RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DR.YAHIA FARÈSE DE MÉDÉA
FACULTÉ DES SCIENCES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE ET L'INFORMATIQUE



MÉMOIRE

présenté en vue de l'obtention du

DIPLÔME DE MASTER EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Analyse et Modélisation Mathématique

par :

KESSAGHLI Ibtissem

Titre :

La quasiconvexité en calcul des variations

Soutenu publiquement, le 07 septembre 2017, devant le jury composé de :

MAALOUM K.	Maître Assistant à UYFM	Président
MEKDACHE N.	Maître Assistant à UYFM	Examinateur
BOKHARI A.	Maître Assistant à UYFM	Examinateur
LEGHMIZI M.L.	Maître de Conférences à UYFM	Directeur de mémoire

Année Universitaire : 2016/2017

Dédicace

♡

♠♠*Je dédie ce modeste travail*

avec une grande émotion

aux êtres les plus chères :

mon mari ***SALIM*** *et mes enfants* ***WASSIM*** *et* ***ABDOLAH***

mon père , ma mère et mon beau père , ma belle-mère qui ont fait de moi

ce qui je suis aujourd'hui et qui ont veillé de guider mes pas durant tout ma vie

à mes frères et mes sœurs pour leurs soutiens et leurs encouragements

à toute ma famille, à tous mes amis sans cité les noms

à tous mes enseignants, du primaire au niveau supérieur

à toutes les personnes qui m'ont encouragé

et soutenu de prés ou de loin durant

la réalisation de ce travail ♠♠

♡

KESSAGHLI IBTISSEM

Remerciements

Je tiens avant tout à,
rendre grâce à ***ALLAH****,*
le tout puissant qui m'a donnée la patient,
la volenté et le courage pour bien achever mes études.
J'exprime ma gratitude et mes remerciments à mon directeur de mémoire monsieur
LEGHMIZI Mohamed Lamine
pour son encouragement, son aide et son suivi pour terminer ce travail.
Je tiens à remercier également les membres de
jury pour avoir accepter d'examiner ce mémoire.
Mes remerciements les plus sincères sont
adressés à nos enseignants, qui ont
contribué durant nos études à
ma formation et tous les
enseignants de l'Université
DR. YAHIA FARES de Médéa.
Enfin, merci à ma famille ,
je tiens également à remercier toutes
les personnes qui m'ont aidé de loin ou de près
à la finalisation de ce modeste travaille.

Résumé

Une des conditions d'éxistence de solution des problèmes variationnelles en calcul des variations (cas vectoriel) est la quasiconvexité. Ce travail s'articule autour de la notion de quasiconvexité et ses appliquations aux problèmes de minimisation de fonctionnelles intégrales.

Abstract

One of existence conditions to solve variational problems in calculating variations (Vectorial case) it's the quasiconvexity.this work depend around the notion of quasiconvexity and their applications for minimization of functional integral.

Table des matières

1 Rappels et outils de base **11**

1.1 Espaces L^p . . . 11

1.1.1 Convergence forte et faible dans les espaces L^p . . . 11

1.2 Espaces de Sobolev . . . 12

1.2.1 Convergence forte et faible dans les espaces $W^{1,p}$ . . . 13

1.2.2 La relation entre convergence forte et faible dans les espaces $W^{1,p}$ . . . 13

1.3 la semi continuité inferieur . . . 13

1.4 Méthode directe en calcul des variations . . . 14

2 La quasiconvexité **15**

I Analyse convexe **16**

2.1 Fonction et ensemble convexe . . . 16

2.2 Inégalité de Jensen . . . 16

2.3 Enveloppe convexe . . . 17

2.4 Enveloppe semi-continue inferieure . . . 18

2.5 Transformé de Legendre et la dualité . . . 18

II Analyse quasiconvexe **20**

2.6 Définitions et propriétés . . . 20

2.7 Enveloppe quasiconvexe . . . 24

2.8 Formule de Dacorogna . . . 24

2.9 Condition nécessaire et suffisante de Morrey . . . 25

3 La relaxation **26**

3.1 Introduction 26

3.2 Théorèmes de relaxation 28

3.3 Exemple d'application 30

Notations et symboles

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par

- $\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.
- $W^{m,p}(\Omega)$: espace sobolev.
- Ω : Ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
- $\overline{\Omega}$: La fermeture de Ω, $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$.
- $\langle ., . \rangle$: Produit scalaire.
- $\|.\|$: La norme.
- $\longrightarrow$ Convergence forte .
- $\rightharpoonup$ Convergence faible .
- $\overset{*}{\rightharpoonup}$ Convergence faible * .
- $D^\alpha = \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1} \partial^{\alpha_2} ... \partial^{\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$.
- $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.n$: La dérivée normale extérieure à $\partial\Omega$.

- p.p : Presque partout.

- i.e : signifie.

- $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n})^t$.

- $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, Δ : opérateur de Laplace.

Introduction

Le calcul des variations est un sujet classique des mathématiques. De nombreux mathématiciens et parmis les plus célèbres, ont contribué à son étude au cours des dernières décennies. Il reste à l'heure actuelle un sujet trés vivant et en pleine évolution. Le but essentiel des calculs des variations est l'étude de l'existence de solutions d'un problème de minimisation de fonctionnelles intégrales associées à l'énergie

$$F(u) = \int_{\Omega} f(\nabla u(x))\, dx, \tag{1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, lorsque $u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Ce type de problème est motivé par des problèmes en mécanique et particulièrement en élasticité non-linéaire. En fait, si $N = m = 3$, Ω représente la référence de configuration occupée par un matériau élastique et F est l'énergie associée de densité f.

