Ministère de l'enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Dr.Yahia Farès de Médéa

Faculté des Sciences -Département de Mathématiques & Informatique



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention

du

Diplôme de Master en Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle

Par

Ben azzouz TORCHI et Larbi CHOUIHI

Thème

LA DOMINATION ROMAINE DOUBLE DANS LES DIGRAPHES

Composition du Jury:

Mr.	M. ZAMIME	Maître de conférence	UYF Médéa	Président
Mr.	M. BENATALLAH	Maître de conférence	UYF Djalfa	Examinateur
Mr.	L. OULDRABAH	Maître de conférence	UYF Médéa	Promoteur

Date de soutenance: *07/2021*

Résumé

Pour un digraphe $D = (V, A)$, une fonction de domination double romaine est une fonction $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ ayant la propriété que si $f(v) = 0$, alors le sommet v doit avoir au moins deux voisins assignés 2 ou un voisin w avec $f(w) = 3$, et si $f(v) = 1$, alors le sommet v doit avoir au moins un voisin w avec $f(w) = 2$ ou $f(w) = 3$. Le poids d'une fonction de domination double romaine f est la somme $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$, et le poids minimum d'un fonction domination double romaine sur D est le nombre de domination double romaine de D, noté par $\gamma_{dR}(D)$. Le présent mémoire traite du problème de domination romaine double dans les digraphes, Dans ce mémoire, nous donnons des valeurs exactes pour quelques classes spéciales de graphes orientés, à savoir les chemins, les circuits et les produits cartésiens (les grilles, les prismes).

Abstract

Let $D = (V, A)$ be a digraph. A double Roman dominating function of a digraph D is a function $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ such that every vertex u for which $f(u) = 0$ has an in-neighbor v for which $f(v) = 3$ or at least two in-neighbors assigned 2 under f, while if $f(u) = 1$, then the vertex u must have at least one in-neighbor assigned 2 or 3. The weight of a double Roman dominating function is the value $\sum_{v \in V} f(v)$. The minimum weight of a double Roman dominating function of a digraph D is called the double Roman domination number of D, denoted by $\gamma_{dR}(D)$. The study of this thesis is about the double Roman domination. First, we will give the exact values of the double Roman domination number for directed paths, directed cycles and cartesian product of some special classes of digraphs as grids and prisms.

Remerciements

Nous tenons, avant tout, à remercier chaleureusement notre promoteur Monsieur **Lyes OULDRABAH**, Maître de conférences à l'université YAHIA FARES de Médèa, pour avoir accepte d'encadrer notre mémoire. Ainsi de nous avoir orientés, aidés et conseillés.

Nous remercions également Monsieur **Zamime MOHAMED**, Maître de Conférences à l'université Dr. YAHIA FARES de Médèa, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Nous remercions également Monsieur **Mohammed BENATALLAH**, Maître de Conférences à l'université YAHIA FARES de Médèa, pour avoir accepté d'être examinateur.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude à l'ensemble des enseignants du département M.I de l'université Dr. YAHIA FARES de Médèa.

Enfin, il est important pour nous de remercier les parents,d'avoir fait de leur mieux pour que nous puissions accomplir ce mémoire dans les meilleures conditions possibles et qui n'ont jamais cessé de nous encourager.

Nous remercions nos frères, sans oublier nos chers amis qui étaient toujours présents.

Table des matières

Résumé i

Abstrait ii

Remerciements iii

Introduction 1

1 NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES GRAPHES 3

1.1 Définitions et notation utilisées dans les digraphes 3

1.1.1 Digraphe, sommet, arc 3

1.1.2 Voisinage 5

1.1.3 Degré 5

1.1.4 Digraphe symétrique, digraphe asymétrique 6

1.1.5 Graphe orienté, Tournoi 6

1.1.6 Sous-digraphe 6

1.1.7 Graphe sous-jacent (ou graphe associe) 7

1.1.8 Digraphe partiel 8

1.1.9 Digraphe connexe 8

1.1.10 Complément d'un digraphe 9

1.1.11 Digraphe vide, digraphe complet 9

1.1.12 Digraphe k-int-régulier, digraphe k-ext-régulier 10

1.1.13 Chaîne orientée, cycle orienté 10

1.1.14 Chemin, circuit 11
1.1.15 Arbre orienté 11
1.1.16 Digraphe biparti, digraphe complet biparti 12
1.1.17 Étoile orientée 12
1.1.18 Produit cartésien de deux digraphes, (la grille, la grille torique, le prisme) 12

2 ÉTAT DE L'ART **14**
2.1 Introduction 14
2.2 Les fonctions de domination 14
2.2.1 Quelques résultats existants sur la domination dans les digraphes . . 15
2.3 Les fonctions de domination romaines 16
2.3.1 Quelques résultats existants sur la domination romaine dans les digraphes 17
2.4 Les fonctions de domination romaines double 19
2.4.1 Quelques résultats existants sur la domination romaine double dans les digraphes 20

3 LA DOMINATION ROMAINE DOUBLE DANS LES DIGRAPHES **22**
3.1 Introduction 22
3.2 Valeurs exactes de $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n})$ et $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n})$ 23
3.3 Valeur exacte de $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2})$ 25
3.4 Borne inférieur $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m})$ 30
3.5 Valeur exacte de $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3})$ et $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_4})$ 32
3.6 Borne inférieur $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m})$ 36
3.7 Valeur exacte de $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_3})$ et $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_4})$ 37
3.8 Borne inférieur $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_m})$ 41
3.9 Valeur exacte de $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_3})$ et $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4})$ 43

Conclusion **49**

Liste des Figures

1.1.1 Un digraphe simple D d'ordre $n = 6$ et de taille $m = 7$. 5
1.1.2 $d_D^+(x) = \mid N_D^+(x) \mid = 3$ et $d_D^-(x) = \mid N_D^-(x) \mid = 2$. 6
1.1.3 D' est un sous-digraphe induit de D. 7
1.1.4 Le graphe G associé au digraphe D. 7
1.1.5 H est un digraphe partiel de D. 8
1.1.6 D est connexe, H est non connexe avec deux composantes connexe. 9
1.1.7 (a) Un digraphe D et (b) son complémentaire $\overline{D}$. 9
1.1.8 (1) Un digraphe complet $(\overrightarrow{K_4})$ et (2) un digraphe vide $(\overrightarrow{\overline{K_4}})$. 10
1.1.9 Un digraphe 2-int-régulier d'ordre 6. 10
1.1.10 (1) Un cycle orienté C_8 et (2) une chaine orientée P_5. 11
1.1.11 (1) Un circuit d'ordre $n = 6$ et (2) une chemin d'ordre $n = 4$. 11
1.1.12 Un arbre $\overrightarrow{T} = (V, A)$. 11
1.1.13 (1) Digraphe complet biparti, (2) digraphe biparti. 12
1.1.14 Une étoile orientée $\overrightarrow{K_{1,6}^*}$ d'ordre 7. 12

2.2.1 Un digraphe D avec $\gamma(D)$=2. 14
2.2.2 Un digraphe D d'ordre 5 avec $\gamma(D) = 2$. 15
2.2.3 Un digraphe D d'ordre 4 avec $\gamma(D) = 1$. 16
2.3.1 Un digraphe D avec $\gamma_R(D)$=4. 17
2.3.2 Un digraphe D d'ordre $n = 4$ avec $\gamma_R = 3$. 17
2.3.3 Un digraphe D d'ordre $n = 4$ avec $\gamma_R = 3$. 18
2.3.4 Un arbre orienté T d'ordre $n = 8$ avec $\gamma_R(D) = 8$. 18
2.3.5 D est son complémentaire $\overline{D}$. 19

2.4.1 Un digraphe D avec $\gamma_{dR}(D)$=7. 20
2.4.2 Un digraphe D avec $\gamma_{dR}(D)$=10. 20
2.4.3 Un digraphe D d'ordre $n = 4$ avec $\gamma_{dR}(D)$=5. 21
2.4.4 Un digraphe D avec son complémentaire, $\gamma_{dR}(D)$=3 et $\gamma_{dR}(\overline{D})$=12. 21

3.3.1 La grille $D = \overrightarrow{P_9}\Box\overrightarrow{P_2}$. 25
3.3.2 La grille $D = \overrightarrow{P_{10}}\Box\overrightarrow{P_2}$. 26
3.3.3 La grille $D = \overrightarrow{P_{11}}\Box\overrightarrow{P_2}$. 26
3.5.1 La grille $D_1 = \overrightarrow{P_5}\Box\overrightarrow{P_3}$ et $D_2 = \overrightarrow{P_6}\Box\overrightarrow{P_3}$. 32
3.5.2 La grille $D_1 = \overrightarrow{P_5}\Box\overrightarrow{P_4}$ et $D_2 = \overrightarrow{P_6}\Box\overrightarrow{P_4}$. 34
3.7.1 Le prisme $D_1 = \overrightarrow{P_5}\Box\overrightarrow{C_3}$ et $D_2 = \overrightarrow{P_6}\Box\overrightarrow{C_3}$. 38
3.7.2 Le prisme $D_1 = \overrightarrow{P_5}\Box\overrightarrow{P_4}$ et $D_2 = \overrightarrow{P_6}\Box\overrightarrow{P_4}$. 40
3.9.1 La grille torique $D_1 = \overrightarrow{C_5}\Box\overrightarrow{C_3}$ et $D_2 = \overrightarrow{C_6}\Box\overrightarrow{C_3}$. 43
3.9.2 La grille torique $D = \overrightarrow{C_6}\Box\overrightarrow{C_4}$. 45
3.9.3 La grille torique $D = \overrightarrow{C_5}\Box\overrightarrow{C_4}$. 47

Introduction

Historiquement, l'étude de la domination dans les graphes a été posé par Jaenisch [13] en 1862. Le problème est de trouver le nombre minimum des reines qui peuvent être placées sur un échiquier de sorte que chaque carré de l'échiquier est attaqué ou "dominé" par au moins l'une des reines. D'autres applications de la domination dans la théorie des graphes sont utilisées dans le domaine de la communication et la théorie des réseaux ainsi que le théorie du codage. De ce fait, l'étude de la domination dans les graphes a reçu beaucoup d'attention ces dernières années. La théorie de la domination dans les graphes a été formellement introduite par Berge [15] en 1958.

En 1962, Ore [14] a été le premier à publier sur la domination dans les graphes et donna l'appellation actuelle du nombre de domination. La domination a connu sa véritable expansion après les travaux de Cockayne et Hedetniemi en 1977 [7]. Les deux livres de Haynes, et Hedetniemi Slater [[10], [11]] témoignent de la pertinence et de l'intérêt accru de ce sujet dans les dernières années. En 1984, lors d'une conférence à Kalamazoo (USA), Fink et Jacobson [8] ont introduit la k-domination dans les graphes qui est une généralisation de la domination dans les graphes. En 1994, Lee [3] a introduit dans sa thèse de doctorat le concept de domination dans les digraphes, c'est une généralisation du concept de domination dans les graphes où chaque graphe ici est considéré comme étant un graphe associe (graphe sans orientations) à un digraphe symétrique. En 1998; Ghoshal, Lasker et Pillone, ont donné dans [9] quelques relations entre les paramètres de dominations et les invariants dans les digraphes. En 2002, Merz et D.J. Stewart [12] considèrent des relations de type Gallai. La notion de domination a gagné une grande popularité entre les chercheurs. Des résultats plus récents peuvent être trouvés dans [[10], [11]]. Le coté pratique et appliqué de la domination a été souvent la cause de la naissance d'autres et nouveaux paramètres de domination. En

effet, beaucoup de paramètres de domination ont vu le jour lorsqu'on impose à la domination une condition supplémentaire dans le graphe considéré. L'idée générale de la domination est de trouver dans un graphe G un sous ensemble S de V (appelé dominant) tel que tout sommet extérieur au sous ensembles S a au moins un voisin dans S. En 2004, Cokayne , Dreyer, S.M Hedetniemi, et S.T Hedetniemi ont introduit une nouvelle variante de la domination dans les graphes non orientés, appelée fonction de domination Romaine. En 2016, Beeler et al., ont introduit aussi une autre nouvelle variante, c'est la fonction dominante romaine double. En 2011, Kamaraj et Jakkammal ont généralisé la définition de la fonction dominante romaine pour les digraphes, et certains résultats ont été donnés dans leur article notamment la borne supérieure pour $\gamma_R(D)$ à savoir $\gamma_R(D) \leq n - \triangle^+(D) + 1$. En 2017, Guoliang Hao et al ont généralisé ainsi la nouvelle variante, la domination romaine double dans les digraphes et ils ont donné la borne supérieure pour $\gamma_R(D)$ à savoir $\gamma_{dR}(D) \leq 2(n - \triangle^+(D)) + 1$.
Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés par cette nouvelle variante de domination, la domination romaine double dans les digraphes. Le présent document est organisé comme suit :

Chapitre 1 : Définitions de base et Notations

Dans ce chapitre, on rappelle toutes les définitions de base sur les digraphes nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Les notions propres à un chapitre donné seront définies dans le chapitre lui même.

Chapitre 2 : État de l'art

Dans ce chapitre, on aborde le thème de domination, la domination romaine et la domination romaine double dans les digraphes. On donne ainsi un recueil des principaux résultats existants.

Chapitre 3 : Dans ce dernier chapitre, on étudie un autre type de domination romaine, c'est la domination romaine double dans les digraphes, nous commençons par donner des valeurs exactes du nombre de domination romaine double pour quelques classes spéciales de graphes orientés, à savoir les chemins, les circuits et les produits cartésiens (les grilles, les prismes). Enfin on termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives pour les travaux futurs dans ce domaine de recherche.

Chapitre 1

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES GRAPHES

Ce premier chapitre est consacré aux définitions des principales notions utilisées dans ce mémoire. Pour chacune d'entre elles, nous essayerons de donner une définition formelle ainsi qu'une définition intuitive.

1.1 Définitions et notation utilisées dans les digraphes

1.1.1 Digraphe, sommet, arc

Un digraphe $D = (V(D), A(D))$ est défini par l'ensemble fini non vide $V(D)$ (ou V) dont les éléments sont appelés sommets, et une partie $A(D)$ (ou A) des paires ordonnées $V \times V$ dont les éléments sont appelés arcs (ou arêtes orientées). L'ordre de D, noté par $n(D)$ (ou n) est la cardinalité de $V(D)$, $n(D) =\mid V(D) \mid$ et la taille de D noté par $m(D)$ (ou m) est la cardinalité de $A(D)$, $m(D) =\mid A(D) \mid$.
Nous utilisons les notations suivantes. Étant donné un digraphe $D = (V(D), A(D))$, considérons deux sommets distincts, disant x et y de D :

• $x \longrightarrow y$ signifie que $(x, y) \in A(D)$,

• $x \longmapsto y$ signifie que $(x, y) \in A(D)$ et $(y, x) \notin A(D)$ et l'arc (x, y) est appelé arc asymétrique,

- $x \nrightarrow y$ signifie que $(x, y) \notin A(D)$,
- $x \longleftrightarrow y$ signifie que $(x, y) \in A(D)$ et $(y, x) \in A(D)$ et l'arc (x, y) est appelé arc symétrique,
- $x \nleftrightarrow y$ signifie que $(x, y) \notin A(D)$ et $(y, x) \notin A(D)$ et que x et y ne sont pas adjacent,
- $x \longrightarrow x$ signifie que $(x, x) \in A(D)$ et l'arc $a = (x, x)$ est appelé boucle.

