [t_0 - T, t_0 + T]$ reste contenue dans $\overline{B}(x_0, r_0)$.

Théorème 2.1.3 *(Picard)voir [6]*

Soient (E, d) un espace métrique complet et $g : E \to E$ une application contractante, i.e. Lipschitzienne de rapport $k < 1$.

Alors, g admet un unique point fixe $a \in E$. De plus, pour tout point initial $x_0 \in E$, la suite itérée $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$, avec $x_0 \in E$ quelconque et $x_{p+1} := g(x_p)$ converge vers a.

Théorème 2.1.4 *(Cauchy-Lipschitz dans l'espace $\mathbb{R}^n$.)voir [9]*

Si f est continue sur U, et localement lipschitzienne en x i.e. pour tout $(t_1, x_1) \in U$, il existe $V \in \vartheta(x_1)$ et $W \in \vartheta(t_1)$, et il existe $k > 0$, tels pour tous $x, y \in V$ et tout $t \in W$

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \|x - y\|$$

Alors le problème (2.4) admet une unique solution maximale.

Preuve.

Remarquons que, comme f est continue, x est solution de (2.4) sur I si et seulement si pour tout $t \in I$,

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \tag{2.5}$$

soient $V \in \vartheta(x_0), W \in \vartheta(t_0)$ et $k > 0$ comme dans l'énoncé du théorème.

Notons $M = \sup_{W\times V} f$. Plaçons-nous sur un cylindre de sécurité : soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, r) \subset V$, et soit $T > 0$ tel que $T \leq \frac{r}{M}$, et $[t_0 - T, t_0 + T] \subset W$. Soit F^0 l'ensemble des fonctions continues de $[t_0 - T, t_0 + T]$ dans $\overline{B}(x_0, r)$. Alors F^0, muni de la norme uniforme, est un espace complet.

Soit A l'opérateur sur F^0 défini par

$$A(y)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds.$$

Le fait d'avoir choisi $T < \frac{r}{M}$ assure que si $y \in F^0$, $A(y)$ est encore dans F^0. L'équation intégrale (2.5) affirme en outre qu'une fonction x de classe C^1 est solution de (2.4) si et seulement si elle est point fixe de A. Cherchons donc à appliquer un théorème de point fixe.

Soient $y, z \in F^0$. Montrons par récurrence que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall t \in [t_0 - T, t_0 + T], \|A^p(y)(t) - A^p(z)(t)\| \leq \frac{k^p |t - t_0|^p}{p!} \|y - z\|_\infty.$$

Cette égalité est vérifiée pour $p = 0$, par définition de $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ on a

$$\begin{aligned}
\|A^{p+1}(y)(t) - A^{p+1}(z)(t)\| &\leq |\int_{t_0}^{t} \|f(s, A^p(y)(s)) - f(s, A^p(z)(s))\| ds| \\
&\leq |\int_{t_0}^{t} k\|A^p(y)(s) - A^p(z)(s)\| ds| \quad \text{(f localement lipschitzienne.)} \\
&\leq \int_{t_0}^{t} k \frac{k^p |t - t_0|^p}{p!} \|y - z\|_\infty dt \quad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{k^{p+1} |t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \|y - z\|_\infty,
\end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence.

En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tous $y, z \in F^0$,

$$\|A^p(y) - A^p(z)\|_\infty \leq \frac{k^p T^p}{p!} \|y - z\|_\infty.$$

Or, $\frac{k^p T^p}{p!}$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini, donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{k^p T^p}{p!} < 1$.

D'après le théorème du point fixe de Picard, A admet un point fixe x sur F^0. En outre, comme x et f sont continues,

$$t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)) ds$$

Est de classe C^1, et donc le point fixe x est de classe C^1.

Finalement, x est l'unique solution de (2.4) sur $[t_0 - T, t_0 + T]$.

Elle se prolonge en au moins une solution maximale. Supposons qu'il existe deux tels prolongements x_1 et x_2 sur deux intervalles I_1 et I_2. L'intervalle $I_1 \cap I_2$ est non vide, puisqu'il contient $[t_0 - T, t_0 + T]$. Soit I_{max} le plus grand intervalle inclus dans $I_1 \cap I_2$, contenant $[t_0 - T, t_0 + T]$, tel que $x_1 - x_2$ soit nulle sur I_{max}. Cet intervalle est nécessairement fermé puisque $x_1 - x_2$ est continue. S'il n'est pas égal à $I_1 \cap I_2$ tout entier, en l'une de ses bornes, on peut appliquer l'unicité locale précédemment démontrée , et contredire la maximalité de I_{max}. Donc $I_{max} = I_1 \cap I_2$, ainsi x_1 et x_2 sont égales sur $I_1 \cap I_2$, et par définition de solution maximale, $I_1 = I_2 = I_1 \cap I_2$.