La quasiconvexité a été introduite par Morrey en 1952 (voir [13]) pour garantir la semi-continuité inférieure faible de la fonctionnelle intégrale (1). C'est une notion qui généralise la convexité dans le cas vectoriel et une condition nécéssaire et suffisante pour que la fonctionnelle non-linéaire associée soit faiblement semi-continue inférieurement. En pratique, il est difficile de vérifier qu'une fonction est quasiconvexité puisque cette notion n'étant pas locale (voir [12]). A cet effet, on est amené à étudier d'autres notions, telles que la polyconvexité et la rang-1-convexe.

Le mémoire est composé essentiellement de trois chapitres. Dans le chapitre1, on rapelle l'essentiel des notions de base d'analyse fonctionnelle appliquée et les résultats utilisés tout au long de ce travail.

la deuxième partie est consacré à l'analyse quasiconves. On rappelle les notions d'analyse convexe classique (fonction et ensemble convexe ; enveloppe convexe). On donnera la définition de la quasiconvexité ainsi que les définitions de la polyconvexité et la rang1-convexité. On terminera cette partie par un rappel de la condition nécéssaire et sufisante pour la semi-continuité inférieure de

fonctionnelles intégrales en calcul des variations.

La dernière partie est une application de la quasiconvexité dans les problèmes de relaxation de fonctionnelles intégrales de type (1). Autrement dit, on étudie le problème d'exitence de solutions par une approche possible au cas où la fonctionnelle F n'est pas semi-continue inférieure. La relaxation permet, dans ce cas, de trouver des solutions généralisées au problème associé.

Chapitre 1

Rappels et outils de base

1.1 Espaces L^p

Définition 1.1.1 *Soient $p \in \mathbb{R}$ tel que $1 \leq p \leq +\infty$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ muni de la mesure de Lebesgue dx. L'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est défini par :*

$$\begin{cases} L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \quad mesurable, \ \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty\right\}, & si \ 1 \leq p < \infty \\ L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \quad mesurable, \ \sup_{x\in\Omega} ess|u(x)| < +\infty\}. \end{cases}$$

Où $\sup_{x\in\Omega} ess|u(x)| = \inf\{c > 0; \ |u(x)| \leq c \quad p.p. \ dans \ \Omega\}$.

Cet espace muni de la norme :

$$\begin{cases} \|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, & si \ 1 \leq p < \infty, \\ \|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} ess \, |u(x)|. \end{cases}$$

est un espace de Banach.

1.1.1 Convergence forte et faible dans les espaces L^p

Définition 1.1.2 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. On dit que u_n converge (fortement) vers u dans L^p, et on note $u_n \to u$ L^p, si u_n, $u \in L^p$ et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_{L^p} = 0.$$

Définition 1.1.3 *Soit $1 \leq p < +\infty$. On dit que u_n converge faiblement vers u dans L^p, et on note $u_n \rightharpoonup u$ L^p, si u_n, $u \in L^p$ et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (u_n(x) - u(x))\, v(x)dx = 0,\ \forall v \in L^{p'}(\Omega) \quad avec \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Définition 1.1.4 *On dit que u_n converge faible * vers u dans L^∞, et on note $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ L^∞, si u_n, $u \in L^\infty$ et si*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega (u_n(x) - u(x))\, v(x)dx = 0,\ \forall v \in L^1(\Omega).$$

Remarque 1.1.1 *La convergence forte dans L^p implique la convergence faible dans L^p, pour $1 \leq p \leq +\infty$.*

1.2 Espaces de Sobolev

Soit un entier $n \geq 1$, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, pour tout entier $m \geq 0$ et pour tout nombre réel p, $1 \leq p \leq \infty$. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), D^\mu u \in L^p(\Omega), \forall |\mu| \leq m \right\}$$

cet espace muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \max\limits_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{si } p = \infty \end{cases} \tag{1.1}$$

est un espace de Banach.

On peut montrer que la norme

$$|u|_{m,p} = \begin{cases} \sum\limits_{0\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sum\limits_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

est une norme équivalent à la précédente

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$ et séparable pour $1 \leq p < \infty$. Nous utilisons également les semi-normes suivantes associées aux normes (1.1)

$$|u|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \max\limits_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

Dans le cas particulier $p = 2$, on note $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$. L'espace $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\mu| \leq m} (D^\mu u, D^\mu v)_{L^2(\Omega)}$$

est un espace de Hilbert.

Le dual topologique de $W^{m,p}(\Omega)$ est noté par $W^{-m,p'}(\Omega)$. L'espace de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$ est la fermeture de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $W^{m,p}(\Omega)$.