De même, étant données deux parties disjointes X et $Y \subset V$, et un élément $x \in V(D) \backslash Y$, nous utilisons aussi les notations suivantes :

- $x \longrightarrow Y$ signifie que $x \longrightarrow y$ pour tout $y \in Y$,
- $x \longmapsto Y$ signifie que $x \longmapsto y$ pour tout $y \in Y$,
- $Y \longrightarrow x$ signifie que $y \longrightarrow x$ pour tout $y \in Y$,
- $X \longrightarrow Y$ signifie que $x \longrightarrow Y$ pour tout $x \in X$,
- $X \longmapsto Y$ signifie que $x \longmapsto Y$ pour tout $x \in X$.

De plus, si $a = (x, y)$ est un arc de D, alors x et y sont appelés les "extrémités" de a. Ainsi,

- x est l'extrémité initiale de a,
- y est l'extrémité terminale de a,
- x est le prédécesseur de y,
- y est le successeur de a,
- x et y sont reliés par a (ils sont adjacent).

Ainsi, deux arcs distincts $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_2)$ sont appelés arcs multiples si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$ (ont les mêmes extrémités initiales et finales). Un digraphe $D = (V, A)$ est dit digraphe simple s'il ne contient ni boucles ni arcs multiples. Tout au long de ce document, seuls les digraphes finis et simples sont pris en compte.

Exemple 1.1.1 *Un digraphe simple D d'ordre $n = 6$ et de taille $m = 7$ représenté par la Figure 1.1.1.*

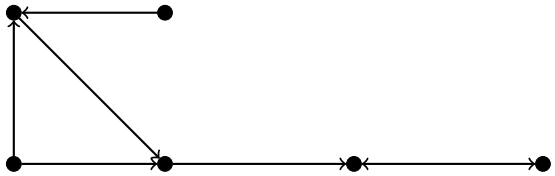


Figure 1.1.1 : Un digraphe simple D d'ordre $n = 6$ et de taille $m = 7$.

1.1.2 Voisinage

Soit $D = (V, A)$ un digraphe et x un sommet de D et $S \subseteq V$. On désigne $N_D^+(x)$ (respectivement, $N_D^-(v)$) l'ensemble des successeurs ou voisinage extérieur (respectivement, l'ensemble des prédécesseurs ou voisinage intérieur) du sommet x, c'est-à-dire $N_D^+(v) = \{y \in V - \{x\} : x \longrightarrow y\}$ (respectivement, $N_D^-(x) = \{y \in V - \{x\} : y \longrightarrow x\}$). Le voisinage extérieur (respectivement, intérieur) fermé du sommet x est l'ensemble, $N_D^+[x] = N_D^+(x) \cup \{x\}$ (respectivement, $N_D^-[x] = N_D^-(x) \cup \{x\}$). Le voisinage extérieur (respectivement, intérieur) de S est l'ensemble, $N_D^+(S) = \cup_{s \in S} N_D^+(s)$ (respectivement, $N_D^-(S) = \cup_{s \in S} N_D^-(s)$), de même $N_D^+[S] = \cup_{s \in S} N_D^+[s]$ et $N_D^-[S] = \cup_{s \in S} N_D^-[s]$. L'ensemble des voisins de x, est l'ensemble, $N_D(x) = N_D^+(x) \cup N_D^-(x)$. Le voisinage fermé de x est l'ensemble, $N_D[x] = N_D(x) \cup \{x\}$. L'ensemble des prédécesseurs (respectivement, successeurs) de x dans $D[S]$, est l'ensemble, $N_{D[S]}^-(x) = N_D^-(x) \cap S$ (respectivement, $N_{D[S]}^+(x) = N_D^+(x) \cap S$).

1.1.3 Degré

Le demi-degré extérieur de x noté par $d_D^+(x)$, est le nombre d'arcs sortant de x, et on écrit $d_D^+(x) =\mid N_D^+(v) \mid$. Le demi-degré intérieur de x noté par $d_D^-(x)$, est le nombre d'arcs entrant dans x, et on écrit $d_D^-(v) =\mid N_D^-(v) \mid$.

On notera par $\Delta^+(D) = max\{d_D^+(v) : v \in V\}$ et $\Delta^-(D) = max\{d_D^-(v) : v \in V\}$ respectivement, le degré maximum extérieur et intérieur dans D. De même on notera par $\delta^+(D) = min\{d_D^+(v) : v \in V\}$ et $\delta^-(D) = min\{d_D^-(v) : v \in V\}$, respectivement, le degré minimum extérieur et intérieur dans D.

Exemple 1.1.2 *La Figure 1.1.2. représente un sommet x avec ses voisins $N_D^-(x)$ et $N_D^+(x)$.*

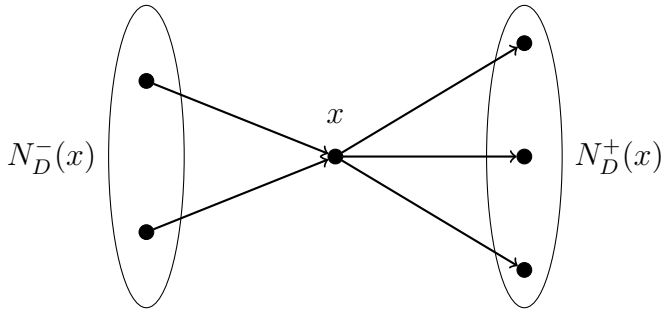


Figure 1.1.2 : $d_D^+(x) = \mid N_D^+(x) \mid = 3$ et $d_D^-(x) = \mid N_D^-(x) \mid = 2$.

On a $\mid N_D(x) \mid = \mid N_D^+(x) \mid + \mid N_D^-(x) \mid - \mid N_D^+(x) \cap N_D^-(x) \mid$, le degré total $d_D(x)$ du sommet x est défini par $d_D(x) = d_D^+(x) + d_D^-(x) \geq \mid N_D(x) \mid$. Si D est un graphe orienté alors, $d_D(x) = \mid N_D(x) \mid$. Ainsi, un sommet x de D est isolé lorsque $d_D(x)=0$. Comme chaque arc a exactement un sommet d'arrivée (respectivement, un sommet de départ) on a $\mid A \mid = \sum_{x \in V} d_D^+(x)$, (respectivement, $\mid A \mid = \sum_{x \in V} d_D^-(x)$). On obtient donc les deux identités :

$\sum_{x \in V} d_D^+(x) = \sum_{x \in V} d_D^-(x)$ et $\sum_{x \in V} d_D(x) = 2 \mid A \mid$.

1.1.4 Digraphe symétrique, digraphe asymétrique

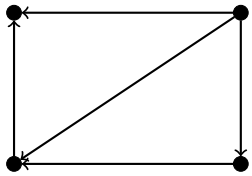
Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Alors D est appelé digraphe symétrique si tous ses arcs sont symétriques i.e., $\forall x, y \in V : (x, y) \in A \Longrightarrow (y, x) \in A$, et est appelé digraphe asymétrique si tous ses arcs sont asymétriques i.e., $\forall x, y \in V : (x, y) \in A \Longrightarrow (y, x) \notin A$.

1.1.5 Graphe orienté, Tournoi

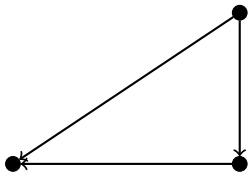
Un graphe orienté est un digraphe asymétrique. Un tournoi $T_n = (V, A)$ est un graphe orienté complet, i.e., est un digraphe tel que pour toute paire de sommets x, $y \in V$, on a $(x, y) \in A$ si et seulement si $(y, x) \notin A$.

1.1.6 Sous-digraphe

Soit $D = (V, A)$ un digraphe simple. A chaque partie non vide $X \subseteq V$ est associé le sous-digraphe $D[X] = (X, (X \times X) \cap A)$ de D induit par X (voir la Figure 1.1.3).



$D = (V, A)$



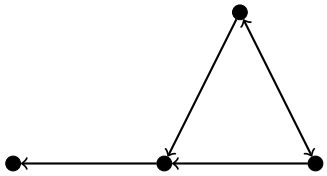
$D' = (V', A')$

Figure 1.1.3 : D' est un sous-digraphe induit de D.

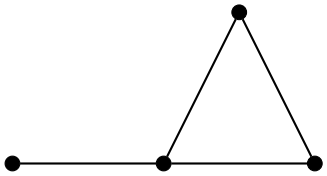
1.1.7 Graphe sous-jacent (ou graphe associe)

Étant donné un digraphe simple $D = (V, A)$. Si on supprime l'orientation de ses arcs, on obtient un graphe non orienté $G = (V, E)$ telle que une arête $e = xy \in E$ reliant deux sommets x et y existe dans G si les deux sommets x et y sont adjacents dans D, i.e., au moins $(x, y) \in A$ ou (y, x) existe dans D (la disjonction "ou" n'est pas exclusive ici). De même un digraphe D peut être obtenu à partir d'un graphe simple G en assignant une direction (éventuellement les deux) à chaque arête de G. Nous disons que G est le graphe sous-jacent ou associé (Underlying graph en anglais) de D et que D est une orientation de G.

Remarque 1.1.1 *Le graphe G représenté par la Figure 1.1.4 est le graphe associé au digraphe D. Comme le graphe G de cet exemple a 4 arêtes et chacune d'elles peut avoir 3 orientations possibles, alors le graphe G a 3^4 orientations possibles et D est l'une de ses orientations.*



$D = (V, A)$



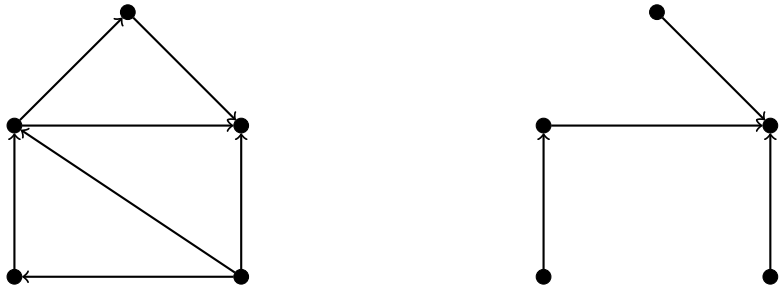
$G = (V, E)$

Figure 1.1.4 : Le graphe G associé au digraphe D.

Remarque 1.1.2 *Un graphe (non orienté) $G = (V, E)$ est considéré comme étant un graphe associé à un digraphe symétrique $D = (V, A)$ où toute arête de G est remplacée par un arc symétrique, on peut constater que tous les résultats de recherche obtenus sur les graphes (non orientés) G sont également considérés comme des résultats particuliers pour les digraphes et par conséquent on peut déduire que la notion de digraphes est plus générale que la notion de graphes (non orientés).*

1.1.8 Digraphe partiel

Soit $D = (V, A)$ un digraphe simple. Si $X = V$ et $A' \subseteq A$, alors le digraphe $H = (V, A')$ est appelé digraphe partiel du digraphe D, (voir Figure 1.1.5).



$D = (V, A)$ $\qquad$ $H = (V, A')$

Figure 1.1.5 : H est un digraphe partiel de D.

1.1.9 Digraphe connexe

Soit $D = (V, A)$ un digraphe, on dit qui D est connexe, si pour tout pair de sommet x, y de V, il existe une chaîne reliant x à y ou y à x. Le digraphe D est connexe puisque il contient une seule composante connexe, et le digraphe H est non connexe car il contient deux composantes connexes, (voir Figure 1.1.6).



(D) (H)

Figure 1.1.6 : D est connexe, H est non connexe avec deux composantes connexe.

1.1.10 Complément d'un digraphe

Le digraphe complémentaire d'un digraphe simple $D = (V, A)$ est un digraphe simple noté par $\overline{D} = (V, \overline{A})$ et tel que : $(u, v) \in \overline{A}$ si et seulement si $(u, v) \notin A$, $\forall u, v \in V$, (voir la Figure 1.1.7).



(a) (b)

Figure 1.1.7 : (a) Un digraphe D et (b) son complémentaire $\overline{D}$.

1.1.11 Digraphe vide, digraphe complet

Étant donné un digraphe $D = (V, A)$. Si $\Delta^+(D) = 0$ alors D est digraphe vide. Tandis que si pour toute paire de sommets, disant, x et y de V avec $x \neq y$, $A \cap \{(x, y), (y, x)\} \neq \emptyset$ alors D est dit digraphe complet d'ordre n noté par $\overrightarrow{K_n}$, (voir la Figure 1.1.8).



(1) (2)

Figure 1.1.8 : (1) Un digraphe complet ($\overrightarrow{K_4}$) et (2) un digraphe vide ($\overrightarrow{\overrightarrow{K_4}}$).

1.1.12 Digraphe k-int-régulier, digraphe k-ext-régulier

Soit $k \in N^*$ et $D = (V, A)$. Si pour tout sommet $v \in V$, $d_D^-(v) = k$ (resp.,$d_D^+(v) = k$ alors D est appelé digraphe k-int-régulier (resp, k-ext-régulier), (voir la Figure 1.1.9).

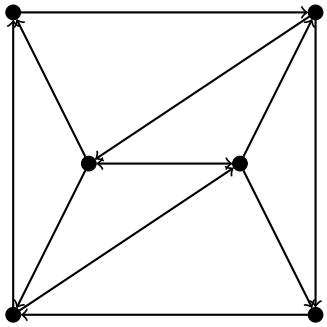
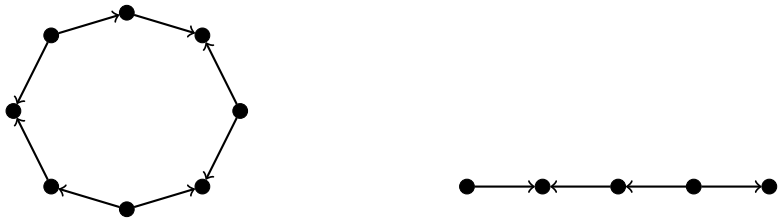


Figure 1.1.9 : Un digraphe 2-int-régulier d'ordre 6.

1.1.13 Chaîne orientée, cycle orienté

Une chaîne orientée $P_n = (V, A)$ est une suite de sommets distincts $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tels que pour tout $1 \leq i \leq n-1$, $\{(x_i, x_{i+1}), (x_{i+1}, x_i)\} \cap A \neq \emptyset$. Un cycle orienté C_n est une chaîne orientée fermée $C_n = P_n \cup \{(x_1, x_n), (x_n, x_1)\}$, (voir la Figure 1.1.10).



(1) (2)

Figure 1.1.10 : (1) Un cycle orienté C_8 et (2) une chaine orientée P_5.

1.1.14 Chemin, circuit

Un chemin $\overrightarrow{P_n} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ d'ordre n, est une suite de sommets reliés par des arcs consécutifs, i.e.,$(x_i, x_{i+1}) \in A(\overrightarrow{P_n})$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$. Un circuit $\overrightarrow{C_n} = (x_1, x_2, \cdots, x_n, x_1)$ d'ordre n, est un chemin fermé ($\overrightarrow{C_n} = \overrightarrow{P_n} \cup (x_n, x_1)$), (voir la Figure 1.1.11).