Finalement, x se prolonge en une unique solution maximale, ce qui conclut.

■

2.1.2 Théorème d'existence et d'unicité 2

Soit $J \in E$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $\Omega \subset E$ un ouvert d'un espace de Banach E.

On considérer le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.6}$$

Théorème 2.1.5 *(Cauchy-Lipschitz dans l'espace de Banach.)voir [10]*

Si $f : (t,x) \in J \times \Omega \to f(t,x) \in E$ est continue et localement lipschitzienne en x uniformément en t, et si (t_0, x_0) est un point intérieur à $J \times \Omega$, alors il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que le problème de Cauchy (2.6) ait une solution unique maximale dans $[t_0 - \alpha, t_0 + \beta]$.

Si $f : (t,x) \in \mathbb{R} \times \Omega \to f(t,x) \in E$ est continue et globalement lipschitzienne en x uniformément en t, alors il existe une unique solution g au problème de Cauchy (2.6) définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Preuve. Si on a une solution g, on a :

$$g(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds \tag{2.7}$$

Soit alors la fonction $A(g)$ donnée par $A(g)(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds$. On a ainsi défini une fonctionnelle $A : g \to A(g)$. Soit $a > 0$ tel que $[t_0 - a, t_0 + a] \subset J$. Choisissons pour domaine de définition de A l'ensemble $C^0([t_0 - a, t_0 + a]; E)$ muni de sa norme $\| \cdot \|_\infty$ usuelle qui en fait un espace de Banach : $\|g\|_\infty = \sup\limits_{t \in [t_0 - a, t_0 + a]} \|g(t)\|_E$. Il est immédiat que si $g \in C^0$ alors $A(g) \in C^0$.

Montrons que A a un unique point fixe, i.e. qu'il existe une unique solution g de (2.7). On a :

$$\begin{aligned}\|(A(g)-A(h))(t)\|_E &= \|\int_{t_0}^{t}(f(s,g(s))-f(s,h(s)))ds\|_E \\ &\leq \int_{t_0}^{t} k_0\|g(s)-h(s)\|_E ds \\ &\leq ak_0\|g-h\|_\infty.\end{aligned}$$

Donc $\|(A(g)-A(h))(t)\|_\infty \leq ak_0\|g-h\|_\infty$, et choisissant $a < \frac{1}{k_0}$, la fonction A est contractante.

Donc elle a un et un seul point fixe. Il existe donc une solution unique g définie sur $[t_0-a, t_0+a]$ pour un a >0 (suffisamment petit).

Montrons que cette solution peut être prolongée en une solution maximale. On considère $A^2 = A\circ A$. On obtient :

$$\begin{aligned}\|(A^2(g)-A^2(h))(t)\|_E &\leq k_0\int_{t_0}^{t}\|A(g)(s)-A(h)(s)\|_E\, ds \\ &\leq k_0^2\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s}\|g(r)-h(r)\|_E\, dr\, ds \\ &\leq k_0^2\int_{t_0}^{t}(s-t_0)\|g-h\|_\infty\, ds \\ &\leq \frac{k_0^2|t-t_0|^2}{2}\|g-h\|_\infty.\end{aligned}$$

Et par récurrence, $\|A^p(g)-A^p(h)\|_\infty \leq \frac{k_0^p|t-t_0|^p}{p!}\|g-h\|_\infty$. D'où on peut choisir a aussi grand que souhaité, pour que, avec p assez grand on ait $\frac{k_0^p a^p}{p!} < 1$. Ainsi A^p est contractante et admet un unique point fixe. Mais A^p et A on nécessairement le même point fixe, qui est la limite de la suite $(A^{np}(g_0))$ pour un g_0 donné, et donc de la suite $(A^{np}(g_0)))$. Et donc le point fixe de A^p est celui de A, plus précisément est un prolongement du point fixe de A. Et on peut donc prolonger la solution g trouvée en une solution maximale.