1.2.1 Convergence forte et faible dans les espaces $W^{1,p}$

Définition 1.2.1 *On dit que u_n converge fortement vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$, si $u_n \to u$ L^p, et $\nabla u_n \to \nabla u$ L^p. On note alors $u_n \to u$ $W^{1,p}$.*

Définition 1.2.2

- *Soit $1 \leq p < +\infty$. On dit que u_n converge faiblement vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$, si $u_n \rightharpoonup u$ L^p, et $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u$ L^p. On note alors $u_n \rightharpoonup u$ $W^{1,p}$.*
- *On dit que u_n converge faible * vers u dans $W^{1,\infty}(\Omega)$, si $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ L^∞, et $\nabla u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \nabla u$ L^∞. On note alors $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ $W^{1,\infty}$.*

1.2.2 La relation entre convergence forte et faible dans les espaces $W^{1,p}$

Théorème 1.2.1 *soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné lipschitzien et $1 < p < \infty$.*

$$si \quad u_n \rightharpoonup u \quad ds \quad W^{1,p} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n \rightharpoonup u \quad ds \quad L^p \\ et \\ \nabla u_n \rightharpoonup \nabla u \quad ds \quad L^p \end{cases}$$

de plus, $u_n \longrightarrow u \quad ds \quad L^p$ pour une sous-suite prés .

$$si \quad p = \infty \quad u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad ds \quad W^{1,\infty} \Rightarrow u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad ds \quad L^\infty$$

1.3 la semi continuité inferieur

Définition 1.3.1 *On dit que I est semi continuité inferieur (sci) dans $W^{1,p}(\Omega)$, si pour toute suite $u_n \rightharpoonup u \;\; ds \;\; W^{1,p}$ alors*

$$\liminf_{n \longrightarrow \infty} I(u_n) \geq I(u)$$

si $p = \infty$ on dit que I est étoile semi continu inferieur dans $W^{1,\infty}(\Omega)$, si la même inégalité tient pour chaque suite $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ ds $W^{1,\infty}$

1.4 Méthode directe en calcul des variations

Soit $M^{n\times N}$ l'espace des matrices à N lignes et n colonnes avec $N, n > 1$. De façon générale le calcul des variations vise à minimiser des fonctionnelles intégrales du type :

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))dx$$

Òu $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné et $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times M^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est l'intégrande, lorsque $u : \Omega \longrightarrow M^n$ satisfait une condition au bord du type $u = u_0$ sur $\partial\Omega$ et d'écrit un espace de Banach X (réflexif) sur lequel F et la condition au bord ont un sens.
Pour traiter ce type de problème de minimisation on utilise la méthode directe en calcul des variations qui consiste à vérifier les trois points suivants :

- $I := \{u \in X : u = u_0 sur \partial\Omega\}$ est non vide et E est minorée sur I, assurant ainsi que $-\infty < \alpha = \inf\{F(u) : u \in I\}$
- il existe une suite $\{\overline{u}_n\}_{n\geq 1}$ minimisante pour E dans I, i.e $\{\overline{u}_n\}_{n\geq 1} \subset I$ et $\lim_{n\longrightarrow+\infty} F(\overline{u}_n) = \alpha$ telle que,à une sous-suite prés, $\overline{u}_n \rightharpoonup \overline{u} \in I$ et $\overline{u} = u_0$ sur $\partial\Omega$
- E est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement (sfsci) dans X, i.e, $E(u) \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} E(u_n)$ pour $u_n \rightharpoonup u$ dans X

On a alors Ąu $\overline{u} \in I$ et $E(\overline{u}) \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} E(\overline{u_n}) = \alpha$, i.e., Ąu $\overline{u}$ est un minimiseur de E sur I.

La methode directe du calcul des variations se résume donc à
Semicontinuite inferieure + Coercivite ⇒ Existence de minimiseur(s)

Chapitre 2

La quasiconvexité

I Analyse convexe

Nous commençons avec le cas scalaire où $n = 1$ ou $N = 1$. Le premier correspond au cas d'une variable indépendante simple et est beaucoup plus facile à s'occuper, en particulier du point de vue de régularité. Le deuxième cas, $n > N = 1$, implique des dérivées partielles et est considérablement plus dur . Cependant, depuis les deux utilisation de cas d'une façon significative beaucoup de résultats d'analyse convexe, nous commençons avec l'étude de ce sujet classique.

2.1 Fonction et ensemble convexe

Définition 2.1.1 — $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *est convexe si pour toute x,y*$\in \Omega$,*et pour toute* $\lambda \in [0,1]$ *alors* $\lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$

— *soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un convexe .alors*$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *est dite convexe si* $\forall x, y \in \Omega, \forall \lambda \in [0,1]$ *on a* $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

2.2 Inégalité de Jensen

Théorème 2.2.1 *soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné ,*$u \in L^1(\Omega)$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *convexe tel que* $f \circ u \in L^1(\Omega)$,*alors*

$$f(\frac{1}{mess\Omega}\int_\Omega u(x)dx) \leq \frac{1}{mess\Omega}\int_\Omega f(u(x))dx.$$

voir [6]

2.3 Enveloppe convexe

Pendant que s'occupant des fonctions convexes, il est convenable de permettre les fonctions à prenez des valeurs infinies, donc nous considérons toujours des fonctions $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{^{\pm}\infty\}$ Cependant, depuis les fonctions convexes prenant la valeur $-\infty$ sont assez spéciaux et menez aux difficultés de notation, telles que $\infty - \infty$, nous considérons surtout des fonctions de la forme $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition 2.3.1 *soit $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ Alors l'enveloppe convexe de f, noté par Cf , est la plus grande fonction convexe minorant f.*

Remarque 2.3.1

— *Autrement l'envloppe convexe de f est donné par : pour chaque $x \in \mathbb{R}^N$, ona*

$$Cf(x) = sup\{g(x) : g \leq f \quad et \quad gconvex\}.$$

— *Cf peut prendre la valeur $-\infty$ quelque soit $f > -\infty$. Un moyen facile pour éviter cette situation doit supposer qu'il éxiste $a \in \mathbb{R}^N et \alpha \in \mathbb{R}$ telle que*

$$f(x) \geq \langle a, x\rangle + \alpha \qquad pourtoutex \in \mathbb{R}^n$$

Une conséquence immédiate de théorème de Carathéodor est la caractérisation suivante de l'enveloppe.