(1) (2)

Figure 1.1.11 : (1) Un circuit d'ordre $n = 6$ et (2) une chemin d'ordre $n = 4$.

1.1.15 Arbre orienté

Un arbre orienté $\overrightarrow{T} = (V, A)$ (Directed tree en anglaire) est un graphe orienté connexe sans cycle orienté. Il contient exactement $(n-1)$ arcs, (voir la Figure 1.1.12).

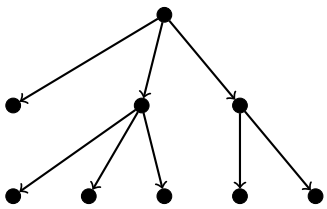
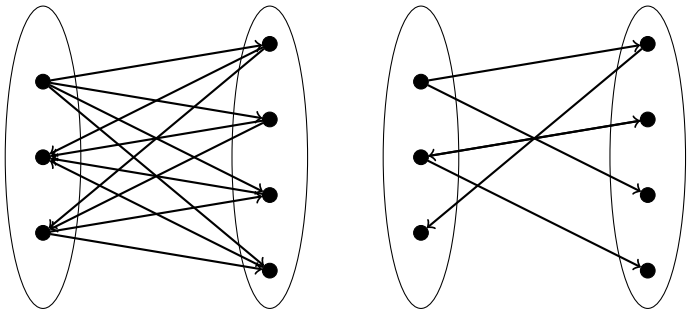


Figure 1.1.12 : Un arbre $\overrightarrow{T} = (V, A)$.

1.1.16 Digraphe biparti, digraphe complet biparti

Soit $D = (V, A)$ un digraphe et S un sous-ensemble de V. S est dit stable (ou indépendant) si ses sommets ne sont pas deux à deux adjacents. D est dit biparti s'il existe une partition de V en deux sous-ensembles stables, (voir la Figure 1.1.13).



(1) (2)

Figure 1.1.13 : (1) Digraphe complet biparti, (2) digraphe biparti.

1.1.17 Étoile orientée

Une étoile orientée d'ordre n, est un digraphe biparti complet k-ext-semi régulier $\overrightarrow{K^*_{1,n-1}}$, (voir la Figure 1.1.14).

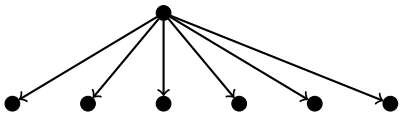


Figure 1.1.14 : Une étoile orientée $\overrightarrow{K^*_{1,6}}$ d'ordre 7.

1.1.18 Produit cartésien de deux digraphes, (la grille, la grille torique, le prisme)

Soient deux digraphes $D_1(V_1, A_1)$ et $D_2(V_2, A_2)$. Le produit cartésien $D = D_1 \square D_2$ est un digraphe avec l'ensemble de sommets $V(D) = V(D_1) \times V(D_2)$ et $((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \in A(D_1 \square D_2)$ si et seulement si $u_1 = v_1$ et $(u_2, v_2) \in A(D_2)$ ou $u_2 = v_2$ et $(u_1, v_1) \in A(D_1)$.

• La grille $M(m, n)$ est obtenue par le produit cartésien de chemins $P_m \square P_n$.

• La grille torique $MT(m, n)$ est obtenue par le produit cartésien de deux graphes cycles $C_m \square C_n$.

• Le prisme $Y_{m,n}$ est obtenue par le produit cartésien d'un graphe cycle et d'un chemin $C_m \square P_n$.

Chapitre 2

ÉTAT DE L'ART

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on aborde le thème de domination dans les digraphes, la domination romaine et la domination romaine double dans les digraphes. On donne ainsi un recueil des principaux résultats existants.

2.2 Les fonctions de domination

Définition 2.2.1 [3] *Soit $D = (V, A)$ un digraphe. Un sous-ensemble $S \subseteq V$ est appelé dominant dans D, s'il existe pour chaque sommet $v \in V - S$ un sommet $u \in S$ pour lequel $(u, v) \in A$. La cardinalité minimale d'un ensemble dominant dans D s'appelle le nombre de domination de D, noté $\gamma(D)$. Un $\gamma(D)$-ensemble est un ensemble dominant de D de cardinalité $\gamma(D)$.*

Exemple 2.2.1 *Pour le digraphe D représenté par la Figure 2.2.1, $\gamma(D)$=2.*

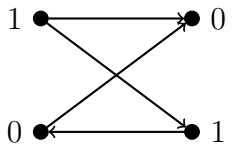


Figure 2.2.1 : Un digraphe D avec $\gamma(D)$=2.

2.2.1 Quelques résultats existants sur la domination dans les digraphes

Nous citons quelques bornes et formules de Gallai-type en fonction de quelques invariants dans les digraphes.

Théorème 2.2.1 [4] *Pour tout digraphe D avec n sommets, on a:*

$$\frac{n}{1+\Delta^+(D)} \leq \gamma(D) \leq n - \Delta^+(D).$$

Exemple 2.2.2 *Un digraphe D d'ordre 5 avec $\gamma(D) = 2$.*

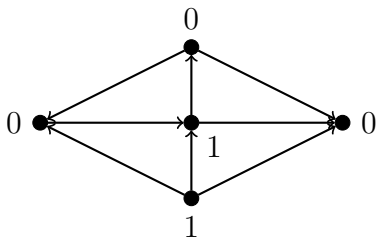


Figure 2.2.2 : Un digraphe D d'ordre 5 avec $\gamma(D) = 2$.

En 1994, Lee *[3]* a établi, dans la classe de digraphes fortement connexes, une borne supérieure pour le nombre de domination orienté $\gamma(D)$.

Théorème 2.2.2 [3] *Pour un digraphe D fortement connexe avec n sommets, on a:*

$$\gamma(D) \leq \lceil \tfrac{n}{2} \rceil.$$

En 2002, Merz et Stewart *[12]* ont établi des bornes supérieures pour le paramètre $\gamma(D)$, à savoir $\gamma(D)+\Delta^+(D) \leq n$, ils ont donné aussi les classes des graphes orientés pour lesquelles la formule de Gallai-type $\gamma(D) + \Delta^+(D) = n$ est vérifiée.

Théorème 2.2.3 [12] *Si D est un digraphe avec n sommets, alors*

$$\gamma(D) + \Delta^+(D) \leq n.$$

Exemple 2.2.3 *Un digraphe D d'ordre 4 avec $\gamma(D) = 1$. $\gamma(D) = 1$.*

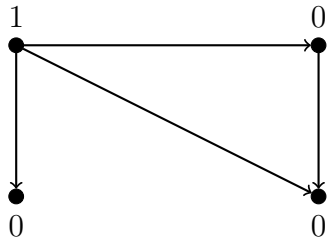


Figure 2.2.3 : Un digraphe D d'ordre 4 avec $\gamma(D) = 1$.

Théorème 2.2.4 [12] *Soit $D = (V, A)$ un digraphe de n sommets avec $\Delta^+(D) = 1$. Alors $\gamma(D)+\Delta^+(D) = n$ si et seulement si pour tout sommet x de V tel que $d^+(x) = 1$, $V - N^+[x]$ est un ensemble stable.*

2.3 Les fonctions de domination romaines

Définition 2.3.1 [2] *Une fonction de domination romaine (FDR) sur un digraphe $D = (V, A)$ est une fonction $f : V \to \{0, 1, 2\}$ telle que chaque sommet u pour lequel $f(u) = 0$ est un successeur de certains sommets v pour lequel $f(v) = 2$. Le poids d'une fonction dominante romaine est la valeur $f(V) = \sum_{u\in V} f(u)$. Le poids minimum d'une fonction de domination romaine sur un digraphe D est appelé le nombre de domination romaine de D, noté $\gamma_R(D)$. Soit (V_0, V_1, V_2) la partition ordonnée de V induite par f, où $V_i = \{v \in V : f(v) = i$, pour $i = 0, 1, 2$. Notons qu'il existe une correspondance 1-1 entre la fonction $f : V \to \{0, 1, 2\}$ et la partition ordonnée (V_0, V_1, V_2) de V. Ainsi, nous allons écrire $f = (V_0, V_1, V_2)$. Le poids de f est*

$$f(V) = \sum_{v\in V} f(v) =| V_1 | +2 | V_2 |$$

et on dit qu'une fonction $f = (V_0, V_1, V_2)$ est une γ_R -fonction s'il s'agit d'une FDR avec $f(V) = \gamma_R(D)$.

Exemple 2.3.1 *La fonction de domination romaine $f : V \to \{0, 1, 2\}$ donnée par la Figure 2.3.1 est de poids 4.*

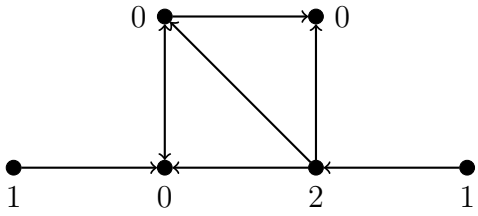


Figure 2.3.1 : Un digraphe D avec $\gamma_R(D)$=4.

2.3.1 Quelques résultats existants sur la domination romaine dans les digraphes

Les résultats suivants sont dûs à Kamaraj et Jakkammal *[2]*.

Proposition 2.3.1 [2] *Si D est un digraphe d'ordre n, avec ext-degré maximum $\Delta^+(D)$, alors $\gamma_R(D) \leq n - \Delta^+(D) + 1$.*

Exemple 2.3.2 *Un digraphe d'ordre 4 avec $\gamma_R = 3$.*

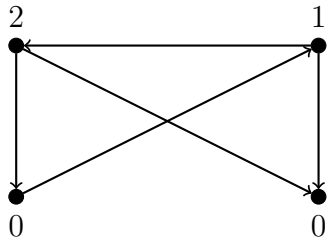


Figure 2.3.2 : Un digraphe D d'ordre $n = 4$ avec $\gamma_R = 3$.

Proposition 2.3.2 [2] *Si D est un digraphe d'ordre n, alors $\gamma_R(D) \leq n$ si et seulement si $\Delta^+(D) \geq 2$.*

Exemple 2.3.3 *Un digraphe d'ordre 4, avec $\gamma_R = 3$.*

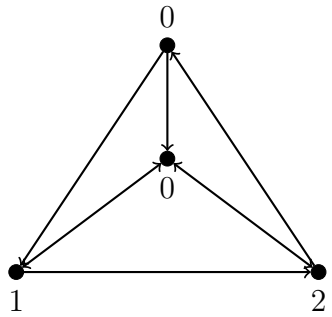


Figure 2.3.3 : Un digraphe D d'ordre $n = 4$ avec $\gamma_R = 3$.

Proposition 2.3.3 [2] *Si T est un arbre orienté d'ordre $n \geq 2$, alors $\gamma_R(D) = n$ si et seulement si $\Delta^+(D) = 1$.*

Exemple 2.3.4 *Un arbre orienté T d'ordre $n = 8$ avec $\gamma_R(D) = 8$.*

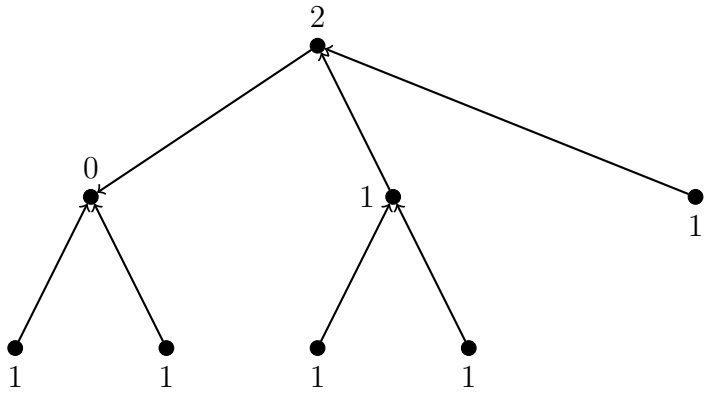


Figure 2.3.4 : Un arbre orienté T d'ordre $n = 8$ avec $\gamma_R(D) = 8$.

Chen, Hao and Xie *[1]* ont donné la relation de type Nordhaus-Gaddum suivante.

Théorème 2.3.1 [1] *Soit D un digraphe d'ordre $n \geq 3$, alors*

$$\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D}) \leq n + 3.$$

Exemple 2.3.5 *Le nombre de domination romaine de D est $\gamma_R(D) = 2$, et le nombre de domination romaine de $\overline{D}$ est $\gamma_R(\overline{D}) = 3$.*



$(\gamma_R(D) + \gamma_R(\overline{D})) = 2 + 3 = 5 < n + 3 = 7.$

Figure 2.3.5 : D est son complémentaire $\overline{D}$.

2.4 Les fonctions de domination romaines double

Définition 2.4.1 [5] *Une fonction de domination romaine double (FDRD) d'un digraphe D est une fonction $f : V \to \{0, 1, 2, 3\}$ telle que chaque sommet u pour lequel $f(u) = 0$ a un int-voisin (prédécesseur) v pour lequel $f(v) = 3$ ou au moins deux int-voisins assignés 2 sous f, tandis que si $f(u) = 1$, alors le sommet u doit avoir au moins un int-voisin assigné 2 ou 3. Soit (V_0, V_1, V_2, V_3) une partition ordonnée de V induite par f où pour $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$. A noter qu'il existe un 1-1 correspondance entre la fonction $f : V \to \{0, 1, 2\}$ et la partition ordonnée (V_0, V_1, V_2, V_3) de V. On écrira donc $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$. Le poids d'une FDRD est la valeur*

$$w(f) = f(V) = \sum_{u \in V} f(u) = \mid V_1 \mid +2 \mid V_2 \mid +3 \mid V_3 \mid .$$

Le poids minimum d'une FDRD d'un digraphe D est appelé le nombre de domination Romaine Double de D, et est noté $\gamma_{dR}(D)$. On dit que f est une $\gamma_{dR}(D)$-fonction si f est une FDRD de D et $w(f) = \gamma_{dR}(D)$.

Exemple 2.4.1 *Un digraphe D d'ordre $n = 6$ avec $\gamma_{dR}(D) = 7$ représenté par la Figure 2.4.1.*

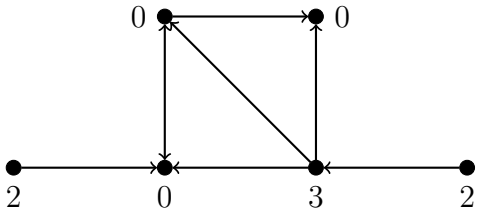


Figure 2.4.1 : Un digraphe D avec $\gamma_{dR}(D)$=7.

2.4.1 Quelques résultats existants sur la domination romaine double dans les digraphes

Nous donnons ici quelques résultats obtenus par Hao et al *[1]* et qui serons utiles dans le dernier chapitre de ce document.