■

2.2 La relation entre l'inclusion différentielle et l'équation différentielle

Et après avoir chercher beaucoup de références([1], [5]),ce genre de problèmes, apparaît dans les Articles de Zaremba (1936) et MARCHAUD (1938), sous une forme différente de celle présentée ici : sur le côté gauche, un "dérivé à valeurs multiples". C'était Wazewski

(1961) qui a montré que ces inclusions pouvaient être présentées en inclusions avec un dérivé unique à valeur régulière à gauche. La raison qui a conduit à leur introduction dans le monde mathématique n'est pas clair ; Il semble qu'il y n'était pas une véritable motivation des besoins de certains modèles ; plutôt, c'était leur intérêt comme des objets mathématiques qui ont surgi l'intérêt de quelques mathématiciens. Au début, c'était le problème de l'existence d'une solution au problème Cauchy qui a été considéré : montrer l'existence d'une fonction satisfaisant l'inclusion sur un intervalle I et tel que $x(t_0) = x_0$, avec t_0 donné dans I.(voir [5])

Ce qui se passe c'est que, dans le cas d'une inclusion, montrant l'existence d'une solution est (considérablement) plus difficile que de montrer l'existence d'une solution pour le cas d'une équation différentielle ordinaire

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(t, x(t))$$

Mais dans ce chapitre, nous avons abordé des preuves sur l'existence et l'unicité de problème de Cauchy d'équation différentielle ordinaire de premier ordre, Mais si nous remplaçons l'égalité par l'inclusion et remplacer le deuxième terme par multifonction nous obtenons un problème de Cauchy d'inclusion différentielle ordinaire de premier ordre, pour que la solution de ce problème soit prouvée de l'existence de sélection continue de la multifonction au deuxième terme.

Ensuite, nous résolvons le problème de Cauchy d'équation différentielle pour obtenir la solution du problème d'inclusion différentielle. Comme suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \in F(t, x(t)). \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

qui est un problème de Cauchy classique .

Dans le prochain chapitre, nous allons assigner certains cas pour lesquels le problème de Cauchy d'inclusion différentielle admet une solution.

Chapitre 3

Théorèmes d'existence de solutions d'inclusion différentielles ordinaire de premier ordre

Dans ce chapitre, on présente quelques méthodes topologiques per-mettant d'obtenir l'existence de solutions d'inclusions différentielles ordinaires de premier ordre telles que

$$\begin{cases} x^{'}(t) \in F(t, x(t)) \text{p.p.} t \in I, \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

3.1 Les sélections d'une multifonction

Soient X, Y deux ensembles et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction telle que

$$F(x) \neq 0 \ \ \forall x \in X.$$

Une sélection de F est une fonction

$$f : X \to Y \ \text{ telle que } \ f(x) \in F(x) \ \ \forall x \in X.$$

L'existence de sélection et garantie par l'axiome de choix.

Le problème est de savoir les conditions nécessaire ou suffisantes sur X et Y et F pour que F admet une sélection de bon qualité (continue, différentielle, mesurable,...)

Théorème 3.1.1 *(**Sélection minimale**)voir [1]*

Soient X un espace métrique et Y un espace de Hilbert et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction continue à valeurs fermés, convexes et non vides alors :l'application $f : x \to pr_{F(x)}(0)$ où : $pr_{F(x)}(0)$ est la projection orthogonale de 0 sur $F(x)$, est une sélection continue de F

$$f(x) = pr_{F(x)}(0) \in F(x)$$

Donc f est une sélection continue de F

Démonstration *voir [1]*

Théorème 3.1.2 *(**Sélection de Michael**)voir [1] Soient X un espace métrique et Y un espace de Banach et $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction sci à valeurs fermés, convexes et non vides . Alors F admet une sélection continue.*

Preuve. voir [1]

1 ère étape : pot tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction continue $f_\epsilon : X \to Y$ tel que $d(f_\epsilon(\xi), F(\xi)) < \epsilon \ , \forall \xi \in X$

En effet ; pour tout $x \in X$, soit $y_x \in F(x)$

on a $y_x \in B(y_x, \epsilon) \cap F(x) \neq \emptyset$. par la semi continuité inférieure de F, soit $\delta_x > 0$ tel que :

$$B(y_x, \epsilon) \cap F(x^{'}) \neq \emptyset, x^{'} \in B(x, \delta_x)$$

$(B(x, \delta_x))_{x \in X}$ est un recouvrement ouvert de X, soit alors $(u_x)_{x \in X}$ un recouvrement ouvert localement fini de X tel que $\overline{u}_x \subset B(x, \delta_x), \forall x \in X$

soit $(\prod_x)_{x \in X}$une partition de l'unité Lipschizienne subordonnée à $(u_x)_{x \in X}$, $supp \prod_x \subset u_x$

on définit $f_\epsilon : X \to Y$par

$$f_\epsilon(\xi) = \sum_{x \in X} \prod_x (\xi) y_x$$

montrons que f_ϵ est continue : soit $\xi_0 \in X$

soit O_{ξ_0} un voisinage ouvert de ξ_0 tel que O_{ξ_0} ne coup que : $u_{x_0}, u_{x_2}, ..., u_{x_n}$.