Théorème 2.3.1 *soit $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et, pour toute $x \in \mathbb{R}^N$,*

$$Cf(x) = sup\{g(x) : g \leq f \quad et \quad g \quad convex\}.$$

on suppose que $Cf(x) > -\infty$ Alors

$$Cf(x) = \inf\{\sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i f(x_i) : \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i x_i = x, \alpha_i \geq 0 avec \sum_{i=1}^{N+1} \alpha_i = 1\}$$

2.4 Enveloppe semi-continue inferieure

Définition 2.4.1 *soit $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. L'enveloppe semicontinue inférieure de f , noté par $\overline{f}$, est le plus grand fonction semi continue inférieure qui minorant f.*

Théorème 2.4.1 — *nous pouvons écrire, pour chaque $x \in \mathbb{R}^N$,*

$$\overline{f}(x) = sup\{g(x) : g \leq f \quad et \quad g \quad semicontinue \quad infrieure\}.$$

— *Une autre façon de réécrire la fonction $\overline{f}$ est*

$$\overline{f}(x) = \inf_{\{x_n\}} \liminf_{x_n \longrightarrow x} f(x_n)$$

2.5 Transformé de Legendre et la dualité

Nous introduisons maintenant les notions de dualité et bidualité , suite à Fenchel et Moreau . Ces notions jouent un rôle trés important dans l'analyse convexe

Définition 2.5.1 *soient $\langle ., . \rangle$: Produit scalaire. dans $\mathbb{R}^N$ et*

$$f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

avec $f \not\equiv +\infty$

1. *la fonction $f^* : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définit par*

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\}$$

est appelé la fonction conjuguée ou duale de f

2. *la fonction $f^{**} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{^{\pm}\infty\}$ définit par*

$$f^{**}(x) = \sup_{x^* \in \mathbb{R}^N} \{\langle x, x^* \rangle - f^*(x*)\}$$

est appelé la fonction biconjuguée ou biduale de f

Remarque 2.5.1 — *En général, le bidual f^{**}, aussi bien que Cf. , peut prendre la valeur $-\infty$ même bien que f ne soit jamais $-\infty$.*

— *Si $f \equiv +\infty$, donc $f^* \equiv -\infty$ et $f^{**} \equiv +\infty$.*

Nous avons quelques propriétés importantes de ceux-ci fonctions, comme établi par Fenchel et Moreau

Théorème 2.5.1 *soit$f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ Alors on a les déclarations suivantes*

(i) *f^* est convexe et semicontinu inférieur .*

(ii) *Si f est convexe et semicontinu inférieur , donc $f^* \equiv +\infty$.*

(iii) *on a Les inégalités suivantes :*

$$f^{**} \leq Cf \leq f$$

. De plus, si Cf est semicontinu inférieur et $Cf > -\infty$, donc

$$f^{**} = Cf.$$

en particulier, si f est convexe et semicontinu inférieur, donc

$$f^{**} = Cf = f$$

(iv) *L'identité $f^{***} = f^*$ est toujours valide.*

Remarque 2.5.2 *Nous voyons donc que f^{**} est en même temps le convexe et l'enveloppe semi-continue inférieure de la fonction f, pendant que Cf. (respectivement $\overline{f}$) est seulement l'enveloppe convexe (respectivement l'enveloppe semicontinue inférieure) de f.*

II Analyse quasiconvexe

Dans cette partie on donnea la définition et les propriétés de la quasiconvexité.

nous rappelons que si $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$ on écrit :

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \dots & \xi_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_1^N & \dots & \xi_n^N \end{pmatrix} = (\xi_\alpha^i)_{1\leq\alpha\leq n}^{1\leq i\leq N}$$

en particulier si $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$ on ecrit :

$$\bigtriangledown u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u^1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u^N}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial u^N}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

2.6 Définitions et propriétés

Définition 2.6.1 *Soit $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction borélienne et localement integrable On dit que f est quasiconvexe si,*

$$\int_\Omega f(\xi + \nabla\varphi) \geq f(\xi) mess(\Omega)$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^{N\times n}, \quad \forall \ \Omega$ *domaine borné de* $\mathbb{R}^n$,$\forall \varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Définition 2.6.2 *On dit quef $: \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est rang-1 convexe si*

$$f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \leq \lambda f(\xi) + (1-\lambda) f(\eta)$$

pour toute $\lambda \in [0,1], \xi, \eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ tq $rang\{\xi - \eta\} \leq 1$