Théorème 2.4.1 [1] *Si D est un digraphe d'ordre n. Alors $\gamma_{dR}(D) \leq 2n$ avec égalité si et seulement si $\Delta^+(D) = 0$.*

Exemple 2.4.2 *Un digraphe D avec $\gamma_{dR}(D)$=10 représenté par la Figure 2.4.2.*

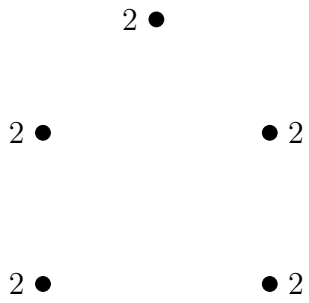


Figure 2.4.2 : Un digraphe D avec $\gamma_{dR}(D)$=10.

Théorème 2.4.2 [1] *Pour tout digraphe D, il existe une $\gamma_{dR}(D)$-fonction telle que la valeur 1 ne doit pas être affectée à aucun sommet de D.*

Théorème 2.4.3 [1] *Pour tout digraphe D d'ordre n,*

$$\gamma_{dR}(D) \leq 2(n - \Delta^+(D)) + 1.$$

Exemple 2.4.3 *Un digraphe d'ordre $n = 4$ avec $\gamma_{dR} = 5$.*

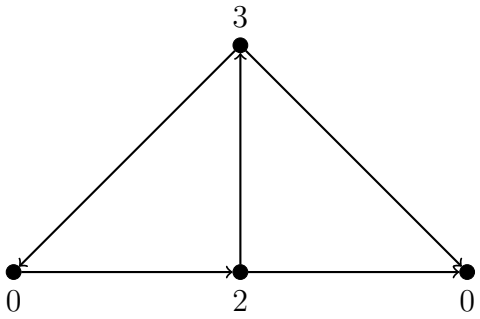


Figure 2.4.3 : Un digraphe D d'ordre $n = 4$ avec $\gamma_{dR}(D)$=5.

Théorème 2.4.4 [1] *Pour tout digraphe D d'ordre $n \geq 4$,*

$$\gamma_{dR}(D) + \gamma_{dR}(\overline{D}) \leq 2n + 3.$$

Exemple 2.4.4 *Un digraphe D avec $\gamma_{dR}(D)$=3 et $\gamma_{dR}(\overline{D})$=12.*

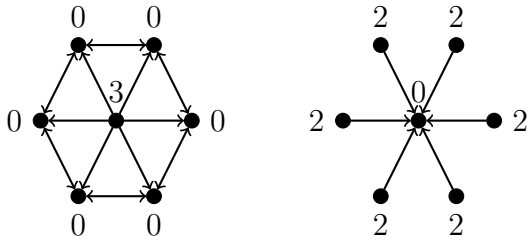


Figure 2.4.4 : Un digraphe D avec son complémentaire, $\gamma_{dR}(D)$=3 et $\gamma_{dR}(\overline{D})$=12.

Chapitre 3

LA DOMINATION ROMAINE DOUBLE DANS LES DIGRAPHES

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie un autre type de domination romaine, c'est la domination romaine double dans les digraphes, nous commençons par donner des valeurs exactes du nombre de domination romaine double pour quelques classes spéciales de graphes orientés, à savoir les chemins, les circuits et les produits cartésiens (les grilles, les prismes). Enfin on termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives pour les travaux futurs dans ce domaine de recherche.

Nous rappelons ici quelques résultats obtenus par Hao et al [5] et qui serons utiles dans la suite.

Théorème 3.1.1 [5] *Si D est un digraphe d'ordre n, alors $\gamma_{dR}(D) \leq 2n$ avec égalité si et seulement si $\triangle^+(D) = \emptyset$.*

Proposition 3.1.1 [5] *Pour tout digraphe D, il existe une $\gamma_{dR}(D)$-fonction telle que la valeur 1 ne soit pas être affectée à aucun sommet de D.*

Théorème 3.1.2 [5] *Pour tout digraphe D d'ordre n,*

$$\gamma_{dR}(D) \leq 2(n - \Delta^+(D)) + 1.$$

Observation 3.1.1 *Soit H est un digraphe partial de D. Alors*

$$\gamma_{dR}(D) \leq \gamma_{dR}(H).$$

3.2 Valeurs exactes de $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n})$ et $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n})$

Lemme 3.2.1 *[6] Pour tout nombre entier positif n, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}) \leq \lceil \frac{3n}{2} \rceil$.*

Preuve. Soit $\overrightarrow{P_n} = (v_0, v_1, \cdots, v_n)$ un chemin d'ordre n. On définit la fonction $f : V(P_n) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $f(v_{2i+1}) = 3$ pour $0 \leq i \leq \frac{n-2}{2}$ et $f(v) = 0$ sinon si $n \equiv 0(mod 2)$. Par $f(v_n) = 2, f(v_{2i+1}) = 3$ pour $0 \leq i \leq \frac{n-3}{2}$ et $f(v) = 0$ sinon quand $n \equiv 1(mod 2)$. Il est facile de vérifier que si n est pair, alors f est une FDRD de $\overrightarrow{P_n}$ de poids $w(f) = 3|V_3| = \frac{3n}{2}$ et si n est impair alors f est une FDRD de $\overrightarrow{P_n}$ de poids $\frac{3n+1}{2}$. Alors $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}) \leq \lceil \frac{3n}{2} \rceil$.

■

Proposition 3.2.1 [6] *Pour tout nombre entier positif n, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}) = \lceil \frac{3n}{2} \rceil$.*

Preuve. Il découle du Lemme 3.2.1 que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}) \leq \lceil \frac{3n}{2} \rceil$. Maintenant, nous prouvons l'inégalité inverse. On procède par induction sur n. La propriété est triviale pour tous les chemins d'ordre $n \leq 4$. Supposons que $n \geq 5$ et que l'hypothèse est vraie pour tout chemin d'ordre n' inférieur à n, i.e., $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}) \geq \lceil \frac{3n'}{2} \rceil$. Soit $f = (V_0, V_1, V_2, V_3)$ une γ_{dR}-fonction de $\overrightarrow{P_n}$ avec $V_1 = \emptyset$, (Voir la Proposition 3.1.1). Clairement $f(v_n) \neq 3$.
Nous distinguons deux cas:
Case 1. $n \equiv 0(mod 2)$. Alors nous devons avoir $f(v_n) = 0$, sinon nous avons $f(v_n) = 2$, $f(v_{n-1}) = 0$ et $f(v_{n-2}) = 3$. Soit $\overrightarrow{P_{n'}} = \overrightarrow{P_n} - \{v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$ d'ordre $n' = n - 3 \equiv 1(mod 2)$. Il découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}) \geq \frac{3n'+1}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v) = f(v)$ pour $i = 1, \cdots, n'$. Il est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}$ de poids $w(f) - 5$. D'après le Lemme 3.2.1,

$$\frac{3n}{2} \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}) = w(f) = w(g) + 5 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-3}}) + 5 = \frac{3n+2}{2}$$

d'où on a une contradiction. Donc, $f(v_n) = 0$ et $f(v_{n-1}) = 3$. $\overrightarrow{P_{n'}} = \overrightarrow{P_n} - \{v_{n-1}, v_n\}$ d'ordre $n' = n - 2 \equiv 0(mod2)$. Par l'hypothèse d'induction, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}) \geq \frac{3n'}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v) = f(v)$ pour $i = 1, \cdots, n'$. Il est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}$ de poids $w(f) - 3$ donc,

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}) = w(f) = w(g) + 3 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-2}}) + 3 = \frac{3n}{2}.$$

Case 2. $n \equiv 1(mod2)$. Comme $d^-(v_1) = 0$ alors $f(v_1) \in \{2, 3\}$. Nous considérons deux sous-cas:

Case 2.1. $f(v_1) = 2$: Soit $\overrightarrow{P_{n'}} = \overrightarrow{P_n} - \{v_1\}$ d'ordre $n' = n - 1 \equiv 0(mod2)$. Par l'hypothèse d'induction, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}) \geq \frac{3n'}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v) = f(v)$ pour $i = 1, \cdots, n'$. Il est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}$ de poids $w(f) - 2$ donc,

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}) = w(f) = w(g) + 2 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-1}}) + 2 = \frac{3n+1}{2}.$$

Case 2.2. $f(v_1) = 2$: Soit $\overrightarrow{P_{n'}} = \overrightarrow{P_n} - \{v_1, v_2\}$ d'ordre $n' = n - 2 \equiv 1(mod2)$. Par l'hypothèse d'induction, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}) \geq \frac{3n'+1}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v) = f(v)$ pour $i = 1, \cdots, n'$. Il est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}$ de poids $w(f) - 3$ donc,

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}) = w(f) = w(g) + 3 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-2}}) + 3 = \frac{3n+1}{2}.$$

Par conséquent $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}) \geq \lceil \frac{3n}{2} \rceil$.

■

Proposition 3.2.2 [6] *Pour tout nombre entier positif n, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}) = \lceil \frac{3n}{2} \rceil$.*

Preuve. Soit $\overrightarrow{C_n}$ un circuit de n sommets. Alors, $\overrightarrow{C_n} = \overrightarrow{P_n} - (x, y)$ où x et y sont deux sommets consécutifs de $\overrightarrow{C_n}$. Il est clair que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}) \leq \gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n} - (x, y)) = \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n})$. D'après la Proposition 3.2.1,

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}) \leq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}) = \lceil \frac{3n}{2} \rceil.$$

Montrons l'inégalité inverse. Soit f une γ_{dR}-fonction de $\overrightarrow{C_n}$ avec $V_1 = \emptyset$. Il est clair que pour tout arc (x, y) de $\overrightarrow{C_n}$, nous avons $f(x) + f(y) \geq 2$. S'il existe un arc (u, v) de $\overrightarrow{C_n}$ tel que $f(u) > 0$ et $f(v) > 0$, alors la fonction f est une FDRD de $\overrightarrow{P_n} = \overrightarrow{C_n} - (u, v)$. D'après la Proposition 3.2.1,

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}) = w(f) \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}) = \lceil \tfrac{3n}{2} \rceil.$$

Sinon, chaque arc (x, y) de $\overrightarrow{C_n}$ vérifie $f(x).f(y) = 0$. Mais, comme f est une γ_{dR}-fonction de $\overrightarrow{C_n}$, nous devons avoir $f(x) + f(y) = 3$, ce qui signifie que tous les sommets de $\overrightarrow{C_n}$ sont affectés alternativement par les valeurs 3 et 0. Il est clair dans ce cas que, n est pair et $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}) = 3|V_3| = \frac{3n}{2}$ et la preuve est complète. ■

3.3 Valeur exacte de $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2})$

Lemme 3.3.1 *Pour tout nombre entier positif*

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_2) \leq \begin{cases} \frac{7n}{3} & si\ n \equiv 0(mod 3), \\ \frac{7n+2}{3} & si\ n \equiv 1(mod 3), \\ \frac{7n+1}{3} & si\ n \equiv 2(mod 3). \end{cases}$$

Preuve. Soit $\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P_j} = (v_{1,j}, v_{2,j}, \cdots, v_{n,j})$ $j = 1, 2$ une grille d'ordre $2n$. On définit la fonction f: $V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}) \to \{0, 1, 2, 3\}$,

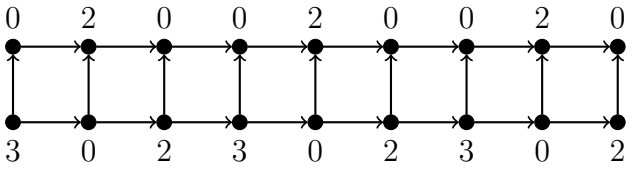


Figure 3.3.1 : La grille $D = \overrightarrow{P_9}\Box\overrightarrow{P_2}$.

$$\text{Pour } n \equiv 0(mod3) \begin{cases} f(v_{3i+2,1}) = 0 & \text{si } 0 \leq i \leq \frac{n-6}{3}, \\ f(v_{3i+3,1}) = f(v_{3i+2,2}) = 2 & \text{si } 0 \leq i \leq \frac{n-6}{3}, \\ f(v_{3i+4,1}) = 3 & \text{si } 0 \leq i \leq \frac{n-6}{3}, \\ f(v_{1,1}) = 3, & \\ f(v_{n,1}) = f(v_{n-2,2}) = 2, & \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

$w(f) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n} f(v_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} f(v_{i,1}) + \sum_{i=1}^{n} f(v_{i,2}) = 3|V_3| + 2|V_2| + 2|V_2| + 2 + 2 + 3 = 3(\frac{n-3}{3}) + 4(\frac{n-3}{3}) + 7 = \frac{7n}{3}$.

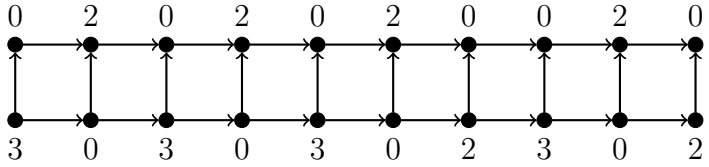


Figure 3.3.2 : La grille $D = \overrightarrow{P_{10}}\Box\overrightarrow{P_2}$.

$$\text{Pour } n \equiv 1(mod3) \begin{cases} f(v_{3i,1}) = 0 & \text{si } 2 \leq i \leq \frac{n-4}{3}, \\ f(v_{3i+1,1}) = f(v_{3i,2}) = 2 & \text{si } 2 \leq i \leq \frac{n-4}{3}, \\ f(v_{3i+2,1}) = 3 & \text{si } 2 \leq i \leq \frac{n-4}{3}, \\ f(v_{1,1}) = f(v_{3,1}) = f(v_{5,1}) = 3, & \\ f(v_{n,1}) = f(v_{n-2,2}) = f(v_{2,2}) = f(v_{4,2}) = 2, & \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

$w(f) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n} f(v_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} f(v_{i,1}) + \sum_{i=1}^{n} f(v_{i,2}) = 3|V_3| + 2|V_2| + 2|V_2| + 3(3) + 4(2) = 3(\frac{n-7}{3}) + 2(\frac{n-7}{3}) + 2(\frac{n-7}{3}) + 17 = \frac{7n+2}{3}$.

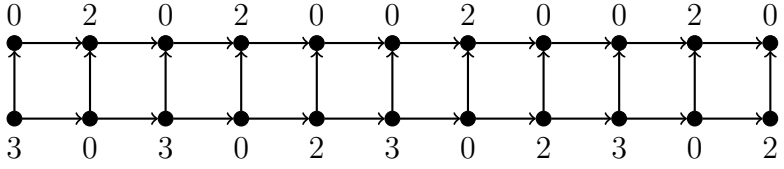


Figure 3.3.3 : La grille $D = \overrightarrow{P_{11}}\Box\overrightarrow{P_2}$.

$$\text{Pour } n \equiv 2(mod3) \begin{cases} f(v_{3i+1,1}) = 0 & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{n-5}{3}, \\ f(v_{3i+2,1}) = f(v_{3i+1,2}) = 2 & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{n-5}{3}, \\ f(v_{3i+3,1}) = 3 & \text{si } 1 \leq i \leq \frac{n-5}{3}, \\ f(v_{1,1}) = f(v_{3,1}) = 3, & \\ f(v_{n,1}) = f(v_{n-2,2}) = f(v_{2,2}) = 2, & \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

$w(f) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{n} f(v_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} f(v_{i,1}) + \sum_{i=1}^{n} f(v_{i,2}) = 3|V_3| + 2|V_2| + 2|V_2| + 2(3) + 3(2) = 3(\frac{n-5}{3}) + 2(\frac{n-5}{3}) + 2(\frac{n-5}{3}) + 12 = \frac{7n+1}{3}$.