Si $x \in \{ x_1, ..., x_n\}$ alors $u_x \cap O_{\xi_0} \neq \emptyset$

comme $supp \prod_x \subset u_x$ alors, $\prod_\xi (x) = 0, \forall \xi \in O_{\xi_0}$

donc $f_\epsilon(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{x_i} (\xi) y_{x_i}, \forall \xi \in O_{\xi_0}$

donc la restriction de f_ξ sur O_{ξ_0} est une somme finie de fonctions continues, alors elle est continue sur O_{ξ_0}, donc f_ξ est localement continue, alors elle est continue sur tout X

Reste à démontrer que $d(f_\epsilon(\xi), F(\xi)) < \epsilon$, $\forall \xi \in X$

sont $\xi \in X$. si $\prod_x(\xi) \neq 0 alors$;

$$\xi \in supp \prod_x \subset B(x, \delta_x)$$

Alors $B(y_x, \epsilon) \cap F(\xi) \neq \emptyset$, donc $y_x \in B(F(\xi), \xi)$. comme $B(F(\xi), \xi)$ est convexe, car $F(\xi)$ est convexe, alors $f_\epsilon(\xi) = \sum_{x \in X} \prod_x(\xi) y_x \in B(F(\xi), \xi)$, donc $d(f_\epsilon(\xi), F(\xi)) < \epsilon$

2 ère étape :

On va démontre qu'il existe une suit de fonctions continues f_n de X dans Y tel que :

$$\begin{aligned} d(f_n(\xi), F(\xi)) &< \frac{1}{2^n}, \qquad \forall n \geqslant 1, \forall \xi \in X* \\ d(f_n(\xi), f_{n+1}(\xi)) &< \frac{1}{2^{n-2}}, \quad \forall n \geqslant 2, \forall \xi \in X** \end{aligned} \tag{3.2}$$

pour $n = 1$on applique la premier étape avec $\epsilon = \frac{1}{2}$ pour construire f_1, supposons que l'on construit f_n vérifiant (1) on va construire f_{n+1} vérifiant (*) et(**),soit $\xi \in X$, on pose :

$$\Phi(\xi) = B(f_n(\xi), \frac{1}{2^n}) \cap f(\xi)$$

-$\phi(\xi) \neq \emptyset$ d'après (1), $\phi(\xi)$ est un convexe

-ϕ est sci

on appliquant de nouveau l'étape soit $\phi : X \to Y$ continue tel que ;

$$d(\varphi(\xi), \phi(\xi)) < \frac{1}{2^{n+1}}, \forall \xi \in X$$

on pose : $f_{n+1} = \varphi$, pour $\xi \in X$;

$$d(f_{n+1}(\xi), F(\xi)) \leq d(f_{n+1}(\xi), \phi(\xi)) < \frac{1}{2^{n+1}}$$

ce qui preuve (1) pour prouver (2)

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\xi) \in B(\phi(\xi), \frac{1}{2^{n+1}}) &\subset B(B(f_n(\xi), \frac{1}{2^n}), \frac{1}{2^{n+1}}) \\ &= B(f_n(\xi), \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

donc : $d(f_n(\xi), f_{n+1}(\xi)) < \dfrac{1}{2^{n-1}} < \dfrac{1}{2^{n-2}}$

3 ème étape :

$(f_n)_n$ converge uniformément vers δ.

en effet

$$\begin{aligned} d(f_{n+p}(\xi), f_n(\xi)) &\leq \sum_{k=0}^{p-1} d(f_{n+k+1}(\xi), f_{n+k}(\xi)) \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^{n+k-2}} = \frac{1}{2^{n-2}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} \ \frac{1-(\frac{1}{2})^p}{1-\frac{1}{2}} \longrightarrow 0 \ \ lorsque \ \ n \to \infty \end{aligned} \tag{3.4}$$

donc uniformément de Cauchy, donc elle converge uniformément vers f.

comme les f_n sont continue alors f est continue

$$d(f_n(\xi), F(\xi)) < \frac{1}{2^n}$$

$$d(f(\xi), F(\xi)) = \lim_{n \longrightarrow \infty} (f_n(\xi), F(\xi)) = 0$$

comme $f(\xi)$ est fermé, alors $f(\xi) \in F(\xi)$ donc f est une sélection continue de F

■

Théorème 3.1.3 *(théorème de sélection approximatif)voir [1]*

Soit X un espace métrique, Y un espace de Banach, $F : X \rightrightarrows Y$ une multifonction scs à valeurs non vide et convexes. Alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe une fonction $f_\varepsilon : X \to Y$ localement lipschitzienne tel que :

$$f_\varepsilon(x) \subset conv(F(x)) \ et \ graph(f_\varepsilon) \subset graph(F) + \varepsilon B(0,1).$$

Preuve.