Définition 2.6.3 *On dit que* $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *est polyconvexe s'il existe*
$F : \mathbb{R}^{\tau(N\times n)} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *convexe tq* $f(\xi) = F(T(\xi))$ *ou* $T(\xi) = (\xi, adj_2\xi, ..., adj_{N\wedge n}\xi)$
dans la définition précédente ,adjξ *représente la matrice de tout les élements mineur s*s de la matrice* $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$, $2 \leq s \leq N \wedge n = min\{N, n\}$ *et* $\tau(N.n) = \sum_{s=1}^{N\wedge n} \sigma(s)$ *ou*
$\sigma(s) = \binom{N}{s}\binom{n}{s} = \frac{N!n!}{(s!)^2(N-s)!(n-s)!}$
on peut dire ausssi que $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *est polyconvexe si c'est une fonction convexe de tous les mineurs.*

Remarque 2.6.1

- *ces deux définitions s'étendent dans une manière franche à fonctions* $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. *Cependant ce n'est pas le cas pour la fonctions quasiconvexe . En ce moment, aucune bonne définition de quasiconvexité pour de telles fonctions est disponible. Ce fait est une forte source de difficulté quand s'occupant la définition de suite quasiconvexes.*
- *Dans tous les cas une fonction convexe est evidemment polyconvexe. Mais il existe des fonctions polyconvexes qui ne sont pas convexes : par exemple le determinant lorsque* $N = n \geq 2$.

Exemple 2.6.1

1. *si* $N = 1$ *ou* $n = 1$ *: alors une matrice de* $\mathbb{R}^{N\times n}$ *est en fait un vecteur (ligne ou colonne) et ses mineurs ne sont rien d'autre que ses coeffcients. la polyconvexite equivaut donc dans un tel cas a la convexite*
2. *si* $N = n = 2$ *: les seuls mineurs d'une matrice* 2×2 *etant ses coeffcients et son determinant, une fonction* $f : \mathbb{R}^{2\times2} \longrightarrow \mathbb{R}$ *sera polyconvexe si et seulement si il existe une fonction convexe* $g : \mathbb{R}^{2\times2} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall A \in \mathbb{R}^{2\times2}, f(A) = g(A, det(A))$$

Lemme 2.6.1 *soit* $\xi \in \mathbb{R}^{N.n}$ *et* $T(\xi) = (\xi, adj_2\xi, ..., adj_{N\wedge n}\xi)$*telle que* $N \wedge n = min\{N, n\}$

1. *Pour chaque* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{N.n}$ *avec le* $rang\{\xi, \eta\} \leq 1$ *et pour chaque* $\lambda \in [0, 1]$, *on a l égalite suivante :*

$$T(\lambda.\xi + (1-\lambda)\eta) = \lambda T(\xi) + (1-\lambda)T(\eta)$$

2. *Pour chaque* $D \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert borné, et* $\xi \in \mathbb{R}^{N.n}$,φ $inW_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^N)$
on a le résultat suivant :

$$T(\xi) = \frac{1}{mes(D)} \int_D T(\xi + \nabla\varphi)$$

Lemme 2.6.2 *soit* $(n, N \geq 1)$ *et soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné . soit* $t \in [0,1]$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ *avec* $rang\{\alpha - \beta\} = 1$.
soit u_ξ *telleque*

$$\nabla u_\xi(x) = \xi = t\alpha + (1-t)\beta, \qquad \forall x \in \overline{\Omega}$$

alors , pour toute $\xi > 0$ *,il éxiste* $u \in \overline{\Omega}$ *et des ouverts disjoints* $\Omega_\alpha, \Omega_\beta \subset \Omega$ *pour que*

$$\begin{cases} \mid mesD_\alpha - \lambda mesD \mid < \xi et \mid mesD_\beta - (1-\lambda)mesD \mid < \xi \\ u \equiv u_\xi \quad sur \quad \partial\Omega \quad et \quad \|u - u_\xi\|_{L^\infty} \leq \xi \\ \nabla u(x) = \begin{cases} \alpha \qquad if x \in \Omega_\alpha \\ \beta \qquad if x \in \Omega_\beta \end{cases} \\ dist(\nabla u(x), co\{\alpha, \beta\}) \leq \xi \qquad p.p \in \Omega \end{cases}$$

avec $co\{\alpha, \beta\} = [\alpha, \beta]$ *est le segment fermé adhérant* α *à*β.

Théorème 2.6.1 *soit* $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$.*alors*

$$fconvexe \Longrightarrow fpolyconvexe \Longrightarrow fquasiconvexe \Longrightarrow frang - 1convexe$$

. *if* $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. *alors*

$$fconvexe \Longrightarrow fpolyconvexe \Longrightarrow frang - 1convexe$$

.

voir [7]

Remarque 2.6.2

- *on a f polyconvexe* $\not\Longrightarrow$ *f convexe par exemple quand* $N = n = 2$, *la fonction* $f(\xi) = det(\xi)$ *est polyconvexe mais non convexe*
- *on a f quasiconvexe* $\not\Longrightarrow$*f polyconvexe .Cependant, il n'y a aucun exemple élémentaire de ce fait.*
- *le resultat est f rang-1 convexe* $\not\Longrightarrow$ *f quasiconvexe .est l'exemple fondamental de Sverak , qui est valide pour* $n = 2$ *et* $N = 3$. *Cependant c'est toujours un problème ouvert de savoir si f rang-1 convexe implique f quasiconvexe, quand* $N = 2$ *(ainsi, en particulier, le cas* $N = n = 2$ *est ouvert).*