II est facile de vérifier que si $n \equiv 0(mod3)$, alors f est une FDRD de $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f) = \frac{7n}{3}$ et si $n \equiv 1(mod3)$ alors f est une FDRD de $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f) = \frac{7n+2}{3}$ et si $n \equiv 2(mod3)$ alors f est une FDRD de $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f) = \frac{7n+1}{3}$.
Alors

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_2) \leq \begin{cases} \frac{7n}{3} & \text{si } n \equiv 0(mod3), \\ \frac{7n+2}{3} & \text{si } n \equiv 1(mod3), \\ \frac{7n+1}{3} & \text{si } n \equiv 2(mod3). \end{cases}$$

■

Proposition 3.3.1 *Pour tout nombre entier positif $n \geq 2$*

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_2) = \begin{cases} \frac{7n}{3} & si\ n \equiv 0(mod3), \\ \frac{7n+2}{3} & si\ n \equiv 1(mod3), \\ \frac{7n+1}{3} & si\ n \equiv 2(mod3). \end{cases}$$

Preuve. II découle du Lemme 3.3.1 que

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_2) \leq \begin{cases} \frac{7n}{3} & \text{si } n \equiv 0(mod3), \\ \frac{7n+2}{3} & \text{si } n \equiv 1(mod3), \\ \frac{7n+1}{3} & \text{si } n \equiv 2(mod3). \end{cases}$$

Maintenant, nous prouvons l'inégalité inverse. On procède par induction sur n. La propriété est triviale pour tous les grille d'ordre $2 \leq n \leq 8$, Supposons que $n \geq 9$ et que l'hypothèse est vraie pour tout grille d'ordre n' inférieur à n,i.e,

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_{n'}\Box\overrightarrow{P}_2) \geq \begin{cases} \frac{7n'}{3} & \text{si } n \equiv 0(mod3), \\ \frac{7n'+2}{3} & \text{si } n \equiv 1(mod3), \\ \frac{7n'+1}{3} & \text{si } n \equiv 2(mod3). \end{cases}$$

Soit $f = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ une γ_{dR}-fonction de $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}$ avec $V_1 = \emptyset$ (voir la Proposition 3.1.1). Clairement $f(v_{n,j}) \neq 3$ $j = 1, 2$. Nous distinguons trois cas :

Case 1. $n \equiv 0(mod3)$. Alors nous devons avoir $f(v_{n,1}) = 0$, sinon nous avoir $f(v_{n,1}) = 2$.

$$\text{Si } f(v_{n,1}) = 0 \text{ alors } \begin{cases} f(v_{n-1,2}) = 0, \\ f(v_{n,2}) = 2, \\ f(v_{n-1,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n' = n-2 \equiv 1(mod3)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \geq \frac{7n'+2}{3}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n'$ et $j = 1, 2$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f) - 5$. D'après le Lemme 3.3.1.
$\frac{7n}{3} \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}) = w(f) = w(g) + 5 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{P_2}) + 5 = \frac{7(n-2)+2}{3} + 5 = \frac{7n+3}{3}$ d'où on a une contradiction. Donc, $f(v_{n,1}) = 2$ et

$$\text{si } f(v_{n,1}) = 2 \text{ alors } \begin{cases} f(v_{n-1,1}) = f(v_{n,2}) = 0, \\ f(v_{n-1,2}) = 2. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n' = n-2 \equiv 1(mod3)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \geq \frac{7n'+2}{3}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n'$ et $j = 1, 2$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f) - 4$. D'après le Lemme 3.3.1.
$\frac{7n}{3} \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}) = w(f) = w(g) + 4 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{P_2}) + 4 = \frac{7(n-2)+2}{3} + 4 = \frac{7n}{3}$.

Case 2. $n \equiv 1(mod3)$. Alors nous devons avoir $f(v_{n,1}) = 0$, sinon nous avoir $f(v_{n,1}) = 2$.

$$\text{Si } f(v_{n,1}) = 0 \text{ alors } \begin{cases} f(v_{n-1,2}) = 0, \\ f(v_{n,2}) = 2, \\ f(v_{n-1,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n' = n-2 \equiv 2(mod3)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \geq \frac{7n'+2}{3}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \to$

$\{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n^{'}$ et $j = 1,2$. Il est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f)-5$. D'après le Lemme 3.3.1.
$\frac{7n+2}{3} \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}) = w(f) = w(g)+5 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{P_2})+5 = \frac{7(n-2)+1}{3}+5 = \frac{7n+2}{3}$.

$$\text{Si } f(v_{n,1}) = 2 \text{ alors } \begin{cases} f(v_{n-1,2}) = 2, \\ f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,1}) = 0. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-3 \equiv 1(mod3)$. Il découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \geq \frac{7n^{'}+2}{3}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \to \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n^{'}$ et $j = 1,2$. Il est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f)-7$. D'après le Lemme 3.3.1.
$\frac{7n+2}{3} \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}) = w(f) = w(g)+7 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-3}}\Box\overrightarrow{P_2})+7 = \frac{7(n-3)+2}{3}+7 = \frac{7n+2}{3}$.

Case 3. $n \equiv 2(mod3)$. Alors nous devons avoir $f(v_{n,1}) = 0$, sinon nous avoir $f(v_{n,1}) = 2$.

$$\text{Si } f(v_{n,1}) = 0 \text{ alors } \begin{cases} f(v_{n-1,2}) = 0, \\ f(v_{n,2}) = 2, \\ f(v_{n-1,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-2 \equiv 0(mod3)$. Il découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \geq \frac{7n^{'}}{3}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \to \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n^{'}$ et $j = 1,2$. Il est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f)-5$. D'après le Lemme 3.3.1.
$\frac{7n+1}{3} \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}) = w(f) = w(g)+5 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{P_2})+5 = \frac{7(n-2)}{3}+5 = \frac{7n+1}{3}$.

$$\text{Si } f(v_{n,1}) = 2 \text{ alors } \begin{cases} f(v_{n-1,2}) = 2, \\ f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,1}) = f(v_{n-2,2}) = 0, \\ f(v_{n-2,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,2}, v_{n-1,1}, v_{n-2,2}, v_{n-2,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-3 \equiv 2(mod3)$. Il découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \geq \frac{7n^{'}+1}{3}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}) \to \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n^{'}$ et $j = 1,2$. Il est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_2}$ de poids $w(f)-7$. D'après le Lemme 3.3.1.
$\frac{7n+1}{3} \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_2}) = w(f) = w(g)+7 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-3}}\Box\overrightarrow{P_2})+7 = \frac{7(n-3)+1}{3}+7 = \frac{7n+1}{3}$

Par conséquent

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_2) \geq \begin{cases} \frac{7n}{3} & \text{si } n \equiv 0(mod3), \\ \frac{7n+2}{3} & \text{si } n \equiv 1(mod3), \\ \frac{7n+1}{3} & \text{si } n \equiv 2(mod3). \end{cases}$$

■

3.4 Borne inférieur $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m})$

Proposition 3.4.1 *Pour tout nombre entier positif $n \geq 2$ et $m \geq 3$*

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_m) \leq \begin{cases} \frac{(2m+1)n+m-2}{2} & si\ n+m \equiv 0(mod2), \\ \frac{(2m+1)n+m-3}{2} & si\ n+m \equiv 1(mod2). \end{cases}$$

Preuve. *Soit $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m}$ une grille d'ordre $nm \geq 6$ avec $n \geq 2$ et $m \geq 3$.*
Soit $V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m}) = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\})$. On distingue deux cas:
Case 1. *$n+m \equiv 0(mod2)$. On considérer deux sous-cas:*
Case 1.1. *$n \equiv 0(mod2)$ et $m \equiv 0(mod2)$.*
On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m}) \to \{0,1,2,3\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 3 & si\ j = 1, i = 2k+1 avec\ 0 \leq k \leq \frac{n-2}{2}, \\ 3 & si\ i = 1, j = 2l+1 avec\ 0 \leq l \leq \frac{m-2}{2}, \\ 2 & si\ i+j \equiv 0(mod2) 2 \leq i \leq n et\ 2 \leq j \leq m, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDRD de poids

$w(f) = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\}) = \sum_{1\leq j\leq m}\sum_{1\leq i\leq n} f(v_{i,j}) = [\sum_{2\leq j\leq m}\sum_{2\leq i\leq n} f(v_{i,j})] + [\sum_{1\leq i\leq n} f(v_{i,1}) + \sum_{1\leq j\leq m} f(v_{1,j}) - f(v_{1,1})]$
$= 2|V_2| + 3|V_3|$
$= 2[(\frac{n}{2})(\frac{m}{2}) + (\frac{n}{2}-1)(\frac{m}{2}-1)] + 3[(\frac{n}{2}) + (\frac{m}{2}) - 1]$
$= \frac{nm + (n-2)(m-2)}{2} + \frac{3(n+m-2)}{2} = \frac{2nm+n+m-2}{2} = \frac{(2m+1)n+m-2}{2}.$
Case 1.2. *$n \equiv 1(mod2)$ et $m \equiv 1(mod2)$.*
On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m}) \to \{0,1,2,3\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 3 & si\ j = 1, i = 2k+1 avec\ 0 \leq k \leq \frac{n-3}{2}, \\ 3 & si\ i = 1, j = 2l+1 avec\ 0 \leq l \leq \frac{m-3}{2}, \\ 2 & si\ i+j \equiv 0(mod 2) 2 \leq i \leq n et\ 2 \leq j \leq m, \\ 2 & si\ i = n,\ j = 1, \\ 2 & si\ i = 1,\ j = m, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDRD de poids

$w(f) = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\}) = \sum_{1\leq j\leq m}\sum_{1\leq i\leq n} f(v_{i,j}) = [\sum_{2\leq j\leq m}\sum_{2\leq i\leq n} f(v_{i,j}) + f(v_{n,1}) + f(v_{1,m})] +$
$[\sum_{1\leq i\leq n-1} f(v_{i,1}) + \sum_{1\leq j\leq m-1} f(v_{1,j}) - f(v_{1,1})]$
$= 2|V_2| + 3|V_3|$
$= 2[(\frac{n-1}{2})(m-1)+2] + 3[(\frac{n-1}{2}) + (\frac{m-1}{2}) - 1)]$
$= \frac{2(n-1)(m-1)+3(m-1)+2}{2} = \frac{2nm+n+m-2}{2} = \frac{(2m+1)n+m-2}{2}.$

Case 2. *$n+m \equiv 1(mod 2)$. On a donc $n \equiv 0(mod 2)$ et $m \equiv 1(mod 2)$ ou bien $n \equiv 1(mod 2)$ et $m \equiv 0(mod 2)$. Par symétrie, et sans perte de généralité, on peut supposer que $n \equiv 0(mod 2)$ et $m \equiv 1(mod 2)$.*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m}) \to \{0,1,2,3\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 3 & si\ j = 1, i = 2k+1 avec\ 0 \leq k \leq \frac{n-2}{2}, \\ 3 & si\ i = 1, j = 2l+1 avec\ 0 \leq l \leq \frac{m-3}{2}, \\ 2 & si\ i+j \equiv 0(mod 2) 2 \leq i \leq n et\ 2 \leq j \leq m, \\ 2 & si\ i = 1 et j = m, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDRD de poids

$w(f) = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\}) = \sum_{1\leq j\leq m}\sum_{1\leq i\leq n} f(v_{i,j})$
$= [\sum_{2\leq j\leq m}\sum_{2\leq i\leq n} f(v_{i,j}) + f(v_{1,m})] + [\sum_{1\leq i\leq n-1} f(v_{i,1}) + \sum_{1\leq j\leq m-1} f(v_{1,j}) - f(v_{1,1})]$
$= 2|V_2| + 3|V_3|$
$= 2[(\frac{n}{2})(\frac{m-1}{2}) + (\frac{n}{2}-1)(\frac{m-1}{2}+1] + 3[(\frac{n}{2}) + (\frac{m-1}{2}) - 1)]$

$$= (n-1)(m-1) + \frac{3(n+m-1)}{2} - 1 = \frac{2nm+n+m-3}{2} = \frac{(2m+1)n+m-3}{2}.$$

■

3.5 Valeur exacte de $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3})$ et $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_4})$

Lemme 3.5.1 *Pour tout nombre entier positif $n \geq 2$ $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_3) \leq \lceil \frac{7n}{2} \rceil$ (voir la proposition 3.4.1).*

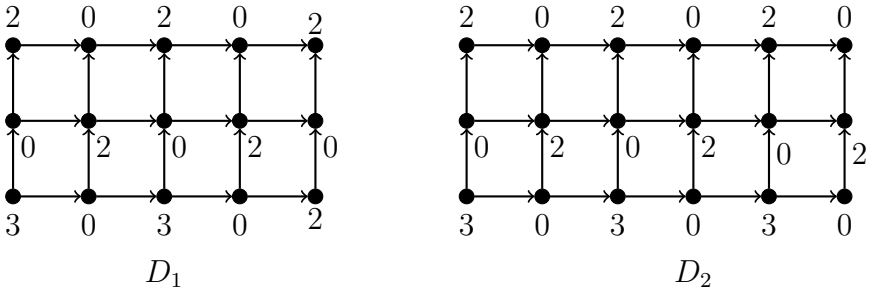


Figure 3.5.1 : La grille $D_1 = \overrightarrow{P_5}\Box\overrightarrow{P_3}$ et $D_2 = \overrightarrow{P_6}\Box\overrightarrow{P_3}$.

Proposition 3.5.1 *Pour tout nombre entier positif $n \geq 2$ $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_3) = \lceil \frac{7n}{2} \rceil$.*

Preuve. Il découle du Lemme 3.5.1 que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) \leq \lceil \frac{7n}{2} \rceil$. Maintenant, nous prouvons l'inégalité inverse. On procède par induction sur n. La propriété est triviale pour tous les chemins d'ordre $2 \leq n \leq 4$, Supposons que $n \geq 5$ et que l'hypothèse est vraie pour tout les grille d'ordre n' inférieur à n, i.e, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \lceil \frac{7n'}{2} \rceil$. Soit $f = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ une γ_{dR}-fonction de $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}$ avec $V_1 = \emptyset$ (voir la Proposition 3.1.1). Clairement $f(v_{n,j}) \neq 3$ $j = 1, 2, 3$. Nous distinguons deux cas :

Case 1. $n \equiv 0(mod 2)$. Alors nous devons avoir $f(v_{n,1}) = 0$, sinon nous avoir $f(v_{n,1}) = 2$.

$$\text{Si } f(v_{n,1}) = 2 \text{ alors } \begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,3}) = f(v_{n-1,1}) = 2, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,3}) = 0. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}$ − $\{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-2 \equiv 0(mod2)$. Il découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \rightarrow \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n^{'}$ et $j = 1,2,3$. Il est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f) - 8$. D'après le Lemme 3.5.1 $\frac{7n}{2} \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) = w(f) = w(g) + 8 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 8 = \frac{7(n-2)}{2} + 8 = \frac{7n+2}{2}$ d'où on a une contradiction. Donc,$f(v_{n,1}) = 0$ et

$$\begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,3}) = 2, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,3}) = 0, \\ f(v_{n-1,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}$−$\{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-2 \equiv 0(mod2)$ par l'hypothèse d'induction $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \rightarrow \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n^{'}$ et $j = 1,2,3$. Il est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f)-7$. Donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3})$=$w(f) = w(g)+7 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3})+7$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 7 = \frac{7n}{2}$.