Soit $\varepsilon > 0, \forall x \ \exists \delta_x > 0$ tel que $F(x') \subset F(x) + \varepsilon B(0,1)$

$$\forall x' \in B(x, \frac{\delta_x}{4})$$

($V = F(x) + \varepsilon B(0,1)$ et $U = B(x, \frac{\delta_x}{4})$ car F est scs)

La famille $\{B(x, \delta_x)/x \in X\}$ est un recouvrement ouvert de l'espace métrique (donc paracompact) X.

sans perte de généralise, on peut suppose

$$\delta_x < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in X$$

Soit $\{U_i / i \in I\}$ une rafinement ouvert localement fini.

Soit $\{\Pi_i / i \in I\}$ une partition de l'unité localement lipschitzienne subordonnée à ce rafinement pour tout $i \in I$, on choisi $\overline{x_i} \in U_i$ et posent

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{i \in I} \pi(x) P_{F(\overline{x_i})}(0)$$

Et on démontrer que :

1) f_ε est bien défini.

2) f_ε est localement lipschitzienne.

3) $f_\varepsilon(x) \subset conv(F(x))$.

4) $(x, f_\varepsilon(x)) \in graph(F) + \varepsilon B(0,1)$

Donc on commence par le premier étape :

1) Pour $x \in X$, on a $A = \{i \in I / x \in U_i\}$ est fini donc

$$A = \{i_k / k = 1, ..., n\}$$

Comme $supp(\pi_i) \subset U_i$

Donc $\pi_i(x) = 0$ si $i \notin A$

Donc

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} \pi_{i_k}(x) P_{F(\overline{x_{i_k}})}(0)$$

Donc $f_\varepsilon(x)$ est définie pour $\forall x \in X$ et il est unique.

Donc f_ε est bien défini.

on commence par le deuxième étape :

2)Soit $x \in X$. Soit $V_x \in \vartheta(x)$ telle que :

$$B_x = \{i \in I V_x \cap U_i \neq \varnothing\} \text{ est fini}$$

.

On peut suppose que V_x est un ouvert et

$$B_x = \{i_k \ k = 1, ..., n\}.$$

On a

$$f_\varepsilon(z) = \sum_{k=1}^{n} \pi_{i_k}(z) P_{F(\overline{x_{i_k}})}(0); \forall z \in V$$

Soit $z_1, z_2 \in V$ on a

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon(z_1) - f_\varepsilon(z_2)\| &= \| \sum_{k=1}^{n} (\pi_{i_k}(z_1) - \pi_{i_k}(z_2)) P_{F(\overline{x_{i_k}})}(0)\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |(\pi_{i_k}(z_1) - \pi_{i_k}(z_2))| \, \|P_{F(\overline{x_{i_k}})}(0)\| \end{aligned}$$

$\pi_{i_k}(\cdot)$ étant localement lipschitzienne, soit V_k un voisinage de x et $L_k \geq 0$ tel que :

$$|\pi_{i_k}(z) - \pi_{i_k}(z')| \leq L_k d(z, z'); \forall z, z' \in V_k$$

On pose

$$V = \left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k \right) \cap V_x$$

Donc on a $\forall z_1, z_2 \in V$ on a :

$$\begin{aligned} \|f_\varepsilon(z_1) - f_\varepsilon(z_2)\| &\leq \sum_{k=1}^{n} L_k d(z_1, z_2) \|P_{F(\overline{x_{i_k}})}(0)\| \\ &= \sum_{k=1}^{n} L_k \|P_{F(\overline{x_{i_k}})}(0)\| d(z_1, z_2) \\ &= L_x d(z_1, z_2) \end{aligned}$$

Donc la fonction f_ε est localement lipschitzienne.