Preuve 2.6.1 — *f convexe* $\Longrightarrow$ *f polyconvexe :*

triviale(cas scalaire toutes les notions sont equivalent)

— *f polyconvexe* $\Longrightarrow$ *f quasiconvexe :*

soit f est polyconvexe , alors il éxiste $F : \mathbb{R}^{\tau(N\times n)} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *convexe tq* $f(\xi) = F(T(\xi))$

on utilise lemme 2.6.1 *et inegalité de jensen on obtient :*

$$\frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega f(\xi + \bigtriangledown\varphi(x))dx = \frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega F(T(\xi + \bigtriangledown\varphi(x)))dx$$

$$\geq F(\frac{1}{mes\Omega}\int_\Omega T(\xi + \bigtriangledown\varphi(x))dx$$
$$= F(T(\xi)) = f(\xi)$$

— *f quasiconvexe* $\Longrightarrow$ *f rang*-1 *convexe :*

on veut trouvé que

$$f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \leq \lambda f(\xi) + (1-\lambda)f(\eta)$$

pour toute $\lambda \in [0,1], \xi, \eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ *tq* $rang\{\xi - \eta\} \leq 1$

soit $\varepsilon > 0$ *et on applique le lemme* 2.6.2 *. Nous trouvons donc des ouverts disjoints* $D_\xi, D_\eta \subset D$ *et* $\varphi \in W_0^{1,\infty}(D, \mathbb{R}^N)\}$ *telleque*

$$\begin{cases} \mid mesD_\xi - \lambda mesD_\eta \mid < \varepsilon et \mid mesD_\xi - (1-\lambda)mesD_\eta \mid < \varepsilon \\ \nabla\varphi(x) = \begin{cases} (1-\lambda)(\xi-\eta) & si \quad x \in D_\xi \\ -\lambda(\xi-\eta) & si \quad x \in D_\eta \end{cases} \\ \|\nabla\varphi\|_{L^\infty} \leq \gamma \end{cases}$$

ou $\gamma = \gamma(\xi, \eta, D)$ *est un constante independante à* ε *Nous pouvons utiliser alors la quasi-convexité de f pour arriver*

$\int_D f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta + \nabla\varphi(x))dx$
$= \int_{D_\xi} f(\xi)dx + \int_{D_\eta} f(\eta)dx + \int_{D-(D_\xi\cup D_\eta)} f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta + \nabla\varphi(x))dx$
$\geq f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta)mesD.$

En utilisant les propriétés de la fonction φ *et le fait que* φ *est arbitraire, nous avons effectivement obtenu que f est le rang-un convexe.*

— *f polyconvexe* $\Longrightarrow$ *f rang*-1 *convexe :*

soit $F : \mathbb{R}^{\tau(N\times n)} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *convexe tq* $f(\xi) = F(T(\xi))$

soit $\lambda \in [0,1]$ *et* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{N\times n}$ *telleque rang* $\{\xi - \eta\} \leq 1$ *alors*

$$f(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) = F(T(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta)) = F(\lambda T(\xi) + (1-\lambda)T(\eta))$$

$$\leq \lambda F(T(\xi) + (1-\lambda)F(T(\eta))$$
$$= \lambda f(\xi) + (1-\lambda)f(\eta)$$

Voir [7]

2.7 Enveloppe quasiconvexe

Soit :

$$f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

On définit :

$$f^{**} = \sup\{g \leq f : g \ \ convexe\},$$

$$Qf = \sup\{g \leq f : g \ \ quasiconvexe\},$$

ce sont respectivement l'enveloppe convexe et quasiconvexe On a :

$$f^{**} \leq Qf \leq f$$

Nous allons maintenant chercher à caractériser plus précisément enveloppe quasiconvexe de f

2.8 Formule de Dacorogna

Théorème 2.8.1 *Soit $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ localment borné et mesurable soit $g : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ quasiconvexe telle que*

$$f(\xi) \geq g(\xi) \ \ pour \ \ toute \ \ \xi \in \mathbb{R}^{N\times n}.$$

alors pour toute $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$

$$Qf(\xi) = \inf\{\frac{1}{mess(\Omega)}\int_\Omega f(\xi + \nabla\varphi)dx : \varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)\}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné. En particulier, l'infimum dans la formule est indépendant du choix de Ω et Qf est également localement lipschitzienne.

voir [7] page 271.

2.9 Condition nécessaire et suffisante de Morrey

Théorème 2.9.1 *soitf* : $\mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue. la fonctionnelle* $\varphi \in W^{1,\infty} \longmapsto I(\varphi,\Omega) = \int_\Omega f(D\varphi)$*est sci pour la topologie faible * quel que soit le domaine borné* Ω *si et seulement si* f *est quasiconvexe*

voir [7] .