Case 2. $n \equiv 1(mod2)$. Alors nous devons avoir $\gamma_{dR}(v_{n,1}) = 0$ sinon nous avoir $\gamma_{dR}(v_{n,1}) = 2$

Case 2.1. Si $\gamma_{dR}(v_{n,1}) = 2$. Alors

$$\begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,1}) = f(v_{n-2,2}) = f(v_{n-1,3}) = 0, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,3}) = f(v_{n-2,3}) = 2, \\ f(v_{n-2,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}$−$\{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-3 \equiv 0(mod2)$. Il découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \rightarrow \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n^{'}$ et $j = 1,2,3$. Il est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f) - 11$ donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3})$=$w(f) = w(g)+11 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 11$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-3}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 11 = \frac{7n}{2}$.

Case 2.2. Si $\gamma_{dR}(v_{n,1}) = 0$. Alors

$$\begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,3}) = f(v_{n-2,3}) = f(v_{n-2,1}) = 2, \\ f(v_{n-2,2}) = f(v_{n,3}) = f(v_{n-1,2}) = 0, \\ f(v_{n-1,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}-\{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-3 \equiv 0(mod2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \frac{7n^{'}}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) \to \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n^{'}$ et $j = 1,2,3$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}$ de poids $w(f)-11$ donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3})$=$w(f) = w(g)+11 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 11$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-3}}\Box\overrightarrow{P_3}) + 11 = \frac{7n}{2}$ Par conséquent $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) \geq \lceil\frac{7n}{2}\rceil$.

■

Lemme 3.5.2 *Pour tout nombre entier positif* $n \geq 2$ $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_4) \leq \lceil\frac{9n+1}{2}\rceil$ *(voir la proposition 3.4.1).*

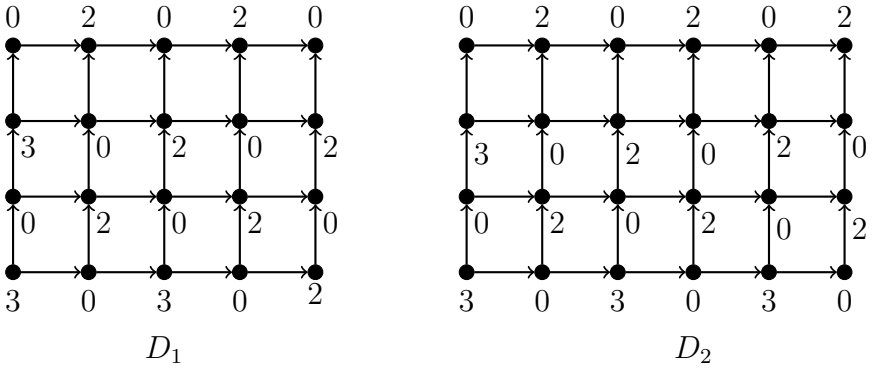


Figure 3.5.2 : La grille $D_1 = \overrightarrow{P_5}\Box\overrightarrow{P_4}$ et $D_2 = \overrightarrow{P_6}\Box\overrightarrow{P_4}$.

Proposition 3.5.2 *Pour tout nombre entier positif* $n \geq 2$ $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P}_4) = \lceil\frac{9n+1}{2}\rceil$.

Preuve. II découle du Lemme 3.5.2 que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_4}) \leq \lceil\frac{9n+1}{2}\rceil$. Maintenant, nous prouvons l'inégalité inverse. On procède par induction sur n. La propriété est triviale pour tous les chemins d'ordre $2 \leq n \leq 4$, Supposons que $n \geq 5$ et que l'hypothèse est vraie pour tout chemin d'ordre $n^{'}$ inférieur à n, i.e, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}) \geq \lceil\frac{9n^{'}+1}{2}\rceil$. soit $f = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ une γ_{dR}-fonction de $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_4}$ avec $V_1 = \emptyset$ (voir la Proposition 3.1.1). Clairement $f(v_{n,j}) \neq 3$ $j = 1,2,3,4$. Nous distinguons deux cas :

Case 1. $n \equiv 0(mod2)$. Alors nous devons avoir $f(v_{n,1}) = 0$, sinon nous avoir $f(v_{n,1}) = 2$.

$$\text{Si } f(v_{n,1}) = 2 \text{ alors } \begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,3}) = f(v_{n,4}) = 2, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,3}) = f(v_{n-1,4}) = 0, \\ f(v_{n-1,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_4} - \{v_{n,2}, v_{n,4}, v_{n-1,4}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-2 \equiv 0(mod2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}) \geq \frac{9n^{'}+2}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}) \to \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1,2,3,4$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}$ de poids $w(f) - 11$. D'après le Lemme 3.5.2 $\frac{9n+2}{2} \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_4}) = w(f) = w(g) + 11 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{P_4}) + 11 = \frac{9(n-2)+2}{2} + 11 = \frac{9n+6}{2}$ d'où on a une contradiction. Donc,$f(v_{n,1}) = 0$ et

$$\begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,3}) = f(v_{n,4}) = 2, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,3}) = f(v_{n-1,4}) = 0, \\ f(v_{n-1,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_4} - \{v_{n,2}, v_{n,4}, v_{n-1,4}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n - 2 \equiv 0(mod2)$ par l'hypothèse d'induction $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}) \geq \frac{9n^{'}+2}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}) \to \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1,2,3,4$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}$ de poids $w(f) - 9$. Donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_4})$=$w(f) = w(g) + 9 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}) + 9$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{P_4}) + 9 = \frac{9n+2}{2}$.

Case 2. $n \equiv 1(mod2)$. Alors nous devons avoir $\gamma_{dR}(v_{n,1}) = 0$ sinon nous avoir $\gamma_{dR}(v_{n,1}) = 2$. Si $\gamma_{dR}(v_{n,1}) = 0$. Alors

$$\begin{cases} f(v_{n-2,2}) = f(v_{n-1,2}) = f(v_{n-1,3}) = f(v_{n,3}) = f(v_{n-2,4}) = f(v_{n,4}) = 0, \\ f(v_{n-2,1}) = 2, \\ f(v_{n-1,1}) = f(v_{n,2}) = f(v_{n-2,3}) = f(v_{n-1,4}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_4}$-$\{v_{n-1,2}, v_{n,1}, v_{n-1,1}, v_{n-2,1}, v_{n,3}, v_{n-2,2}, v_{n-1,4}, v_{n,2}, v_{n-2,3}, v_{n-1,3}, v_{n,4}, v_{n-2,4}\}$ d'ordre $n^{'} = n - 3 \equiv 0(mod2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}) \geq \frac{9n^{'}+1}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}) \to \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1,2,3,4$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}$ de poids $w(f) - 14$ donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_4})$=$w(f) = w(g) + 14 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}) + 14$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-3}}\Box\overrightarrow{P_4}) + 14 = \frac{9n+3}{2}$ d'où on a une contradiction. Donc,$f(v_{n,1}) = 2$ et

$$\begin{cases} f(v_{n,1}) = f(v_{n,3}) = 2, \\ f(v_{n,2}) = f(v_{n,4}) = 0. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_4} - \{v_{n,1}, v_{n,2}, v_{n,3}, v_{n,4}\}$ d'ordre $n^{'} = n - 1 \equiv 0(mod2)$ par l'hypothèse d'induction $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}) \geq \frac{9n^{'}+2}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}) \to \{0,1,2,3\}$ par

$g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n'$ et $j = 1, 2, 3, 4$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}$ de poids $w(f) - 4$. Donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_4})$=$w(f) = w(g) + 4 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}) + 4$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-1}}\Box\overrightarrow{P_4}) + 4 = \frac{9n+1}{2}$

Par conséquent $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_4}) \geq \lceil\frac{9n+1}{2}\rceil$. ■

3.6 Borne inférieur $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m})$

Proposition 3.6.1 *Pour tout nombre entier positif $n \geq 2$ et $m \geq 3$*

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{C}_m) \leq \begin{cases} \frac{(2n+1)m}{2} & si\ m \equiv 0(mod2), \\ \lceil\frac{(2m+1)n+m-3}{2}\rceil & si\ m \equiv 1(mod2). \end{cases}$$

Preuve. *Soit $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}$ un prisme d'ordre $nm \geq 6$ avec $n \geq 2$ et $m \geq 3$.*
Soit $V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}) = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\})$. On distingue deux cas:
Case 1. *Si $m \equiv 0(mod2)$. On distingue deux sous cas:*
Case 1.1. *Si $n \equiv 0(mod2)$ On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par*

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 3 & si\ i = 1, j = 2k+1 avec\ 0 \leq k \leq \frac{m-2}{2}, \\ 2 & si\ i = 2k+1, 1 \leq k \leq \frac{n-2}{2} et\ j = 2k'+1, 0 \leq k' \leq \frac{m-2}{2}, \\ 2 & si\ i = 2k, 1 \leq k \leq \frac{n}{2} et\ j = 2k', 1 \leq k' \leq \frac{m}{2}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDRD de poids
$w(f) = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\}) = \sum_{1\leq j\leq m}\sum_{1\leq i\leq n} f(v_{i,j}) = 2|V_2| + 3|V_3|$
$= 3(\frac{m}{2}) + 2[(\frac{m}{2})(\frac{n-2}{2}) + (\frac{m}{2})(\frac{n}{2})] = \frac{(2n+1)m}{2}$.
Case 1.2. *Si $n \equiv 1(mod2)$*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 3 & si\ i = 1, j = 2k+1 avec\ 0 \leq k \leq \frac{m-2}{2}, \\ 2 & si\ i = 2k+1, 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2} et\ j = 2k'+1, 0 \leq k' \leq \frac{m-2}{2}, \\ 2 & si\ i = 2k, 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2} et\ j = 2k', 1 \leq k' \leq \frac{m}{2}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDRD de poids
$w(f) = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\}) = \sum_{1\leq j\leq m}\sum_{1\leq i\leq n} f(v_{i,j}) = 2|V_2| + 3|V_3|$
$= 3(\frac{m}{2}) + 2[(\frac{m}{2})(\frac{n-1}{2}) + (\frac{m}{2})(\frac{n-1}{2})] = \frac{(2n+1)m}{2}$.

Case 2. *Si $m \equiv 1(mod2)$. On distingue deux sous cas:*
Case 2.1. *Si $n \equiv 1(mod2)$ Soit $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}$ une prisme d'ordre $nm \geq 6$ avec $n \geq 2$ et $m \geq 3$.*

Soit $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}$ une prisme de mn sommets. Alors, $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m} = \overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m} - \{\bigcup_{i=1}^{n}\overrightarrow{v_{i,m}, v_{i,1}}\}$ où $\overrightarrow{v_{i,m}, v_{i,1}}$ sont des arc consécutifs de $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}$. D'après le observation 3.1.1
$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \leq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m} - \{\bigcup_{i=1}^{n}\overrightarrow{v_{i,m}, v_{i,1}}\}) = \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m})$.
D'après la Proposition 3.4.1,

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \leq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m}) = \tfrac{(2m+1)n+m-2}{2}.$$

Case 2.2. *Si $n \equiv 0(mod2)$ Soit $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}$ une prisme d'ordre $nm \geq 6$ avec $n \geq 2$ et $m \geq 3$.*

Soit $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}$ une prisme de mn sommets. Alors, $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m} = \overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m} - \{\bigcup_{i=1}^{n}\overrightarrow{v_{i,m}, v_{i,1}}\}$ où $\overrightarrow{v_{i,m}, v_{i,1}}$ sont des arc consécutifs de $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}$. D'après le observation 3.1.1
$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \leq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m} - \{\bigcup_{i=1}^{n}\overrightarrow{v_{i,m}, v_{i,1}}\}) = \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m})$.
D'après la Proposition 3.4.1,

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \leq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m}) = \tfrac{(2m+1)n+m-3}{2}.$$

■

3.7 Valeur exacte de $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_3})$ et $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_4})$

Lemme 3.7.1 *(voir la Figure 3.7.1).*

Pour tout nombre entier positif n, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_3}) \leq \lceil\frac{7n}{2}\rceil$. (voir la proposition 3.6.1).

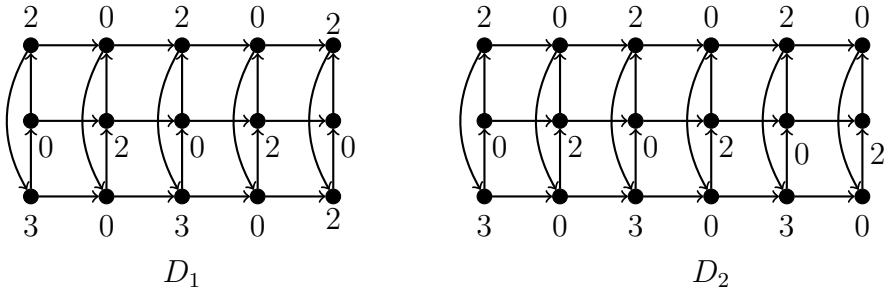


Figure 3.7.1 : Le prisme $D_1 = \overrightarrow{P_5}\Box\overrightarrow{C_3}$ et $D_2 = \overrightarrow{P_6}\Box\overrightarrow{C_3}$.

Proposition 3.7.1 *Pour tout nombre entier positif n, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_3}) = \lceil\frac{7n}{2}\rceil$.*

Preuve. Maintenant, nous prouvons l'inégalité inverse. On procède par induction sur n. La propriété est triviale pour tous les chemins d'ordre $2 \leq n \leq 4$, Supposons que $n \geq 5$ et que l'hypothèse est vraie pour tout chemin d'ordre $n^{'}$ inférieur à n, i.e, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_3}) \geq \lceil\frac{7n^{'}}{2}\rceil$. soit $f = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ une γ_{dR}-fonction de $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_3}$ avec $V_1 = \emptyset$ (voir la Proposition 3.1.1). Clairement $f(v_{n,j}) \neq 3$ $j = 1, 2, 3$. Nous distinguons deux cas :

Case 1. $n \equiv 0(mod2)$. Alors nous devons avoir $f(v_{n,1}) = 0$, sinon nous avoir $f(v_{n,1}) = 2$.

$$\text{Si } f(v_{n,1}) = 2 \text{ alors } \begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,3}) = 2, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,3}) = 0, \\ f(v_{n-1,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n - 2 \equiv 0(mod2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_3}) \geq \frac{7n^{'}}{2}$. On définit la fonction g : $V(\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_3}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1, 2, 3$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_3}$ de poids $w(f) - 9$. D'après le Lemme 3.7.1 $\frac{7n}{2} \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_3}) = w(f) = w(g) + 9 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{C_3}) + 9 = \frac{7(n-2)}{2} + 9 = \frac{7n+4}{2}$ d'où on a une contradiction. Donc,$f(v_{n,1}) = 0$ et

$$\begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,3}) = 2, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,3}) = 0, \\ f(v_{n-1,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n - 2 \equiv 0(mod2)$ par l'hypothèse d'induction $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_3}) \geq \frac{7n^{'}}{2}$. On définit la fonction g : $V(\overrightarrow{P_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_3}) \to$

$\{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n^{'}$ et $j = 1,2,3$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}$ de poids $w(f)-7$. Donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_3})$=$w(f) = w(g)+7 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3})+7$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{C_3})+7 = \frac{7n}{2}$.