On commencé par le troisième étape

3)$f_\varepsilon(x) \subset conv(F(x))$.

$$\forall x \in X : f_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} \pi_{i_k}(x) P_{F(\overline{x_{i_k}})}(0)$$

Et on a

$$P_{F(\overline{x_{i_k}})}(0) \in F(\overline{x_{i_k}}) \subset F(X) = \bigcup_{x \in X} F(x)$$

Comme $\sum_{k=1}^{n} \pi_{i_k}(x) = 1$ et $\pi_{i_k}(x) \geq 0; \forall\, k = 1, ..., n$

Donc

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} \pi_{i_k}(x) P_{F(\overline{x_{i_k}})}(0)$$

Est une combinaison convexe d'éléments de $F(x)$

Donc $f_\varepsilon(x) \subset conv(F(x))$.

On commencé par quatrième étape

4) $(x, f_\varepsilon(x)) \in graph(F) + \varepsilon B(0,1)$

Fix $\varepsilon > 0$. pour tout $x \in X \; \exists \; \delta(x)$ tel que

Pour tout $x' \in B(x, \delta(x))$, nous avons

$$F(x') \subset F(x) + \frac{\varepsilon}{2} B(0,1)$$

On prendre $\delta(x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. La famille de boules

$$\{B(x, \delta(x))/4\}_{x \in X}$$

Couvre l'espace paracompact X (espace métrique $\Rightarrow$ paracompact).

Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un rafinement localement fini et $\{a_i(\cdot)\}$ une partition de l'unité localement lipschitzienne subordonné à celle ci. Choisissez pour chaque i un $\overline{x_i} \in U_i$ et défini f_ε pour être

$$f_\varepsilon(x) = \sum a_i(x) P_{F(\overline{x_i})}(0)$$

Et d'âpre 2) et 3) f_ε est localement lipschitzienne et

$$f_\varepsilon \subset conv(F(x))$$

Donc on fix $x \in X$. Alors $a_i(x)$ est strictement positif uniquement pour un sous ensemble fini $I(x) \subset I$. Pour $i \in I(x)$, définissez x_i pour être tel que

$$U_i \subset B(x, \delta(x))/4.$$

On pose $\delta_i = \delta(x_i)$ et soit $j \in I(x)$ tel que

$$\delta_j = \max_{i \in I(x)} \delta_i.$$

Alors

$$x_i \in B(x_j, \delta(j))/2$$

Et donc

$$U_i \subset B(x_j, \delta(j))$$

Donc pour tout $i \in I(x)$ on a :

$$P_{F(x_i)}(0) \in F(U_i) \subset F(B(x_j, \delta(j))) \subset F(x_j) + \frac{\varepsilon}{2}B(0,1).$$

comme ce dernier ensemble est convexe, on déduit que

$$f_\varepsilon \in F(x_j) + \frac{\varepsilon}{2}B(0,1).$$

Donc $\exists\, y_j \in F(x_j)$ tel que

$$\|f_\varepsilon(x) - y_j\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors

$$d((x, f_\varepsilon(x)), (x_j, y_j)) \leq d(x, x_j) + \|f_\varepsilon(x) - y_j\| \leq \varepsilon,$$

i.e.

$$(x, f_\varepsilon(x)) \subset graph(F) + \varepsilon B(0,1)$$

d'où

$$graph(f_\varepsilon(x)) \subset graph(F) + \varepsilon B(0,1).$$

■

3.2 Existence de solution d'inclusion différentielle ordinaire de première ordre

3.2.1 Cas de muttifonction sci

On considère l'inclusion différentielle suivante :

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t, x(t)). \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.5}$$

où F est une multifonction de $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

Le but est de trouver une sélection continue f de F et de ramener le problème :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \in F(t, x(t)). \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.6}$$

qui est un problème de Cauchy classique .

Théorème 3.2.1 *(dans l'espace $\mathbb{R}^n$)voir [1]*

Soit F une multifonction sci d'un région ouverte $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ à valeurs non vides, fermés et convexes de $\mathbb{R}^n$.

Soit $(0, x_0) \in \Omega$. Alors ils existe un intervalle ouvert $I =]w_-, w_+[$ avec $w_- < 0 < w_+$ est une fonction continument dérivable (de classe C^1) $x : I \times \mathbb{R}^n$ Solution du problème de Cauchy pour les inclusions différentielle (3.5)

De plus ou bien $w_+ = +\infty$ ou $(t, x(t))$ tend vers la bord de Ω lorsque $t \longrightarrow w_+$ et $w_- = -\infty$ ou $(t, x(t))$ tend vers la bord de Ω lorsque $t \longrightarrow w_-$

Démonstration *voir [1]*

On a $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est un espace métrique

$\mathbb{R}^n$ est un espace de Banach

F est sci à valeurs fermés convexe non vides, d'après le théorème (3.1.2) de sélection de Michael, il existe une sélection continue $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de F.