Chapitre 3

La relaxation

3.1 Introduction

Pour recevoir des théorèmes d'existence pour le problème

$$(P) \qquad \inf\{I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \Delta u(x))dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)\}$$

il faut la quasiconvexité . Dans ce chapitre, nous étudions le cas où f est non quasiconvexe . Il est naturel alors de remplacer le problème (P) par le soi-disant problème relaxé

$$(QP) \qquad \inf\{\overline{I}(u) = \int_\Omega Qf(x, u(x), \Delta u(x))dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)\}$$

où Qf est l'enveloppe quasiconvexe de f Nous le montrons, même si f original n'est pas quasiconvexe et donc en général l'infimum de (P) n'est pas atteint, on a

$$\inf(P) = \inf(QP)$$

et avec un peu de condition de coercitivité supplémentaire, l'infimum de (QP) est atteint. Plus précisément, si $\overline{u}$ est une solution de (QP), donc existe là une suite minimisant u_n de (P) tel que

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup \overline{u} \quad dans \quad W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) \\ I(u_n) \rightharpoonup \overline{I}(\overline{u}) = \inf(P) = \inf(QP) \end{cases}$$

En d'autres termes, même si (P) n'a aucune solution dans $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$,on peut réfléchir les solutions de (QP) comme les solutions générale de (P), dans le sens du convergence faible .

Dans le cas N = n = 1, ce résultat a été prouvé par L. C. Young et ensuite généralisé par d'autres au cas scalaire, N = 1 ou n = 1, Notez-le dans ce contexte

$$Qf = Cf = f^{**}$$

où est Cf l'enveloppe convexe de f .
Le résultat pour le cas vectoriel ($Qf > Cf$) a été établi par Dacorogna , quand il y a aucun suite d'ordre inférieur.

3.2 Théorèmes de relaxation

Nous attirons maintenant notre attention au théorème de relaxation quand l'integrand dépend seulement sur les plus hauts termes d'ordre. Nous nous souvenons de notre problème de minimisation

$$(P) \qquad \inf\{I(u) = \int_\Omega f(\nabla u(x))dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)\}$$

où $1 \leq P \leq \infty$.
Nous définissons le problème relaxé associé à (P) par

$$(QP) \qquad \inf\{\overline{I}(u) = \int_\Omega Qf(\nabla u(x))dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)\}$$

Théorème

soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert . Soit $f : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable pour $1 \leq P < \infty$

$$g(\xi) \leq f(\xi)$$

et

$$\mid g(\xi) \mid, \mid f(\xi) \mid \leq \alpha_1(1+ \mid \xi \mid^p)$$

pour toute $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$ où $g : \mathbb{R}^{N\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ est quasiconvexe et $\alpha_1 > 0$ une constante, (si $p = \infty$ il est supposé que f soit localment borné et borné par g.)
soit

$$Qf(\xi) := \sup\{g(\xi) : g \leq fetg \quad quasiconvexe\}$$

enveloppe quasiconvexe de f
Alors

$$\inf(P) = \inf(QP)$$

pour toute $p \leq q \leq \infty$ et $u \in W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ il existe une suite $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset u_0 + W_0^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \qquad ds \quad L^q(\Omega, \mathbb{R}^N) \qquad pour \quad n \longrightarrow \infty$$

$$\int_\Omega f(\nabla u_n(x))dx \longrightarrow \int_\Omega Qf(\nabla u(x))dx \qquad pour \quad n \longrightarrow \infty$$

voir [7] page 416

Remarques

— cet théorème implique en particulier que si (QP) à un solution $\overline{u}$ alors il éxiste une suite minimisante $\{u_n\}$ pour (P) satisfaisant les conclusions de théorème . Inversement, comme chaque suite minimisant $\{u_n\}$ pour (P) est aussi une suite minimisant de (QP), alors,jusqu'à l'extraction d'un sous-suite ,$u_n$converge faiblement à la solution u de (QP) . Il devrait pensez, dans ce sens, que les solutions de (QP) sont des solutions généralisées de (P).

— dans le cas scalaire (QP) et (P^{**}) sont les mêmes problèmes où

$$(P^{**}) \qquad \inf\{I^{**}(u) = \int_\Omega f^{**}(x, u(x), \nabla u(x))dx : u \in u_0 + W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)\}$$

Cependant, ce n'est pas vrai dans le cas vectoriel, on a en général

$$\inf(P) = \inf(QP) > \inf(P^{**}).$$

par exemple , $N = n = 2$ $f(\xi) = (det(\xi))^2$,alors

$$f(\xi) = Qf(\xi) = (det(\xi))^2 > Cf(\xi) = f^{**}(\xi) \equiv 0$$

donc, en utilisant l'inégalité de Jensen nous avons, si $det(\nabla u_0) > 0$,

$$\begin{aligned}\inf(P) = \inf(QP) &> mess(\Omega)(\frac{1}{mess(\Omega)}\int_\Omega det(\nabla u_0(x))dx)^2 \\ &> 0 = \inf(P^{**})\end{aligned}$$

et l'infimum de (QP) est atteint

Preuve.