Case 2. $n \equiv 1(mod2)$. Alors nous devons avoir $\gamma_{dR}(v_{n,1}) = 0$ sinon nous avoir $\gamma_{dR}(v_{n,1}) = 2$

Case 2.1. Si $\gamma_{dR}(v_{n,1}) = 2$. Alors

$$\begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,1}) = f(v_{n-2,2}) = f(v_{n-1,3}) = 0, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,3}) = f(v_{n-2,3}) = 2, \\ f(v_{n-2,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_3}-\{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-3 \equiv 0(mod2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}) \geq \frac{7n^{'}}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}) \to \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n^{'}$ et $j = 1,2,3$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}$ de poids $w(f)-11$ donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_3})$=$w(f) = w(g)+11 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3})+11$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-3}}\Box\overrightarrow{C_3})+11 = \frac{7n}{2}$.

Case 2.2. Si $\gamma_{dR}(v_{n,1}) = 0$. Alors

$$\begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,3}) = f(v_{n-2,3}) = f(v_{n-2,1}) = 2, \\ f(v_{n-2,2}) = f(v_{n,3}) = f(v_{n-1,2}) = 0, \\ f(v_{n-1,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_3}-\{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-3 \equiv 0(mod2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}) \geq \frac{7n^{'}}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}) \to \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n^{'}$ et $j = 1,2,3$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}$ de poids $w(f)-11$ donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_3})$=$w(f) = w(g)+11 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3})+11$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-3}}\Box\overrightarrow{C_3})+11 = \frac{7n}{2}$ Par conséquent $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_3}) \geq \lceil\frac{7n}{2}\rceil$.

■

Lemme 3.7.2 *Pour tout nombre entier positif $n \geq 2$ $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{C}_4) \leq 4n+2$, (voir la proposition 3.6.1).*

(voire le prisme D_2 de la Figure 3.7.2).

Proposition 3.7.2 *Pour tout nombre entier positif $n \geq 2$ $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{C}_4) = 4n+2$.*

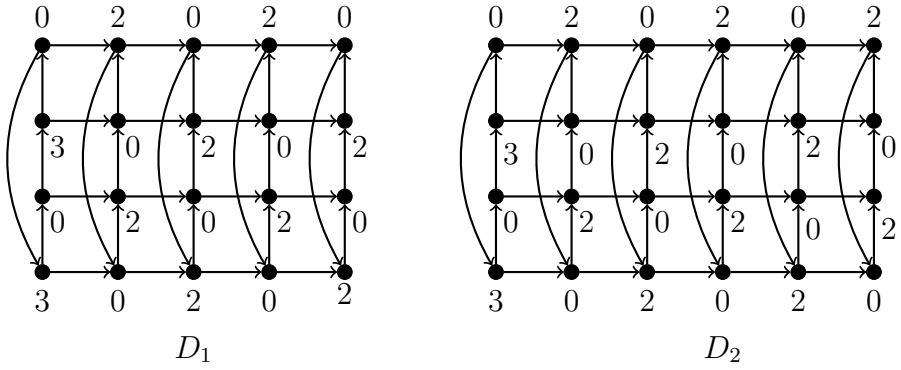


Figure 3.7.2 : Le prisme $D_1 = \overrightarrow{P_5}\Box\overrightarrow{P_4}$ et $D_2 = \overrightarrow{P_6}\Box\overrightarrow{P_4}$.

Preuve. II découle du Lemme 3.7.2 que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_4}) \leq 4n+2$. Maintenant, nous prouvons l'inégalité inverse. On procède par induction sur n. La propriété est triviale pour tous les prisme d'ordre $2 \leq n \leq 4$, Supposons que $n \geq 5$ et que l'hypothèse est vraie pour tout prisme d'ordre $n^{'}$ inférieur à n,i.e, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}) \geq 4n+2$. Soit $f = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ une γ_{dR}-fonction de $\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_4}$ avec $V_1 = \emptyset$ (voir la Proposition 3.1.1). Clairement $f(v_{n,j}) \neq 3$ $j = 1, 2, 3, 4$. Nous distinguons deux cas :

Case 1. $n \equiv 0(mod2)$. Alors nous devons avoir $f(v_{n,1}) = 0$, sinon nous avoir $f(v_{n,1}) = 2$.

$$\text{Si } f(v_{n,1}) = 2 \text{ alors } \begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,3}) = f(v_{n,4}) = f(v_{n-1,1}) = 2, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,3}) = f(v_{n-1,4}) = 0. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_4} - \{v_{n,2}, v_{n,4}, v_{n-1,4}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-2 \equiv 0(mod2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}) \geq 4n^{'}+2$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{P_4}) \to \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1, 2, 3, 4$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}$ de poids $w(f) - 10$. D'après le Lemme 3.7.2 $4n+2 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_4}) = w(f) = w(g)+10 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{C_4})+10 = 4(n-2)+2+10 = 4n+4$ d'où on a une contradiction. Donc, $f(v_{n,1}) = 0$ et

$$\text{si } f(v_{n,1}) = 0 \text{ alors } \begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,3}) = f(v_{n,4}) = f(v_{n-1,1}) = 2, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,3}) = f(v_{n-1,4}) = 0. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_4} - \{v_{n,2}, v_{n,4}, v_{n-1,4}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-2 \equiv 0(mod2)$ par l'hypothèse d'induction $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}) \geq 4n^{'}+2$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}) \to \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1, 2, 3, 4$. II

est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}$ de poids $w(f)-8$. Donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_4})$=$w(f)=w(g)+8\geq\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4})+8$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{C_4})+8=4n+2$.

Case 2. $n\equiv 1(mod 2)$. Alors nous devons avoir $\gamma_{dR}(v_{n,1})=0$ sinon nous avoir $\gamma_{dR}(v_{n,1})=2$. Si $\gamma_{dR}(v_{n,1})=0$. Alors

$$\begin{cases} f(v_{n,3})=f(v_{n-1,3})=f(v_{n-1,1})=0,\\ f(v_{n-1,2})=f(v_{n-1,4})=2,\\ f(v_{n,2})=f(v_{n,4})=3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_4}-\{v_{n-1,2},v_{n,1},v_{n-1,1},v_{n-2,1},v_{n,3},v_{n-2,2},v_{n-1,4},v_{n,2},v_{n-2,3},v_{n-1,3},v_{n,4},v_{n-2,4}\}$ d'ordre $n^{'}=n-2\equiv 1(mod 2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4})\geq 4n^{'}+2$. On définit la fonction $g: V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4})\rightarrow\{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j})=f(v_{i,j})$ pour $i=1,\ldots,n^{'}$ et $j=1,2,3,4$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}$ de poids $w(f)-10$ donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_4})$=$w(f)=w(g)+10\geq\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4})+10$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-2}}\Box\overrightarrow{C_4})+10=4n+4$ d'où on a une contradiction. Donc,$f(v_{n,1})=2$ et

$$\begin{cases} f(v_{n,4})=f(v_{n-1,3})=f(v_{n-1,1})=f(v_{n,2})=0,\\ f(v_{n-1,2})=f(v_{n-1,4})=f(v_{n,3})=2. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}$=$\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_4}-\{v_{n,1},v_{n,2},v_{n,3},v_{n,4},v_{n-1,1},v_{n-1,2},v_{n-1,3},v_{n-1,4}\}$ d'ordre $n^{'}=n-1\equiv 1(mod 2)$ par l'hypothèse d'induction $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4})\geq 4n^{'}+2$. On définit la fonction $g: V(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4})\rightarrow\{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j})=f(v_{i,j})$ pour $i=1,\ldots,n^{'}$ et $j=1,2,3,4$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}$ de poids $w(f)-8$. Donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_4})$=$w(f)=w(g)+8\geq\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4})+8$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_{n-1}}\Box\overrightarrow{C_4})+8=4n+2$

Par conséquent $\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{C_4})\geq 4n+2$. ■

3.8 Borne inférieur $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_m})$

Proposition 3.8.1 *Pour tout nombre entier positif $n\geq 2$ et $m\geq 3$*

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{C}_n\Box\overrightarrow{C}_m)\leq\begin{cases} \frac{(2n+1)m}{2} & si\ m: paire; n: impaire\\ \frac{(2m+1)n+m-2}{2} & si\ m: impaire; n: impaire,\\ \frac{(2m+1)n}{2} & si\ m: impaire; n: paire,\\ nm & si\ m: paire; n: paire. \end{cases}$$

Preuve. *Soit $\overrightarrow{C_n}\square\overrightarrow{C_m}$ un grille torique d'ordre $nm \geq 6$ avec $n \geq 2$ et $m \geq 3$.*
Soit $V(\overrightarrow{C_n}\square\overrightarrow{C_m}) = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\})$. On distingue quater cas.

Case 1. *Si $m \equiv 0(mod2)$ et $n \equiv 1(mod2)$.*
Soit $\overrightarrow{C_n}\square\overrightarrow{C_m}$ un grille torique de mn sommets. Alors, $\overrightarrow{P_n}\square\overrightarrow{C_m} = \overrightarrow{C_n}\square\overrightarrow{C_m} - \{\bigcup_{j=1}^{m}\overrightarrow{v_{n,j}, v_{1,j}}\}$
où $\overrightarrow{v_{n,j}, v_{1,j}}$ sont des arc consécutifs de $\overrightarrow{C_n}\square\overrightarrow{C_m}$. D'après le observation 3.1.1
$\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\square\overrightarrow{C_m}) \leq \gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\square\overrightarrow{C_m} - \{\bigcup_{j=1}^{m}\overrightarrow{v_{n,j}, v_{1,j}}\}) = \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\square\overrightarrow{C_m})$.
D'après la Proposition 3.6.1,

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\square\overrightarrow{C_m}) \leq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\square\overrightarrow{C_m}) = \tfrac{(2n+1)m}{2}.$$

Case 2. *Si $m \equiv 1(mod2)$ et $n \equiv 1(mod2)$.*
Soit $\overrightarrow{C_n}\square\overrightarrow{C_m}$ un grille torique de mn sommets. Alors, $\overrightarrow{P_n}\square\overrightarrow{C_m} = \overrightarrow{C_n}\square\overrightarrow{C_m} - \{\bigcup_{j=1}^{m}\overrightarrow{v_{n,j}, v_{1,j}}\}$
où $\overrightarrow{v_{n,j}, v_{1,j}}$ sont des arc consécutifs de $\overrightarrow{C_n}\square\overrightarrow{C_m}$. D'après le observation 3.1.1
$\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\square\overrightarrow{C_m}) \leq \gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\square\overrightarrow{C_m} - \{\bigcup_{j=1}^{m}\overrightarrow{v_{n,j}, v_{1,j}}\}) = \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\square\overrightarrow{C_m})$.
D'après la Proposition 3.6.1,

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\square\overrightarrow{C_m}) \leq \gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\square\overrightarrow{C_m}) = \tfrac{(2m+1)n+m-2}{2}.$$

Case 3. *Si $m \equiv 1(mod2)$ et $n \equiv 0(mod2)$.*

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{C_n}\square\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2,3\}$ par

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 3 & si\ j = 1, i = 2k+1 avec\ 0 \leq k \leq \frac{n-2}{2}, \\ 2 & si\ i = 2k, 1 \leq k \leq \frac{n}{2} et\ j = 2k', 1 \leq k' \leq \frac{m-1}{2}, \\ 2 & si\ i = 2k+1, 0 \leq k \leq \frac{n-2}{2} et\ j = 2k'+1, 1 \leq k' \leq \frac{m-1}{2}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f est une FDRD de poids
$w(f) = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\}) = \sum_{1\leq j\leq m}\sum_{1\leq i\leq n} f(v_{i,j}) = 2|V_2| + 3|V_3|$

$= 3[(\frac{n}{2})] + 2[(\frac{n}{2})(\frac{m-1}{2}) + (\frac{n}{2})(\frac{m-1}{2})] = \frac{(2m+1)n}{2}$.

Case 4. *Si* $m \equiv 0(mod2)$ *et* $n \equiv 0(mod2)$.

On définit la fonction $f : V(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_m}) \to \{0,1,2,3\}$ *par*

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2 & si\ i = 2k, 1 \leq k \leq \frac{n}{2} et\ j = 2k', 1 \leq k' \leq \frac{m}{2}, \\ 2 & si\ i = 2k+1, 0 \leq k \leq \frac{n-2}{2} et\ j = 2k'+1, 0 \leq k' \leq \frac{m-2}{2}, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que f *est une FDRD de poids*

$w(f) = f(\bigcup_{1\leq j\leq m}\bigcup_{1\leq i\leq n}\{v_{i,j}\}) = \sum_{1\leq j\leq m}\sum_{1\leq i\leq n} f(v_{i,j}) = 2|V_2| + 3|V_3|$

$= 2[(\frac{n}{2})(\frac{m}{2}) + (\frac{n}{2})(\frac{m}{2})] = mn.$

■

3.9 Valeur exacte de $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_3})$ et $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4})$

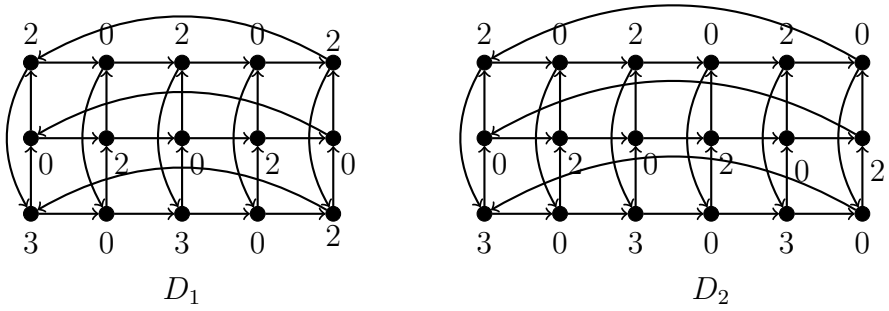


Figure 3.9.1 : La grille torique $D_1 = \overrightarrow{C_5}\Box\overrightarrow{C_3}$ et $D_2 = \overrightarrow{C_6}\Box\overrightarrow{C_3}$.

Lemme 3.9.1 *(voire la Figure 3.9.1).*

Pour tout nombre entier positif n, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_3}) \leq \lceil\frac{7n}{2}\rceil$, *(voir la proposition 3.8.1).*

Proposition 3.9.1 *Pour tout nombre entier positif* n, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_3}) = \lceil\frac{7n}{2}\rceil$.