Donc on résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.7}$$

3.2.2 Cas de multifonction scs

Théorème 3.2.2 *(dans l'espace de Hilbert)voir [1]*

Soit X espace de Hilbert, $\Omega \subset \mathbb{R} \times X$ un ouvert contenant $(0, x_0)$

$F : \Omega \rightrightarrows X$ une multifonction scs à valeurs fermés, convexes et non vides on suppose $(t, x) \longmapsto P(0)_{F(t,x)}$ est localement compact.

Alors il existe $c > 0$ et une fonction absolument continue $x(\cdot)$ définie sur $[0, c]$ solution de problème

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Démonstration. *Pour démontré cette théorème en utilise le théorème de sélection approximatif :*

Soit f_n une suite de fonctions univoque continue s'approchant F au sens du sélection approximatif (théorème 3.1.3).

Soit $x_n : [0, c] \longrightarrow \Omega$ une solution de

$$\begin{cases} x_n'(t) = f_n(t, x_n(t)) \\ x_n(0) = x_0 \end{cases}$$

En particulier, pour chaque $\|x_n'\|$ majoré par $\|K\|$ et chaque x_n prend des valeurs dans l'ensemble compact $x_0 + cK$. Par le théorème (1.3.2) il existe une sous-suite x_{n_k} telle que x_{n_k} converge uniformément vers $x(\cdot)$ dans I, et $x'_{n_k} \rightharpoonup x'(\cdot)$ dans $L^1(I)$. De plus

$$d(((t, x_{n_k}(t)), x'_{n_k}(t)), graph(F)) = d(((t, x_{n_k}(t)), f_{n_k}(t, x_{n_k}(t))), graph(F)) \to 0$$

.

Défini dans le théorème de convergence (théorème 1.3.2) $x_k(t)$ pour être $(t, x_{n_k}(t))$ et $y_k(t)$ pour être $x'_{n_k}(t)$. Alors $((t, x(t)), x'(t)) \in graph(F)$ i.e.

$$x'(t) \in F(t, x(t))$$

.

3.3 Inclusions différentielles dans les espaces de Banach

Dans cette section on étude l'existence de solutions d'inclusions différentielles ordinaire de première ordre dans l'espace de Banach de dimensions finie.

Voici maintenant un théorème permettant d'obtenir l'existence de solutions de la problème de première ordre suivante :

$$\begin{cases} x^{'}(t) \in F(t, x(t)) \ \text{ p.p. } \ t \in [0, T_1] = I, \\ x(0) = r \end{cases} \tag{3.9}$$

Soit $F : I \times E \to E$ une fonction multivoque à valeurs compactes, non vides. Nous utiliserons les notations ci-dessous pour désigner les conditions suivantes sur F :

• (m_t) la multifonction F est mesurable en t, i.e.

$$t \mapsto F(t, x) \text{ est mesurable pour tout } x \in E.$$

• (I_{cc}) la multifonction F est intégrablement complètement continue, i.e. pour tout $r > 0$, il existe $h_r \in L^1(I)$ et un ensemble compact $K_r \subset \overline{B(0,1)}$ tels que l'ensemble

$$F(t, x) \subset h_r(t) K_r$$

presque pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in E \cap \overline{B(0, r)}$.

Théorème 3.3.1 *voir [8]*

Soient E un espace de Banach séparable, réflexif, et $F : I \times E \rightrightarrows E$ une fonction multivoque à valeurs convexes, compactes, non vides, satisfaisant (m_t), (scs) et (I_{cc}). supposons que

($\star$) il existe $\psi : [0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ une fonction croissante (pas nécessairement strictement) et $\alpha \in L^1(I, [0, \infty))$ telles que $\|F(t, x)\| \leq \alpha(t)\psi(\|x\|)$ presque pour tout $t \in I$ et pour tout $x \in E$, et

$$\int_0^{T_1} \alpha(t)dt < \int_{\|r\|}^{\infty} \frac{ds}{\psi(s)}.$$

Alors, le problème (3.9) possède une solution sur $[0, T_1]$.

La preuve utilise les deux lemmes suivants.