soit $\Omega = D = (0,1)^n$et u affine sur D .
il éxiste $\xi \in \mathbb{R}^{N\times n}$ telleque

$$\nabla u(x) = \xi \qquad pour \quad toute\ x \quad \in D$$

On cherche $\varphi_n \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ telle que

$$\int_D f(\xi + \nabla\varphi_n(x))dx \geq Qf(\xi) \geq \frac{-1}{n} + \int_D f(\xi + \nabla\varphi_n(x))dx$$

soit s(n) un nombre entier tel que $s(n) \longrightarrow \infty$ quand $n \longrightarrow \infty$ et satisfaisant

$$n\|\varphi_n\|_{L^\infty} \leq s(n)$$

Étendez φ_n par le périodicité, dans chaque variable, de D à $\mathbb{R}^N$ et

$$\psi_n = \frac{1}{s(n)}\varphi_n(s(n)x)$$

notez que $\psi_n \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ on definit

$$u_n := u + \psi_n$$

en utilisant le périodicité de ψ_n , nous avons

$$\int_D f(\xi + \nabla\psi_n(x))dx = \frac{1}{s^n}\int_{sD} f(\xi + \nabla\varphi_n(y))dy = \int_D f(\xi + \nabla\varphi_n(y))dy$$

nous avons montré effectivement que u_n a tous les propriétés ont exposé dans la partie 1, plus précisément, $u_n \in u + W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$

$$u_n \longrightarrow u \;\; ds \;\; L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N) \quad quand \;\; n \longrightarrow \infty$$

$$0 \leq \int_\Omega [f(\nabla u_n(x)) - Qf(\nabla u(x))]dx \longrightarrow 0 \quad quand \;\; n \longrightarrow \infty$$

3.3 Exemple d'application

On considère $n = N = 1$, $f(\xi) = \exp^{-|\xi|}$ et

$$(P) \quad \inf\{I(u) = \int_0^1 f(u'(x)) \;\; dx : u \in W_0^{1,1}(0,1)\} = m$$

Depuis $cf = Qf \equiv 0$ et par le théorème de relaxation on a

$$\inf(P) = \inf(QP) = 0$$

Cependant,,pour toute suite $\{u_\nu\}_{\nu=1}^\infty \subset W_0^{1,1}(0,1)$ telleque

$$\int_0^1 f(u'_\nu(x)) \;\; dx \longrightarrow \int_0^1 Qf(u'(x)) \;\; dx = 0 \quad \nu \longrightarrow \infty$$

et par inegalité de jensen on a

$$0 \leq \exp^{-\int_0^1 |\xi'_\nu| dx} \leq \int_0^1 \exp^{-|\xi'_\nu|} dx = \int_0^1 f(u'_\nu(x)) \;\; dx \longrightarrow 0$$

et par theoreme

$$\int_0^1 |u'_\nu| dx \longrightarrow \infty$$

alors

$$u_\nu \longrightarrow u \;\; ds \;\; L^\infty(0,1) \quad pour \nu \longrightarrow \infty$$

Voir [7].

Conclusion

Nous avons vu que pour l'existence de solution de problème variationnelle il faut étudié deux hypothèse la quasiconvexity et la coercivité.
nous avons étudier ici une approche possible au cas où la quasiconvexité est non satisfait alors le problèm variationnelle n'admet pas de solutions. toutes fois, nous avons présenter une méthode qui permet de trouver des solutions généralisé .

Bibliographie

[1] **ADAMS R. et FOURNIER J.,** *"Sobolev spaces"*.Second Edition, Academic Press, New York (2003).

[2] **ALIBERT J.J. et BERNARD D.,** "An example of quasiconvexe function that is not polyconvexe in two dimension", Arch. Rational Mech. Anal. 117 (1992), 155 166.

[3] **ANTOINE G. ,**"Modélisation et méthode numérique multi-echelles en élasticité non linéaire", HAL id :tel-00166171

[4] **BERNARD D. et MARCELLINI P.,** " Sur le problème de Cauchy-Dirichlet pour les système d'équation non linéaire du premier ordre ", C.R.Acad.Sci. Paris, t.323, Série I, (1996), 599-602.

[5] **BERNARD D. et MARCELLINI P.,** " théorème d'éxistence dans les cas scalaire et vectoriel pour les équation de Hamilton-Jacobi ", C.R.Acad.Sci. Paris, t.322, Série I, (1996), 237-240.

[6] **BERNARD D.,** "Remarque sur les notions de polyconvexité, quasiconvexité et convexité de rang-1", journal de math pures et app ,64 (1985), 403-438.

[7] **BERNARD D.,** "*Direct Methods in the Calculus of Variations"*, Second Edition, Applied Mathematical Sciences, 78, Springer, New York (2008).

[8] **BERNARD D.,** *"Introduction au calcul des variations"*, cahier math. de l'EPFL, Presses Polyt. Univ. Romandes, Lausanne (1992).

[9] **BENZONI-GAVAGE S.,** "Methode directe en calcul des variations , Quasiconvexité", le journal de math des élèves,volume 1(1995),No3.

[10] **BREZIS H.,** *"Analyse fonctionnelle : Théorie et application,"* Masson Paris New York Barcelon SaoPaulo, 1987.

[11] **CONTI S.,** " Quasiconvexe function incorporating volumetric constraints are rank-one convexe ", J. Math. Pures Appl. (9) 90, (2008), 15-30

[12] **KRISTENSEN J.,** " On the non-locality of quasiconvexity Ann. Inst. Henri. Poincaré anal. Non linéaire, section C, Vol. 16, nř1 (1999), 1-13.

[13] **MORREY C.B.,** " Quasi-convexity and the lower semicontinuity of multiple integrals. Pacific J. Math. 2 (1952), no. 1, 25–53.

[14] **PEDREGAL P. et VLADIMIR S.**"A note on Quasiconvexity and rank-one convexity for 2x2 matrices ",journal of convex analysis,volume5(1998),No1,107-117