Preuve. Maintenant, nous prouvons l'inégalité inverse. On procède par induction sur n. La propriété est triviale pour tous les chemins d'ordre $2 \leq n \leq 4$, Supposons que $n \geq 5$ et que l'hypothèse est vraie pour tout chemin d'ordre $n^{'}$ inférieur à n, i.e, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}) \geq \lceil \frac{7n^{'}}{2} \rceil$. Soit $f = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ une γ_{dR}-fonction de $\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_3}$ avec $V_1 = \emptyset$ (voir la Proposition 3.1.1). Clairement $f(v_{n,j}) \neq 3$ $j = 1, 2, 3$. Nous distinguons deux cas :

Case 1. $n \equiv 0(mod2)$. Alors nous devons avoir $f(v_{n,1}) = 0$, sinon nous avoir $f(v_{n,1}) = 2$.

$$\text{Si } f(v_{n,1}) = 2 \text{ alors } \begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,3}) = 2, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,3}) = 0, \\ f(v_{n-1,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}$=$\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n - 2 \equiv 0(mod2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}) \geq \frac{7n^{'}}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1, 2, 3$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}$ de poids $w(f) - 8$. D'après le Lemme 3.9.1 $\frac{7n}{2} \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_3}) = w(f) = w(g) + 8 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n-2}}\Box\overrightarrow{C_3}) + 8 = \frac{7(n-2)}{2} + 8 = \frac{7n+2}{2}$ d'où on a une contradiction. Donc, $f(v_{n,1}) = 0$ et

$$\begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,3}) = 2, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,3}) = 0, \\ f(v_{n-1,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}$=$\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_3} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-2 \equiv 0(mod2)$ par l'hypothèse d'induction $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}) \geq \frac{7n^{'}}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1, 2, 3$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}$ de poids $w(f)-7$. Donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_3})$=$w(f) = w(g)+7 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3})+ 7$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n-2}}\Box\overrightarrow{C_3}) + 7 = \frac{7n}{2}$.

Case 2. $n \equiv 1(mod2)$. Alors nous devons avoir $\gamma_{dR}(v_{n,1}) = 0$ sinon nous avoir $\gamma_{dR}(v_{n,1}) = 2$.

Case 2.1. Si $\gamma_{dR}(v_{n,1}) = 2$. Alors

$$\begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,1}) = f(v_{n-2,2}) = f(v_{n-1,3}) = 0, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,3}) = f(v_{n-2,3}) = 2, \\ f(v_{n-2,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}$=$\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_3}-\{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-3 \equiv 0(mod2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}) \geq \frac{7n^{'}}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}) \to \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n^{'}$ et $j = 1,2,3$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}$ de poids $w(f)-11$ donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_3})$=$w(f) = w(g)+11 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}) + 11$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n-3}}\Box\overrightarrow{C_3}) + 11 = \frac{7n}{2}$.

Case 2.2. Si $\gamma_{dR}(v_{n,1}) = 0$. Alors

$$\begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,3}) = f(v_{n-2,3}) = f(v_{n-2,1}) = 2, \\ f(v_{n-2,2}) = f(v_{n,3}) = f(v_{n-1,2}) = 0, \\ f(v_{n-1,1}) = 3. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}$=$\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_3}-\{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-3 \equiv 0(mod2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}) \geq \frac{7n^{'}}{2}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}) \to \{0,1,2,3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1,\ldots,n^{'}$ et $j = 1,2,3$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}$ de poids $w(f)-11$donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_3})$=$w(f) = w(g)+11 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_3}) + 11$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n-3}}\Box\overrightarrow{C_3}) + 11 = \frac{7n}{2}$ Par conséquent $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_3}) \geq \lceil\frac{7n}{2}\rceil$.

■

Lemme 3.9.2 *Pour tout nombre entier positif pair $n \geq 2$ $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4}) \leq 4n$, (voir la proposition 3.8.1).*

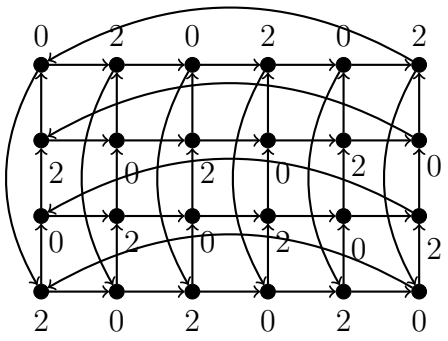


Figure 3.9.2 : La grille torique $D = \overrightarrow{C_6}\Box\overrightarrow{C_4}$.

Proposition 3.9.2 *Pour tout nombre entier positif pair $n \geq 2$ $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4}) = 4n$.*

Preuve. II découle du Lemme 3.9.2 que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4}) \leq 4n$. Maintenant, nous prouvons l'inégalité inverse. On procède par induction sur n. La propriété est triviale pour tous les grille torique d'ordre $2 \leq n \leq 4$, supposons que $n \geq 5$ et que l'hypothèse est vraie pour tout grille torique d'ordre $n^{'}$ inférieur à n, i.e, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}) \geq 4n^{'}$. Soit $f = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ une γ_{dR}-fonction de $\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4}$ avec $V_1 = \emptyset$ (voir la Proposition 3.1.1). Clairement $f(v_{n,j}) \neq 3$ $j = 1, 2, 3, 4$. Nous distinguons deux cas :

$$\text{Si } f(v_{n,1}) = 2 \text{ alors } \begin{cases} f(v_{n-1,1}) = f(v_{n,2}) = f(v_{n,4}) = f(v_{n-1,3}) = 2, \\ f(v_{n-1,4}) = f(v_{n,3}) = f(v_{n-1,2}) = 0. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}$=$\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4} - \{v_{n,2}, v_{n-1,4}, v_{n,4}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-2 \equiv 0(mod 2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}) \geq 4n^{'}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1, 2, 3, 4$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}$ de poids $w(f) - 10$. D'après le Lemme 3.9.2 $4n \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4}) = w(f) = w(g) + 10 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n-2}}\Box\overrightarrow{C_4}) + 10 = 4(n-2) + 10 = 4n + 2$ d'où on a une contradiction. Donc, $f(v_{n,1}) = 0$ et

$$\begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,1}) = f(v_{n-1,3}) = f(v_{n,4}) = 2, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,3}) = f(v_{n-1,4}) = 0. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}$=$\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}, v_{n-1,4}, v_{n,4}\}$ d'ordre $n^{'} = n - 2 \equiv 0(mod 2)$ par l'hypothèse d'induction $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}) \geq 4n^{'}$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1, 2, 3, 4$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}$ de poids $w(f) - 8$. Donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4})$=$w(f) = w(g) + 8 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n'}}\Box\overrightarrow{C_4}) + 8$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n-2}}\Box\overrightarrow{C_4}) + 8 = 4n$ Par conséquent $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4}) \geq 4n$. ■

Lemme 3.9.3 *(voir la figure 3.9.3).*
Pour tout nombre entier positif impair n, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4}) \leq 4n+2$, (voir la proposition 3.8.1).

Proposition 3.9.3 *Pour tout nombre entier positif impair n, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4}) = 4n + 2$.*

Preuve. Maintenant, nous prouvons l'inégalité inverse. On procède par induction sur n. La propriété est triviale pour tous les chemins d'ordre $2 \leq n \leq 4$, supposons que $n \geq 5$ et que

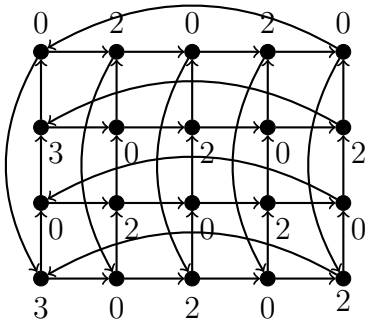


Figure 3.9.3 : La grille torique $D = \overrightarrow{C_5}\Box\overrightarrow{C_4}$.

l'hypothèse est vraie pour tout chemin d'ordre $n^{'}$ inférieur à n, i.e, $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_4}) \geq 4n^{'}+2$. Soit $f = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ une γ_{dR}-fonction de $\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4}$ avec $V_1 = \emptyset$ (voir la Proposition 3.1.1). Clairement $f(v_{n,j}) \neq 3$ $j = 1, 2, 3, 4$. Nous distinguons deux cas :

$$\text{Si } f(v_{n,1}) = 0 \text{ alors } \begin{cases} f(v_{n-1,3}) = f(v_{n-1,1}) = 3, \\ f(v_{n,2}) = f(v_{n,4}) = 2, \\ f(v_{n-1,4}) = f(v_{n,3}) = f(v_{n-1,2}) = 0. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{C_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_4}$=$\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4} - \{v_{n,2}, v_{n-1,4}, v_{n,4}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}\}$ d'ordre $n^{'} = n-2 \equiv 1(mod 2)$. II découle de l'hypothèse d'induction que $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_4}) \geq 4n^{'}+2$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{C_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_4}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1, 2, 3, 4$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{C_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_4}$ de poids $w(f) - 10$. D'après le Lemme **??** $4n+2 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4}) = w(f) = w(g) + 10 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n-2}}\Box\overrightarrow{C_4}) + 10 = 4(n-2) + 10 = 4n+4$ d'où on a une contradiction. Donc, $f(v_{n,1}) = 2$ et

$$\begin{cases} f(v_{n,2}) = f(v_{n-1,1}) = f(v_{n-1,3}) = f(v_{n,4}) = 0, \\ f(v_{n-1,2}) = f(v_{n,3}) = f(v_{n-1,4}) = 2. \end{cases}$$

Soit $\overrightarrow{C_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_4}$=$\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4} - \{v_{n,2}, v_{n,1}, v_{n-1,3}, v_{n-1,2}, v_{n,3}, v_{n-1,1}, v_{n-1,4}, v_{n,4}\}$ d'ordre $n^{'} = n - 2 \equiv 1(mod 2)$ par l'hypothèse d'induction $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_4}) \geq 4n^{'}+2$. On définit la fonction $g : V(\overrightarrow{C_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_4}) \to \{0, 1, 2, 3\}$ par $g(v_{i,j}) = f(v_{i,j})$ pour $i = 1, \ldots, n^{'}$ et $j = 1, 2, 3, 4$. II est clair que g est une FDRD de $\overrightarrow{C_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_4}$ de poids $w(f) - 8$. Donc $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4})$=$w(f) = w(g) + 8 \geq \gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n^{'}}}\Box\overrightarrow{C_4}) + 8$= $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_{n-2}}\Box\overrightarrow{C_4}) + 8 = 4n+2$ Par conséquent $\gamma_{dR}(\overrightarrow{C_n}\Box\overrightarrow{C_4}) \geq 4n+2$.

■

Proposition 3.9.4 *Pour tout nombre entier positif $n \geq 2$ et $m \geq 3$*

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{P_m}) = \lceil\tfrac{(2m+1)n+m-3}{2}\rceil.$$

Proposition 3.9.5 *Pour tout nombre entier positif $n \geq 2$ et $m \geq 3$*

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{C_m}) = \begin{cases} \frac{(2n+1)m}{2} & si\ m\ : pair, \\ \lceil\frac{(2m+1)n+m-3}{2}\rceil & sinon\ . \end{cases}$$

Proposition 3.9.6 *Pour tout nombre entier positif $n \geq 2$ et $m \geq 3$*

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{C}_n\Box\overrightarrow{C_m}) = \begin{cases} \frac{(2n+1)m}{2} & si\ m\ : pair; n\ : impair, \\ \frac{(2m+1)n+m-2}{2} & si\ m\ : impair; n\ : impair, \\ \frac{(2m+1)n}{2} & si\ n\ : pair; m\ : impair, \\ nm & si\ m\ : pair; n\ : pair. \end{cases}$$

Conclusion et Perspectives

Dans ce mémoire, on a abordé le thèmes de recherche, à savoir la romaine domination double dans les digraphes. Dans un premier lieu, on a commencé par donner des valeurs exactes du nombre de domination romaine double pour quelques classes spéciales de graphes orientés, à savoir les chemins, les circuits et les produits cartésiens (les grilles, les prismes). Puis, nous avons caractérisé quelques classes spéciales de graphes orientés à savoir les arbres orientés atteignant cette borne supérieure $\gamma_{dR}(D) \leq 2(n - \triangle^+(D)) + 1$. Les travaux réalisés durant ce mémoire, ouvrent plusieurs perspectives, et nous proposons quelques problèmes.

- Montrer que pour tous les entiers positifs $n \geq 2$ et $m \geq 3$:

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P_n}\Box\overrightarrow{P_m}) \leq \begin{cases} \frac{(2m+1)n+m-2}{2} & \text{si } n+m \equiv 0(mod2), \\ \frac{(2m+1)n+m-3}{2} & \text{si } n+m \equiv 1(mod2). \end{cases}$$

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{P}_n\Box\overrightarrow{C_m}) \leq \begin{cases} \frac{(2n+1)m}{2} & \text{si m } : pair, \\ \lceil\frac{(2m+1)n+m-3}{2}\rceil & \text{sinon .} \end{cases}$$

$$\gamma_{dR}(\overrightarrow{C}_n\Box\overrightarrow{C_m}) \leq \begin{cases} \frac{(2n+1)m}{2} & \text{si m } : pair; \text{n } : impair, \\ \frac{(2m+1)n+m-2}{2} & \text{si m } : impair; \text{n } : impair, \\ \frac{(2m+1)n}{2} & \text{si n } : pair; \text{m } : impair, \\ nm & \text{si m } : pair; \text{n } : pair. \end{cases}$$

Bibliographie

[1] X. Chen, G. Hao and Z. Xie, " A note on Roman domination of Digraphs ". Discussiones Mathematicae Graph Theory (39) 13-21 (2019) doi:10.7151/dmgt.2067.

[2] M. Kamaraj, P. Jakkammal, "Roman domination in Digraphs,"submitted. .

[3] C. Lee, " On the domination number of a digraph ". Ph.D. Dissertation, Michigan State University (1994).

[4] J. Ghosal, R. Laskar, and D. Pillone, " Topics on dominationin directed graphs "," In DominationinGraphs ". Haynes, T.W.,Hedetniemi. S. T. Slater and P.J., editors. Marcel Dekker, Inc. New York, 401 - 437 (1998).

[5] G.Hao,X.Chen and L.Volkmann," Double Roman domination of digraphs ". Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. Volume 42,Issue 5,pp 1907-1920(2019).

[6] L. Ouldrabah, M. Blidia, A. Bouchou, " Extremal digraphs for an upper bound on the double Roman domination number " , Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. Article First Online: 05 February (2019).DOI:https://doi.org/10.1007/s40840-019-00735-7.

[7] E.J. Cockayne and S. T. Hedetniemi, Towards a theory of domation in graphs, Networks (7),247-261 (1977).

[8] J. F. Fink, M.S. Jacobson, " n-domination in graphs ". In Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science,. New York, 283-300 (1985).

[9] J. Ghoshal, R. Laskar and D. Pillone, Topics on domination in directed graphs, in domination in graphs: Advanced topics, T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater (eds), Marcel Dekker, New York, 401-437, (1998).

[10] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater," Fundamentals of domination in graphs ". Marcel Dekker, New York, (1998).

[11] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater," domination in graphs: Avanced topics ". Marcel Dekker, New York, (1998).

[12] S. K. Merz and D.J. Stewart, " Gallai-type theorems and domination in Digraphs and tournaments ". Congressus Numerantium, (15), 431-41 (2002).

[13] C. F. Jaenisch, Applications de l'analyse mathématique au jeu des echecs, Petrograde (1862).

[14] O. Ore," Theory of graphs ". Amer. Soc. Colloq. Pub 38, Providence, R.I. (1962).

[15] C. Berge, " The Theory of Graphs and Its Applications ". John Wiley et Sons, New York, NY (1962).

.