Lemme 3.3.1 *Soient E un espace de Banach réflexif, séparable et une famille $\{F_\lambda : I \times X \rightrightarrows E\}_{\lambda\in[0,1]}$ de fonctions multivoques à valeurs compactes, convexes,non vides telle que la fonction $F : I \times X \times [0,1] \longrightarrow E$ définie par $F(t,x,\lambda) = F_\lambda(t,x)$, satisfait (m_t), (scs) et (I_{cc}).*

Alors $\{F_\lambda\}_{\lambda\in[0,1]}$ est une famille de fonctions de type scs sur B pour tout ensemble fermé, borné $B \subset C(I,X)$.

Démonstration. *voir [8]*

Lemme 3.3.2 *Soient $R \geq 0, \psi : [0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ une fonction mesurable au sens de Borel et $\alpha \in L^1(I,[0,\infty))$ telles que*

$$\int_0^{T_1} \alpha(t)dt < \int_{\|r\|}^{\infty} \frac{ds}{\psi(s)}.$$

Alors, il existe $M = M(R,\psi,\alpha)$ telle que pour toute fonction $z \in W^{1,1}(I,[0,\infty))$ satisfaisant $z(0) \leq R$ et $z^{'}(t) \leq \alpha(t)\psi(z(t))$ presque pour tout $t \in I$, on a $z(t) < M$ pour tout $t \in I$. ***Démonstration.*** *voir [8]*

Démonstration du théorème (3.3.1).

Considérons la famille de problèmes

$$(6.2_\lambda)$$

$$x'(t) \in \lambda F(t,x(t)) p.p.t \in [0,T_1] = I,$$

$$x(0) = r,$$

pour $\lambda \in [0,1]$. Si y est solution de (6.2_λ),

$$\|x(t)\| \leq \|r\| + \int_0^t \|x^{'}(s)\|ds \equiv \rho(t),$$

et

$$\rho^{'}(t) \leq \alpha(t)\psi(\|\rho(t)\|) p.p.t \in I.$$

Et on a :

$\|x\|_0 := \max\{\|x(t)\| : t \in I\}$.

$C_0(I,E) := \{x \in C(I,E) : x(t_0) = r,$ (la fonction x vérifier la condition initiale)$\}$

Le lemme (3.3.2) fournit l'existence d'une constante M telle que $\|x\|_0 < M$ pour toute solution x de (6.2_λ). D'autre part, le lemme (3.3.1) implique que λF est une famille de type scs sur $x \in C_0(I, E) : \|x\|_0 \leq M$. D'après le théorème d'existence de principe 1 voir [8] Donc il existe une solution de problème (3.9).

Conclusion

Je me suis intéressé dans ce mémoire de Master : à l'étude des problèmes d'existence de solution d'inclusion différentielles ordinaire de premier ordre dans l'espace de Banach, l'existence de sélection continue de la multifonction dans le problème étudié est très important et pour assurer la continuité de la sélection nous avons mis plusieurs conditions sur la multifonction, mais les deux conditions sci et scs sont importantes.

Plusieurs chercheurs s'intéressent à ce type de problèmes. Nous espérons à l'avenir pouvoir continuer à travailler dans ce domaine et d'étudier l'existence de solution d'inclusion différentielles ordinaire d'ordre supérieur.

Bibliographie

[1] Aubin, J-P., and Arrigo Cellina. Differential inclusions : set-valued maps and viability theory. Vol. 264. Springer Science et Business Media, 2012.

[2] Berger, C. "Topologie pour la licence, cours et exercices." Université de Nice-Sophia Antipolis (2004).

[3] Bourada, Amel. Sur les équations et inclusions différentielles : existence et approximation asymptotique de solutions. Diss. Université Djillali Liabès de Sidi Bel Abbès, Algérie, 2016.

[4] Brezis, Haïm, Philippe G. Ciarlet, and Jacques Louis Lions. Analyse fonctionnelle : théorie et applications. Vol. 91. Paris : Dunod, 1999.

[5] Cellina, Arrigo. "A view on differential inclusions." Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino 63.3 (2005) : 197-209.

[6] Clémence MINAZZO, Kelsey RIDER. sur Théorèmes du Point Fixe et Applications aux Equations Différentielles. Mémoire de Master 1 de Mathématiques. Université de Nice-Sophia Antipolis Année 2006-2007

[7] Djebali, Smaïl, Lech Górniewicz, and Abdelghani Ouahab. Solution sets for differential equations and inclusions. Vol. 18. Walter de Gruyter, 2012.

[8] Frigon, Marlène. "Théorèmes d'existence de solutions d'inclusions différentielles." Topological methods in differential equations and inclusions. Springer Netherlands, 1995. 51-87.

[9] J.P Demailly, Analyse numérique et équations différentielles.

[10] Leborgne, Gilles. "Équations différentielles." (2006).